QUATRIÈME CHAPITRE.

Espaces compacts.

§ 37. Notion de compacité.

I. Définition. Un espace est dit *compact* lorsque toute suite de points contient une sous-suite convergente[1]). Autrement dit: lorsque, pour tout ensemble infini A, on a

$$(1) \qquad A^{\backprime} \neq 0,$$

$A^{\backprime}$ désignant l'ensemble dérivé de A.

Le théorème classique de Bolzano-Weierstrass, d'après lequel toute suite bornée de nombres réels contient une sous-suite convergente, peut donc être énoncé comme suit:

1. *Tout intervalle $a \leqslant x \leqslant b$ est compact.*

Les espaces compacts peuvent être caractérisés de la façon suivante:

2. *Pour que l'espace soit compact, il faut et il suffit que chaque suite de points qui ne converge pas vers p contienne une sous-suite convergente qui ne converge pas vers p.*

En effet, si la suite $p_1, p_2, \dots$ ne converge pas vers p, elle contient — d'après une propriété générale des espaces $\mathcal{L}^*$ (vol. I, § 14, I, 3°) — une sous-suite $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots$ dont aucune suite partielle ne converge vers p. L'espace étant supposé compact, la suite $p_{k_1}, p_{k_2}, \dots$ contient une sous-suite convergente dont la limite est donc nécessairement distincte de p.

[1]) La définition de la compacité (pour les espaces $\mathcal{L}^*$) et plusieurs de ses propriétés ont été envisagées au § 14 (à partir du N° VIII).

Cette notion est due à M. Fréchet, Rendic. di Palermo **22** (1906), p. 6. Il est à remarquer que le terme „ensemble compact" est employé par différents auteurs dans un sens distinct de celui-ci, en entendant par ensemble compact un ensemble dont chaque suite de points contient une sous-suite convergente (mais pas nécessairement vers un point de l'ensemble considéré).

Reciproquement, l'espace étant supposé non-compact, soit $p_1, p_2, \ldots$ une suite de points dont aucune sous-suite n'est convergente. Évidemment cette suite ne satisfait pas à la condition du théorème (en désignant par p un point arbitraire de l'espace).

Une conséquence directe de la définition de la compacité est *l'invariance topologique* de cette notion. Autrement dit:

3. *Tout espace homéomorphe à un espace compact est compact.*

Plus encore: toute *image continue* (dans un sens) d'un espace compact est compacte (voir N⁰ VI, 1).

II. Rapports aux espaces complets. On démontre facilement (voir § 29, II et § 15, IX, 3) les deux théorèmes suivants:

1. *Tout espace (métrique) compact est complet*, c.-à-d. étant donnée une suite $p_1, p_2, \ldots$ pour laquelle à tout $\varepsilon > 0$ correspond un n tel qu'on a $|p_n - p_k| < \varepsilon$ pour tout $k > n$, — la suite $p_1, p_2, \ldots$ est convergente.

2. *Tout espace compact est totalement borné* (c.-à-d. qu'il se laisse décomposer pour tout $\varepsilon > 0$ en un nombre fini d'ensembles de diamètre $< \varepsilon$).

Le théorème qui suit caractérise les espaces compacts parmi les espaces complets.

3. *Pour qu'un espace complet soit compact, il faut et il suffit qu'il soit totalement borné.*

Admettons en effet que l'espace 1 est complet et totalement borné. Il se laisse décomposer, par conséquent, pour chaque n, en un nombre fini d'ensembles fermés:

$$1 = F_1^n + \ldots + F_{m_n}^n \quad \text{où} \quad \delta(F_i^n) < 1/n.$$

Soit A un ensemble infini arbitraire. Il s'agit de prouver l'inégalité I (1).

Il existe évidemment une suite d'entiers $k_1, k_2, \ldots$ tels que les ensembles de la suite

$$A \cdot F_{k_1}^1, \quad A \cdot F_{k_1}^1 \cdot F_{k_2}^2, \quad \ldots, \quad A \cdot F_{k_1}^1 \cdot F_{k_2}^2 \cdot \ldots \cdot F_{k_n}^n, \quad \ldots$$

sont infinis. En appliquant à la suite $F_{k_1}^1$, $F_{k_1}^1 \cdot F_{k_2}^2$, ... le théorème de Cantor (§ 30, II), on en déduit l'existence d'un point p qui appartient à tous les ensembles de cette suite. Ce point est un point d'accumulation de l'ensemble A, puisque la sphère de centre p et de rayon $1/n$ contient l'ensemble (non vide) $A \cdot F_{k_1}^1 \cdot \ldots \cdot F_{k_n}^p$. On a ainsi $p \in A^{\cdot}$.

4. *Tout espace compact est séparable.*

Car tout espace totalement borné est séparable (§ 15, IX, 4).

Remarque. On démontre que tout espace métrique non compact est homéomorphe à un espace non complet. L'espace compact peut donc être *caractérisé* par la condition, que tout espace métrique qui lui est homéomorphe est complet [1]).

III. Produits cartésiens. Sous-ensembles. On constate aussitôt que

1. *Tout sous-ensemble fermé d'un espace compact est compact.*

2. *Tout sous-ensemble compact d'un espace métrique est fermé et borné.*

En effet, si F est un ensemble non-fermé, F contient une suite convergente de points dont la limite ne lui appartient pas. Si F est non-borné, F contient une suite dont aucune suite partielle n'est convergente. Dans les deux cas, il existe dans F une suite de points qui ne contient aucune suite partielle convergente vers un point de F. L'ensemble F n'est donc pas compact.

3. *Le produit cartésien $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \ldots$ d'une suite (finie ou infinie) d'espaces compacts est un espace compact* [2]).

Tel est, en particulier, le cube à n dimensions $\mathcal{J}^n$, ainsi que le cube fondamental de Hilbert $\mathcal{J}^{\aleph_0}$.

Pour la démonstration, voir § 14, VIII, 4.

Les énoncés 1—3 impliquent le théorème suivant:

4. *Pour qu'un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{E}^n$ $(n < \aleph_0)$ soit compact, il faut et il suffit qu'il soit fermé et borné.*

Car un sous-ensemble borné de $\mathcal{E}^n$ est contenu dans un cube à n dimensions.

Le théorème suivant montre que l'étude des espaces métriques compacts n'est rien d'autre que l'étude des sous-ensembles fermés du cube fondamental de Hilbert.

[1]) V. Niemytzki et A. Tychonoff, *Beweis des Satzes, dass ein metrischer Raum dann und nur dann kompakt ist, wenn er in jeder Metrik vollständig ist* Fund. Math. **12** (1928), p. 118.

[2]) Une extension de ce théorème aux espaces bicompacts (cf. N⁰ V) est due à M. Tychonoff, *Über einen Funktionenraum*, Math. Ann. **111** (1935), p. 762. Voir p. ex. Lefschetz, *Algebraic Topology*, p. 19.

5. *Pour qu'un espace métrique soit compact, il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un sous-ensemble fermé du cube fondamental de Hilbert.*

En effet, en supposant que $\mathcal{X}$ est un espace métrique compact, $\mathcal{X}$ est séparable (d'après II, 4), donc $\mathcal{X}$ est en vertu du théorème d'Urysohn (§ 17, IV) homéomorphe à un sous-ensemble F de l'espace $\mathcal{I}^{\aleph_0}$. D'après I, 3 et III, 2, l'ensemble F est fermé.

Réciproquement, tout sous-ensemble fermé F de $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ étant compact (d'après 3 et 1), tout espace homéomorphe à F l'est également.

Les théorèmes qui suivent concernent les sous-ensembles d'un produit cartésien (voir § 24, X, 2):

6. *F étant un sous-ensemble fermé du produit cartésien $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, où $\mathcal{Y}$ est compact, la projection de F parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$ est un ensemble fermé (dans $\mathcal{X}$).*

Autrement dit: *F_y désignant l'ensemble $\underset{x}{E}[(x,y)\in F]$, l'ensemble-somme $\sum\limits_{y} F_y$ est fermé.*

En ce qui concerne les ensembles ouverts, on a le théorème suivant, symétrique au précédent:

7. *G étant un sous-ensemble ouvert du produit cartésien $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, où $\mathcal{Y}$ est compact, l'ensemble H de tous les x tels que $x\times\mathcal{Y}\subset G$ est ouvert (dans $\mathcal{X}$).*

Car l'ensemble H est le complémentaire de la projection de l'ensemble $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-G$ sur l'axe $\mathcal{X}$.

Le théorème 6 se laisse généraliser comme suit:

8. *S étant un ensemble F_σ situé dans $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}$ étant la somme d'une série d'ensembles compacts, la projection P de S parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$ est un ensemble F_σ.*

Posons $S=F_1+F_2+\dots$ et $\mathcal{Y}=Y_1+Y_2+\dots$, les ensembles F_n étant fermés et les Y_n compacts. En désignant par $P_{n,m}$ la projection de l'ensemble $\underset{xy}{E}[(x,y)\in F_n]\,[y\in Y_m]$, on a $P=\sum\limits_{nm} P_{n,m}$. Car

$$(x\in P)\equiv\sum_{y}[(x,y)\in S]\,[y\in\mathcal{Y}]\equiv\sum_{nm}\sum_{y}[(x,y)\in F_n]\,[y\in Y_m].$$

Les ensembles $P_{n,m}$ étant fermés d'après 6, P est un F_σ.

On déduit facilement des énoncés 6 et 7 le théorème suivant concernant l'application des opérations logiques aux espaces compacts (cf. § 24, X, 2):

9. *Soient $\mathcal{X}$ un espace métrique, $\mathcal{Y}$ un espace compact et $\varphi(x,y)$ une fonction propositionnelle définie sur le produit cartésien de ces espaces. Si l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\varphi(x,y)$ est fermé (resp. est un F_σ), l'ensemble $\underset{x}{E}\sum\limits_{y}(x,y)$ l'est également; si cet ensemble est ouvert (resp. un G_δ), l'ensemble $\underset{x}{E}\prod\limits_{y}(x,y)$ l'est également.*

Remarque. Rappelons que la projection d'un ensemble *ouvert* est un ensemble ouvert, quel que soit l'espace $\mathcal{Y}$ (§ 24, X). Cependant la projection d'un *ensemble* G_δ n'est pas nécessairement un ensemble G_δ. En effet, dans le cas où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ désignent l'intervalle 01, les projections des ensembles G_δ situés dans le carré $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ coïncident avec les ensembles analytiques (cf. § 34, IV).

IV. Théorèmes de Cantor et de Riesz. Au § 14, VIII, 2 nous avons établi le théorème classique suivant:

1. *Théorème de Cantor. Étant donnée, dans un espace compact, une suite descendante d'ensembles fermés non vides $F_1\supset F_2\supset\dots$, on a $F_1\cdot F_2\cdot\ldots\neq 0$.*

Le théorème suivant présente une généralisation du théorème de Cantor.

2. *Théorème de F. Riesz*[1]. *Étant donnée, dans un espace compact, une famille (de puissance arbitraire) d'ensembles fermés $\{F_\iota\}$ tels que le produit (c.-à-d. partie commune) de chaque système fini de ces ensembles est non vide, — le produit de tous les ensembles F_ι est non vide.*

D'après le th. de Lindelöf (§ 17, I, 1), il existe une suite infinie d'indices $\iota_1,\iota_2,\dots$ telle que

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_{\iota_n}=\prod_{\iota} F_\iota.$$

La suite F_{ι_1}, $F_{\iota_1}\cdot F_{\iota_2}$, $F_{\iota_1}\cdot F_{\iota_2}\cdot F_{\iota_3},\dots$ étant descendante et formée d'ensembles fermés et non vides (par hypothèse), le théorème de Cantor lui est applicable; d'où la conclusion demandée.

3. *Étant donnée, dans un espace compact, une suite d'ensembles non vides, la limite supérieure de cette suite est non vide.*

[1]) Atti del IV Congresso Int. d. Matem., Roma 1908, **2**, p. 21.

On a, en effet (§ 25, IV, 8):

$$\mathrm{Ls}\, A_n = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{A_n + A_{n+1} + \ldots}$$

En posant $F_n = \overline{A_n + A_{n+1} + \ldots}$, il vient $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \neq 0$ en vertu du th. 1.

Remarques. 1) Le th. de Cantor *caractérise* les espaces compacts (parmi les espaces métriques). En effet, un espace non compact contient une suite de points $p_1, p_2, \ldots$ dont aucune sous-suite n'est convergente. En désignant par F_n l'ensemble $(p_n, p_{n+1}, \ldots)$, on définit une suite d'ensembles satisfaisant aux hypothèses du th. de Cantor et dont le produit est vide.

2) En tenant compte du fait, que tout espace compact est complet et totalement borné, on peut déduire le th. de Riesz directement du corollaire du § 30, I, établi dans des hypothèses plus générales. Le th. de Cantor peut en être déduit sous la forme plus générale suivante:

Étant donnée, dans un espace complet, une suite descendante d'ensembles fermés, non vides et tels que $\lim_{n=\infty} \alpha(F_n) = 0$, *on a* $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \neq 0$, le coefficient $\alpha(F)$ désignant la borne inférieure des nombres ε pour lesquels F se laisse décomposer en un nombre fini d'ensembles de diamètre $< \varepsilon$.

3) Le th. de Cantor se laisse formuler *en termes logiques* comme suit:

Étant donnée une suite de fonctions propositionnelles $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$, *définies sur un espace compact et telles que* $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi_{n-1}(x)$ *et que l'ensemble* $F_n = \underset{x}{E}\, \varphi_n(x)$ *est fermé, — on a l'équivalence*

$$\text{(i)} \qquad \prod_n \sum_x \varphi_n(x) \equiv \sum_x \prod_n \varphi_n(x).$$

Supposons, en effet, qu'on a $\prod_n \sum_x \varphi_n(x)$, c.-à-d. qu'à tout n correspond un x_n tel que $\varphi_n(x_n)$. Cela revient à dire que $F_n \neq 0$. Par hypothèse $F_n \subset F_{n-1}$. Le th. de Cantor implique donc l'existence d'un point x commun à tous les F_n, c.-à-d. tel qu'on a $\prod_n \varphi_n(x)$. En termes logiques: $\sum_x \prod_n \varphi_n(x)$.

L'implication $\prod_n \sum_x \varphi_n(x) \rightarrow \sum_x \prod_n \varphi_n(x)$ se trouve ainsi établie. L'implication inverse est réalisée toujours (§ 2, IV).

V. Familles d'ensembles ouverts. Les deux théorèmes suivants jouent un rôle fondamental dans l'étude des espaces compacts:

1. *Théorème de Borel. Si un espace compact est somme d'une suite infinie d'ensembles ouverts, il est somme d'un nombre fini de termes de cette suite.*

2. *Théorème de Borel-Lebesgue* [1]). *Étant donnée, dans un espace compact, une famille (de puissance arbitraire) d'ensembles ouverts* $\{G_\iota\}$ *dont la somme est égale à l'espace tout entier, il existe dans cette famille un nombre* fini *d'ensembles dont la somme est égale à l'espace.*

Le th. de Borel étant évidemment un cas particulier du th. de Borel-Lebesgue, il suffit d'établir ce dernier [2]). Celui-ci est une conséquence du th. de Riesz (N° IV, 2). En effet, en supposant que le th. de Borel-Lebesgue soit en défaut et en désignant par F_ι le complémentaire de G_ι (c.-à-d. $F_\iota = 1 - G_\iota$), la famille $\{F_\iota\}$ satisfait aux hypothèses du th. de Riesz (on a $F_{\iota_1} \cdot \ldots \cdot F_{\iota_n} \neq 0$ puisque $G_{\iota_1} + \ldots + G_{\iota_n} \neq 1$), tandis que $\prod_\iota F_\iota = 0$ (puisque $\sum_\iota G_\iota = 1$). Cette contradiction donne la conclusion demandée.

Remarques. 1) Ce raisonnement [3]) montre que le th. de Borel-Lebesgue n'est qu'une autre forme du th. de Riesz. Il en est de même du rapport du th. de Borel au th. de Cantor.

2) Le th. 2 conduit à la formule suivante, symétrique à IV (i):

Étant donnée une suite de fonctions propositionnelles $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$, *définies sur un espace compact et telles que* $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi_{n+1}(x)$ *et que l'ensemble* $\underset{x}{E}\, \varphi_n(x)$ *est ouvert, on a l'équivalence*

$$\text{(ii)} \qquad \prod_x \sum_n \varphi_n(x) \equiv \sum_n \prod_x \varphi_n(x).$$

La formule (ii) peut être aussi déduite directement de (i) par l'application de la règle de de Morgan (§ 1, III).

---

[1]) Voir H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, Paris 1905, p. 105. Cf. W. H. Young, Proc. London Math. Soc. (1) **35** (1902/3), p. 384. Pour de nombreux renvois bibliographiques, voir T. H. Hildebrandt, *The Borel theorem and its applications*, Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1926), p. 423.

[2]) Une démonstration directe du th. 1 a été donnée au § 14, VIII, 3.

[3]) Voir S. Saks, *Sur l'équivalence de deux théorèmes de la Théorie des ensembles*, Fund. Math. **2** (1921), p. 1.

3) Les espaces topologiques (non nécessairement métriques) qui satisfont au th. de Borel-Lebesgue sont nommés *bicompacts*. Ils présentent une classe importante d'espaces abstraits[1]).

Nous allons déduire à présent quelques conséquences du th. de Borel-Lebesgue. D'abord — une généralisation:

3. *Étant donnés, dans un espace métrique arbitraire, un ensemble compact F et une famille d'ensembles ouverts $\{G_\iota\}$ tels que $F\subset\sum_\iota G_\iota$, il existe un système fini d'indices $\iota_1,\dots,\iota_n$ tels que $F\subset G_{\iota_1}+\dots+G_{\iota_n}$.*

Cet énoncé se déduit du th. 2 en considérant F comme l'espace et en substituant $F\cdot G_\iota$ à G_ι.

4. *La famille des sous-ensembles à la fois fermés et ouverts d'un espace compact est dénombrable.*

Soit, en effet, $R_1,R_2,\dots$ la base de l'espace. G étant un ensemble ouvert, on a donc

$$G=R_{k_1}+R_{k_2}+\dots$$

Si G est, en outre, fermé, cette série peut être réduite d'après 1 à un nombre fini de termes:

$$G=R_{k_1}+\dots+R_{k_n}.$$

Ainsi, à tout ensemble fermé-ouvert correspond un système fini d'entiers positifs $\sigma(G)=(k_1,\dots,k_n)$. Comme $\sigma(G)\neq\sigma(G_1)$ pour $G\neq G_1$, la famille des ensembles fermés-ouverts est de puissance au plus égale à celle des systèmes finis d'entiers positifs; elle est donc dénombrable.

5. *Soit $R_1,R_2,\dots$ la base d'un espace compact. A tout ensemble ouvert G correspond une suite d'ensembles $G_1,G_2,\dots$ telle que*

$$G=\sum_n G_n=\sum_n \overline{G}_n,\qquad \overline{G}_n\subset G_{n+1} \tag{1}$$

et à tout ensemble fermé F correspond une suite $H_1,H_2,\dots$ telle que

$$F=\prod_n H_n=\prod_n \overline{H}_n,\qquad H_n\supset \overline{H}_{n+1} \tag{2}$$

et que les ensembles G_n et H_n sont des sommes d'un nombre fini de termes de la suite $\{R_n\}$.

[1]) Voir P. Alexandroff et P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verh. K. Akad. Amsterdam **14** (1929). Cf. Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, chap. II, § 1.

Soit, en effet, $R_{k_1},R_{k_2},\dots$ une suite telle que

$$G=\sum_n R_{k_n}\quad\text{et}\quad \overline{R}_{k_n}\subset G.$$

Nous définirons les ensembles G_n à l'aide d'une suite d'entiers $m_1,m_2,\dots$ définie par induction comme suit: $m_1=1$ et pour $n>1$, m_n est le plus petit indice tel que $m_n\geqslant n$ et

$$\overline{R}_{k_1}+\overline{R}_{k_2}+\dots+\overline{R}_{k_{m_{n-1}}}\subset R_{k_1}+R_{k_2}+\dots+R_{k_{m_n}}.$$

L'existence de cet indice résulte directement du th. 3 (en remplaçant F par le membre gauche de l'inclusion précédente et la famille $\{G_\iota\}$ par la famille $\{R_{k_n}\}$). En posant

$$G_n=R_{k_1}+R_{k_2}+\dots+R_{k_{m_n}},$$

les formules (1) se trouvent réalisées.

La suite $H_1,H_2,\dots$ sera définie par induction comme suit. Soit S_n la sphère de centre F et de rayon $1/n$ (cf. § 15, IV). H_1 est la somme d'un nombre fini de termes de la base, contenus dans S_1 et qui recouvrent l'ensemble F (l'existence d'un recouvrement de ce genre résulte du th. 3). H_n est la somme d'un nombre fini de termes de la base: $H_n=R_{i_1}+R_{i_2}+\dots$ tels que

$$F\subset R_{i_1}+R_{i_2}+\dots,\qquad \overline{R}_{i_j}\subset H_{n-1},\qquad R_{i_j}\subset S_n.$$

Remarque. Le th. 5 conduit à l'application suivante aux fonctions de Baire: *si pour tout n, l'ensemble $f^{-1}(\overline{R}_n)$ est de classe multiplicative α, la fonction f est de classe α.*

Car les ensembles $f^{-1}(\overline{H}_n)$ sont aussi de classe α, et il en est de même de leur produit $f^{-1}(F)$.

Les deux théorèmes suivants concernent la *séparation* d'ensembles compacts.

6. *Soient A et B deux sous-ensembles compacts d'un espace $\mathfrak{X}$ et soit $\mathbf{G}$ une famille d'ensembles ouverts telle qu'à tout couple de points $a\in A$ et $b\in B$ correspond un $G\in\mathbf{G}$ pour lequel on a $a\in G$ et $b\in\mathfrak{X}-\overline{G}$. Il existe alors dans $\mathbf{G}$ un système fini d'ensembles G_j^i où $i=1,\dots,k$ et $j=1,\dots,l_k$ tels que*

$$A\subset G_1^1\cdot\ldots\cdot G_{l_1}^1+\dots+G_1^k\cdot\ldots\cdot G_{l_k}^k\quad et\quad B\cdot(\overline{G_1^1}\cdot\ldots\cdot\overline{G_{l_1}^1}+\dots+\overline{G_1^k}\cdot\ldots\cdot\overline{G_{l_k}^k})=0. \tag{3}$$

Soit, en effet, a un point fixe de A. Faisons correspondre à chaque $b \in B$ un $G(b) \in \boldsymbol{G}$ tel que $a \in G(b)$ et $b \in \mathcal{X}-\overline{G(b)}$. Les ensembles $\mathcal{X}-\overline{G(b)}$ étant ouverts et B étant compact, il existe d'après 3 un système fini $b_1,\dots,b_m$ tel que

$$B\subset[\mathcal{X}-\overline{G(b_1)}]+\dots+[\mathcal{X}-\overline{G(b_m)}]=\mathcal{X}-\overline{G(b_1)}\cdot\ldots\cdot\overline{G(b_m)}.$$

En d'autres termes: en posant

$$H_1(a)=G(b_1),\quad \dots,\quad H_{m(a)}(a)=G(b_m),$$

on a

$$a \in H_1(a)\cdot\ldots\cdot H_{m(a)}(a) \quad \text{et} \quad B\cdot\overline{H_1(a)}\cdot\ldots\cdot\overline{H_{m(a)}(a)}=0.$$

Posons $H(a)=H_1(a)\cdot\ldots\cdot H_{m(a)}(a)$. Les ensembles $H(a)$ étant ouverts et A étant contenu dans leur somme (lorsque a parcourt A), il existe d'après 3 un système fini $a_1,\dots,a_k$ tel que

$$A\subset H(a_1)+\dots+H(a_k).$$

En posant $G_j^i=H_j(a_i)$ et $l_i=m(a_i)$, on parvient aux formules (3).

7. *Soit $A_1,\dots,A_m$ un système fini d'ensembles compacts. $\boldsymbol{G}$ étant une famille d'ensembles ouverts tels que les conditions*

$$(4) \qquad A_r\cdot A_s=0, \quad x \in A_r, \quad y \in A_s$$

impliquent l'existence d'un $G \in \boldsymbol{G}$ pour lequel

$$(5) \qquad x \in G \quad \text{et} \quad y \in \mathcal{X}-\overline{G},$$

$\boldsymbol{G}$ contient une famille finie $\boldsymbol{G}^*$ jouissant de la même propriété.

Pour $m=2$, cet énoncé résulte du précédent en posant $A=A_1$ et $B=A_2$: $\boldsymbol{G}^*$ est alors la famille des ensembles G_j^i.

Par conséquent, si $A_r\cdot A_s=0$, il existe une sous-famille $\boldsymbol{G}_{r,s}$ de $\boldsymbol{G}$ telle qu'à tout couple $x \in A_r$, $y \in A_s$ correspond un $G \in \boldsymbol{G}_{r,s}$ vérifiant (5). Reste à poser $\boldsymbol{G}^*=\sum \boldsymbol{G}_{r,s}$, la sommation étant étendue à tous les r et s tels que $A_r\cdot A_s=0$.

8. *Étant donnés dans un espace compact un ensemble A de classe $\boldsymbol{F}_\sigma$ et une famille $\boldsymbol{G}$ d'ensembles ouverts tels que, pour tout $p \in A$ et tout $\varepsilon>0$, il existe un $G \in \boldsymbol{G}$ contenant p et de diamètre $<\varepsilon$, la famille $\boldsymbol{G}$ contient une suite d'ensembles $G_1,G_2,\dots$ telle que*

$$(6) \quad A\subset\sum_n G_n, \qquad (7) \quad \overline{\sum_n G_n}\subset\sum_n\overline{G}_n+\overline{A}.$$

Soit

$$(8) \qquad A=\sum_k F_k, \quad F_k=\overline{F}_k.$$

Posons $S_k=\underset{x}{E}[\varrho(x,A)\leqslant 1/k]$.

D'après 3, la famille $\boldsymbol{G}$ contient, pour chaque k, un système fini d'ensembles $G_1^k,\dots,G_{l_k}^k$ tel que

$$(9) \qquad F_k\subset G_1^k+\dots+G_{l_k}^k \quad \text{et} \quad G_i^k\subset S_k, \quad \text{où} \quad 1\leqslant i\leqslant l_k.$$

En rangeant les ensembles G_i^k, $1\leqslant i\leqslant l_k$, $k=1,2,\dots$, en une suite infinie $\{G_n\}$, on obtient la suite demandée. L'inclusion (6) est, en effet, une conséquence de (8) et (9). D'autre part, pour $m\geqslant k$, on a

$$G_i^m\subset S_m\subset S_k, \quad \text{d'où} \quad \overline{G}_n\subset S_k$$

pour n suffisamment grand. Par conséquent

$$\prod_n \overline{G_n+G_{n+1}+\dots}\subset S_k, \quad \text{d'où} \quad \prod_n \overline{G_n+G_{n+1}+\dots}\subset\prod_k S_k=\overline{A},$$

et l'identité

$$\overline{\sum_n G_n}=\sum_n\overline{G}_n+\prod_n\overline{G_n+G_{n+1}+\dots}$$

(cf. § 4, III, 10) donne l'inclusion (7).

VI. Transformations continues. Étant donnée une transformation continue f d'un espace compact $\mathcal{X}$ en l'espace $\mathcal{Y}=f(\mathcal{X})$ [1]), on a les trois théorèmes suivants:

1. *$f(\mathcal{X})$ est compact* [2]).

Par conséquent (cf. III, 2), *si F est fermé, $f(F)$ l'est également.*

Il en résulte directement (en vertu de § 13, IV (4)) que:

2. *Si la fonction f est biunivoque, elle est une homéomorphie* [3]).

[1]) L'hypothèse que l'espace $\mathcal{Y}$ est métrique peut être remplacée par une hypothèse moins restrictive (par exemple, que $\mathcal{Y}$ est un espace de Hausdorff ou un espace $\mathcal{L}$). Voir P. Alexandroff, *Über stetige Abbildungen kompakter Räume*, Math. Ann. **96** (1926), p. 556 et W. L. Ayres, *On continuous images of a compact metric space*, Fund. Math. **14** (1929), p. 334. Cf. aussi Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, p. 98.

[2]) Voir § 14, VIII, 5.

[3]) Voir § 14, VIII, 6.

De façon plus générale:

3. *A désignant l'ensemble des points de biunivocité de f* (c.-à-d. des points x tels que la condition $f(x)=f(x')$ entraîne $x=x'$), *la fonction partielle $f|A$ est une homéomorphie.*

Soient, en effet,

$$\lim_{n=\infty} y_n = y, \quad y_n = f(x_n), \quad x_n \in A, \quad y = f(x) \quad \text{et} \quad x \in A.$$

Il s'agit de prouver que $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ ou encore (cf. I, 2) que la condition $\lim\limits_{n=\infty} x_{k_n} = x'$ entraîne $x=x'$ (quel que soit la suite convergente $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$).

Or, l'égalité $\lim\limits_{n=\infty} x_{k_n} = x'$ entraîne $\lim\limits_{n=\infty} f(x_{k_n}) = f(x')$ et comme

$$\lim_{n=\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n=\infty} y_{k_n} = y = f(x),$$

il vient $f(x')=f(x)$. Mais, par hypothèse, $x \in A$. Donc $x=x'$.

Remarques. L'hypothèse de la compacité de l'espace $\mathscr{X}$ est *essentielle.* Ainsi, par exemple, la fonction $z=e^{ix}$ transforme de façon continue et biunivoque l'intervalle $0 \leqslant x < 2\pi$ en la circonférence $|z|=1$ du plan complexe.

Plus encore, *il existe* — comme le montre l'exemple qui suit — *deux ensembles A et B non homéomorphes et cependant tels que chacun d'eux est image continue et biunivoque de l'autre.*

A savoir, l'ensemble A se compose de tous les intervalles $3n < x < 3n+1$ et des points de la forme $3n+2$ (avec $n \geqslant 0$). B s'obtient de A en remplaçant le point 2 par le point 1 [1]).

La fonction f définie par les conditions:

$$f(x) = x \quad \text{pour} \quad x \neq 2 \quad \text{et} \quad f(2) = 1$$

transforme A en B de façon biunivoque et continue. La transformation de B en A est définie comme suit:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{pour } x \leqslant 1, \\[2mm] \dfrac{x}{2} - 1 & \text{pour } 3 < x < 4, \\[2mm] x - 3 & \text{pour } x \geqslant 5. \end{cases}$$

[1]) Voir ma note *Solution d'un problème concernant les images continues d'ensembles de points*, Fund. Math. **2** (1921), p. 158. On y trouvera aussi d'autres exemples (connexes, clairsemés).

4. *Tout espace compact (non vide) est image continue de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor* [1]).

Par conséquent (cf. 1), *la compacité équivaut à la propriété: être image continue de l'ensemble $\mathcal{C}$.*

Conformément à III, 5, il suffit de montrer que tout sous-ensemble fermé F du cube $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ est image continue de $\mathcal{C}$. Or, soit g une fonction continue qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ (cf. § 24 a, VI a). Posons $A = g^{-1}(F)$. L'ensemble A étant un sous-ensemble fermé de $\mathcal{C}$, il existe une transformation continue h de $\mathcal{C}$ en A (cf. § 21, II, 2). La fonction superposée $f = gh$ transforme donc $\mathcal{C}$ en F de façon continue.

Les deux énoncés suivants sont des conséquences du th. 1.

5. *Si $Y \subset f(\mathscr{X})$, on a* $\overline{Y} \subset f[\overline{f^{-1}(Y)}]$.

On a, en effet,

$$Y = ff^{-1}(Y) \subset f[\overline{f^{-1}(Y)}], \quad \text{d'où} \quad \overline{Y} \subset \overline{f[\overline{f^{-1}(Y)}]},$$

et d'après 1 (en posant $F = \overline{f^{-1}(Y)}$): $\overline{f[\overline{f^{-1}(Y)}]} = f[\overline{f^{-1}(Y)}]$.

6. *Soit $Y_1 + Y_2 \subset f(\mathscr{X})$. Si les ensembles $f^{-1}(Y_1)$ et $f^{-1}(Y_2)$ sont séparés, les ensembles Y_1 et Y_2 le sont également.*

On a, d'après 5 et § 3, II, 13:

$$\overline{Y}_1 \cdot Y_2 \subset f[\overline{f^{-1}(Y_1)}] \cdot Y_2 = f[\overline{f^{-1}(Y_1)} \cdot f^{-1}(Y_2)].$$

Par hypothèse, $\overline{f^{-1}(Y_1)} \cdot f^{-1}(Y_2) = 0$. Il vient donc

$$f[\overline{f^{-1}(\overline{Y}_1)}] \cdot Y_2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \overline{Y}_1 \cdot Y_2 = 0.$$

De façon analogue, $Y_1 \cdot \overline{Y}_2 = 0$.

f étant une transformation continue d'un espace $\mathscr{X}$ (arbitraire) en sous-ensemble d'un espace $\mathscr{Y}$, son image géométrique

$$I = \underset{xy}{E}\,[y = f(x)]$$

est un ensemble fermé dans le produit $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ (§ 14, IV, 3).

Réciproquement (§ 24, XI, 4):

7. *Si l'espace $\mathscr{Y}$ est compact et l'ensemble I fermé, la fonction f est continue.*

[1]) Voir F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 198.

Nous allons démontrer l'énoncé plus général suivant:

8. *Étant donnée une fonction arbitraire f, définie sur un sous-ensemble A de l'espace $\mathcal{X}$ et dont les valeurs appartiennent à l'espace compact $\mathcal{Y}$, on a*

$$\omega(x)=\delta(\bar{I}\cdot\mathcal{Y}^x), \tag{1}$$

$\omega(x)$ désignant l'oscillation de la fonction f au point x (cf. § 15, III) et $\mathcal{Y}^x$ désignant l'ensemble des points de $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ d'abscisse x.

D'après un théorème sur les espaces métriques (§ 24, **XI**, 3), on a toujours (que $\mathcal{Y}$ soit compact ou non compact):

$$\delta(\bar{I}\cdot\mathcal{Y}^x)\leqslant\omega(x).$$

L'inégalité inverse sera établie dès que nous aurons démontré que

$$\omega(x)>a \quad \text{entraîne} \quad \delta(\bar{I}\cdot\mathcal{Y}^x)\geqslant a \quad \text{(quel que soit } a).$$

Or, l'inégalité $\omega(x)>a$ implique l'existence de deux suites de points $x_1,x_2,\ldots$ et $x_1',x_2',\ldots$ telles que

$$\lim_{n=\infty}x_n=x=\lim_{n=\infty}x_n' \quad \text{et} \quad |f(x_n)-f(x_n')|>a.$$

L'espace $\mathcal{Y}$ étant compact, on peut supposer de plus que les suites $f(x_1),f(x_2),\ldots$ et $f(x_1'),f(x_2'),\ldots$ soient convergentes:

$$\lim_{n=\infty}f(x_n)=p,\quad \lim_{n=\infty}f(x_n')=p'.$$

Il vient

$$|p-p'|\geqslant a,\quad (x,p)\in\bar{I} \quad \text{et} \quad (x,p')\in\bar{I}.$$

D'où $\delta(\bar{I}\cdot\mathcal{Y}^x)\geqslant a$.

9. *f étant une transformation continue d'un espace compact, l'ensemble B_f de ses points de biunivocité est un G_δ.*

On a, en effet,

$$x\in B_f\equiv\prod_{x'}\{[f(x)=f(x')]\rightarrow(x=x')\}.$$

L'ensemble $\underset{xx'}{E}[f(x)=f(x')]$ étant fermé (cf. § 26, **XI**, 4), l'ensemble des points (x,x') satisfaisant à la condition entre crochets $\{\ \}$ est un G_δ (somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble fermé). L'ensemble B_f est donc un G_δ d'après III, 9.

VII. Propriétés métriques des ensembles compacts.

1. *Théorème de Weierstrass. Toute fonction continue à valeurs réelles, définie sur un espace compact $\mathcal{X}$, est bornée et atteint ses bornes supérieure et inférieure.*

L'ensemble $f(\mathcal{X})$ étant compact d'après VI, 1, donc fermé et borné (d'après III, 2), il contient par conséquent ses bornes.

2. *Étant donnés deux ensembles compacts disjoints et non vides A et B, on a $\varrho(A,B)>0$.*

Plus précisément, *il existe deux points $a\in A$ et $b\in B$ tels que*

$$|a-b|=\varrho(A,B).$$

Car la fonction $\varrho(x,y)$ est positive et continue sur le produit cartésien $A\times B$ (qui est compact d'après III, 3).

De façon plus générale:

3. *Étant donné un système fini d'ensembles compacts $F_1,\ldots,F_n$ assujetti à la condition $F_1\cdot\ldots\cdot F_n=0$, il existe un nombre $\varepsilon>0$ tel que tout ensemble X de diamètre $<\varepsilon$ est disjoint d'un au moins des F_i.*

En outre, *il existe un système de points $a_1\in F_1,\ \ldots,\ a_n\in F_n$ tel que*

$$\varepsilon=\max|a_i-a_j| \quad \textit{pour}\ i\leqslant n,\ j\leqslant n.$$

En effet, $x_1,\ldots,x_n$ étant un système de points extraits respectivement des ensembles $F_1,\ldots,F_n$, considérons la fonction

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\max_{i,j\leqslant n}|x_i-x_j|.$$

La fonction f étant évidemment continue et positive (puisque $F_1\cdot\ldots\cdot F_n=0$), ε désigne sa borne inférieure.

Le th. 3 implique par contraposition le suivant:

3'. *Étant donnée une décomposition d'un espace compact en ensembles ouverts:*

$$\mathcal{X}=G_1+\ldots+G_n,$$

il existe un $\varepsilon>0$ tel que tout ensemble de diamètre $<\varepsilon$ est contenu dans l'un des G_i.

4. *Dans tout espace compact (non vide) $\mathcal{X}$, il existe un couple de points a et b tel que*

$$|a-b|=\delta(\mathcal{X}).$$

Car la distance $|x-y|$ est une fonction continue de deux variables et, d'après 1, elle atteint sa borne supérieure (qui est par définition le diamètre $\delta(\mathcal{X})$ de $\mathcal{X}$).

5. *Théorème de Heine*[1]). *Toute fonction continue f, définie sur un espace compact $\mathfrak{X}$, est uniformément continue.*

Autrement dit, *à tout $\varepsilon>0$ correspond un $\delta>0$ tel que*

$$(1)\qquad |x-x'|<\delta \quad \textit{entraîne} \quad |f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait deux suites $x_1, x_2, \dots$ et $x'_1, x'_2, \dots$ telles que

$$(2)\qquad |x_n-x'_n|<1/n \quad \text{et} \quad |f(x_n)-f(x'_n)|\geqslant\varepsilon.$$

L'espace $\mathfrak{X}$ étant supposé compact, on peut admettre que la suite $x_1, x_2, \dots$ est convergente: $\lim\limits_{n=\infty} x_n=x$. D'où

$$\lim_{n=\infty} x'_n=x \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} f(x_n)=f(x)=\lim_{n=\infty} f(x'_n),$$

contrairement à (2).

Remarque. Le théorème 5 se démontre aussi facilement à l'aide des symboles logiques. Posons, en effet (pour ε fixe):

$$\varphi_n(x,x')\equiv\{[|x-x'|\leqslant 1/n]\rightarrow[|f(x)-f(x')|<\varepsilon]\}.$$

Il s'agit de déduire de la formule $\prod\limits_x\sum\limits_n\prod\limits_{x'}\varphi_n(x,x')$ la formule $\sum\limits_n\prod\limits_x\prod\limits_{x'}\varphi_n(x,x')$, c.-à-d. d'intervertir l'ordre des opérateurs $\prod\limits_x$ et $\sum\limits_n$. Or, ceci n'est rien d'autre que l'application du théorème de Borel (N⁰ V (ii)); elle est légitime, car l'ensemble $\underset{xx'}{E}\,\varphi_n(x,x')$ étant ouvert, il en est de même de l'ensemble $\underset{x}{E}\prod\limits_{x'}\varphi_n(x,x')$ (d'après III, 9).

7. *F étant un sous-ensemble compact d'un espace (métrique) $\mathfrak{X}$ et S_k étant une sphère ouverte de centre F et de rayon $1/k$, on a pour toute fonction continue f définie sur $\mathfrak{X}$ l'identité*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\overline{f(S_k)}=f(\prod_{k=1}^{\infty}S_k)=f(F).$$

En supposant que $y\in\overline{f(S_k)}$ pour chaque k, il existe deux suites de points $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ tels que

$$x_k\in S_k,\quad x'_k\in F,\quad |y-f(x_k)|<1/k,\quad |x_k-x'_k|<1/k.$$

[1]) Établi par Heine pour l'intervalle dans son travail *Die Elemente der Functionenlehre*, Journ. f. Math. **74** (1872), p. 172.

F étant compact, il est légitime d'admettre que la suite $\{x'_k\}$ est convergente: $\lim\limits_{k=\infty} x'_k=x$. Donc

$$\lim_{k=\infty}x_k=x,\quad \text{d'où} \quad \lim_{k=\infty}f(x_k)=f(x)\in f(F).$$

D'autre part, $\lim\limits_{k=\infty}f(x_k)=y$. Donc $y=f(x)$ et par conséquent $y\in f(F)$.

La formule

$$\prod_{k=1}^{\infty}\overline{f(S_k)}\subset f(F)$$

se trouve ainsi établie. L'inclusion inverse est évidente.

VIII. Invariants des transformations à petites tranches. Déplacements. Quasi-homéomorphie.

1. *Lemme. Soient f une transformation continue de l'espace compact $\mathfrak{X}$ et σ un nombre réel tel que*

$$(0)\qquad \delta[f^{-1}(y)]<\sigma \quad \textit{pour tout} \quad y\in f(\mathfrak{X}).$$

Il existe alors un $\eta>0$ tel que

$$(1)\qquad \textit{l'inégalité} \quad |f(x)-f(x')|<\eta \quad \textit{implique} \quad |x-x'|<\sigma.$$

Par conséquent, *les conditions $Y\subset f(\mathfrak{X})$ et $\delta(Y)<\eta$ impliquent $\delta[f^{-1}(Y)]\leqslant\sigma$.*

En effet, si un η de ce genre n'existait pas, il existerait deux suites $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ telles que

$$(2)\qquad |f(x_k)-f(x'_k)|<1/k, \qquad (3)\qquad |x_k-x'_k|\geqslant\sigma.$$

$\mathfrak{X}$ étant compact, il est légitime d'admettre que ces suites sont convergentes:

$$(4)\qquad \lim_{k=\infty}x_k=x,\quad \lim_{k=\infty}x'_k=x'.$$

Par conséquent,

$$\lim_{k=\infty}f(x_k)=f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{k=\infty}f(x'_k)=f(x')$$

d'où en vertu de (2): $f(x)=f(x')$; en posant $f(x)=y$, on a donc $x, x'\in f^{-1}(y)$ et d'après (0): $|x-x'|<\sigma$, contrairement à (3) et (4).

Nous appelons les ensembles $f^{-1}(y)$ — comme d'habitude — *tranches* d'une transformation f. Appelons *déplacement* toute transformation $f\in\mathfrak{X}^F$ où $F\subset\mathfrak{X}$. On a le théorème suivant:

2 [1]). *Soient $F = \overline{F} \subset \mathcal{I}^{\aleph_0}$ et $f \in \mathcal{Y}^F$. Admettons que les tranches de la transformation f soient de diamètre $< \sigma$. Il existe alors une homéomorphie h, définie sur l'ensemble $f(F)$ et telle que la fonction superposée hf est un déplacement de F inférieur à σ, c.-à-d. que*

$$|hf(x) - x| < \sigma. \tag{5}$$

η satisfaisant à la condition (1), soit $G_0, \dots, G_m$ un système d'ensembles ouverts dans $f(F)$, tel que

$$f(F) = G_0 + \dots + G_m, \quad G_i \neq 0, \quad \delta(G_i) < \eta/2. \tag{6}$$

Soit $x_i \in f^{-1}(G_i)$. Considérons la fonction $\varkappa$ correspondante aux systèmes $\{G_0, \dots, G_m\}$ et $\{x_0, \dots, x_m\}$, c.-à-d. telle que (cf. § 23, VI):

$$\varkappa(y) = \lambda_0(y) \cdot x_0 + \dots + \lambda_m(y) \cdot x_m \quad \text{où} \quad \lambda_i(y) = \frac{\varrho(y, F_i)}{\varrho(y, F_0) + \dots + \varrho(y, F_m)}$$

et où $F_i = f(F) - G_i$.

Il vient $|\varkappa f(x) - x| < \sigma$. En effet, $i_0 \dots i_k$ désignant le système de tous les indices pour lesquels $x \in f^{-1}(G_{i_j})$, le point $\varkappa[f(x)]$ appartient au simplexe $x_{i_0} \dots x_{i_k}$ et d'autre part, le diamètre du simplexe $x x_{i_0} \dots x_{i_k}$ est $< \sigma$, car on a pour $j, l \leqslant k$ l'inégalité $G_{i_j} \cdot G_{i_l} \neq 0$, qui entraîne, d'après (6), $\delta(G_{i_j} + G_{i_l}) < \eta$, ce qui donne (d'après (1)):

$$|x - x_{i_l}| < \sigma \quad \text{et} \quad |x_{i_j} - x_{i_l}| < \sigma.$$

L'inégalité $|\varkappa f(x) - x| < \sigma$ se trouve ainsi établie. Pour en déduire l'inégalité (5), il suffit de désigner par h une homéomorphie définie sur $f(F)$ et suffisamment proche de $\varkappa$ (cf. § 15, XII, corollaire, remarque), à savoir, telle qu'on ait

$$|h(y) - \varkappa(y)| < \sigma - |\varkappa f(x) - x|$$

quels que soient x et y.

Il vient finalement

$$|hf(x) - x| \leqslant |hf(x) - \varkappa f(x)| + |\varkappa f(x) - x| < \sigma.$$

Étant donnée une transformation continue f d'un espace compact, posons

$$\delta_f = \sup \delta[f^{-1}(y)],$$

y parcourant l'espace $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$.

[1]) Voir ma communication dans les Ann. Soc. Pol. Math. **17** (1938), p. 118.

Définition [1]). La propriéte $\boldsymbol{P}$ d'un espace compact $\mathcal{X}$ est dite *invariant par rapport aux transformations à petites tranches* lorsqu'il existe un nombre $a > 0$ tel que l'espace $f(\mathcal{X})$ jouit de la propriété $\boldsymbol{P}$, quelle que soit la fonction continue f avec $\delta_f < a$.

L'étude des invariants des transformations à petites tranches peut être réduite à celle des invariants des petits déplacements.

On a, en effet, le théorème suivant:

3 [2]). *Soit $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}} \subset \mathcal{I}^{\aleph_0}$. Toute propriété topologique de $\mathcal{X}$, invariante par rapport aux déplacements inférieurs à ε, est invariante aussi par rapport aux transformations à tranches inférieures à ε.*

Soit, en effet, f une transformation continue de $\mathcal{X}$ telle que $\delta_f < \varepsilon$. Soit, conformément au th. 2, h une homéomorphie telle que $|hf(x) - x| < \varepsilon$. La transformation hf étant un déplacement inférieur à ε, la propriété considérée appartient, par hypothèse, à l'ensemble $hf(\mathcal{X})$, donc à l'ensemble $f(\mathcal{X})$, qui est homéomorphe à celui-là.

La notion d'invariant des transformations à petites tranches conduit à celle de quasi-homéomorphie:

Définition [3]). Deux espaces $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ sont dits *quasi-homéomorphes* lorsque $\mathcal{X}_1$ se laisse transformer en $\mathcal{X}_2$, ainsi que $\mathcal{X}_2$ en $\mathcal{X}_1$, par une transformation continue à tranches aussi petites que l'on veut.

Plus précisément: lorsqu'à tout $\varepsilon > 0$ correspondent deux transformations continues f_1 et f_2 telles que

$$f_1(\mathcal{X}_1) = \mathcal{X}_2, \quad f_2(\mathcal{X}_2) = \mathcal{X}_1, \quad \delta_{f_1} < \varepsilon, \quad \delta_{f_2} < \varepsilon.$$

Évidemment, deux ensembles homéomorphes sont aussi quasi-homéomorphes; cependant, l'implication inverse est en défaut: un cercle est quasi-homéomorphe à la somme de deux cercles tangents (intérieur y compris), sans lui être homéomorphe.

Considérons, dans le même ordre d'idées, le coefficient

$$\tau(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \inf \delta_f,$$

f parcourant toutes les fonctions continues telles que $f(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$.

[1]) P. Alexandroff, *Gestalt und Lage*, Annals of Math. **30** (1928), chap. I. Comme on verra plus tard, il existe des invariants topologiques importants qui sont des invariants par rapport aux transformations à petites tranches.

[2]) Théorème d'Eilenberg, *Sur l'invariance par rapport aux petites transformations*, C. R. Paris **200** (1935), p. 1003.

[3]) Voir la note de M. Ulam et de moi-même *Sur un coefficient lié aux transformations continues d'ensembles*, Fund. Math. **20** (1933), p. 252.

La quasi-homéomorphie de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ signifie que

$$\tau(\mathcal{X},\mathcal{Y})=0=\tau(\mathcal{Y},\mathcal{X}).$$

Le nombre $\tau(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est bien le plus grand nombre pour lequel il existe dans chaque transformation continue f de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ un couple de points x_1,x_2 satisfaisant aux conditions:

$$f(x_1)=f(x_2) \quad \text{et} \quad |x_1-x_2|\geqslant\tau(\mathcal{X},\mathcal{Y}).$$

On démontre[1], par exemple, que $\mathcal{Q}_n$ étant la sphère (massive) n-dimensionnelle de rayon 1 et $\mathcal{S}_{n-1}$ étant sa surface, on a

$$\tau(\mathcal{Q}_n,\mathcal{S}_{n-1})=\frac{2n+2-\sqrt{2n^2+2n}}{n+2}.$$

On démontre aussi que X étant une image continue de $\mathcal{S}_n$, située dans l'espace $\mathcal{E}^n$, on a $\tau(\mathcal{S}_n,X)=\delta(\mathcal{S}_n)=2$, ce qui signifie qu'il existe sur $\mathcal{S}_n$ deux points antipodes qui se transforment en un seul point[2].

§ 38. Espaces $2^{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

I. Propriétés de l'espace $2^{\mathcal{X}}$. $\mathcal{X}$ étant un espace métrique, $2^{\mathcal{X}}$ est, par définition (cf. § 15, VII), l'espace de tous les sous-ensembles fermés non vides et bornés de $\mathcal{X}$, la distance entre deux éléments X et Y de $2^{\mathcal{X}}$ étant définie comme suit: $\operatorname{dist}(X,Y)$ est le plus grand de deux nombres

$$\sup_{x\in X}\varrho(x,Y) \quad \text{et} \quad \sup_{y\in Y}\varrho(y,X).$$

Si $\mathcal{X}$ est compact, $2^{\mathcal{X}}$ est donc l'espace de tous ses sous-ensembles fermés non vides.

Étant donnée une famille d'ensembles fermés (la famille des ensembles parfaits ou celle des ensembles dénombrables, par exemple), le problème s'impose d'étudier les propriétés topologiques de cette famille considérée comme sous-ensemble de l'espace $2^{\mathcal{X}}$. Des problèmes analogues concernent les propriétés topologiques des fonctions ayant pour arguments ou pour valeurs des ensembles fermés (comme la continuité des fonctions $Z=X+Y$, $\delta(X)$ etc.).

[1] Voir ma note *Sur les transformations des sphères en des surfaces sphériques*, Fund. Math. **20** (1933), p. 206.

[2] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. **20** (1933), p. 177.

1. *Si $\mathcal{X}$ est compact, $2^{\mathcal{X}}$ l'est également*[1].

Car $\mathcal{X}$ étant complet et totalement borné, $2^{\mathcal{X}}$ l'est également (d'après § 29, IV et § 15, IX, 2); donc $2^{\mathcal{X}}$ est compact d'après § 37, II, 3.

2. *Si $\mathcal{X}$ est compact, les conditions*

$$(1) \quad \lim_{n=\infty}\operatorname{dist}(F_n,F)=0 \qquad \textit{et} \qquad (2) \quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty}F_n=F$$

sont équivalentes quels que soient les ensembles fermés non vides F_n et F[2].

Par conséquent, l'espace $2^{\mathcal{X}}$ est homéomorphe à l'espace $(2^{\mathcal{X}})_L$ privé de l'ensemble vide, la notion de limite étant entendue dans l'espace $(2^{\mathcal{X}})_L$ au sens de „$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}F_n$"[3].

En effet, d'après § 25, IX, 2, l'identité est une transformation continue de $2^{\mathcal{X}}$ en $(2^{\mathcal{X}})_L-(0)$ (autrement dit: la condition (1) entraîne (2)). Comme biunivoque, cette transformation est d'après § 14, VIII, 6, une homéomorphie (c.-à-d. que (2) entraîne (1)).

II. Relations entre ensembles. Soit $\mathcal{X}$ un espace compact. Soient X et Y des variables parcourant l'espace $2^{\mathcal{X}}$.

1. *Les ensembles*:

$$(1) \quad \underset{X,Y}{E}(X\subset Y), \qquad (2) \quad \underset{x,X}{E}(x\in X), \qquad (3) \quad \underset{X_1\ldots X_k}{E}(X_1\cdot\ldots\cdot X_k\neq 0)$$

sont fermés respectivement dans les espaces: $(2^{\mathcal{X}})^2$, $\mathcal{X}\times 2^{\mathcal{X}}$ *et* $(2^{\mathcal{X}})^k$.

En effet, les suites $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$ étant supposées convergentes, l'inclusion $X_n\subset Y_n$ entraîne $\operatorname{Lim}X_n\subset\operatorname{Lim}Y_n$ (cf. § 25, VI, 2). L'ensemble (1) est donc fermé.

En remplaçant la relation $x\in X$ par l'inclusion $(x)\subset X$, on en déduit que l'ensemble (2) est fermé.

Il en résulte en vertu de l'équivalence

$$(X_1\cdot\ldots\cdot X_k\neq 0)\equiv\sum_x[(x\in X_1)\cdot\ldots\cdot(x\in X_k)]$$

que l'ensemble (3) est fermé, en tant que projection (cf. § 37, III, 9) de l'ensemble fermé

$$\underset{x,X_1\ldots X_k}{E}[(x\in X_1)\cdot\ldots\cdot(x\in X_k)].$$

[1] Cf. le renvoi du § 25, VIII.

[2] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 150.

[3] Voir § 25, IX. Pour les espaces non compacts, ce théorème est en défaut.

Ceci établi, on en déduit que:

2. *F étant un ensemble fermé, les ensembles:*

(4) $\underset{X}{E}(X\subset F)$, (5) $\underset{X}{E}(XF\neq 0)$, (5') $\underset{X_1\ldots X_k}{E}(F\cdot X_1\cdot\ldots\cdot X_k\neq 0)$

sont fermés, et G étant ouvert, les ensembles:

(6) $\underset{X}{E}(X\subset G)$, (6') $\underset{X_1\ldots X_k}{E}(X_1\cdot\ldots\cdot X_k\subset G)$, (7) $\underset{X}{E}(XG\neq 0)$

sont ouverts.

Cela résulte des équivalences:

$$(X\subset G)\equiv[X\cdot(\mathscr{X}-G)=0] \quad \text{et} \quad (XG=0)\equiv(X\subset\mathscr{X}-G).$$

3. *La somme $X+Y$ et le produit cartésien $X\times Y$ sont des fonctions continues des variables X et Y.*

Car les conditions $X=\underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\,X_n$ et $Y=\underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\,Y_n$ entraînent les égalités (cf. § 25, VI, 3 et 9):

$$X+Y=\underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\,(X_n+Y_n) \quad \text{et} \quad X\times Y=\underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\,(X_n\times Y_n).$$

Remarques. 1) *Si F est un G_δ, l'ensemble* (4) *l'est également.*

Car $(X\subset F)\equiv\prod_x[(x\in X)\rightarrow(x\in F)]$.

2) *Si F est de classe projective CA, l'ensemble* (4) *l'est également.*

C'est une conséquence de l'équivalence précédente.

D'autre part, F peut être un F_σ (même un ensemble dénombrable) sans que l'ensemble (4) soit analytique. Nous allons voir, en effet (§ 39, IV, 4), que dans l'espace $2^{\mathscr{I}}$ la famille des sous-ensembles fermés de l'ensemble des nombres rationnels n'est pas analytique (tout en étant de classe CA).

3) *L'ensemble $\underset{X}{E}(Z\subset X)$ est fermé, quel que soit Z.*

C'est une conséquence directe de la définition de la limite d'une suite d'ensembles (cf. § 25, VI, 2 et 5).

4) *Les fonctions $X\cdot Y$ et $\overline{X-Y}$ ne sont pas, en général, continues.*

Voir § 39, III.

Ajoutons enfin que, (x) étant l'ensemble composé du point x seul, —

4. *La fonction $F(x)=(x)$ est continue.*

Nous en déduirons que:

5. *G étant ouvert, l'ensemble $\underset{xX}{E}[XG=(x)]$ est le produit d'un ensemble fermé et d'un ensemble ouvert.*

Car, d'une part, l'ensemble

$$\underset{xX}{E}[(x)\subset XG]=\underset{xX}{E}(x\in X)\cdot\underset{xX}{E}(x\in G)$$

est la partie commune d'un ensemble fermé (cf. (2)) et d'un ensemble ouvert et, d'autre part, l'ensemble

$$\underset{xX}{E}[XG\subset(x)]=\underset{xX}{E}[X\subset(x)+(\mathscr{X}-G)]$$

est fermé en vertu de (1) et de la continuité des fonctions (x) et $X+Y$.

III. Fonctions d'ensemble: $\delta(X)$ et $\varrho(X,Y)$. Soit $\mathscr{X}$ un espace compact.

1. *La fonction $\delta(X)$, où $X\in 2^{\mathscr{X}}$, est continue.*

Plus précisément, on a les inégalités:

(1) $$\delta(\mathrm{Li}\,X_n)\leqslant\liminf\delta(X_n),$$

(2) $$\limsup\delta(X_n)\leqslant\delta(\mathrm{Ls}\,X_n).$$

Soient, en effet, p et q deux points tels que

(3) $$\delta(\mathrm{Li}\,X_n)=|p-q|,\quad p\in\mathrm{Li}\,X_n,\ q\in\mathrm{Li}\,X_n.$$

Il existe donc deux suites $\{p_n\}$ et $\{q_n\}$ telles que

(4) $$p=\lim p_n,\quad q=\lim q_n,\quad p_n\in X_n,\quad q_n\in X_n.$$

Par conséquent

$$|p_n-q_n|\leqslant\delta(X_n) \quad \text{et} \quad \lim|p_n-q_n|=|p-q|, \quad \text{d'où} \quad |p-q|\leqslant\liminf\delta(X_n).$$

Rapprochée de (3), la dernière inégalité donne (1).

Soit, d'autre part,

(5) $$\limsup\delta(X_n)=\lim\delta(X_{k_n}),\quad \delta(X_{k_n})=|p_{k_n}-q_{k_n}|$$

où $p_{k_n}\in X_{k_n}$ et $q_{k_n}\in X_{k_n}$. Il est légitime d'admettre que les suites $\{p_{k_n}\}$ et $\{q_{k_n}\}$ sont convergentes (en remplaçant, au besoin, $\{X_{k_n}\}$ par une sous-suite convenablement choisie):

(6) $$\lim p_{k_n}=p \quad \text{et} \quad \lim q_{k_n}=q, \quad \text{donc} \quad p\in\mathrm{Ls}\,X_n \quad \text{et} \quad q\in\mathrm{Ls}\,X_n.$$

Par conséquent

$$|p-q| \leqslant \delta(\mathrm{Ls}\, X_n) \quad \text{et} \quad \lim |p_{k_n}-q_{k_n}| = |p-q|. \tag{7}$$

Rapprochées de (5), les formules (7) impliquent (2).

2. *La fonction $\varrho(X,Y)$, où $X, Y \epsilon 2^{\mathfrak{X}}$, est continue.*

Plus précisément, on a les inégalités:

$$\varrho(\mathrm{Ls}\, X_n, \mathrm{Ls}\, Y_n) \leqslant \liminf \varrho(X_n, Y_n), \tag{8}$$

$$\limsup \varrho(X_n, Y_n) \leqslant \varrho(\mathrm{Li}\, X_n, \mathrm{Li}\, Y_n). \tag{9}$$

Soit, en effet,

$$\liminf \varrho(X_n, Y_n) = \lim \varrho(X_{k_n}, Y_{k_n}), \quad \varrho(X_{k_n}, Y_{k_n}) = |p_{k_n}-q_{k_n}|, \tag{10}$$

où $p_{k_n} \epsilon X_{k_n}$ et $q_{k_n} \epsilon Y_{k_n}$.

Il est légitime d'admettre que les suites $\{p_{k_n}\}$ et $\{q_{k_n}\}$ sont convergentes, c.-à-d. que les formules (6) sont satisfaites. Il vient

$$\varrho(\mathrm{Ls}\, X_n, \mathrm{Ls}\, Y_n) \leqslant |p-q| = \lim |p_{k_n}-q_{k_n}|,$$

d'où l'inégalité (8) en vertu de (10).

Soit, d'autre part,

$$\varrho(\mathrm{Li}\, X_n, \mathrm{Li}\, Y_n) = |p-q|, \quad p \epsilon \mathrm{Li}\, X_n, \quad q \epsilon \mathrm{Li}\, Y_n. \tag{11}$$

Il vient

$$p = \lim p_n, \quad p_n \epsilon X_n, \quad q = \lim q_n, \quad q_n \epsilon Y_n.$$

Parsuite

$$|p-q| = \lim |p_n-q_n| \quad \text{et} \quad |p_n-q_n| \geqslant \varrho(X_n, Y_n),$$

d'où

$$|p-q| \geqslant \limsup \varrho(X_n, Y_n). \tag{12}$$

Les formules (11) et (12) entraînent (9).

3. *$f(X)$ désignant pour tout $X \epsilon 2^{\mathcal{C}}$ le premier point de l'ensemble X, la fonction f est continue.*

Soient, en effet, $X_1, X_2 \epsilon 2^{\mathcal{C}}$ et $f(X_1) \leqslant f(X_2)$. On a évidemment

$$|f(X_1)-f(X_2)| = \varrho[f(X_1), X_2] \leqslant \mathrm{dist}\,(X_1, X_2),$$

d'où la continuité de la fonction f.

IV. Familles d'ensembles. Soit $\mathfrak{X}$ un espace compact.

En tenant compte de II, 4, on démontre facilement les 3 énoncés suivants:

1. *La famille des ensembles qui se réduisent à des points individuels est homéomorphe à $\mathfrak{X}$.*

2. *La famille des ensembles dont chacun contient n points au plus est fermée (pour n fixe).*

3. *La famille des ensembles finis est un $\boldsymbol{F}_\sigma$.*

En outre, *elle est dense dans l'espace $2^{\mathfrak{X}}$.*

4. *La famille $\boldsymbol{P}$ des ensembles parfaits (non vides) est un $\boldsymbol{G}_\delta$* [1].

Soit, en effet, $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace $\mathfrak{X}$. La condition pour que l'ensemble $X \epsilon 2^{\mathfrak{X}}$ ne soit pas parfait est qu'il contienne un point isolé, c.-à-d. qu'il existe un n tel que $XR_n = (x)$. On a donc

$$2^{\mathfrak{X}} - \boldsymbol{P} = \mathop{E}_{X} \sum_{n} \sum_{x} [XR_n = (x)] = \sum_{n} \mathop{E}_{X} \sum_{x} [XR_n = (x)].$$

L'ensemble $\mathop{E}_{xX} [XR_n = (x)]$ étant un $\boldsymbol{F}_\sigma$ (d'après II, 5), il en est de même de $\mathop{E}_{X} \sum_{x} [XR_n = (x)]$ (cf. § 37, III, 9), d'où la conclusion demandée.

5. *La famille $\boldsymbol{I}$ des ensembles fermés indénombrables est analytique* [2].

En effet, tout ensemble indénombrable fermé contenant selon le théorème de Cantor-Bendixson (§ 18, V) un ensemble parfait non vide, on a

$$(X \epsilon \boldsymbol{I}) \equiv \sum_{Y} (Y \subset X)\,(Y \epsilon \boldsymbol{P}),$$

où $\boldsymbol{P}$ désigne la famille des ensembles parfaits non vides. $\boldsymbol{P}$ étant un $\boldsymbol{G}_\delta$ d'après 4 et $\mathop{E}_{XY} (Y \subset X)$ étant fermé, la famille des ensembles indénombrables est analytique, en tant que projection d'un $\boldsymbol{G}_\delta$.

6. *La famille des ensembles bien ordonnés fermés situés dans l'intervalle $\mathcal{J} = 01$ est de classe $\boldsymbol{CA}$ dans l'espace $2^{\mathcal{J}}$* [3].

En effet, pour que l'ensemble X ne soit pas bien ordonné, il faut et il suffit qu'il contienne une suite de nombres réels décroissants, c.-à-d. que

$$\sum_{\mathfrak{z}} \prod_{n,k} (\mathfrak{z}^{(n)} \epsilon X)\,(\mathfrak{z}^{(n)} > \mathfrak{z}^{(n+k)})$$

où $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \ldots]$ est une suite variable de nombres réels (point de l'espace $\mathcal{J}^{\aleph_0}$).

---

[1]) Ce théorème est dû à S. Banach.

[2]) Théorème de Hurewicz, Fund. Math. **15** (1930), p. 4—17. Voir aussi § 39, IV, 4.

[3]) On prouve que cette famille n'est pas analytique.

La famille des X satisfaisant à cette condition est évidemment analytique.

7. *La famille des ensembles fermés non-denses est un* G_δ.

Soit, en effet, $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace composée d'ensembles ouverts non vides. La condition pour que X ne soit pas non dense est qu'il contienne un ensemble ouvert, donc un R_n. L'ensemble

$$\underset{X}{E} \sum_n (R_n \subset X) = \sum_n \underset{X}{E} (R_n \subset X)$$

étant un F_σ (cf. II, rem. 3), l'énoncé 7 se trouve établi.

8. *Soient* $\boldsymbol{A}$ *une famille d'ensembles fermés et* S *la somme des ensembles-éléments de* $\boldsymbol{A}$. *Si* $\boldsymbol{A}$ *est fermé (ouvert) dans* $2^{\mathcal{X}}$, S *est fermé (ouvert) dans* $\mathcal{X}$.

On a par définition

$$(x \in S) \equiv \sum_X (x \in X)(X \in \boldsymbol{A}).$$

Si $\boldsymbol{A}$ est fermé, $\underset{x,X}{E}(x \in X)(X \in \boldsymbol{A})$ l'est également selon II, 1 (2). Il en est de même de S d'après § 37, III, 9.

Soit $\boldsymbol{A}$ ouvert. Soit $p \in X \in \boldsymbol{A}$. Comme (cf. § 15, IV (8) et § 25, VI, 8):

$$X = \underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\, \overline{S}_n \quad \text{où} \quad S_n = \underset{x}{E}[\varrho(x,X) < {}^1\!/_n],$$

on a, pour n suffisamment grand, $\overline{S}_n \in \boldsymbol{A}$, d'où $\overline{S}_n \subset S$. Il vient $p \in S_n \subset S$, ce qui prouve que p est un point intérieur de S. Donc S est ouvert.

Remarques. Si $\boldsymbol{A}$ est un $\boldsymbol{F}_\sigma$, S l'est également. Cependant, $\boldsymbol{A}$ *peut être un* G_δ *sans que* S *le soit* (S est dans ce cas un ensemble analytique).

Désignons, en effet, par X_n l'ensemble des fractions $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$ et soit $\boldsymbol{A}$ l'ensemble admettant tous les X_n comme éléments. Évidemment $\boldsymbol{A}$ est isolé, donc un G_δ, tandis que S coïncide avec l'ensemble de tous les nombres rationnels (de l'intervalle 01), qui n'est pas un G_δ.

V. Ensembles irréductibles, ensembles saturés. Un ensemble A est dit *irréductible* (respectivement *saturé*) par rapport à la famille d'ensembles $\boldsymbol{F}$ lorsque $A \in \boldsymbol{F}$ et les conditions $X \neq A$ et $X \subset A$ (respectivement $A \subset X$) entraînent X *non*-$\in \boldsymbol{F}$[1]).

[1]) Ces notions sont dues à Janiszewski.

1. *Soient* $\mathcal{X}$ *compact et* $\boldsymbol{F} \subset 2^{\mathcal{X}}$. *Si* $\boldsymbol{F}$ *est fermé et non vide, il existe un ensemble* A *irréductible par rapport à* $\boldsymbol{F}$.

Nous déduirons ce théorème de l'énoncé suivant (valable pour les espaces $\mathcal{X}$ métriques séparables):

2. *Théorème de Brouwer*[1]). *Soit* $\boldsymbol{F}$ *une famille de sous-ensembles fermés de* $\mathcal{X}$ *telle que les conditions*

(1) $\quad X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ *et* $X_1 \in \boldsymbol{F}, \; X_2 \in \boldsymbol{F}, \ldots$ *entraînent* $(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots) \in \boldsymbol{F}$.

Tout ensemble $E \in \boldsymbol{F}$ *contient alors un ensemble irréductible par rapport à* $\boldsymbol{F}$.

Soit $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace $\mathcal{X}$. Soit $E_0, E_1, \ldots$ la suite d'ensembles définies par induction comme suit:

1⁰ $E_0 = E$,

2⁰ s'il existe un $X \in \boldsymbol{F}$ tel que $X \subset E_{n-1} - R_n$ (où n est un entier positif donné), E_n est un X de ce genre; dans le cas contraire, $E_n = E_{n-1}$.

L'ensemble

$$A = E_0 \cdot E_1 \cdot \ldots \tag{2}$$

est l'ensemble demandé.

En effet, on a d'abord $A \subset E$ et $A \in \boldsymbol{F}$ (d'après (1)).

Soit

$$X \neq A \quad \text{et} \quad X \subset A. \tag{3}$$

Il s'agit de prouver que X *non*-$\in \boldsymbol{F}$.

Supposons par contre que $X \in \boldsymbol{F}$. Comme $X = \overline{X}$, les formules (3) impliquent l'existence d'un R_n tel que

$$R_n \cdot A \neq 0 \quad \text{et} \quad R_n \cdot X = 0, \quad \text{d'où} \quad X \subset E_{n-1} - R_n. \tag{4}$$

Il en résulte d'après la définition de E_n que (cf. 2⁰):

$$E_n \subset E_{n-1} - R_n, \quad \text{donc} \quad R_n \cdot E_n = 0, \quad \text{d'où} \quad R_n \cdot A = 0,$$

contrairement à (4).

Le th. 2 étant établi, on en déduit le th. 1 en tenant compte du fait (cf. § 25, VI, 8) que, pour toute suite descendante d'ensembles fermés $X_1 \supset X_2 \supset \ldots$, on a $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots = \underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\, X_n$.

[1]) Cf. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **14** (1911), p. 138. La démonstration donnée ici est due à Mazurkiewicz.

VI. Propriétés de l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Étant donnés deux espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ désigne par définition (cf. § 13, I) l'ensemble de toutes les fonctions continues définies sur l'espace $\mathcal{X}$ et dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{Y}$. L'espace $\mathcal{X}$ étant supposé compact, $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ peut être considéré comme espace *métrique*, en définissant la distance de deux fonctions-éléments de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ par la formule (cf. § 15, VIII, 1):

$$(0) \qquad |f_1 - f_2| = \sup_{x \in \mathcal{X}} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

La condition $\lim_{n=\infty} f_n = f$ équivaut alors à la convergence uniforme de la suite f_n sur $\mathcal{X}$ (dans le sens habituel du mot); donc d'après § 15, VIII, 5, à l'hypothèse que

$$(1) \qquad \text{la condition } \lim_{n=\infty} x_n = x \quad \text{entraîne} \quad \lim_{n=\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

On en conclut que, *si $\mathcal{X}$ est compact, la convergence de la suite $\{f_n\}$ vers f est une propriété topologique* (qui ne dépend pas des propriétés métriques non topologiques de l'espace $\mathcal{Y}$).

D'après § 14, IX, 2, on a le théorème suivant:

1. *f étant une fonction continue variable parcourant l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ et x étant un point variable de $\mathcal{X}$, posons $g(f,x) = f(x)$. La fonction g est continue (sur l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$).*

2. *Posons $F(f,X) = f(X) = \mathop{E}_{y} \sum_{x} [y = f(x)] (x \in X)$. Si $\mathcal{X}$ est compact, la fonction F est continue sur l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times 2^{\mathcal{X}}$.*

Plus précisément: *si $f = \lim f_n$, on a les inclusions:*

$$(2') \quad \mathrm{Ls}\, f_n(X_n) \subset f(\mathrm{Ls}\, X_n), \qquad (2'') \quad f(\mathrm{Li}\, X_n) \subset \mathrm{Li}\, f_n(X_n).$$

Soit, en effet,

$$y \in \mathrm{Ls}\, f_n(X_n), \quad \text{donc} \quad y = \lim f_{k_n}(x_{k_n}), \quad x_{k_n} \in X_{k_n}.$$

L'espace $\mathcal{X}$ étant compact, il est légitime d'admettre que la suite $\{x_{k_n}\}$ est convergente:

$$\lim x_{k_n} = x, \quad \text{d'où} \quad x \in \mathrm{Ls}\, (X_n).$$

Comme $f = \lim f_{k_n}$, il vient en raison de (1):

$$\lim f_{k_n}(x_{k_n}) = f(x), \quad \text{d'où} \quad y \in f(\mathrm{Ls}\, X_n).$$

Soit, d'autre part,

$$y \in f(\mathrm{Li}\, X_n), \quad \text{donc} \quad y = f(x) \quad \text{et} \quad x \in \mathrm{Li}\, X_n,$$

d'où $x = \lim x_n$, $x_n \in X_n$. Comme $f = \lim f_n$, il vient d'après (1):

$$f(x) = \lim f_n(x_n) \quad \text{d'où} \quad f(x) \in \mathrm{Li}\, f_n(X_n),$$

puisque $f_n(x_n) \in f_n(X_n)$.

Le th. 2 implique aussitôt que

3. *En posant $F_1(X) = f(X)$ où f est un élément fixe de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, la fonction F_1 est continue.*

4. *f étant une fonction continue de deux variables x et t (c'est-à-dire $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}$), posons*

$$F_2(f, X, T) = f(X, T) = \mathop{E}_{y} \sum_{xt} [y = f(x,t)] \, (x \in X) \, (t \in T).$$

Si les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{T}$ sont compacts, la fonction F_2 est continue sur l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times 2^{\mathcal{X}} \times 2^{\mathcal{T}}$.

En particulier: *en posant*

$$F_3(X, t) = f(X, t) = \mathop{E}_{y} \sum_{x} [y = f(x,t)] \, (x \in X),$$

la fonction F_3 est continue sur $2^{\mathcal{X}} \times \mathcal{T}$.

En effet, l'énoncé 4 se déduit de 2 en vertu de la continuité des fonctions $X \times T$ et (t) (cf. II, 3 et 4).

5. *Soient $\mathcal{Y}$ un espace compact et A un sous-ensemble fixe de l'espace (arbitraire) $\mathcal{X}$. En posant $H(f) = \overline{f(A)}$, la fonction H est continue sur l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, métrisé par la formule* (0).

Plus précisément: $\mathrm{dist}\,[H(f), H(g)] \leqslant |f - g|$, où $f, g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

On a, en effet,

$$\mathrm{dist}\,[H(f), H(g)] = \mathrm{dist}\,[f(A), g(A)] \leqslant |f - g|,$$

car à tout $y \in f(A)$ correspond un y' tel que

$$y' \in g(A) \quad \text{et} \quad |y - y'| \leqslant |f - g|,$$

à savoir $y' = g(x)$ où x est un point de A tel que $y = f(x)$.

Ajoutons finalement que:

6. *Si $\mathcal{Y}$ est complet et $\mathcal{X}$ compact, l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ est complet.*

C'est une conséquence directe du th. 2 du § 29, V.

VII. Applications. On constate aussitôt que

1. *L'ensemble* $\underset{f,x,y}{E}[y=f(x)]$ *est fermé dans le produit* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}\times\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

Il en résulte que

1'. *L'ensemble* $\underset{f}{E}[f(\mathcal{X})=\mathcal{Y}]$ *est fermé dans l'espace* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

Car $[f(\mathcal{X})=\mathcal{Y}]\equiv\prod_y\sum_x[y=f(x)]$.

2. *Si* $F=\overline{F}$, *l'ensemble* $\underset{f,x}{E}[f(x)\in F]$ *est fermé dans le produit* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}\times\mathcal{X}$.

En effet, en posant $g(f,x)=f(x)$, on a

$$\underset{f,x}{E}[f(x)\in F]=g^{-1}(F)$$

et la fonction g étant continue (d'après VI, 1), l'ensemble $g^{-1}(F)$ est fermé (cf. § 13, IV (4)).

3. *Si* $\mathcal{X}$ *est compact et* G *ouvert, l'ensemble*

$$\underset{f,y}{E}[f^{-1}(y)\subset G]$$

est ouvert.

Si en outre $F=\overline{F}$, *l'ensemble* $\underset{f}{E}[f^{-1}(F)\subset G]$ *est ouvert.*

On a, en effet, l'équivalence:

$$[f^{-1}(y)\not\subset G]\equiv\sum_x\{[y=f(x)]\,[x\in(\mathcal{X}-G)]\}.$$

L'ensemble des points (f,x,y) qui satisfont à la condition entre crochets { } étant fermé dans $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}\times\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ (d'après 1), il en est de même de sa projection parallèle à l'axe $\mathcal{X}$, c.-à-d. de l'ensemble $\underset{f,y}{E}[f^{-1}(y)\not\subset G]$.

De façon analogue, la deuxième partie du théorème résulte du th. 2 et de l'équivalence:

$$[f^{-1}(F)\not\subset G]\equiv\sum_x\{[f(x)\in F]\,[x\in(\mathcal{X}-G)]\}.$$

4. $\mathcal{Y}$ *étant compact et* A *et* B *étant deux sous-ensembles de* $\mathcal{X}$, *l'ensemble*

$$\underset{f}{E}[\overline{f(A)}\cdot\overline{f(B)}\neq 0]$$

est fermé dans $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

C'est une conséquence de VI, 5 et II, 1 (3).

5. *Lemme*[1]). *Posons* $\mathcal{Y}=\mathcal{J}^{\aleph_0}$. *Soient*

$$A=\overline{A},\quad B=\overline{B},\quad AB=0\quad\text{et}\quad f\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}.$$

A tout $\varepsilon>0$ *correspond un* $g\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ *tel que*

$$\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)}=0\quad\text{et}\quad|g-f|<\varepsilon.$$

En symbole:

$$\overline{\underset{g}{E}[\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)}=0]}=\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}. \tag{1}$$

Posons, en effet, $f(x)=[f^{(1)}(x),f^{(2)}(x),\dots]$ où $f^{(i)}(x)\in\mathcal{J}$. Soit n un entier tel que $2^{-n}<\varepsilon$. Définissons la fonction g par les conditions:

1) $g^{(i)}(x)=f^{(i)}(x)$ pour $i\leqslant n$,

2) $g^{(n+1)}(x)=\dfrac{\varrho(x,A)}{\varrho(x,A)+\varrho(x,B)}$,

3) $g^{(i)}(x)=0$ pour $i\geqslant n+2$.

On a donc, pour $x\in A$, $g^{(n+1)}(x)=0$; parsuite, pour $y\in g(A)$, on a $y^{(n+1)}=0$ et il en est de même pour $y\in\overline{g(A)}$. Cependant pour $y\in\overline{g(B)}$, on a $y^{(n+1)}=1$. Donc $\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)}=0$.

Enfin

$$|g(x)-f(x)|=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}|g^{(i)}(x)-f^{(i)}(x)|=\sum_{i=n+1}^{\infty}2^{-i}|g^{(i)}(x)-f^{(i)}(x)|\leqslant 2^{-n}<\varepsilon.$$

6. *Soit* $\mathcal{Y}$ *un espace compact. Si l'égalité* (1) *est satisfaite par chaque couple de sous-ensembles fermés et disjoints* A *et* B *de* $\mathcal{X}$ — *donc, en particulier, si* $\mathcal{Y}=\mathcal{J}^{\aleph_0}$ — *les homéomorphies constituent un ensemble résiduel dans l'espace* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

De façon plus générale, *si* $F=\overline{F}\subset\mathcal{X}$ *et si l'égalité* (1) *est satisfaite par chaque couple* $A=\overline{A}$, $B=\overline{B}$ *où* $A+B\subset F$ *et* $AB=0$, *les fonctions* $f\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ *telles que* $f|F$ *est une homéomorphie, constituent un ensemble résiduel dans* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

En effet, $R_1,R_2,\dots$ étant une base de F, posons

$$\Phi_{kl}=\underset{g}{E}[\overline{g(\overline{R_k})}\cdot\overline{g(F-R_l)}=0]$$

pour tout couple k,l tel que $\overline{R_k}\subset R_l$.

L'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ étant complet et les ensembles Φ_{kl} étant denses

---

[1]) Ce lemme résulte du th. 4 du § 23, VII (de la Théorie de la dimension). La démonstration de ce théorème est cependant bien plus compliquée que la démonstration directe du lemme qui est donnée ici.

(d'après (1)) et ouverts (d'après 4), le produit $\prod \Phi_{kl}$ est un G_δ résiduel. D'après le th. 2 du § 17, I, il se compose exclusivement de fonctions f telles que $f|F$ est une homéomorphie.

7[1]. *Si $\mathfrak{X}$ est compact, l'ensemble Φ des homéomorphies est un G_δ dans l'espace $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$.*

On a en effet

$$(f \in \Phi) \equiv \prod_{x,x'} \{[f(x)=f(x')] \rightarrow (x=x')\}.$$

L'ensemble $\underset{x,x',f}{E} \{[f(x) \neq f(x')]\}$ étant ouvert (d'après 1) et l'ensemble $\underset{x,x',f}{E}(x=x')$ étant fermé, leur somme est un G_δ. Il en est de même de l'ensemble Φ d'après § 37, III, 9.

§ 39. Fonctions et décompositions semi-continues.

L'espace $\mathfrak{X}$ du § 39 est supposé compact.

I. Semi-continuité supérieure et inférieure[2]. Soit F une fonction qui fait correspondre à tout point y d'un espace métrique $\mathfrak{Y}$ un sous-ensemble fermé non vide $F(y)$ de l'espace compact $\mathfrak{X}$ (c.-à-d. $F(y) \in 2^{\mathfrak{X}}$).

Définitions[3]. 1. *La fonction F est dite semi-continue supérieurement (s. c. s.) au point y lorsque*

$$\lim_{n=\infty} y_n = y \quad \textit{entraîne} \quad \operatorname*{Ls}_{n=\infty} F(y_n) \subset F(y);$$

autrement dit: lorsque les conditions

(1) $$\lim_{n=\infty} y_n = y, \quad \lim_{n=\infty} x_n = x \quad \text{et} \quad x_n \in F(y_n)$$

entraînent

(2) $$x \in F(y).$$

2. *La fonction F est dite semi-continue inférieurement (s. c. i.) au point y lorsque*

$$\lim_{n=\infty} y_n = y \quad \textit{entraîne} \quad F(y) \subset \operatorname*{Li}_{n=\infty} F(y_n);$$

[1] Le th. 7 sera précisé davantage dans le § 40 pour le cas de dimension finie. Sans l'hypothèse de compacité de l'espace $\mathfrak{X}$, le th. 7 est en défaut. Voir J. H. Roberts, Amer. Journ. Math. **70** (1948), p. 126.

[2] Voir, pour les N° I—IV, ma note *Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés*, Fund. Math. **18** (1931), p. 148.

[3] Cf. W. A. Wilson, Amer. Journ. Math. **48** (1926), p. 165.

autrement dit: lorsque les conditions

(3) $$\lim_{n=\infty} y_n = y \quad \text{et} \quad x \in F(y)$$

entraînent l'existence d'une suite $x_1, x_2, \ldots$ telle que

(4) $$\lim_{n=\infty} x_n = x \quad \text{et} \quad x_n \in F(y_n).$$

La fonction F est dite semi-continue supérieurement (inférieurement) lorsqu'elle est semi-continue supérieurement (inférieurement) en chaque point.

Évidemment, pour que la fonction F soit continue, il faut et il suffit qu'elle soit simultanément semi-continue supérieurement et inférieurement.

Rapports aux fonctions à valeurs réelles.

Soit f une fonction qui fait correspondre à tout $y \in \mathfrak{Y}$ un $f(y) \in \mathcal{J}$. La fonction f est dite semi-continue supérieurement ou inférieurement au point y suivant que la condition $\lim_{n=\infty} y_n = y$ entraîne

(5) $$\limsup_{n=\infty} f(y_n) \leqslant f(y),$$

ou qu'elle entraîne

(6) $$f(y) \leqslant \liminf_{n=\infty} f(y_n).$$

Autrement dit: lorsque les conditions

(7) $$\lim_{n=\infty} y_n = y \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} f(y_n) = x$$

entraînent respectivement

(8) $x \leqslant f(y)$ ou bien (9) $f(y) \leqslant x$.

Posons

(10) $$F(y) = \underset{x}{E}[0 \leqslant x \leqslant f(y)].$$

Pour que la fonction F soit s. c. s. (s. c. i.) au point y, il faut et il suffit que la fonction f le soit.

En effet, soit d'abord F une fonction s. c. s. au point y. D'après (10): $f(y_n) \in F(y_n)$. Les conditions (7) entraînent donc (1) (en posant $x_n = f(y_n)$); celles-ci entraînent (2) par hypothèse et finalement (2) entraîne (8) d'après (10). La fonction f est donc s. c. s. au point y.

Inversement, soit f s. c. s. au point y. La condition $x_n \epsilon F(y_n)$ implique que $x_n \leqslant f(y_n)$; les formules (1), rapprochées de (5), donnent

$$x \leqslant \limsup_{n=\infty} f(y_n) \leqslant f(y), \quad \text{d'où} \quad x \epsilon F(y).$$

Soit, en second lieu, F une fonction s. c. i. au point y. Soit $\lim_{n=\infty} y_n = y$. Comme $f(y) \epsilon F(y)$, les conditions (3) impliquent par hypothèse l'existence d'une suite $\{x_n\}$ telle que

$$\lim_{n=\infty} x_n = f(y) \quad \text{et} \quad x_n \epsilon F(y_n), \quad \text{d'où} \quad x_n \leqslant f(y_n).$$

Les formules (7) impliquent donc (9).

Inversement, soit f s. c. i. au point y. Soient $\lim_{n=\infty} y_n = y$ et $\eta > 0$. Pour n suffisamment grand, on a donc l'inégalité $f(y_n) > f(y) - \eta$. Soit $0 \leqslant x \leqslant f(y) - \eta$. Il vient $x \leqslant f(y_n)$, d'où $x \epsilon F(y_n)$ et par conséquent $x \epsilon \underset{n=\infty}{\mathrm{Li}}\, F(y_n)$.

On a ainsi

$$\underset{x}{E}[0 \leqslant x < f(y)] \subset \underset{n=\infty}{\mathrm{Li}}\, F(y_n), \quad \text{d'où} \quad F(y) \subset \underset{n=\infty}{\mathrm{Li}}\, F(y_n),$$

car $F(y) = \overline{\underset{x}{E}[0 \leqslant x < f(y)]} + (0)$.

II. Conditions nécessaires et suffisantes. 1. *Pour que la fonction F soit s. c. s., il faut et il suffit que l'ensemble*

$$J = \underset{xy}{E}[x \epsilon F(y)]$$

soit fermé.

En effet, la condition pour que la fonction F ne soit pas semi-continue supérieurement au point x est que l'on ait (cf. I (1) et (2)):

(1) $$\lim_{n=\infty} (x_n, y_n) = (x, y), \quad x_n \epsilon F(y_n) \quad \text{et} \quad x \epsilon \mathfrak{X} - F(y);$$

mais cela veut dire que le point (x,y) appartient à $\bar{J} - J$, donc $J \neq \bar{J}$.

2. *Pour que la fonction F soit s. c. i., il faut et il suffit que l'ensemble*

$$J_\eta = \underset{xy}{E}\{\varrho[x, F(y)] < \eta\}$$

soit ouvert pour tout $\eta > 0$.

Soit F une fonction s. c. i. Soient

(2) $$(x,y) \epsilon J_\eta, \quad \lim_{n=\infty} x_n = x \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} y_n = y.$$

Il s'agit de prouver que, pour n suffisamment grand, on a $(x_n, y_n) \epsilon J_\eta$, c.-à-d. que

(3) $$\varrho[x_n, F(y_n)] < \eta.$$

Or, la condition $(x,y) \epsilon J_\eta$ implique l'existence d'un $x' \epsilon F(y)$ tel que $|x - x'| < \eta$; F étant s. c. i., on a (cf. I (4))

$$x' = \lim_{n=\infty} x'_n, \quad x'_n \epsilon F(y_n).$$

Donc, pour n suffisamment grand, on a $|x'_n - x_n| < \eta$, d'où la formule (3).

Réciproquement, supposons que la fonction F ne soit pas s. c. i. au point y. On a donc

$$x \epsilon F(y) - \underset{n=\infty}{\mathrm{Li}}[F(y_n)] \quad \text{et} \quad y = \lim_{n=\infty} y_n.$$

Il existe par conséquent un $\eta > 0$ et une suite $k_1 < k_2 < \ldots$ tels que

$$\varrho[x, F(y_{k_n})] > \eta > 0, \quad \text{donc} \quad (x, y_{k_n})\ non\text{-}\epsilon\, J_\eta.$$

Comme $(x,y) \epsilon J_\eta$, on en conclut que l'ensemble J_η n'est pas ouvert.

3. *Pour que la fonction F soit s. c. s. (s. c. i.), il faut et il suffit que, pour tout sous-ensemble ouvert (fermé) M de $\mathfrak{X}$, l'ensemble*

$$N = \underset{y}{E}[F(y) \subset M]$$

soit ouvert (fermé).

La condition est nécessaire. La fonction F étant s. c. s., l'ensemble $\underset{xy}{E}[x \epsilon F(y)]$ est fermé d'après 1. Donc, M étant ouvert, l'ensemble

$$\underset{xy}{E}\{[x \epsilon F(y)] \to (x \epsilon M)\}$$

est ouvert, et il en est de même d'après § 37, III, 9 de l'ensemble

$$\underset{y}{E} \prod_{x} \{[x \epsilon F(y)] \to (x \epsilon M)\} = \underset{y}{E}[F(y) \subset M] = N.$$

Si $\lim_{n=\infty} y_n = y$ et $F(y_n) \subset M = \bar{M}$, il vient $y_n \epsilon N$ et $y \epsilon \bar{N}$; d'autre part, la fonction F étant supposée s. c. i., on a

$$F(y) \subset \underset{n=\infty}{\mathrm{Li}}\, F(y_n) \subset M, \quad \text{d'où} \quad y \epsilon N, \quad \text{donc} \quad \bar{N} = N.$$

La condition est suffisante. Si F n'est pas s. c. s., les formules (1) sont vérifiées sans que (2) le soit. On peut donc admettre que x_n *non*-ϵ $F(y)$ quel que soit n. En désignant par A l'ensemble (dénombrable fermé) composé des points $x, x_1, x_2, \ldots$, on a

$$A \cdot F(y_n) \neq 0 \quad \text{et} \quad A \cdot F(y) = 0.$$

En posant $M = \mathcal{X} - A$, il vient donc $y \in N$ et y_n *non*-ϵ N, ce qui prouve que N n'est pas ouvert.

Si F n'est pas s. c. i., on a:

$$\lim_{n=\infty} y_n = y, \quad x \in F(y) \quad \text{et} \quad x \text{ non-}\epsilon \operatorname{Li}_{n=\infty} F(y_n).$$

Il existe, par conséquent, un ensemble ouvert G et une suite $k_1 < k_2 < \ldots$ tels que

$$x \in G \quad \text{et} \quad G \cdot F(y_{k_n}) = 0.$$

En posant $M = \mathcal{X} - G$, il vient

$$y_{k_n} \in N, \quad y \text{ non-}\epsilon N, \quad \text{d'où} \quad \overline{N} \neq N.$$

Le th. 1 implique les corollaires suivants:

4. *D étant un ensemble fermé dans le produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, l'intersection horizontale, c.-à-d. l'ensemble*

$$F(y) = \underset{x}{E}\, [(x, y) \in D],$$

est une fonction semi-continue supérieurement de l'ordonnée y.

Car

$$\underset{xy}{E}\, [x \in F(y)] = \underset{xy}{E}\, [(x, y) \in D] = D.$$

5. *Si $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, la fonction $F(y) = f^{-1}(y)$ est s. c. s.*

Car l'ensemble

$$\underset{xy}{E}\, [x \in f^{-1}(y)] = \underset{xy}{E}\, [y = f(x)]$$

est fermé (d'après § 14, IV, 3).

Ainsi, par exemple, en posant $f(x) = x^3 - x$, la fonction $f^{-1}(y)$ n'est discontinue qu'aux points $y = \pm \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ qui correspondent aux extrema de la fonction f.

Remarque. L'énoncé 5 admet la généralisation suivante:

5'. *La fonction $F(f, Y) = f^{-1}(Y)$ est s. c. s. sur $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times 2^{\mathcal{Y}}$.*

En effet, d'après § 38, II (2), l'ensemble $\underset{yY}{E}\, (y \in Y)$ est fermé et d'après § 38, VI, 1, l'opération $g(f, x) = f(x)$ est continue (sur l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$). L'ensemble

$$\underset{xfY}{E}\, [x \in F(f, Y)] = \underset{xfY}{E}\, [f(x) \in Y]$$

est donc aussi fermé.

III. Opérations sur les fonctions semi-continues.

1. *Si les fonctions F et G sont s. c. s. au point y, leur somme l'est également.*

Soit, en effet, $y = \lim_{n=\infty} y_n$. On a donc

$$\operatorname{Ls}_{n=\infty} F(y_n) \subset F(y) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ls}_{n=\infty} G(y_n) \subset G(y),$$

d'où (cf. § 25, IV, 3):

$$\operatorname{Ls}_{n=\infty} [F(y_n) + G(y_n)] \subset F(y) + G(y).$$

2. *Si les fonctions F et G sont s. c. i. au point y, leur somme l'est également.*

De façon plus générale: étant donnée une famille $\{F_\iota\}$ de fonctions s. c. i. au point y_0 et en posant $S(y) = \overline{\sum_\iota F_\iota(y)}$, la fonction S est s. c. i. au point y_0.

Soit $y_0 = \lim_{n=\infty} y_n$. Donc $F_\iota(y_0) \subset \operatorname{Li}_{n=\infty} F_\iota(y_n)$, d'où (cf. § 25, II, 3a):

$$\sum_\iota F_\iota(y_0) \subset \sum_\iota \operatorname{Li}_{n=\infty} F_\iota(y_n) \subset \operatorname{Li}_{n=\infty} \Big[\sum_\iota F_\iota(y_n)\Big] = \operatorname{Li}_{n=\infty} \overline{\sum_\iota F_\iota(y_n)} = \operatorname{Li}_{n=\infty} S(y_n)$$

et par conséquent $S(y_0) \subset \operatorname{Li}_{n=\infty} S(y_n)$.

3. *Le produit (non vide) de fonctions s. c. s. au point y est s. c. s. au point y.*

En particulier, *la fonction $F(X, Y) = X \cdot Y$ est s. c. s. sur l'ensemble $\underset{XY}{E}\, (X \cdot Y \neq 0)$, les variables X et Y parcourant l'espace $2^{\mathcal{X}}$.*

Car la formule $\operatorname{Ls}_{n=\infty} F_\iota(y_n) \subset F_\iota(y)$ implique (cf. § 25, IV, 4a):

$$\operatorname{Ls}_{n=\infty} \prod_\iota F_\iota(y_n) \subset \prod_\iota \operatorname{Ls}_{n=\infty} F_\iota(y_n) \subset \prod_\iota F_\iota(y).$$

Remarque. La fonction $X\cdot Y$ n'est pas en général continue.

Soient, en effet, $\mathfrak{X}=\mathcal{J}$, A = l'ensemble composé des points 0 et 1 et X_n = l'intervalle $(1/n, 1)$. Il vient

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}(X_n\cdot A)=(1) \quad\text{et}\quad (\operatorname*{Lim}_{n=\infty} X_n)\cdot A = A.$$

4. *Si F est s. c. i. et G est s. c. s. au point y_0, la fonction $\overline{F(y)-G(y)}$ (supposée non vide) est s. c. i. au point y_0.*

En particulier, *la fonction $\overline{X-Y}$ est s. c. i. sur l'ensemble $\underset{XY}{E}(\overline{X-Y}\neq 0)$ où $X, Y\in 2^{\mathfrak{X}}$.*

Car les inclusions $F(y_0)\subset \operatorname*{Li}_{n=\infty} F(y_n)$ et $\operatorname*{Ls}_{n=\infty} G(y_n)\subset G(y_0)$ entraînent (cf. § 25, V, 2):

$$F(y_0)-G(y_0)\subset \operatorname*{Li}_{n=\infty}F(y_n)-\operatorname*{Ls}_{n=\infty}G(y_n)\subset\operatorname*{Li}_{n=\infty}[F(y_n)-G(y_n)]=\overline{\operatorname*{Li}_{n=\infty}F(y_n)-G(y_n)}.$$

Remarque. La fonction $\overline{X-Y}$ n'est pas en général continue.

Soient, en effet, $\mathfrak{X}$ l'intervalle $\mathcal{J}$ augmenté du point 2, et X_n l'intervalle $(1/n, 1)$. Il vient

$$\overline{\mathfrak{X}-X_n}=(0,1/n)+(2),\quad \text{d'où}\quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\overline{\mathfrak{X}-X_n}=(0)+(2),$$

tandis que $\overline{\mathfrak{X}-\operatorname*{Lim}_{n=\infty}X_n}=\overline{\mathfrak{X}-\mathcal{J}}=(2)$.

5. *La limite d'une suite décroissante (croissante) de fonctions s. c. s. (s. c. i.) est s. c. s. (s. c. i.).*

En effet (cf. § 25, VI, 8 et 7):

$$\text{si}\quad F_1(y)\supset F_2(y)\supset\dots,\quad \text{on a}\quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} F_n(y)=\prod_n F_n(y),$$

et

$$\text{si}\quad F_1(y)\subset F_2(y)\subset\dots,\quad \text{on a}\quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} F_n(y)=\overline{\sum_n F_n(y)},$$

d'où la conclusion demandée en vertu de 3 et 2.

IV. Semi-continuité et fonctions de première classe de Baire.

1. *Toute fonction semi-continue F est de première classe.*

Il s'agit de démontrer que $\boldsymbol{K}$ étant un sous-ensemble fermé de l'espace $2^{\mathfrak{X}}$, l'ensemble $\underset{y}{E}[F(y)\in \boldsymbol{K}]$ est un G_δ. En tenant compte de § 37, V, 5 (remarque), on peut admettre que $\boldsymbol{K}$ est une sphère fermée; soit A le centre de $\boldsymbol{K}$ et η son rayon. On a donc (cf. § 15, VII (2))

$$\{X\in \boldsymbol{K}\}\equiv\{\operatorname{dist}(A,X)\leqslant\eta\}\equiv\{A\subset R_\eta(X)\quad\text{et}\quad X\subset R_\eta(A)\},$$

où

$$R_\eta(X)=\underset{x}{E}[\varrho(x,X)\leqslant\eta]=\underset{x}{E}\sum_{x'}[(x'\in X)(|x-x'|\leqslant\eta)].$$

Remarquons d'abord que

$$\{A\subset R_\eta[F(y)]\}\equiv\prod_x\Big\{(x\in A)\to\big[x\in R_\eta(F(y))\big]\Big\}\equiv$$

$$\equiv\prod_x\{(x\in\mathfrak{X}-A)+\sum_{x'}[x'\in F(y)]\,[|x-x'|\leqslant\eta]\}.$$

Si F est s. c. s., l'ensemble $\underset{x'y}{E}[x'\in F(y)]$ est fermé (d'après II, 1). Il en est donc de même de l'ensemble

$$\underset{xx'y}{E}\{[x'\in F(y)]\,[|x-x'|\leqslant\eta]\},$$

ainsi que de sa projection (cf. § 37, III, 9):

$$\underset{xy}{E}\sum_{x'}\{[x'\in F(y)]\,[|x-x'|\leqslant\eta]\};$$

celle-ci, augmentée de l'ensemble ouvert $\underset{xy}{E}(x\in\mathfrak{X}-A)$, est un G_δ et d'après § 37, III, 9, il en est encore de même de l'ensemble

$$\underset{y}{E}\{A\subset R_\eta[F(y)]\}.$$

$R_\eta(A)$ étant fermé, donc un G_δ, l'ensemble $\underset{y}{E}\{F(y)\subset R_\eta(A)\}$ est d'après II, 3 aussi un G_δ, et il en est de même de l'ensemble

$$\underset{y}{E}[F(y)\in \boldsymbol{K}]=\underset{y}{E}\{A\subset R_\eta[F(y)]\}\cdot\underset{y}{E}\{F(y)\subset R_\eta(A)\}.$$

Passons au cas où F est s. c. i. Posons

$$S_\eta(X)=\underset{x}{E}[\varrho(x,X)<\eta],\quad \text{d'où}\quad R_\eta(X)=\prod_{n=1}^{\infty}S_{\eta+1/n}(X).$$

Par suite

$$\{F(y)\in \boldsymbol{K}\}\equiv\{A\subset\prod_n S_{\eta+1/n}[F(y)]\quad\text{et}\quad F(y)\subset R_\eta(A)\}.$$

L'ensemble $\underset{y}{E}[F(y)\subset R_\eta(A)]$ étant fermé d'après II, 3, il reste à prouver que l'ensemble

$$\underset{y}{E}\{A\subset\prod_n S_{\eta+1/n}[F(y)]\}=\underset{y}{E}\prod_x\Big\{(x\in\mathfrak{X}-A)+\prod_n\big[x\in S_{\eta+1/n}(F(y))\big]\Big\}$$

est un G_δ. Or cela résulte facilement de § 37, III, 9, l'ensemble

$$\underset{xy}{E}\{x \in S_{\eta+1/n}[F(y)]\} = \underset{xy}{E}\{\varrho[x, F(y)] < \eta + 1/n\}$$

étant ouvert (d'après II, 2).

2. *Les points de discontinuité d'une fonction semi-continue constituent un ensemble F_σ de I-e catégorie. Donc, si l'espace $\mathcal{Y}$ est complet, l'ensemble des points de continuité est dense dans $\mathcal{Y}$.*

Car ces propriétés appartiennent à toute fonction de I-e classe. Cf. § 27, X, th. 1 et § 30, VII.

Applications aux ensembles boreliens[1].

3. *Soient D un sous-ensemble fermé du produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ et $F(y)$ son intersection horizontale*:

$$(1)\qquad F(y) = \underset{x}{E}\,[(x,y) \in D].$$

$\boldsymbol{P}$ étant un sous-ensemble borelien de l'espace $2^{\mathcal{X}}$, l'ensemble $\underset{y}{E}\,[F(y) \in \boldsymbol{P}]$ est borelien.

En effet, $F(y)$ étant s. c. s. (d'après II, 4), donc de I-e classe de Baire, l'ensemble

$$F^{-1}(\boldsymbol{P}) = \underset{y}{E}\,[F(y) \in \boldsymbol{P}]$$

est borelien.

4[2]. *Les familles: $\boldsymbol{P}_1$ des ensembles fermés dénombrables (non vides) et $\boldsymbol{P}_2$ des ensembles fermés (non vides) composés exclusivement de nombres rationnels sont non boreliennes dans l'espace $2^{\mathcal{J}}$.*

Soit A un ensemble analytique non borelien dense dans l'intervalle $\mathcal{J}$ (cf. § 34, VI). Nous allons définir dans le carré $\mathcal{J}^2$ un ensemble fermé D tel que l'égalité (1) implique

$$(2)\qquad \underset{y}{E}\,[F(y) \in \boldsymbol{P}_1] = \mathcal{J} - A = \underset{y}{E}\,[F(y) \in \boldsymbol{P}_2].$$

On en conclura en vertu de 3 que les ensembles $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{P}_2$ sont non boreliens.

[1]) Cf. la note de M. Szpilrajn-Marczewski et de moi-même *Sur les cribles fermés et leurs applications*, Fund. Math. **18** (1931), p. 160.

[2]) Cf. W. Hurewicz, Fund. Math. **15** (1930), p. 4.

Soit f une transformation continue de $\mathcal{N}$ en A et qui admet chacune de ses valeurs une infinité indénombrable de fois (cf. § 35, VII, rem. 1)[1]). Posons (dans $\mathcal{J}^2$)

$$D = \overline{\underset{xy}{E}\,[y = f(x)]}.$$

La fonction f étant continue, l'ensemble $\underset{xy}{E}\,[y=f(x)]$ est fermé dans $\mathcal{N}\times\mathcal{J}$, c.-à-d. que

$$\underset{xy}{E}\,[y = f(x)] = D\cdot(\mathcal{N}\times\mathcal{J}).$$

Les conditions $x \in \mathcal{N}$ et $(x,y) \in D$ entraînent donc $y = f(x)$, d'où $y \in A$. Autrement dit, si $y \in \mathcal{J} - A$, la condition $(x,y) \in D$ entraîne $x \in \mathcal{J}-\mathcal{N}$; c.-à-d. que $F(y) \subset \mathcal{J}-\mathcal{N}$; l'ensemble $F(y)$ se compose donc exclusivement de nombres rationnels.

De plus $F(y) \neq 0$. En effet, comme $\bar{A} = \mathcal{J}$, on a l'égalité $y = \lim_{n=\infty} y_n$ où $y_n \in A$. Il existe donc un $x_n \in \mathcal{N}$ tel que $y_n = f(x_n)$, d'où $(x_n, y_n) \in D$. La suite $\{x_n\}$ pouvant être supposée convergente: $\lim_{n=\infty} x_n = x$, il vient $(x,y) \in D$, d'où $x \in F(y)$.

On voit ainsi que:

$$y \in \mathcal{J} - A \quad \text{entraîne} \quad F(y) \in \boldsymbol{P}_2 \subset \boldsymbol{P}_1.$$

Réciproquement, si $y \in A$, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est indénombrable et il en est de même de $F(y)$ puisque $f^{-1}(y) \subset F(y)$. Il en résulte que $F(y)$ *non-*$\in \boldsymbol{P}_1 \supset \boldsymbol{P}_2$. La double égalité (2) se trouve ainsi établie.

Exemples des fonctions de II-e classe.

La fonction $\mathrm{Fr}\,(X) = X\cdot\overline{\mathcal{X}-X}$ *est une fonction de II-e classe* (définie pour tout sous-ensemble fermé X de l'espace compact $\mathcal{X}$ tel que $\mathrm{Fr}\,(X) \neq 0$).

Elle est, en effet, la superposition de deux fonctions de I-e classe (d'après III, 3 et 4). On prouve cependant que cette fonction n'est pas de I-e classe[2]).

Un autre exemple d'une fonction qui est de II-e classe sans être de I-e classe est le dérivé $X^{\text{`}}$ de X (l'ensemble des points d'accumulation de X), considéré comme fonction de X (X étant un sous-ensemble fermé infini de l'espace compact $\mathcal{X}$)[3]).

[1]) La dernière hypothèse est superflue pour démontrer que l'ensemble $\boldsymbol{P}_2$ est non borelien.

[2]) Voir ma note citée de Fund. Math. **18**, p. 156.

[3]) Ibidem, p. 157.

V. Décompositions semi-continues [1]. *Définition.* Une décomposition de l'espace en ensembles non vides et disjoints (appelons les *tranches* de la décomposition) est dite *semi-continue* (supérieurement), lorsque, quel que soit l'ensemble fermé A, la somme des tranches T telles que $AT \neq 0$ constitue un ensemble fermé; autrement dit, lorsque, quel que soit l'ensemble ouvert G, la somme des tranches contenues dans G constitue un ensemble ouvert.

Les tranches sont évidemment des ensembles fermés (car on peut substituer à A des points individuels).

II 8 1.! *Étant donnée une fonction semi-continue supérieurement $F(y)$, définie sur un espace ~~compact~~ $\mathcal{Y}$ et à valeurs disjointes, c.-à-d. que*

1^0 $F(y)\cdot F(y_1)=0$ *pour* $y \neq y_1$,

2^0 $\mathcal{X}=\sum_{y \in \mathcal{Y}} F(y)$,

— *l'égalité* 2^0 *présente une décomposition semi-continue de* $\mathcal{X}$.

En effet, A étant un ensemble fermé et S étant la somme de tous les ensembles $F(y)$ tels que $A \cdot F(y) \neq 0$, on a

$$(x \in S) \equiv \sum_y [x \in F(y)][A \cdot F(y) \neq 0] \equiv \sum_{yx'} [x \in F(y)][x' \in F(y)][x' \in A].$$

L'ensemble $\underset{xy}{E}[x \in F(y)]$ étant fermé (d'après II, 1) et les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant compacts, S est fermé (selon § 37, III, 9).

En vertu de II, 5, le théorème 1 implique que

2.! *f étant une fonction continue et $f(\mathcal{X})=\mathcal{Y}$, la décomposition*

$$\mathcal{X}=\sum_{y \in \mathcal{Y}} f^{-1}(y)$$

est semi-continue.

Réciproquement, on a le théorème suivant:

3.! *Théorème d'Alexandroff* [2]. *Étant donnée une décomposition semi-continue d'un espace $\mathcal{X}$, il existe un espace compact $\mathcal{Y}$ et une fonction continue f qui transforme $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ de façon que les tranches de la décomposition coïncident avec les ensembles $f^{-1}(y)$.*

---

[1]) Voir R. L. Moore, *Concerning upper semi-continuous collections of continua...*, Proc. Nat. Acad. Sc. **10** (1924), p. 350, P. Alexandroff, *Über stetige Abbildungen kompakter Räume*, Proc. Akad. Amsterdam **28** (1925), p. 997 et Math. Ann. **96** (1926), p. 555, ma note *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts*, Fund. Math. **11** (1928), p. 169. Cf. aussi G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Chap. VII, Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, chap. I, § 5, où des décompositions d'espaces topologiques (non nécessairement compacts) sont considérées.

[2]) Op. cit.

A savoir: $\mathcal{Y}$ est l'espace ayant pour ses points les tranches de la décomposition donnée, $f(x)$ désigne la tranche qui contient le point x, et la fermeture dans l'espace $\mathcal{Y}$ est définie par la formule

$$\overline{Y}=f[\overline{f^{-1}(Y)}] \quad \text{pour} \quad Y \subset \mathcal{Y}. \tag{1}$$

Remarquons d'abord que $f^{-1}(Y)$ est la somme des tranches appartenant à la famille Y; donc, en particulier, $f^{-1}f(A)$ est la somme de toutes les tranches T telles que $TA \neq 0$. Le théorème se réduit donc au lemme suivant:

Lemme. Soit $y=f(x)$ une transformation de l'espace $\mathcal{X}$ en un ensemble $\mathcal{Y}$ (composé d'éléments arbitraires) telle que

1^0: *F étant un ensemble fermé, $f^{-1}f(F)$ l'est également, c.-à-d. que*

$$\overline{f^{-1}f(\overline{X})}=f^{-1}f(\overline{X}), \quad \textit{quel que soit } X, \tag{2}$$

2^0: *si $q \in \mathcal{Y}$, $f^{-1}(q)$ est un ensemble fermé.*

En définissant la fermeture dans l'espace $\mathcal{Y}$ par l'égalité (1), *$\mathcal{Y}$ devient un espace métrisable et séparable et f — une fonction continue.*

Démonstration du lemme. En vertu du théorème d'Urysohn (§ 17, IV), il s'agit de démontrer que les axiomes I—V sont vérifiés dans l'espace $\mathcal{Y}$.

I. $\overline{Y_1+Y_2}=f[\overline{f^{-1}(Y_1+Y_2)}]=f[\overline{f^{-1}(Y_1)}]+f[\overline{f^{-1}(Y_2)}]=\overline{Y}_1+\overline{Y}_2$ [1].

II. Si Y est vide ou se réduit à un seul élément, on a

$$\overline{Y}=f[\overline{f^{-1}(Y)}]=ff^{-1}(Y)=Y,$$

car $f^{-1}(Y)$ est fermé d'après 2^0.

III. $\overline{\overline{Y}}=f[\overline{f^{-1}(\overline{Y})}]=f\{\overline{f^{-1}f[\overline{f^{-1}(Y)}]}\}=ff^{-1}f[\overline{f^{-1}(Y)}]=f[\overline{f^{-1}(Y)}]=\overline{Y}$

en vertu de (2) et (1).

Remarquons à présent que

(3) si X est fermé, $f(X)$ l'est également,

(4) si Y est fermé (ouvert), $f^{-1}(Y)$ l'est également.

Car, d'une part,

$$\overline{f(\overline{X})}=f[\overline{f^{-1}f(\overline{X})}]=ff^{-1}f(\overline{X})=f(\overline{X})$$

---

[1]) Pour les règles du calcul avec les opérations f et f^{-1}, voir § 3, II.

d'après (1) et 1^0. D'autre part, si $\overline{Y}=Y$, on a

$$f^{-1}(Y)=f^{-1}(\overline{Y})=f^{-1}f\overline{f^{-1}(Y)}\supset\overline{f^{-1}(Y)},$$

d'où $f^{-1}(Y)=\overline{f^{-1}(Y)}$.

IV. Nous allons démontrer l'axiome de séparation dans la forme suivante: étant donnés deux ensembles ouverts Y_1 et Y_2 tels que $Y_1+Y_2=\mathcal{Y}$, il existe deux ensembles fermés F_1 et F_2 tels que

$$(5)\qquad F_1+F_2=\mathcal{Y},\quad F_1\subset Y_1\quad \text{et}\quad F_2\subset Y_2\,^{1}).$$

D'après (4), les ensembles $f^{-1}(Y_1)$ et $f^{-1}(Y_2)$ sont ouverts et $f^{-1}(Y_1)+f^{-1}(Y_2)=\mathcal{X}$. En appliquant l'axiome de séparation à l'espace $\mathcal{X}$, on en déduit (cf. § 16, II, 2) l'existence de deux ensembles fermés X_1 et X_2 tels que

$$X_1\subset f^{-1}(Y_1),\quad X_2\subset f^{-1}(Y_2)\quad \text{et}\quad X_1+X_2=\mathcal{X}.$$

Les ensembles $F_1=f(X_1)$ et $F_2=f(X_2)$ sont fermés d'après (3) et satisfont aux conditions (5).

V. Soient: $R_1,R_2,\dots$ la base de l'espace $\mathcal{X}$ et $S_1,S_2,\dots$ la suite de tous les ensembles qui s'obtiennent par la réunion d'un nombre fini de termes de cette base. Les ensembles

$$Q_n=\mathcal{Y}-f(\mathcal{X}-S_n),\quad n=1,2,\dots,$$

constituent une base de l'espace $\mathcal{Y}$.

Soit, en effet, G un ensemble ouvert dans $\mathcal{Y}$ et $q\in G$. L'espace $\mathcal{X}$ étant compact et les ensembles fermés $f^{-1}(q)$ et $f^{-1}(\mathcal{Y}-G)$ étant disjoints, il existe (cf. § 37, V, 5) un S_n tel que

$$f^{-1}(q)\subset S_n\subset f^{-1}(G).$$

Il reste à démontrer que $q\in Q_n$ et $Q_n\subset G$. Or, la première formule résulte de l'égalité

$$f(\mathcal{X}-S_n)\cdot q=f[(\mathcal{X}-S_n)\cdot f^{-1}(q)]=0$$

et la deuxième — de la formule

$$\mathcal{Y}-G=ff^{-1}(\mathcal{Y}-G)\subset f(\mathcal{X}-S_n)=\mathcal{Y}-Q_n.$$

Enfin, la continuité de la fonction f est une conséquence de (4).

1) Pour en déduire l'axiome de séparation dans sa forme habituelle (§ 16, I) on n'a qu'à considérer les complémentaires des ensembles Y_1, Y_2 et F_1.

Remarques. 1) *L'espace $\mathcal{Y}$ est déterminé, au point de vue topologique, de façon univoque*, c.-à-d. que, si les couples $\mathcal{Y},f$, et $\mathcal{Y}_1,f_1$, satisfont au théorème 3, les espaces $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}_1$ sont homéomorphes.

En effet, en posant $g(y)=f_1f^{-1}(y)$, on définit une transformation de $\mathcal{Y}$ en $\mathcal{Y}_1$, biunivoque et continue. Car, F étant fermé, l'ensemble $g(F)=f_1f^{-1}(F)$ l'est également.

2) *L'égalité* $\lim\limits_{n=\infty} y_n=y$ *équivaut à l'inclusion*

$$(6)\qquad \operatorname*{Ls}_{n=\infty} f^{-1}(y_n)\subset f^{-1}(y).$$

Elle entraîne cette inclusion, car la fonction f^{-1} est semi-continue supérieurement (cf. I, déf. 1).

Admettons, d'autre part, l'inclusion (6) et supposons que $\lim\limits_{n=\infty} y_{k_n}=y'$. Il vient $\operatorname*{Ls}\limits_{n=\infty} f^{-1}(y_{k_n})\subset f^{-1}(y')$. Comme

$$\operatorname*{Ls}_{n=\infty} f^{-1}(y_{k_n})\subset \operatorname*{Ls}_{n=\infty} f^{-1}(y_n)\subset f^{-1}(y),$$

on a $y=y'$, puisque les ensembles $f^{-1}(y)$ sont disjoints.

3) Le théorème suivant, établi dans le § 17, V, 1, se laisse déduire facilement du th. 3:

Étant donné dans un espace métrique séparable $\mathcal{T}$ un ensemble fermé F, on peut réduire F en un seul point p par une transformation continue f de $\mathcal{T}$ qui est une homéomorphie sur $\mathcal{T}-F$ et de façon que p non-$\in f(\mathcal{T}-F)$.

Considérons, en effet, $\mathcal{T}$ comme un sous-ensemble dense d'un espace compact $\mathcal{X}$ et désignons par $\overline{F}$ la fermeture de F dans $\mathcal{X}$. La décomposition de $\mathcal{X}$ en $\overline{F}$ et en points individuels de $\mathcal{X}-\overline{F}$ étant semi-continue, il existe d'après le th. 3 un espace $\mathcal{Y}$ et une fonction $f\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ qui est constante sur $\overline{F}$ et qui est une homéomorphie sur $\mathcal{X}-\overline{F}$. Comme $F=\mathcal{T}\cdot\overline{F}$, la fonction partielle $f|\mathcal{T}$ réduit F en un seul point et est une homéomorphie sur $\mathcal{T}-F$.

4. *Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'une décomposition d'un espace compact en tranches non vides et disjointes soit semi-continue:*

(i) *l'inégalité* $T\cdot\operatorname*{Li}\limits_{n=\infty} T_n\neq 0$ *entraîne* $\operatorname*{Ls}\limits_{n=\infty} T_n\subset T$,

(ii) *si $\{T_n\}$ est une suite convergente de tranches, sa limite est contenue dans une seule tranche.*

En effet, admettons d'abord que la décomposition est semi-continue, donc que les tranches sont de la forme $T=f^{-1}(y)$, où f est une fonction continue. Soit

$$x\in f^{-1}(y)\cdot\operatorname*{Li}_{n=\infty} f^{-1}(y_n),\quad \text{c.-à-d.}\quad f(x)=y\quad\text{et}\quad x=\lim_{n=\infty} x_n\quad\text{où}\quad f(x_n)=y_n.$$

Soit $x'=\lim\limits_{n=\infty} x'_{k_n}$ où $f(x'_{k_n})=y_{k_n}$. Il s'agit de prouver que $x'\in f^{-1}(y)$, c.-à-d. que $f(x')=y$.

Or, la continuité de la fonction f implique que

$$f(x')=\lim_{n=\infty} f(x'_{k_n})=\lim_{n=\infty} y_{k_n}=\lim_{n=\infty} f(x_{k_n})=f(x)=y.$$

Évidemment, (i) entraîne (ii).

Admettons enfin que la condition (ii) est satisfaite et que:

$$A=\bar{A},\quad x=\lim_{n=\infty} x_n,\quad x_n\in T_n,\quad x\in T\quad \text{et}\quad AT_n\neq 0.$$

Il s'agit de prouver que $AT\neq 0$. On peut évidemment supposer que la suite T_n soit convergente (cf. § 25, VIII). La famille des éléments X de $2^{\mathcal{X}}$ tels que $XA\neq 0$ étant fermée (§ 38, II, (5)), il vient

$$A\cdot\mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} T_n\neq 0,\quad \text{d'où}\quad AT\neq 0,$$

car l'ensemble $\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n=\infty} T_n$ étant contenu dans une seule tranche, cette tranche coïncide nécessairement avec T (puisque $x\in T\cdot\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n=\infty} T_n$).

Exemples. Dans les exemples suivants l'espace $\mathcal{Y}$ (nommé aussi *l'hyperespace de la décomposition*) est défini d'une façon géométrique très simple.

1⁰ $\mathcal{X}$ étant un cercle, considérons comme tranches la circonférence A et les points individuels de $\mathcal{X}-A$. L'hyperespace $\mathcal{Y}$ de cette décomposition est *la surface d'une sphère à 3 dimensions*, le pôle nord correspondant à la circonférence.

De façon générale, si l'on décompose un sphéroïde (massif) à $n\geqslant 1$ dimensions en considérant comme tranches la surface (à $n-1$ dimensions) du sphéroïde et les points intérieurs individuels, on parvient à la surface d'un sphéroïde à $n+1$ dimensions.

2⁰ $\mathcal{X}$ étant un cercle, considérons comme tranches les couples de points opposés situés sur la circonférence ainsi que les points intérieurs individuels. $\mathcal{Y}$ est *le plan projectif*.

On parvient de la surface sphérique (à n dimensions) à l'espace projectif en considérant comme tranches les couples des points opposés (on dit aussi: en *identifiant* les points opposés).

3⁰ Soit $\mathcal{X}$ le carré $\mathcal{I}^2$. En identifiant les points opposés (relativement au centre) des côtés verticaux, on obtient *la bande de Möbius*.

En identifiant les points des côtés verticaux ayant la même ordonnée, on obtient *la surface d'un cylindre*.

Si l'on identifie, en outre, les points des côtés horizontaux ayant la même abscisse, on parvient à *la surface du tore*. Dans ce cas, il y a une tranche composée de 4 points (les sommets du carré).

4⁰ *Tout espace compact non vide peut être considéré comme hyperespace d'une décomposition semi-continue de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor*.

Car tout espace compact est image continue de cet ensemble (cf. § 37, VI, 4).

VI. Décompositions continues. Transformations intérieures. Étant donnée une transformation continue $y=f(x)$ de l'espace compact $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, l'ensemble $f^{-1}(y_0)$ est dit *tranche de continuité* de la décomposition

$$\mathcal{X}=\sum_{y\in\mathcal{Y}} f^{-1}(y),$$

lorsque la fonction f^{-1} est continue au point y, c.-à-d. lorsque

$$\lim_{n=\infty} y_n=y_0\quad \text{entraîne}\quad \mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} f^{-1}(y_n)=f^{-1}(y_0).$$

En d'autres termes (cf. V, 3, rem. 2): la tranche T est une tranche de continuité de la décomposition semi-continue, lorsque

$$\mathop{\mathrm{Ls}}_{n=\infty} T_n\subset T\quad \text{entraîne}\quad \mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} T_n=T,$$

quel que soit la suite $\{T_n\}$ de tranches.

Remarques. On démontre facilement que, dans la dernière condition, l'inclusion $\mathop{\mathrm{Ls}}\limits_{n=\infty} T_n\subset T$ peut être remplacée par l'inégalité $T\cdot\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n=\infty} T_n\neq 0$, ainsi que par $T\cdot\mathop{\mathrm{Li}}\limits_{n=\infty} T_n\neq 0$ [1]).

Toute tranche qui se réduit à un point individuel est nécessairement une tranche de continuité.

Dans la décomposition de la surface sphérique à n dimensions en couples de points opposés, toute tranche est une tranche de continuité.

[1]) Voir ma note citée de Fund. Math. **11**, p. 175.

La fonction f^{-1} étant semi-continue, donc de première classe, elle admet des points de continuité (cf. IV, 2)[1]. Par conséquent:

1. *Dans chaque décomposition semi-continue, il existe des tranches de continuité.*

Plus précisément, *l'ensemble des y pour lesquels $f^{-1}(y)$ est une tranche de continuité est un $\boldsymbol{G}_\delta$ dense dans l'espace $\mathcal{Y}$.*

La décomposition est dite *continue* lorsque toutes ses tranches sont des tranches de continuité; c.-à-d. lorsque *la fonction $f^{-1}(y)$ est continue.*

Cette définition peut être exprimée aussi comme suit.

Appelons fonction *intérieure*[2]) toute fonction $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ qui transforme les ensembles ouverts dans $\mathcal{X}$ en ensembles ouverts dans $f(\mathcal{X})$.

Telle est par exemple la projection de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ sur l'axe $\mathcal{X}$.

2. *Pour qu'une transformation continue f de $\mathcal{X}$ en $f(\mathcal{X})$ soit intérieure, il faut et il suffit que la fonction $f^{-1}(y)$, où $y \in f(\mathcal{X})$, soit continue, c.-à-d. que la décomposition $\mathcal{X} = \sum_y f^{-1}(y)$ soit continue*[3]).

On a, en effet, l'identité

$$\underset{y}{E}[f^{-1}(y) \subset F] = \mathcal{Y} - f(\mathcal{X} - F).$$

Soit $F = \overline{F}$. La condition que l'ensemble $\underset{y}{E}[f^{-1}(y) \subset F]$ soit fermé équivaut donc à celle que $f(\mathcal{X} - F)$ soit ouvert; la première équivaut à la continuité de la fonction f^{-1} (d'après II, 3 et 5) et la deuxième à l'hypothèse que f est intérieure.

3. *La continuité de la décomposition (semi-continue) équivaut à l'hypothèse que, quel que soit l'ensemble ouvert A, la somme S des tranches T pour lesquelles on a $AT \neq 0$ est un ensemble ouvert*[4]).

On a, en effet, $S = f^{-1}f(A)$. Donc, en supposant que la fonction f soit intérieure, l'ensemble $f(A)$ est ouvert et, en vertu de la continuité de la fonction f, l'ensemble S est aussi ouvert.

[1]) Cf. aussi L. S. Hill, Bull. Amer. Math. Soc. **32** (1926).

[2]) Notion due à M. Stoïlow; voir Ann. Ec. Norm. Sup. III, **45** (1928). Voir aussi, G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, chap. VIII, § 7.

[3]) Cf. S. Eilenberg, Fund. Math. **24** (1935), p. 174.

[4]) Autrement dit, quel que soit l'ensemble fermé F, la somme des tranches contenues dans F est un ensemble fermé. Les décompositions en ensembles fermés disjoints satisfaisant à cette hypothèse peuvent être nommées *décompositions semi-continues inférieurement.*

Inversement, si l'on suppose que les ensembles A et S soient ouverts, l'identité

$$\mathcal{Y} - f(A) = ff^{-1}[\mathcal{Y} - f(A)] = f[f^{-1}(\mathcal{Y}) - f^{-1}f(A)] = f(\mathcal{X} - S)$$

montre que l'ensemble $\mathcal{Y} - f(A)$ est fermé (puisque f est continue et $\mathcal{X}$ compact), donc que $f(A)$ est ouvert, c.-à-d. que la fonction est intérieure.

Ajoutons, en vue d'applications, le théorème suivant:

4[1]). *f étant une transformation intérieure de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ à tranches dénombrables (ou, plus généralement, non denses-en-soi), il existe une suite d'ensembles fermés $F_1, F_2, \dots$ tels que $\sum_n f(F_n) = \mathcal{Y}$ et que, pour tout n, la fonction partielle $f|F_n$ est une homéomorphie.*

Il suffit de définir une suite $\{A_m\}$ d'ensembles $\boldsymbol{F}_\sigma$ tels que

$$\sum_m f(A_m) = \mathcal{Y} \tag{1}$$

et que les fonctions partielles $f|A_m$ soient biunivoques; car en posant

$$A_m = \sum_i A_m^i \quad \text{où} \quad \overline{A_m^i} = A_m^i,$$

et en rangeant la double suite $\{A_m^i\}$ en une suite simple $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$, on parviendra à la suite demandée.

Or, $R_1, R_2, \dots$ désignant la base de l'espace $\mathcal{X}$, posons

$$A_m = \underset{x}{E} \sum_y [R_m \cdot f^{-1}(y) = (x)].$$

L'ensemble $\underset{xX}{E}[R_m \cdot X = (x)]$ étant un $\boldsymbol{F}_\sigma$ dans l'espace $\mathcal{X} \times 2^{\mathcal{X}}$ (cf. § 38, II, 5), l'ensemble

$$\underset{xy}{E}[R_m \cdot f^{-1}(y) = (x)]$$

l'est également, car la fonction f^{-1} est continue (d'après 2). Comme projection de celui-ci, l'ensemble A_m est aussi un $\boldsymbol{F}_\sigma$ (selon § 37, III, 9).

Pour établir (1), posons $y \in \mathcal{Y}$. L'ensemble $f^{-1}(y)$ contient par hypothèse un point isolé x. Il existe donc un m tel que

$$R_m \cdot f^{-1}(y) = (x), \quad \text{d'où} \quad x \in A_m \quad \text{et} \quad y \in f(A_m).$$

[1]) Cf. P. Alexandroff, C. R. Acad. U. R. R. S. 1936, p. 283.

Enfin, la fonction $f|A_m$ est biunivoque. Soient, en effet, $x,x' \epsilon A_m$ et $f(x)=f(x')$. D'après la définition de A_m, il existe un y et un y' tels que

(2) $$R_m \cdot f^{-1}(y)=(x),$$ (3) $$R_m \cdot f^{-1}(y')=(x').$$

Donc $y=f(x)=f(x')=y'$ et, en substituant y à y' dans (3), on conclut de (2) et (3) que $x=x'$, donc que $f|A_m$ est biunivoque.

VII. Applications aux espaces localement compacts.

Un espace (métrique) $\mathcal{X}$ est dit *localement compact au point* p, lorsqu'il contient un entourage compact de ce point.

Ainsi, par exemple, tout sous-ensemble ouvert d'un espace compact est localement compact. L'espace euclidien à n dimensions est localement compact.

1. *Pour qu'un sous-ensemble* Y *d'un espace compact* $\mathcal{X}$ *soit localement compact au point* p, *il faut et il suffit que* Y *soit localement fermé en ce point* (c.-à-d. qu'il existe un entourage E de p tel que EY est fermé).

Admettons, en effet, que Y est localement compact au point p. Il existe donc un entourage compact A de p relatif à Y. En désignant par I l'intérieur de A relatif à Y, les ensembles I et $Y-\bar{I}$ sont séparés. Il existe par conséquent (cf. § 16, V, 6) un ensemble ouvert G (dans $\mathcal{X}$) tel que

$$I \subset G \quad \text{et} \quad \bar{G} Y \subset \bar{I}.$$

L'ensemble A étant compact, donc fermé, il vient

$$\bar{I} \subset A \subset Y, \quad \text{d'où} \quad \bar{I}=\bar{G}Y.$$

L'ensemble $E=\bar{G}$ est donc l'entourage demandé de p.

Réciproquement, si E est un entourage de p tel que EY est fermé, EY est un entourage compact de p relatif à Y.

2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble* Y *d'un espace compact* $\mathcal{X}$ *soit localement compact est qu'il soit différence de deux ensembles fermés*; ou encore, que *l'ensemble* $\bar{Y}-Y$ *soit fermé.*

Car cette condition équivaut à l'hypothèse que Y est localement fermé en chaque point (cf. § 12, IX, 2°).

3 [1]). *Tout espace métrique séparable et localement compact* $\mathcal{X}$ *est homéomorphe à un espace compact privé d'un seul point.*

[1]) Théorème d'Alexandroff; voir Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, p. 93.

La compacité locale étant un invariant topologique, l'espace $\mathcal{X}$ peut être conçu, en vertu du th. d'Urysohn, comme sous-ensemble localement compact d'un espace compact $\mathcal{Y}$ (du cube de Hilbert, par exemple). L'ensemble $\bar{\mathcal{X}}$ est donc compact et l'ensemble $\bar{\mathcal{X}}-\mathcal{X}$ fermé (d'après 2). Il existe par conséquent (d'après V, rem. 3) une transformation continue f de $\bar{\mathcal{X}}$ qui transforme l'ensemble $\bar{\mathcal{X}}-\mathcal{X}$ en un point p *non*-ϵ $f(\mathcal{X})$ et qui est une homéomorphie sur $\mathcal{X}$. Il vient

$$\mathcal{X} \underset{\text{top}}{=} f(\bar{\mathcal{X}})-p.$$

La compactification des espaces localement compacts par l'adjonction d'un seul point est une généralisation du procédé bien connu de l'adjonction du *point à l'infini*, qui transforme la droite illimitée $\mathcal{E}$ en la circonférence $\mathcal{S}$ (ou plus généralement, l'espace $\mathcal{E}^n$ en $\mathcal{S}_n$).

Nous déduirons du th. 3 les deux suivants:

4. *Pour qu'un espace métrique séparable* $\mathcal{X}$ *soit localement compact, il faut et il suffit qu'il contienne une suite d'ensembles compacts* $F_1, F_2, \dots$ *tels que*

(1) $$\mathcal{X}=F_1+F_2+\dots \quad \textit{et} \quad F_n \subset \operatorname{Int}(F_{n+1}).$$

En effet, $\mathcal{X}$ étant supposé localement compact, soit $\mathcal{X}^*$ l'espace $\mathcal{X}$ compactifié par l'adjonction d'un seul point. $\mathcal{X}$ étant ouvert dans l'espace $\mathcal{X}^*$, il existe une suite d'ensembles ouverts $G_1, G_2, \dots$ tels que (cf. § 37, V, 5 (1)):

$$\mathcal{X}=G_1+G_2+\dots \quad \text{et} \quad \overline{G_n} \subset G_{n+1}.$$

En posant $F_n=\overline{G_n}$, les conditions (1) se trouvent donc vérifiées.

Réciproquement, en supposant les conditions (1) vérifiées, à tout point p correspond un F_n qui le contient; F_{n+1} est donc un entourage compact de p.

Remarque. Les espaces-sommes d'une série d'ensembles compacts sont nommés *semi-compacts*. Ils ne sont pas nécessairement localement compacts.

5 [1]). *Tout espace métrique séparable et localement compact se laisse transformer de façon biunivoque et continue en un espace compact.*

En vertu du th. 3, la démonstration se réduit à prouver que $\mathcal{X}$ étant un espace compact et p étant un point de $\mathcal{X}$, il existe une transformation continue f de $\mathcal{X}$, qui est biunivoque sur $\mathcal{X}-p$ et telle que $f(\mathcal{X}-p)=f(\mathcal{X})$.

[1]) Théorème dû à M. Sikorski.

Telle est, en effet, toute fonction continue f qui réduit en un seul point le couple de points (a,p) (où a est un point de $\mathfrak{X}-p$ donné en avance) et qui est biunivoque sur $\mathfrak{X}-p$ (cf. V, rem. 3).

§ 40. Problèmes de la dimension (suite).

L'espace $\mathfrak{X}$ du § 40 est supposé métrique séparable.

I. Transformations d'ordre k. Un point y est dit *valeur d'ordre* k d'une fonction f lorsque l'ensemble $f^{-1}(y)$ se compose de k éléments. Une fonction est dite *d'ordre* $\leqslant k$ lorsque chacune de ses valeurs est d'ordre $\leqslant k$.

1. *Lemme. Soient* $A_0,\dots,A_r$ *un système de sous-ensembles disjoints d'un espace* $\mathfrak{X}$ *et* f *une transformation de* $\mathfrak{X}$ *d'ordre* $k\geqslant r$. *En posant*

$$B=f(A_0)\cdot\ldots\cdot f(A_r), \tag{1}$$

la fonction partielle $f_i=f|[A_i\cdot f^{-1}(B)]$ *est d'ordre* $\leqslant k-r$.

En outre, *en posant* $C_i=f^{-1}f(A_i)-A_i$, *la fonction partielle* $f|C_i$ *est d'ordre* $\leqslant k-1$.

Soit, en effet, $y\in f[A_i\cdot f^{-1}(B)]$. Comme (cf. § 3, II, 13):

$$f[A_i\cdot f^{-1}(B)]=B\cdot f(A_i)=B, \tag{2}$$

il existe un système de $r+1$ points $x_0,\dots,x_r$ tels que

$$x_0\in A_0,\quad \dots,\quad x_r\in A_r\quad \text{et}\quad y=f(x_0)=\ldots=f(x_r).$$

Les ensembles $A_0,\dots,A_r$ étant disjoints, l'ensemble $f^{-1}(y)\cdot A_i$ et, à plus forte raison, l'ensemble

$$f^{-1}(y)\cdot A_i\cdot f^{-1}(B)\quad \text{c.-à-d.}\quad f_i^{-1}(y)$$

(cf. § 3, II, 14) contient $k-r$ points au plus.

De façon analogue, si $y\in f(C_i)=f(A_i)\cdot f(\mathfrak{X}-A_i)$ (cf. § 3, II, 13), y est un point d'ordre $\leqslant k-1$ de la fonction $f|\mathfrak{X}-A_i$, donc de $f|C_i$.

2. *Théorème de Hurewicz*[1]). f *étant une transformation continue d'ordre* $\leqslant k$ *d'un espace compact* $\mathfrak{X}$ (*où* $k\geqslant 1$), *on a*

$$\dim f(\mathfrak{X})\leqslant \dim\mathfrak{X}+k-1.$$

De façon plus générale, $A_0,\dots,A_r$ (*où* $0\leqslant r\leqslant k$) *étant un système d'ensembles fermés disjoints, on a*

$$\dim[f(A_0)\cdot\ldots\cdot f(A_r)]\leqslant \dim A_i+k-r-1.$$

[1]) Proc. Acad. Amsterdam **30** (1927), p. 164.

La première partie du théorème sera démontrée par induction. Soit $\dim\mathfrak{X}=n$.

Le théorème étant évident dans le cas où soit $n=-1$, soit $k=1$, admettons qu'il est vrai pour $n-1$ quel que soit k, ainsi que pour le couple n et k_0-1.

Soient $y\in f(\mathfrak{X})$ et S une sphère ouverte de centre y. Il s'agit de définir un entourage E de y (dans $f(\mathfrak{X})$) tel que

$$E\subset S\quad \text{et}\quad \dim \mathrm{Fr}(E)\leqslant n+k_0-2.$$

D'après le th. 3 du § 22, II, il existe dans l'espace n-dimensionnel $\mathfrak{X}$ un ensemble ouvert G tel que

$$f^{-1}(y)\subset G,\quad \bar{G}\subset f^{-1}(S)\quad \text{et}\quad \dim(\bar{G}-G)\leqslant n-1.$$

Posons $E=f(\bar{G})$. Il vient

$$\mathrm{Fr}\,(E)=\mathrm{Fr}\,[f(\bar{G})]=f(\bar{G})\cdot\overline{f(\mathfrak{X})-f(\bar{G})}\subset f(\bar{G})\cdot\overline{f(\mathfrak{X})-f(G)}\subset$$
$$\subset f(\bar{G})\cdot\overline{f(\mathfrak{X}-G)}=f(\bar{G})\cdot f(\mathfrak{X}-G),$$

puisque $f(\mathfrak{X})-f(G)\subset f(\mathfrak{X}-G)$ (cf. § 3, II, 3).

On a $y\in E$, car $f^{-1}(y)\subset G$, d'où $y\in f(G)\subset E$.

D'autre part, y *non-*$\in \mathrm{Fr}\,(E)$, car

$$\mathfrak{X}-G\subset\mathfrak{X}-f^{-1}(y)=f^{-1}[f(\mathfrak{X})-y],$$

d'où $f(\mathfrak{X}-G)\subset f(\mathfrak{X})-y$, donc y *non-*$\in f(\mathfrak{X}-G)\supset \mathrm{Fr}\,(E)$.

Ainsi E est un entourage de y. Enfin (cf. § 3, II, 13):

$$f(\bar{G})\cdot f(\mathfrak{X}-G)=f[\bar{G}\cdot f^{-1}f(\mathfrak{X}-G)]=$$
$$=f[(\bar{G}-G)\cdot f^{-1}f(\mathfrak{X}-G)+G\cdot f^{-1}f(\mathfrak{X}-G)]=$$
$$=f[(\bar{G}-G)\cdot f^{-1}f(\mathfrak{X}-G)]+\sum_{m=1}^{\infty}f[F_m\cdot f^{-1}f(\mathfrak{X}-G)],$$

en mettant G sous la forme:

$$G=F_1+F_2+\ldots\quad \text{où}\quad F_m=\bar{F}_m.$$

L'inégalité $\dim(\bar{G}-G)\leqslant n-1$ implique par hypothèse que

$$\dim f[(\bar{G}-G)\cdot f^{-1}f(\mathfrak{X}-G)]\leqslant n+k_0-2,$$

et le fait, que f est d'ordre $\leqslant k_0-1$ sur $G\cdot f^{-1}f(\mathfrak{X}-G)$ (cf. la deuxième partie du lemme avec $A_i=\mathfrak{X}-G$), entraîne

$$\dim f[F_m\cdot f^{-1}f(\mathfrak{X}-G)]\leqslant n+k_0-2.$$

D'après le théorème d'addition (§ 22, I, th. 1), il vient

$$\dim [f(\bar{G})\cdot f(\mathcal{X}-G)] \leqslant n+k_0-2,$$

d'où

$$\dim \mathrm{Fr}(E) \leqslant n+k_0-2.$$

La deuxième partie du théorème est une conséquence de la première, car on a d'après le lemme et les formules (1) et (2):

$$\dim B = \dim f[A_i\cdot f^{-1}(B)] \leqslant$$
$$\leqslant \dim [A_i\cdot f^{-1}(B)]+k-r-1 \leqslant \dim A_i+k-r-1.$$

II. Représentation paramétrique des espaces parfaits et compacts de dimension n sur l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor [1]**.**

Le théorème 4 du § 37, VI, d'après lequel tout espace compact admet une représentation paramétrique sur l'ensemble $\mathcal{C}$ (c.-à-d. en est une image continue) se laisse préciser comme suit.

1. *Théorème. Étant donné dans un espace compact $\mathcal{X}$ un ensemble parfait P de dimension n (*ou plus généralement: *satisfaisant à la cond. D_n du § 22, III), il existe une fonction continue qui transforme l'ensemble $\mathcal{C}$ en $\mathcal{X}$ de façon que tout point de P est d'ordre $\leqslant n+1$.*

De plus, *Φ désignant l'ensemble des fonctions f telles que $f\in\mathcal{X}^{\mathcal{C}}$ et $f(\mathcal{C})=\mathcal{X}$, le sous-ensemble Ψ de Φ composé des fonctions qui admettent sur P des points d'ordre $>n+1$ est de I-e catégorie dans Φ.*

L'ensemble Φ étant non vide (§ 37, VI, 4) et fermé (§ 38, VII, 1') dans l'espace complet (§ 38, VI, 6) $\mathcal{X}^{\mathcal{C}}$, il suffit de démontrer la deuxième partie du théorème, puisqu'en vertu du th. de Baire (§ 30, IV) un ensemble de I-e catégorie dans un espace complet non vide ne peut jamais épuiser cet espace.

D'après la définition de Ψ, à tout $f\in\Psi$ correspond un entier positif l et un système de points $x_0,\dots,x_{n+1}$ tels que

$$(1)\qquad f(x_i)=f(x_j)\in P \quad\text{et}\quad |x_i-x_j|\geqslant 1/l \quad\text{pour}\quad 0\leqslant i<j\leqslant n+1.$$

Ψ_l désignant l'ensemble des fonctions f pour lesquelles il existe un système de points $x_0,\dots,x_{n+1}$ assujetti à la condition (1), on a

$$\Psi=\sum_{l=1}^{\infty}\Psi_l.$$

Il s'agit de démontrer que Ψ_l est non-dense dans Φ.

[1]) Voir ma note *Sur l'application des espaces fonctionnels à la Théorie de la dimension*, Fund. Math. **18** (1932), p. 285.

Ψ_l étant — comme on voit facilement [1]) — fermé, le théorème se réduit à démontrer que Ψ_l est un ensemble frontière, c.-à-d. qu'à tout $f\in\Phi$ et à tout $\varepsilon>0$ correspond une fonction f^* telle que

$$(2)\qquad f^*\in\Phi-\Psi_l, \qquad\qquad (3)\qquad |f-f^*|\leqslant\varepsilon.$$

La fonction f étant uniformément continue sur l'espace $\mathcal{C}$, on peut le décomposer en parties fermées disjointes de façon que

$$\mathcal{C}=C_0+\dots+C_m,\quad \delta[f(C_i)]<\varepsilon/2 \quad\text{et}\quad \delta(C_i)<1/l.$$

Désignons par G_i la sphère ouverte de centre $f(C_i)$ et de rayon $\varepsilon/4$. Il vient

$$(4)\qquad \mathcal{X}=G_0+\dots+G_m,\quad f(C_i)\subset G_i\neq 0,\quad \delta(G_i)<\varepsilon.$$

L'ensemble P étant parfait, la condition D_n implique (cf. § 22, IV, th. 4 (5)) l'existence d'un système d'ensembles fermés H_i tels que

$$(5)\qquad \mathcal{X}=H_0+\dots+H_m,\quad 0\neq H_i\subset G_i,\quad P\cdot H_{i_0}\cdot\ldots\cdot H_{i_{n+1}}=0,$$

quels que soient les indices $i_0,\dots,i_{n+1}$ deux à deux différents.

Soit f^* une fonction continue telle que $f^*(C_i)=H_i$. Comme

$$f^*(\mathcal{C})=f^*(C_0)+\dots+f^*(C_m)=\mathcal{X},$$

on a $f^*\in\Phi$. Supposons, par impossible, que $f^*\in\Psi_l$. Soit $x_0,\dots,x_{n+1}$ un système de points assujetti à la condition (1) (en remplaçant f par f^*). Comme $\delta(C_i)<1/l$, aucun C_i ne contient deux points différents appartenant à ce système; il existe donc un système d'indices différents deux à deux: $i_0,\dots,i_{n+1}$ tel que $x_j\in C_{i_j}$, $j=0,\dots,n+1$. D'où $f^*(x_j)\in f^*(C_{i_j})=H_{i_j}$ et comme (cf. (1)) $f^*(x_0)=f^*(x_j)\in P$, il vient

$$f^*(x_0)\in P\cdot H_{i_0}\cdot\ldots\cdot H_{i_{n+1}},$$

contrairement à (5).

Cette contradiction prouve que la formule (2) est vérifiée.

La formule (3) l'est également. En effet, on a pour $x\in C_i$, d'après (4) et (5)

$$f(x)\in f(C_i)\subset G_i \quad\text{et}\quad f^*(x)\in H_i\subset G_i, \quad\text{d'où}\quad |f(x)-f^*(x)|\leqslant\delta(G_i)<\varepsilon,$$

selon (4).

[1]) par exemple, en écrivant en symboles logiques la définition de Ψ_l:

$$(f\in\Psi_l)\equiv\sum_{x_0\dots x_{n+1}}\prod_{ij}\{(0\leqslant i<j\leqslant n+1)\rightarrow[|x_i-x_j|\geqslant 1/l]\,[f(x_i)=f(x_j)\in P]\}.$$

Le th. 1 implique les trois corollaires suivants:

2. *Pour qu'un espace compact et parfait soit de dimension* $\leqslant n$, *il faut et il suffit qu'il admette une représentation paramétrique d'ordre* $\leqslant n+1$ *sur l'ensemble* $\mathcal{C}$.

Ce corollaire résulte du théorème précédent (en posant $\mathcal{X}=P$), rapproché du th. I, 2.

3. *Pour les espaces* $\mathcal{X}$ *compacts*[1], *la cond.* D_n *équivaut à l'inégalité* $\dim \mathcal{X}\leqslant n$.

En tenant compte du th. 4 du § 22, III, il s'agit de démontrer que la cond. D_n entraîne l'inégalité $\dim \mathcal{X}\leqslant n$. Soit $\mathcal{X}_0$ le sous-ensemble parfait de $\mathcal{X}$ tel que $\mathcal{X}-\mathcal{X}_0$ est dénombrable (th. de Cantor-Bendixson, § 18, V). L'ensemble ouvert $\mathcal{X}-\mathcal{X}_0$ étant de dimension $\leqslant 0$, on a (cf. § 22, I, 1) $\dim \mathcal{X}=\dim \mathcal{X}_0$ (sauf le cas où $\mathcal{X}_0=0$, qui peut être omis, car alors $\dim \mathcal{X}\leqslant 0$). Tout se réduit donc à démontrer que $\dim \mathcal{X}_0\leqslant n$, ou encore, en vertu des th. 1 et I, 2, que $\mathcal{X}_0$ satisfait à la cond. D_n.

Or, soit

$$\mathcal{X}_0=A_1+\ldots+A_m \tag{6}$$

une décomposition en ensembles ouverts dans $\mathcal{X}_0$. Soit G_i un ensemble ouvert tel que $A_i=G_i\cdot\mathcal{X}_0$, où $i=1,\ldots,m$. En posant $G_0=\mathcal{X}-\mathcal{X}_0$, il vient

$$\mathcal{X}=G_0+\ldots+G_m.$$

La propriété D_n de $\mathcal{X}$ implique donc l'existence d'un système d'ensembles ouverts $H_0,\ldots,H_m$ tels que

$$\mathcal{X}=H_0+\ldots+H_m,\quad H_i\subset G_i\quad \text{et}\quad H_{i_0}\cdot\ldots\cdot H_{i_{n+1}}=0.$$

En posant $B_i=H_i\cdot\mathcal{X}_0$, il vient $B_0=0$ et

$$\mathcal{X}_0=B_1+\ldots+B_m,\quad B_i\subset A_i,\quad B_{i_0}\cdot\ldots\cdot B_{i_{n+1}}=0.$$

Rapprochées de (6), ces formules prouvent que $\mathcal{X}_0$ satisfait à la condition D_n.

4. *Étant donnée dans un espace compact* $\mathcal{X}$ *une suite d'ensembles parfaits* $P_1,P_2,\ldots$, *il existe une fonction continue qui transforme* $\mathcal{C}$ *en* $\mathcal{X}$ *de façon que chaque point de* P_i $(i=1,2,\ldots)$ *soit d'ordre* $\leqslant \dim P_i+1$.

[1]) Pour les espaces arbitraires, voir VII, 3.

En effet, Ψ désignant l'ensemble des fonctions $f\in\Phi$ (Φ ayant le même sens que dans le th. 1) qui ne satisfont pas aux conditions du th. 4, on a $\Psi=\Psi_1+\Psi_2+\ldots$, où Ψ_i désigne l'ensemble des fonctions $f\in\Phi$ qui admettent sur P_i des points d'ordre $>\dim P_i+1$.

Ψ_i étant, selon 1, de I-e catégorie dans Φ, il en est de même de Ψ. D'où $\Phi-\Psi\neq 0$.

Passons à présent à la représentation paramétrique des ensembles fermés (pas nécessairement parfaits).

5. *Lemme. Tout sous-ensemble fermé* F *d'un espace parfait* $\mathcal{X}$ *est contenu dans un ensemble parfait* P *tel que* $\dim P=\dim F$.

Donc (en substituant à $\mathcal{X}$ le cube $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ de Hilbert), *tout espace compact est contenu topologiquement dans un espace compact et parfait de la même dimension.*

En effet, $p_1,p_2,\ldots$ étant la suite des points isolés de F et P_i étant parfait et tel que $p_i\in P_i$, $\delta(P_i)<1/i$ et $\dim P_i=0$, l'ensemble

$$P=F+P_1+P_2+\ldots$$

est parfait et $\dim P=\dim F$ en vertu du théorème d'addition (§ 22, I, 1).

6. *Tout espace compact de dimension* n *admet une représentation paramétrique d'ordre* $n+1$ *sur un espace compact de dimension* 0[1].

De façon plus générale, le th. 4 *reste vrai, en supprimant l'hypothèse que les ensembles* P_i *soient parfaits (tout en étant fermés) et en remplaçant* $\mathcal{C}$ *par un espace compact* $\mathcal{C}_0$ *de dimension* 0, *convenablement choisi.*

En effet, $\mathcal{X}$ étant considéré comme un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ et P_i^* étant un ensemble parfait (dans $\mathcal{I}^{\aleph_0}$) tel que

$$P_i\subset P_i^*\quad \text{et}\quad \dim P_i=\dim P_i^*,$$

soit, conformément au th. 4, f une transformation continue de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ telle que tout point de P_i^* soit d'ordre $\leqslant\dim P_i^*+1$. En posant $\mathcal{C}_0=f^{-1}(\mathcal{X})$, f transforme $\mathcal{C}_0$ en $\mathcal{X}$ de la façon demandée.

7. G *étant un sous-ensemble ouvert à* n *dimensions d'un espace compact* $\mathcal{X}$, *il existe un espace compact* $\mathcal{C}_0$ *de dimension* 0 *et une transformation continue* f *de* $\mathcal{C}_0$ *en* $\mathcal{X}$ *telle que tout point de* G *est d'ordre* $\leqslant n+1$.

[1]) Pour une généralisation, voir J. H. Roberts, *A theorem on dimension*, Duke Math. Journ. **8** (1941), p. 565.

En effet, $P_1, P_2, \ldots$ étant une suite d'ensembles fermés tels que $G = P_1 + P_2 + \ldots$, on n'a qu'à appliquer la deuxième partie du th. 6.

Remarques. Le th. 2 implique (pour $n=0$) que tout espace de dimension 0, compact et parfait est homéomorphe à l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor. Tous ces espaces constituent donc un seul type topologique et toutes les propriétés topologiques de $\mathcal{C}$, telle que l'homogénéité par exemple, appartiennent à chacun d'eux.

Quant aux espaces compacts dénombrables $\mathcal{X}$, citons le théorème suivant de Mazurkiewicz-Sierpiński[1]: *$\mathcal{X}^{(\alpha)}$ étant le dernier dérivé* (cf. § 19, IV) *non vide de $\mathcal{X}$ et n étant le nombre des éléments de $\mathcal{X}^{(\alpha)}$, l'espace $\mathcal{X}$ est homéomorphe à un sous-ensemble bien ordonné de l'intervalle du type $\omega^\alpha \cdot n + 1$.*

Le couple (α, n) *caractérise* donc le type topologique d'un espace compact dénombrable. Les espaces compacts dénombrables se laissent ranger ainsi en $\aleph_1$ types topologiques. Par contre, les espaces clairsemés (métriques séparables mais non compacts) admettent $\mathfrak{c}$ types topologiques différents[2].

III. Théorèmes de décomposition. Le théorème d'après lequel tout espace n-dimensionnel satisfait à la condition D_n est un cas très particulier du théorème suivant:

1[3]. *Théorème. Etant donnée dans un espace compact*[4] *$\mathcal{X}$ une suite d'ensembles fermés $P_1, P_2, \ldots$, à toute décomposition en ensembles ouverts $\mathcal{X} = G_0 + \ldots + G_m$ correspond une décomposition en ensembles fermés:*

$$\mathcal{X} = F_1 + \ldots + F_m, \quad \textit{où} \quad F_i \subset G_i \quad \textit{et} \quad \dim (P_j \cdot F_{i_0} \cdot \ldots \cdot F_{i_r}) \leqslant \dim P_j - r,$$

quels que soient les entiers: $j = 1, 2, \ldots,\ r \leqslant \dim P_j + 1$ *et* $i_0 < \ldots < i_r \leqslant m$.

En effet, conformément à II, 6, il existe un espace compact $\mathcal{C}_0$ de dimension 0 et une fonction continue f telle que $f(\mathcal{C}_0) = \mathcal{X}$ et que tout point de P_j est d'ordre $\leqslant \dim P_j + 1$.

[1]) Fund. Math. **1** (1920 et 1937), p. 21.

[2]) Ibidem.

[3]) Voir ma note précitée, p. 290. Pour un cas particulier (cas où la suite $P_1, P_2, \ldots$ est finie), voir K. Menger, *Dimensionstheorie* p. 170.

[4]) Comme on verra au N° VII (th. 5), l'hypothèse de compacité peut être omise.

Les ensembles $f^{-1}(G_i)$ étant ouverts, la formule

$$\mathcal{C}_0 = f^{-1}(G_0) + \ldots + f^{-1}(G_m)$$

implique (d'après § 21, II, th. II) l'existence d'un système d'ensembles A_i disjoints, fermés, ouverts et tels que

$$\mathcal{C}_0 = A_0 + \ldots + A_m \quad \text{et} \quad A_i \subset f^{-1}(G_i).$$

Posons $F_i = f(A_i)$. Donc

$$\mathcal{X} = F_0 + \ldots + F_m \quad \text{et} \quad F_i \subset G_i.$$

Enfin, en posant $Q_j = f^{-1}(P_j)$, la fonction partielle $f|Q_j$ est d'ordre $\leqslant \dim P_j + 1$; on a donc, d'après I, 2 (pour $k = \dim P_j + 1$) et en vertu de l'égalité $\dim A_i = 0$:

$$\dim [f(A_{i_0} \cdot Q_j) \cdot \ldots \cdot f(A_{i_r} \cdot Q_j)] \leqslant \dim P_j - r,$$

d'où la conclusion demandée, car (cf. § 3, II, 13)

$$f[A_i \cdot f^{-1}(P_j)] = f(A_i) \cdot P_j = F_i \cdot P_j.$$

2. *Corollaire*[1]). *Tout espace compact de dimension n se laisse décomposer, pour tout $\varepsilon > 0$, en un nombre fini d'ensembles fermés de diamètre $< \varepsilon$ et tels que tout produit de r ensembles est de dimension $\leqslant n - r + 1$ $(r = 1, \ldots, n+2)$.*

Il suffit, en effet, d'admettre que

$$\mathcal{X} = P_1 = P_2 = \ldots \quad \text{et} \quad \delta(G_i) < \varepsilon.$$

Remarques. Ce corollaire résulte d'ailleurs plus directement de la première partie du th. II, 6. En effet, $\mathcal{C}_0$ étant l'espace de dimension 0 et f la fonction en question, on décompose $\mathcal{C}_0$ en ensembles fermés et disjoints $A_0, \ldots, A_m$ suffisamment petits pour que l'on ait $\delta[f(A_i)] < \varepsilon$; la décomposition

$$\mathcal{X} = f(A_0) + \ldots + f(A_m)$$

est alors la décomposition demandée.

De plus, si l'on considère au lieu de ε une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tendant vers 0, on obtient une suite de décompositions satisfaisant au corollaire (pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ etc.) et telles que les termes de la $(i+1)$-ème décomposition se déduisent de ceux de la i-ème par une subdivision. En effet, il suffit à ce but de subdiviser les ensembles $A_0, \ldots, A_m$.

[1]) Voir K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 156.

IV. Degré n-dimensionnel. Le degré n-dimensionnel de l'espace $\mathfrak{X}$, en symbole: $d_n(\mathfrak{X})$, est par définition [1]) la borne inférieure des nombres ε pour lesquels il existe un système fini d'ensembles ouverts $G_0, \ldots, G_m$ tel que

(1) $\mathfrak{X} = G_0 + \ldots + G_m$, (2) $\delta(G_i) < \varepsilon$,

(3) $G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_n} = 0$ pour $i_0 < \ldots < i_n \leqslant m$.

Autrement dit, *l'inégalité* $d_n(\mathfrak{X}) < \varepsilon$ *équivaut à l'existence d'un système d'ensembles ouverts satisfaisant aux conditions* (1)—(3).

En particulier, l'inégalité $d_1(\mathfrak{X}) < \varepsilon$ signifie que $\mathfrak{X}$ est décomposable en un nombre fini d'ensembles fermés-ouverts, disjoints et de diamètre $< \varepsilon$.

La condition (3) peut être remplacée par:

(4) $\overline{G}_{i_0} \cdot \ldots \cdot \overline{G}_{i_n} = 0$ pour $i_0 < \ldots < i_n \leqslant m$.

On peut aussi admettre que les G_i sont *fermés* au lieu de les supposer ouverts (cf. § 16, II).

1. *Si* $\mathfrak{X}$ *est compact, l'égalité* $d_{n+1}(\mathfrak{X}) = 0$ *équivaut à la condition* D_n, donc (cf. II, 3) *à l'inégalité* $\dim \mathfrak{X} \leqslant n$.

En effet, en appliquant la cond. D_n à un recouvrement de $\mathfrak{X}$ par des ensembles ouverts de diamètre $< \varepsilon$, on en tire $d_{n+1}(\mathfrak{X}) = 0$.

Réciproquement, soit $\mathfrak{X} = A_0 + \ldots + A_m$ une décomposition en ensembles ouverts. D'après § 37, VII, 3', il existe un $\varepsilon > 0$ tel que tout ensemble de diamètre $< \varepsilon$ est contenu dans l'un, au moins, des ensembles A_i. En admettant que $d_{n+1}(\mathfrak{X}) = 0$, considérons les ensembles $G_0, \ldots, G_m$ assujettis aux conditions (1)—(3) où $n+1$ est substitué à n. Soient: I_i l'ensemble des indices j tels que $G_j \subset A_i$, H_0 la somme des G_j avec $j \epsilon I_0$ et, en général, H_{i+1} la somme des G_j avec $j \epsilon I_{i+1} - (I_0 + \ldots + I_i)$. Il vient

$$\mathfrak{X} = H_0 + \ldots + H_m, \quad H_i \subset A_i \quad \text{et} \quad H_{i_0} \cdot \ldots \cdot H_{i_{n+1}} = 0,$$

ce qui prouve que $\mathfrak{X}$ satisfait à la cond. D_n.

Le problème si l'égalité $d_{n+1}(\mathfrak{X}) = 0$ entraîne la cond. D_n dans les espaces non compacts reste ouvert.

E étant un sous-ensemble de $\mathfrak{X}$, l'inégalité $d_n(E) < \varepsilon$ signifie qu'il existe un système d'ensembles $A_1, \ldots, A_m$ ouverts dans E et tels que

$$E = A_0 + \ldots + A_m, \quad \delta(A_i) < \varepsilon \quad \text{et} \quad A_{i_0} \cdot \ldots \cdot A_{i_n} = 0.$$

[1]) Cf. le *coefficient d'applatissement* d'Urysohn, Fund. Math. **8** (1926), p. 353.

En désignant par $G_0, \ldots, G_m$ un système d'ensembles ouverts semblable au système $A_0, \ldots, A_m$ et tel que $A_i = E \cdot G_i$ et $\delta(G_i) < \varepsilon$ (cf. § 15, XIII, 2), on en conclut que *l'inégalité* $d_n(E) < \varepsilon$ *équivaut à l'existence d'un système d'ensembles ouverts* $G_0, \ldots, G_m$ *satisfaisant aux conditions* (2) *et* (3), *ainsi qu'à l'inclusion* $E \subset G_0 + \ldots + G_m$. En outre, la condition (3) peut être remplacée par (4).

2. $\mathfrak{X}$ *étant compact, la famille des ensembles fermés* F *tels que* $d_n(F) < \varepsilon$ *est, pour tout* $\varepsilon > 0$, *ouverte dans l'espace* $2^{\mathfrak{X}}$.

Autrement dit, *la fonction* $d_n(F)$ *est semi-continue supérieurement sur l'espace* $2^{\mathfrak{X}}$.

En effet, Γ étant un système d'ensembles ouverts $G_0, \ldots, G_m$ assujetti aux conditions (2) et (3), la famille

$$\Phi_\Gamma = \underset{F}{E}\,(F \subset G_0 + \ldots + G_m)$$

est ouverte dans $2^{\mathfrak{X}}$ (cf. § 38, II (6)). Il en est donc de même de la famille

$$\underset{F}{E}\,[d_n(F) < \varepsilon] = \sum_{\Gamma} \Phi_\Gamma.$$

Le th. 2 admet la généralisation suivante:

2'. $\mathfrak{X}$ *étant compact, l'ensemble*

$$\underset{F_1, \ldots, F_k}{E}\,[d_n(F_1 \cdot \ldots \cdot F_k) < \varepsilon]$$

est ouvert dans l'espace $(2^{\mathfrak{X}})^k$.

Pour s'en convaincre, on posera

$$\Phi_\Gamma = \underset{F_1, \ldots, F_k}{E}\,(F_1 \cdot \ldots \cdot F_k \subset G_0 + \ldots + G_m)$$

et on appliquera la formule § 38, II (6') au lieu de § 38, II (6).

Il en résulte que l'ensemble Φ_Γ est ouvert dans $(2^{\mathfrak{X}})^k$.

3. $\mathfrak{X}$ *étant compact, il existe un* $F \epsilon 2^{\mathfrak{X}}$ *tel que* $d_n(F) = d_n(\mathfrak{X})$ *et que les conditions* $X \epsilon 2^{\mathfrak{X}}$ *et* $X \subset F \neq X$ *impliquent* $d_n(X) < d_n(F)$; *c.-à-d. que l'ensemble* F *est irréductible par rapport à son degré* n-*dimensionnel.*

Comme fermé, l'ensemble $\underset{F}{E}\,[d_n(F) \geqslant d_n(\mathfrak{X})]$ contient un élément irréductible (selon § 38, V, 1).

4. $\mathfrak{X}$ *étant compact, l'ensemble* $\underset{F}{E}\,(\dim F \leqslant n)$ *est un* G_δ *dans* $2^{\mathfrak{X}}$. *La fonction* $n = \dim F$ *est donc de deuxième classe sur* $2^{\mathfrak{X}}$.

Car

$$\underset{F}{E}(\dim F \leqslant n) = \underset{F}{E}[d_{n+1}(F)=0] = \prod_{k=1}^{\infty} \underset{F}{E}\left[d_{n+1}(F) < \frac{1}{k}\right]$$

et l'ensemble $\underset{F}{E}\left[d_{n+1}(F) < \frac{1}{k}\right]$ est ouvert d'après 2.

L'ensemble $\underset{F}{E}(m \leqslant \dim F \leqslant n)$ étant différence de deux G_δ, donc un $F_{\sigma\delta}$, la dimension d'un ensemble fermé F, considérée comme fonction de F, est de deuxième classe de Baire.

En appliquant le th. 2′ au lieu de 2, on montre que

4′. *$\mathfrak{X}$ étant compact, l'ensemble*

$$\underset{F_1,\dots,F_k}{E}[\dim(F_1 \cdot \ldots \cdot F_k) \leqslant n]$$

est un G_δ dans l'espace $(2^{\mathfrak{X}})^k$.

Remarques. 1⁰ *La fonction* $\dim F$ *est la limite d'une suite croissante de fonctions $\Delta_k(F)$ semi-continues supérieurement.*

Désignons, en effet, par $\Delta_k(F)$ le plus petit entier $n \geqslant -1$ pour lequel il existe un système d'ensembles ouverts $G_0, \dots, G_m$ tel que

$$F \subset G_0 + \ldots + G_m, \quad \delta(G_i) < 1/k \quad \text{et} \quad G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_{n+1}} = 0,$$

quels que soient les indices $i_0 < \ldots < i_{n+1} \leqslant m$.

L'inégalité $\Delta_k(F) \leqslant n$ équivaut donc à $d_{n+1}(F) < 1/k$. En vertu du th. 2, la fonction $\Delta_k(F)$ est donc semi-continue supérieurement. On en conclut aussi qu'en posant $\dim F = n$, on a $\Delta_k(F) > n-1$ pour k suffisamment grand, car on a alors $d_n(F) \geqslant 1/k$. Comme, d'autre part, la cond. D_n entraîne $\Delta_k(F) \leqslant n$, il vient

$$n = \dim F = \lim_{k=\infty} \Delta_k(F).$$

2⁰ *L'ensemble* $\underset{F}{E}(\dim F \leqslant n)$ *peut ne pas être un F_σ et, par suite, la fonction* $\dim F$ *peut ne pas être de I-e classe.*

Ainsi, p. ex., si $\mathfrak{X} = \mathfrak{I}$, les familles F_0 et F_1 composées d'ensembles F de dimension 0 et 1 respectivement sont denses dans $2^{\mathfrak{X}}$. En vertu du th. de Baire (§ 30, V, 2), F_0 ne peut donc être un F_σ.

3⁰ *$\mathfrak{X}$ étant un espace métrique séparable, la fonction $f(p) = \dim_p \mathfrak{X}$ est de II-e classe.*

Car d'après § 20, III, 2, l'ensemble $\underset{p}{E}(\dim_p X \leqslant n)$ est un G_δ (qui, d'ailleurs, peut ne pas être un F_σ).

5. *$\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant compacts, l'ensemble*

$$\underset{f}{E} \prod_{y} \{d_n[f^{-1}(y)] < \varepsilon\}$$

est ouvert dans l'espace fonctionnel $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

L'ensemble $\underset{f}{E} \prod_{y} \{\dim [f^{-1}(y)] \leqslant n\}$ *est un G_δ.*

Posons $\Phi_y = \underset{f}{E}\{d_n[f^{-1}(y)] < \varepsilon\}$. La condition $f \in \Phi_y$ signifie qu'il existe un système d'ensembles ouverts $G_0, \dots, G_m$ satisfaisant aux formules (2) et (4), ainsi qu'à l'inclusion $f^{-1}(y) \subset G_0 + \ldots + G_m$. L'ensemble des couples (f, y) satisfaisant à cette inclusion étant ouvert (§ 38, VII, 3), l'ensemble $\underset{f,y}{E}[f \in \Phi_y]$ l'est également, ainsi que l'ensemble $\underset{f}{E} \prod_{y} (f \in \Phi_y)$ (cf. § 37, III, 9).

Enfin,

$$\prod_y \{\dim [f^{-1}(y) \leqslant n]\} \equiv \prod_y \{d_{n+1}[f^{-1}(y)] = 0\} \equiv$$
$$\equiv \prod_y \prod_k \{d_{n+1}[f^{-1}(y)] < 1/k\} \equiv \prod_k \prod_y \{d_{n+1}[f^{-1}(y)] < 1/k\},$$

d'où la deuxième partie du théorème.

6. *A et B étant deux ensembles compacts, les inégalités $d_n(A) < \varepsilon$, $d_n(B) < \varepsilon$ et $\dim AB \leqslant n-2$ entraînent l'inégalité $d_n(A+B) < \varepsilon$.*

Il existe par hypothèse deux systèmes d'ensembles ouverts $A_0, \dots, A_l$ et $B_0, \dots, B_m$ tels que

$$A \subset A_0 + \ldots + A_l, \quad \delta(A_i) < \varepsilon, \quad A_{i_0} \cdot \ldots \cdot A_{i_n} = 0,$$
$$B \subset B_0 + \ldots + B_m, \quad \delta(B_j) < \varepsilon, \quad B_{j_0} \cdot \ldots \cdot B_{j_n} = 0.$$

En appliquant le th. III, 1 au cas où $\mathfrak{X} = A$ et $P_1 = P_2 = \ldots = AB$, on en déduit l'existence d'un système d'ensembles fermés $A_0^*, \dots, A_l^*$ tels que

$$A = A_0^* + \ldots + A_l^*, \quad A_i^* \subset A_i \quad \text{et} \quad \dim(B \cdot A_{i_0}^* \cdot \ldots \cdot A_{i_r}^*) \leqslant n - r - 2,$$

quel que soit $r \leqslant n-1$.

Le même théorème, appliqué à $\mathfrak{X} = B$, implique l'existence d'un système d'ensembles fermés $B_0^*, \dots, B_m^*$ tels que

$$B = B_0^* + \ldots + B_m^*, \quad B_j^* \subset B_j \quad \text{et} \quad A_{i_0}^* \cdot \ldots \cdot A_{i_r}^* \cdot B_{j_0}^* \cdot \ldots \cdot B_{j_{n-r-1}}^* = 0$$

(où les ensembles $B \cdot A_{i_0}^* \cdot \ldots \cdot A_{i_r}^*$ jouent le rôle des P_i et où $0 \leqslant r \leqslant n-1$).

On parvient ainsi à la décomposition

$$A+B=A_0^*+\ldots+A_l^*+B_0^*+\ldots+B_m^*$$

en ensembles fermés de diamètre $<\varepsilon$ et tels qu'aucun point n'appartient à $n+1$ ensembles. Donc $d_n(A+B)<\varepsilon$.

Remarque. La condition $\dim AB\leqslant n-2$ ne peut pas être remplacée par $d_{n-1}(AB)\leqslant\varepsilon$.

8 [1]). *$\mathcal{X}$ étant compact, $d_n(\mathcal{X})$ est la borne inférieure des nombres ε pour lesquels il existe une transformation continue f de $\mathcal{X}$ telle que*

(i) $\quad \dim f(\mathcal{X})\leqslant n-1,\qquad$ (ii) $\quad \delta[f^{-1}(y)]<\varepsilon$

quel que soit $y\in f(\mathcal{X})$.

Plus précisément: *si $d_n(\mathcal{X})<\varepsilon$, il existe une transformation continue f de $\mathcal{X}$ en sous-ensemble d'un polytope à $n-1$ dimensions vérifiant la condition* (ii); *réciproquement, si f est une fonction continue satisfaisant aux conditions* (i) *et* (ii), *on a (pour $\mathcal{X}$ compact) $d_n(\mathcal{X})<\varepsilon$.*

Admettons, en effet, que $d_n(\mathcal{X})<\varepsilon$. Il existe donc un système d'ensembles ouverts $G_0,\ldots,G_m$ vérifiant les conditions (1)—(3). Soit $p_0\ldots p_m$ un simplexe à m dimensions. La fonction

$$f(x)=\lambda_0(x)\cdot p_0+\ldots+\lambda_m(x)\cdot p_m$$

où

$$\lambda_i(x)=\frac{\varrho(x,\mathcal{X}-G_i)}{\varrho(x,\mathcal{X}-G_0)+\ldots+\varrho(x,\mathcal{X}-G_m)}$$

(c.-à-d. la fonction $\varkappa$ correspondante aux systèmes $p_0,\ldots,p_m$ et $G_0,\ldots,G_m$) est la transformation demandée (cf. § 23, VI, 4).

Soit, d'autre part, f une fonction continue vérifiant les conditions (i) et (ii). $f(\mathcal{X})$ étant compact, il existe d'après (ii) (cf. § 37, VIII, 1) un $\eta>0$ tel que les conditions $f(\mathcal{X})=H_0+\ldots+H_m$ et $\delta(H_i)<\eta$ entraînent $\delta[f^{-1}(H_i)]<\varepsilon$.

On peut admettre en vertu de (i) que les H_i sont ouverts et que $H_{i_0}\cdot\ldots\cdot H_{i_n}=0$. En posant $G_i=f^{-1}(H_i)$, les conditions (1)—(3) se trouvent vérifiées; donc $d_n(\mathcal{X})<\varepsilon$.

9. *Corollaires. $\mathcal{X}$ étant un espace compact,*

1) *la relation* $\dim\mathcal{X}\geqslant n$ *est un invariant des transformations à petites tranches* [2]), *à savoir, à tranches de diamètre $<d_n(\mathcal{X})$;*

[1]) Cf. P. Alexandroff, C. R. Paris **183**, p. 640, ainsi que la note de M. Ulam et de moi-même, Fund. Math. **20** (1933), p. 246.

[2]) Pour ce terme, voir § 37, VIII. Le cor. 1) remonte à M. L. E. J. Brouwer.

2) *pour* $\mathcal{X}\subset\mathcal{E}^{\aleph_0}$, *l'inégalité* $\dim\mathcal{X}\leqslant n$ *équivaut à l'existence pour tout $\varepsilon>0$ d'un déplacement de $\mathcal{X}$ inférieur à ε en un polytope à n dimensions* [1]);

3) *si* $\dim\mathcal{X}=n$, *$d_n(\mathcal{X})$ est la borne inférieure des nombres $\tau(\mathcal{X},\mathcal{Y})$* [2]) *où $\mathcal{Y}$ parcourt les espaces compacts de dimension $<n$.*

Le théorème suivant permet de définir le coefficient d_n à l'aide de d_1.

10) [3]) *$d_n(\mathcal{X})$ est, pour $\mathcal{X}$ compact, la borne inférieure des nombres ε pour lesquels il existe un système d'ensembles fermés $A_1,\ldots,A_n$ tels que*

$(+)\qquad \mathcal{X}=A_1+\ldots+A_n,\quad d_1(A_i)<\varepsilon\quad$ pour $\quad i=1,\ldots,n.$

Plus précisément, *l'inégalité $d_n(\mathcal{X})<\varepsilon$ équivaut à l'existence d'une décomposition de ce genre.*

Soit d'abord $d_n(\mathcal{X})<\varepsilon$. Procédons par induction. L'existence de la décomposition demandée étant évidente pour $n=1$, nous allons démontrer que, si une décomposition de ce genre existe pour $n-1$, il en existe une aussi pour n.

Comme $d_n(\mathcal{X})<\varepsilon$, il existe un système d'ensembles fermés $F_0,\ldots,F_m$ tels que

$$\mathcal{X}=F_0+\ldots+F_m,\quad F_{i_0}\cdot\ldots\cdot F_{i_n}=0,\quad \delta(F_i)<\varepsilon.$$

Soit F la somme de tous les produits de n ensembles appartenant à ce système. Ces produits étant disjoints deux à deux, il vient $d_1(F)<\varepsilon$. Soit, conformément au th. 2, S une sphère ouverte de centre F et de rayon suffisamment petit pour qu'on ait $d_1(\bar{S})<\varepsilon$. Les formules

$$\mathcal{X}-S=(F_0-S)+\ldots+(F_m-S),\quad \delta(F_i-S)<\varepsilon$$

et

$$F_{i_1}\cdot\ldots\cdot F_{i_n}-S\subset F-S=0$$

impliquent que

$$d_{n-1}(\mathcal{X}-S)<\varepsilon.$$

On a donc par hypothèse:

$$\mathcal{X}-S=A_2+\ldots+A_n,\quad \bar{A}_i=A_i,\quad d_1(A_i)<\varepsilon\quad \text{pour}\quad i=2,\ldots,n.$$

[1]) Cf. § 23, VI, remarque 1°.

[2]) Cf. § 37, VIII.

[3]) Théorème de Eilenberg, *Sur le théorème de décomposition de la théorie de la dimension*, Fund. Math. **26** (1936), p. 147.

En posant $A_1=\bar{S}$, on obtient la décomposition $(+)$.

Réciproquement, admettons que le système d'ensembles fermés $A_1,\dots,A_n$ satisfasse aux conditions $(+)$.

On a donc, pour tout i, une décomposition de A_i en ensembles fermés disjoints:

$$A_i=A_1^i+\dots+A_{k_i}^i \quad \text{où} \quad \delta(A_j^i)<\varepsilon \quad \text{pour} \quad j=1,\dots,k_i.$$

La formule $\mathfrak{X}=\sum_{ij}A_j^i$ représente donc une décomposition de $\mathfrak{X}$ en ensembles fermés tels qu'aucun point n'appartient à $n+1$ ensembles. Par conséquent $d_n(\mathfrak{X})<\varepsilon$.

Les théorèmes 1 et 10 entraînent le corollaire suivant:

11. *Si $\mathfrak{X}$ est compact, l'inégalité* $\dim\mathfrak{X}<n$ *équivaut à l'existence, pour tout $\varepsilon>0$, d'un système d'ensembles fermés $A_1,\dots,A_n$ vérifiant les conditions $(+)$.*

V. Noyau dimensionnel d'un espace compact. On appelle (cf. § 22, V) *noyau dimensionnel* de l'espace $\mathfrak{X}$ à n dimensions l'ensemble N de tous les points p tels que $\dim_p\mathfrak{X}=n$. Le noyau dimensionnel d'un espace métrique séparable est, en général, de dimension $\geqslant n-1$; mais il n'est pas nécessairement de dimension n (à savoir, si l'espace est faiblement n-dimensionnel, cf. § 22, VI). Cependant, si l'espace est compact, on a le théorème suivant de Menger[1]):

Le noyau dimensionnel N d'un espace compact $\mathfrak{X}$ à n dimensions est de dimension n en chacun de ses points.

On a donc $\dim N=n$.

Supposons par contre que $p\in N$ et que $\dim_p N<n$.

Soit $\varepsilon>0$. Il existe donc un ensemble ouvert G tel que

$$(1)\qquad p\in G,\quad \delta(G)<\varepsilon \quad \text{et} \quad \dim[N\cdot\mathrm{Fr}(G)]\leqslant n-2.$$

Soit, conformément au § 22, IV, P un ensemble G_δ tel que

$$(2)\qquad N\cdot\mathrm{Fr}(G)\subset P \quad \text{et} \quad \dim P\leqslant n-2.$$

D'après l'inclusion (2), on a $N\cdot[\mathrm{Fr}(G)-P]=0$. On a donc

$$(3)\qquad \dim_x\mathfrak{X}\leqslant n-1 \quad \text{pour tout} \quad x\in[\mathrm{Fr}(G)-P].$$

[1]) Proc. Acad. Amsterdam **30** (1926), p. 138.

Il existe par conséquent une famille d'ensembles ouverts telle qu'à tout $x\in[\mathrm{Fr}(G)-P]$ et à tout entier positif k correspond dans cette famille un ensemble H satisfaisant aux conditions:

$$(4)\qquad x\in H,\quad \delta(H)<\varepsilon/k \quad \text{et} \quad \dim\mathrm{Fr}(H)\leqslant n-2.$$

L'ensemble P étant un G_δ, l'ensemble $\mathrm{Fr}(G)-P$ est un F_σ. On peut donc extraire de cette famille (cf. § 37, V, 8) une suite $H_1,H_2,\dots$ telle que

$$(5)\qquad \overline{\sum_m H_m}\subset\sum_m\bar{H}_m+\mathrm{Fr}(G) \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}(G)-P\subset\sum_m H_m,$$

d'où

$$(6)\qquad \mathrm{Fr}(G)-\sum_m H_m\subset P, \quad \text{donc} \quad \dim[\mathrm{Fr}(G)-\sum_m H_m]\leqslant n-2,$$

d'après (2).

Posons

$$(7)\qquad Q=G+\sum_m H_m.$$

Il vient d'après (1) et (4): $p\in Q$ et $\delta(Q)\leqslant 2\varepsilon$. Nous allons démontrer que

$$(8)\qquad \dim\mathrm{Fr}(Q)\leqslant n-2,$$

ce qui va présenter la contradiction demandée, puisqu'on a par hypothèse $p\in N$, donc $\dim_p\mathfrak{X}=n$.

Il vient d'après (5):

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(Q)=\bar{Q}-Q=(\bar{G}-Q)+\Big(\overline{\sum_m H_m}-Q\Big)\subset\\ \subset(\bar{G}-G-\sum_m H_m)+\Big\{\Big[\sum_m\bar{H}_m+\mathrm{Fr}(G)\Big]-G-\sum_m H_m\Big\}\subset\\ \subset[\mathrm{Fr}(G)-\sum_m H_m]+\sum_m\mathrm{Fr}(H_m),\end{aligned}$$

puisque

$$\sum_m\bar{H}_m-\sum_m H_m\subset\sum_m(\bar{H}_m-H_m)=\sum_m\mathrm{Fr}(H_m).$$

Finalement, d'après (6) et (4) (cf. § 22, I, th. 1):

$$\dim\mathrm{Fr}(Q)\leqslant\dim\{[\mathrm{Fr}(G)-\sum_m H_m]+\sum_m\mathrm{Fr}(H_m)\}\leqslant n-2.$$

VI. Transformations à tranches de dimension k.

1. *Théorème de Hurewicz*[1]). *Soit f une transformation continue d'un espace compact $\mathfrak{X}$. Si l'inégalité* $\dim f^{-1}(y)\leqslant k$ *est vérifiée pour tout $y\in f(\mathfrak{X})$, on a*

$$\dim f(\mathfrak{X})\geqslant\dim\mathfrak{X}-k.$$

[1]) Proc. Acad. Amsterdam **30** (1927), p. 164.

Posons $\dim \mathcal{X}=n$ et $\dim f(\mathcal{X})=m$. Il s'agit de prouver que

$$m \geqslant n-k.$$

Le théorème étant évidemment vrai pour $m=-1$, il est légitime d'admettre qu'il est vrai pour $m-1$. Comme $d_n(\mathcal{X}) \neq 0$, on peut admettre (cf. IV, 3) que $\mathcal{X}$ est irréductible par rapport à son degré n-dimensionnel. Soient A_1 et A_2 deux ensembles fermés tels que

$$f(\mathcal{X})=A_1+A_2, \quad A_1 \neq f(\mathcal{X}) \neq A_2 \quad \text{et} \quad \dim(A_1 \cdot A_2)=m-1.$$

La double inégalité implique que

$$f^{-1}(A_1) \neq \mathcal{X} \neq f^{-1}(A_2),$$

d'où

$$d_n[f^{-1}(A_1)] < d_n(\mathcal{X}) \quad \text{et} \quad d_n[f^{-1}(A_2)] < d_n(\mathcal{X}).$$

Comme $\mathcal{X}=f^{-1}(A_1)+f^{-1}(A_2)$, il vient d'après IV, 6:

$$\dim[f^{-1}(A_1)\cdot f^{-1}(A_2)] \geqslant n-1, \text{ c.-à-d. } \dim f^{-1}(A_1\cdot A_2) \geqslant n-1.$$

D'autre part, comme $\dim(A_1 \cdot A_2)=m-1$, on a par hypothèse

$$\dim(A_1\cdot A_2) \geqslant \dim f^{-1}(A_1\cdot A_2)-k.$$

Il vient ainsi $m-1 \geqslant n-1-k$.

2. *Corollaire*[1]. *$\mathcal{X}$ étant compact et f étant une transformation intérieure de $\mathcal{X}$ telle que les ensembles $f^{-1}(y)$ sont dénombrables, on a* $\dim f(\mathcal{X})=\dim \mathcal{X}$.

En effet, d'après 1, $\dim \mathcal{X} \leqslant \dim f(\mathcal{X})$, et d'après § 39, VI, 4, il existe une suite d'ensembles fermés $F_1, F_2, \ldots$ tels que l'on a

$$f(\mathcal{X})=f(F_1)+f(F_2)+\ldots$$

et que $f(F_i)$ est homéomorphe à F_i, donc que

$$\dim f(F_i)=\dim F_i \leqslant \dim \mathcal{X}.$$

On en tire, en vertu du th. d'addition (§ 22, I, th. 1), que $\dim f(\mathcal{X}) \leqslant \dim \mathcal{X}$.

Il est à remarquer que l'hypothèse de la dénombrabilité des ensembles $f^{-1}(y)$ ne peut pas être remplacée par l'égalité $\dim f^{-1}(y)=0$[2].

[1]) P. Alexandroff, C. R. Acad. U. R. R. S. **4** (1936), p. 293.

[2]) Comme le prouve un exemple donné par M. Kolmogoroff (ibid.). Pour un exemple non compact (dû à J. H. Roberts), voir Hurewicz-Wallman, *Dimension Theory*, p. 93.

3. *Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$ trois espaces compacts et f_1 et f_2 deux fonctions telles que $f_1 \in \mathcal{Y}_1^{\mathcal{X}}$, $f_2 \in \mathcal{Y}_2^{\mathcal{X}}$. Posons $f(x)=[f_1(x), f_2(x)]$, donc $f \in (\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2)^{\mathcal{X}}$. En supposant que $\dim f^{-1}(z) \leqslant k$ pour tout $z \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2$, on a*

$$\dim f_1^{-1}(y_1) \leqslant \dim \mathcal{Y}_2+k \textit{ quel que soit } y_1 \in \mathcal{Y}_1.$$

Soit, en effet, y_1 un point fixe de $\mathcal{Y}_1$. Posons $h=f_2|[f_1^{-1}(y_1)]$. L'équivalence

$$\{h(x)=y_2\} \equiv \{[f_1(x)=y_1][f_2(x)=y_2]\} \equiv \{f(x)=(y_1,y_2)\}$$

entraîne $h^{-1}(y_2) \subset f^{-1}(y_1,y_2)$, d'où $\dim h^{-1}(y_2) \leqslant k$. D'après le th. 1 (en y substituant $f_1^{-1}(y_1)$ à $\mathcal{X}$ et h à f), il en résulte que

$$\dim f_1^{-1}(y_1)-k \leqslant \dim h[f_1^{-1}(y_1)] \leqslant \dim \mathcal{Y}_2.$$

VII. L'espace $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$ pour $r \geqslant 2 \dim \mathcal{X}+1$.

1. *Théorème de plongement de Menger-Nöbeling*[1]. *Tout espace métrique séparable à n dimensions est contenu topologiquement dans le cube $\mathcal{J}^{2n+1}$.*

En symbole: *si* $\dim \mathcal{X}=n$, *on a* $\mathcal{X} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{J}^{2n+1}$.

Plus précisément[2]): *si l'ensemble fermé $E \subset \mathcal{X}$ satisfait à la condition D_n et si $r \geqslant 2n+1$, les fonctions $f \in (\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$ telles que la fonction partielle $f|E$ est une homéomorphie constituent un ensemble résiduel dans l'espace $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$.*

A et B étant deux sous-ensembles de E, fermés et disjoints, désignons par Φ_{AB} la famille des fonctions $g \in (\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$ telles que

$$\overline{g(A)} \cdot \overline{g(B)}=0.$$

En supposant que l'ensemble E jouisse de la propriété D_n et que $r \geqslant 2n+1$, on conclut du th. 4 du § 23, VII, que

$$\overline{\Phi_{AB}}=(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}.$$

[1]) K. Menger, *Über umfassendste n-dimensionale Mengen*, Proc. Akad. Amsterdam **29** (1926), p. 1125 et G. Nöbeling, *Über eine n-dimensionale Universalmenge im R_{2n+1}*, Math. Ann. **104** (1930), p. 71.

[2]) W. Hurewicz, *Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume*, Sgb. Preuss. Akad. 1933, p. 754 (cas où $\mathcal{X}$ est compact). Pour le cas général, voir ma note *Sur les théorèmes du „plongement" dans la théorie de la dimension*, Fund. Math. **28** (1937), p. 336.

De là résulte directement la deuxième partie du théorème 1 en vertu du th. 7 du § 38, VII.

Pour en déduire la première, on pose $E=\mathfrak{X}$ et on tient compte du fait que, l'espace $(\mathcal{J}^r)^{\mathfrak{X}}$ étant complet (cf. § 29, V, 1), tout ensemble résiduel dans cet espace est non vide (th. de Baire, § 30, IV).

Remarques. 1⁰ Dans le th. 1, *l'exposant* $2n+1$ *ne peut pas être abaissé.* Il existe en effet des espaces à n dimensions qui ne sont homéomorphes à aucun sous-ensemble du cube $\mathcal{J}^{2n}$. Tel est — comme on montre [1]) — le polytope-somme de toutes les faces de dimension $\leqslant n$ d'un simplexe simple à $2n+2$ dimensions.

2⁰ Le th. de Menger-Nöbeling se laisse préciser comme suit [2]):

N_n désignant le sous-ensemble du cube $\mathcal{J}^{2n+1}$ formé des points qui ont tout au plus n coordonnées rationnelles, la condition $\dim \mathfrak{X}=n$ *entraîne* $\mathfrak{X} \underset{\text{top}}{\subset} N_n$.

En conséquence, *l'espace N_n a le rang topologique le plus élevé parmi tous les espaces métriques séparables de dimension $\leqslant n$.*

Nous allons démontrer d'abord que:

Si $\dim \mathfrak{X}\leqslant n$, *l'ensemble Φ des fonctions g telles que*

$$\overline{g(\mathfrak{X})}\subset N_n \tag{1}$$

est un G_δ résiduel dans l'espace $(\mathcal{J}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$.

Soit $n+1\leqslant m\leqslant 2n+1$. Étant donné un système de m nombres rationnels $r_1,\dots,r_m$ et de m entiers positifs $i_1<\dots<i_m$ $(\leqslant 2n+1)$, l'ensemble des points

$$x=(x^1,\dots,x^{2n+1}) \quad \text{où} \quad x^{i_1}=r_1,\dots,x^{i_m}=r_m$$

est une multiplicité linéaire à $2n+1-m$ dimensions.

En faisant varier l'indice m et les nombres $r_1,\dots,r_m$ et $i_1,\dots,i_m$, on obtient une suite de multiplicités linéaires $L_1,L_2,\dots$ telles que

$$\mathcal{J}^{2n+1}-N_n=\mathcal{J}^{2n+1}\cdot(L_1+L_2+\dots).$$

[1]) A. Flores, *Über n-dimensionale Komplexe, die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind,* Ergebn. math. Koll. **6** (1933), p. 4.

[2]) G. Nöbeling, l. cit.

Comme $\dim L_k\leqslant n$, l'ensemble $\underset{g}{E}[\overline{g(\mathfrak{X})}\cdot L_k=0]$ est dense dans l'espace $(\mathcal{J}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$ (d'après § 23, VII, 3, remarque). Le même ensemble étant ouvert dans cet espace (cf. § 38, II (5) et VI, 5), l'ensemble Φ est un G_δ résiduel en vertu de la formule:

$$\Phi=\underset{g}{E}[\overline{g(X)}\subset N_n]=\underset{g}{E}[\overline{g(X)}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}L_k=0]=\prod_{k=1}^{\infty}\underset{g}{E}[\overline{g(X)}\cdot L_k=0].$$

L'ensemble des homéomorphies étant aussi un G_δ résiduel, il en résulte que les homéomorphies assujetties à la condition (1) constituent un G_δ résiduel dans l'espace $(\mathcal{J}^{2n+1})^{\mathfrak{X}}$. Donc $\mathfrak{X}\underset{\text{top}}{\subset}N_n$.

Il reste à démontrer que $\dim N_n\leqslant n$.

En désignant par $R_{k,m}$ l'ensemble des points de $\mathcal{J}^m$ ayant k coordonnées rationnelles et $m-k$ coordonnées irrationnelles, il vient

$$N_n=R_{0,2n+1}+\dots+R_{n,2n+1}.$$

La somme de $n+1$ ensembles de dimension 0 étant de dimension $\leqslant n$ (cf. § 22, I, th. 2), tout revient à démontrer que

$$\dim R_{k,m}=0 \quad (0\leqslant k\leqslant m)\,^{1}). \tag{2}$$

Or, $r_1,r_2,\dots$ désignant la suite des nombres rationnels de l'intervalle 01, soit $Z_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}$ l'ensemble des points $x=(x^{(1)},\dots,x^{(m)})$ pour lesquels on a $x^{(i_1)}=r_{j_1},\dots,x^{(i_k)}=r_{j_k}$ et dont toutes les autres coordonnées sont irrationnelles.

Il vient

$$R_{k,m}=\sum Z_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k},$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes $i_1<\dots<i_k\leqslant m$ et $j_1,\dots,j_k$.

$Z_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}$ est homéomorphe à la $(m-k)$-ème puissance de l'ensemble $\mathcal{N}$ (des nombres irrationnels de l'intervalle $\mathcal{J}$), donc à $\mathcal{N}$; il est donc de dimension 0. En outre, il est fermé dans $R_{k,m}$, car tout point x de l'ensemble $\overline{Z_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}}-Z_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}$ admet, outre les coordonnées $x^{i_1}=r_{j_1},\dots,x^{i_k}=r_{j_k}$, au moins une coordonnée rationnelle et on a par conséquent x non-ϵ $R_{k,m}$.

En tant que somme d'une série d'ensembles de dimension 0 fermés dans $R_{k,m}$, l'ensemble $R_{k,m}$ est de dimension 0 (§ 21, III, cor. 1).

[1]) Voir K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 147.

2. *Théorème de compactification* [1]). *Tout espace à n dimensions est contenu topologiquement dans un espace compact à n dimensions.*

Plus précisément, *si $\mathcal{X}$ satisfait à la condition D_n, les homéomorphies h telles que* $\dim \overline{h(\mathcal{X})} \leqslant n$ *constituent un ensemble résiduel dans l'espace* $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$.

En effet, en posant $H(f) = \overline{f(\mathcal{X})}$, la fonctionnelle H est continue sur l'espace $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$, selon § 38, VI, 5. On en conclut en vertu de IV, 4 (en y remplaçant $\mathcal{X}$ par $\mathcal{J}^r$) que l'ensemble

$$\Phi = \underset{f}{E}[\dim \overline{f(\mathcal{X})} \leqslant n]$$

est un G_δ dans $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$.

L'espace $\mathcal{X}$ satisfaisant à la condition D_n, l'ensemble Φ est dense dans l'espace $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$ (d'après § 23, VII, 3). Il est donc un ensemble résiduel dans cet espace [2]), et il en est de même du produit de Φ par l'ensemble de toutes les homéomorphies, puisque ce dernier est résiduel selon le th. 1.

Remarques. 1° La remarque 2° au th. 1, rapprochée du th. 2, conduit à la conclusion suivante:

Il existe un espace compact de dimension n qui a le rang topologique le plus élevé parmi tous les espaces métriques séparables de dimension $\leqslant n$.

Tel est l'espace compact de dimension n, qui contient topologiquement l'ensemble N_n.

2° Le th. 2 admet la généralisation suivante [3]):

Si $\dim \mathcal{X} \leqslant n$, *les homéomorphies g telles que* $\dim \overline{g(\mathcal{X})} \leqslant n$ *et que, pour tout $x \in \mathcal{X}$, la dimension de $\mathcal{X}$ au point x est égale à celle de $\overline{g(\mathcal{X})}$ au point $g(x)$, constituent un ensemble résiduel dans l'espace* $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$.

3. *Corollaire. L'inégalité* $\dim \mathcal{X} \leqslant n$ *et la condition D_n sont équivalentes.*

Car l'inégalité $\dim \mathcal{X} \leqslant n$ implique la condition D_n d'après § 22, III, th. 4, et, réciproquement, D_n implique, en vertu du th. 2, que $\mathcal{X}$ est homéomorphe à un sous-ensemble d'un ensemble de dimension $\leqslant n$, donc que $\dim \mathcal{X} \leqslant n$.

[1]) W. Hurewicz, *Über das Verhältniss separabler Räume zu kompakten Räumen*, Proc. Acad. Amsterdam **30** (1927), p. 425.

[2]) Cf. K. Borsuk, Fund. Math. **28** (1937), p. 97.

[3]) Pour la démonstration, voir ma note de Fund. Math. **30** (1937), p. 13. Cf. aussi W. Hurewicz l. c., p. 430.

La démonstration du th. 1 repose essentiellement — comme il est facile de voir — sur l'énoncé suivant (qui résulte directement des théorèmes § 23, VII, 4 et § 38, VII, 4):

4. *A et B étant deux ensembles fermés, disjoints et de dimension n, les fonctions g assujetties à la condition*

$$\overline{g(A)} \cdot \overline{g(B)} = 0$$

constituent un ensemble ouvert et dense dans l'espace $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$.

Dans le même ordre d'idées, on a le théorème suivant:

4'. *Etant donnés dans un espace métrique séparable $\mathcal{X}$, $l+1$ ensembles fermés $A_0, \dots, A_l$ de dimension $\leqslant n$, l'ensemble Φ des fonctions g assujetties à la condition*

$$\dim [\overline{g(A_0)} \cdot \ldots \cdot \overline{g(A_l)}] \leqslant \dim (A_0 \cdot \ldots \cdot A_l) \tag{3}$$

constituent un G_δ résiduel dans l'espace $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$.

En effet, d'après IV, 4', l'ensemble

$$\underset{F_0, \dots, F_l}{E}[\dim (F_0 \cdot \ldots \cdot F_l) \leqslant \dim (A_0 \cdot \ldots \cdot A_l)]$$

est un G_δ dans l'espace $(2^{\mathcal{X}})^{l+1}$. L'opération $\overline{g(A_l)}$, considérée comme fonction de g, étant continue (d'après § 38, VI, 5), l'ensemble Φ est un G_δ dans l'espace $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$. Enfin, il est dense dans cet espace d'après le th. 5 du § 23, VII.

5. *Etant donnée dans $\mathcal{X}$ une suite d'ensembles fermés $A_0, A_1, \dots$, $\mathcal{X}$ peut être considéré au point de vue topologique comme un sous-ensemble dense d'un espace compact $\mathcal{X}^*$ tel que, A^* désignant la fermeture de A dans $\mathcal{X}^*$, on a*

$$\dim (A_{i_0}^* \cdot \ldots \cdot A_{i_l}^*) = \dim (A_{i_0} \cdot \ldots \cdot A_{i_l}), \tag{4}$$

quels que soient les indices $i_0, \dots, i_l$ $(l \geqslant 0)$.

En conséquence, *dans le th. III, 1, la condition de compacité peut être omise.*

En effet, d'après le théorème 6 du § 38, VII, l'ensemble Ψ des homéomorphies est résiduel dans l'espace $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$, et il en est de même, selon 4', de l'ensemble $\Phi(i_0, \dots, i_l)$ des fonctions g telles que

$$\dim [\overline{g(A_{i_0})} \cdot \ldots \cdot \overline{g(A_{i_l})}] \leqslant \dim (A_{i_0} \cdot \ldots \cdot A_{i_l}), \tag{5}$$

donc du produit $\Gamma = \Psi \cdot \prod \Phi(i_0, \dots, i_l)$, $i_0, \dots, i_l$ parcourant tous les systèmes finis d'entiers $\geqslant 0$.

Soit $g \in \Gamma$. Posons $\mathfrak{X}^* = \overline{g(\mathfrak{X})}$ et identifions $\mathfrak{X}$ avec $g(\mathfrak{X})$. Il vient

$$\dim [g(A_{i_0})\cdot\ldots\cdot g(A_{i_l})] = \dim (A_{i_0}\cdot\ldots\cdot A_{i_l}).$$

On a donc d'après (5)

$$\dim [\overline{g(A_{i_0})}\cdot\ldots\cdot\overline{g(A_{i_l})}] = \dim (A_{i_0}\cdot\ldots\cdot A_{i_l}),$$

d'où l'égalité (4).

Passons à la deuxième partie du th. 5.

Soient $P_0, P_1, \ldots$ une suite de sous-ensembles fermés de $\mathfrak{X}$ et $G_0, \ldots, G_m$ un système d'ensembles ouverts tels que $\mathfrak{X} = G_0 + \ldots + G_m$. Posons

(6) $$Q_i = \mathfrak{X} - G_i, \quad \text{d'où} \quad Q_0\cdot\ldots\cdot Q_m = 0.$$

Comme nous venons de prouver, $\mathfrak{X}$ peut être considéré comme un sous-ensemble dense d'un espace compact $\mathfrak{X}^*$ tel que

(7) $$\dim P_j^* = \dim P_j \quad \text{et} \quad Q_0^*\cdot\ldots\cdot Q_m^* = 0$$

(en remplaçant la suite $A_0, A_1, \ldots$ par $Q_0, \ldots, Q_m, P_0, P_1, \ldots$).

Posons $U_i = \mathfrak{X}^* - Q_i^*$. Il vient

$$U_0 + \ldots + U_m = \mathfrak{X}^* - Q_0^*\cdot\ldots\cdot Q_m^* = \mathfrak{X}^*.$$

Les ensembles U_i étant ouverts, il existe d'après III, 1 un système d'ensembles $W_0, \ldots, W_m$ fermés (dans $\mathfrak{X}^*$) et tels que

(8) $$\mathfrak{X}^* = W_0 + \ldots + W_m, \quad W_i \subset U_i, \quad \dim (P_j^* \cdot W_{i_0}\cdot\ldots\cdot W_{i_l}) \leqslant \dim P_j^* - l,$$

quels que soient $j = 1, 2, \ldots$, $l \leqslant \dim P_j + 1$ et $i_0 < \ldots < i_l \leqslant m$.

Posons $F_i = \mathfrak{X}\cdot W_i$. Il vient

$$F_0 + \ldots + F_m = \mathfrak{X}\cdot(W_0 + \ldots + W_m) = \mathfrak{X}\cdot\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X},$$

(9) $$F_i = \mathfrak{X} W_i \subset \mathfrak{X} U_i = \mathfrak{X}\cdot\mathfrak{X}^* - Q_i^* = \mathfrak{X} - Q_i^*,$$

et Q_i étant fermé dans $\mathfrak{X}$, on a

$$\mathfrak{X}\cdot Q_i^* = Q_i, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{X} - Q_i^* = \mathfrak{X} - Q_i = G_i$$

d'après (6), donc $F_i \subset G_i$ d'après (9). Enfin, d'après (8) et (7),

$$\dim (P_j\cdot F_{i_0}\cdot\ldots\cdot F_{i_l}) \leqslant \dim (P_j^* \cdot W_{i_0}\cdot\ldots\cdot W_{i_l}) \leqslant \dim P_j - l.$$

6 [1]). *Étant donnés dans un espace métrique séparable $\mathfrak{X}$ deux ensembles fermés A et B de dimension $\leqslant n$ et tels que le produit AB est compact, les fonctions g assujetties à la condition*

(10) $$\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)} = g(AB)$$

constituent un ensemble résiduel dans l'espace $(\mathcal{J}^r)^{\mathfrak{X}}$.

Soit $S_k = \underset{x}{E}[\varrho(x, AB) < 1/k]$. Posons

$$A_k = A - S_k, \quad \text{d'où} \quad A_k\cdot B = 0 \quad \text{et} \quad A - B = A_1 + A_2 + \ldots$$

D'après 4, l'ensemble $\Phi_k = \underset{g}{E}[\overline{g(A_k)}\cdot\overline{g(B)} = 0]$ est ouvert et dense dans $(\mathcal{J}^r)^{\mathfrak{X}}$. L'ensemble $\Phi = \Phi_1\cdot\Phi_2\cdot\ldots$ y est donc résiduel.

Soit $g \in \Phi$. Il s'agit d'établir la formule (10). Or

$$\overline{g(A)} = \sum_k \overline{g(A_k)} + [\overline{g(A)} - \sum_k \overline{g(A_k)}] =$$

$$= \sum_k \overline{g(A_k)} + \prod_k [\overline{g(A)} - \overline{g(A_k)}] \subset \sum_k \overline{g(A_k)} + \prod_k \overline{g(A - A_k)} \subset \sum_k \overline{g(A_k)} + \prod_k \overline{g(S_k)}.$$

Comme (cf. § 37, VII, 7) $\prod_k \overline{g(S_k)} = g(\prod_k S_k) = g(AB)$, il vient

$$\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)} \subset \sum_k \overline{g(A_k)}\cdot\overline{g(B)} + g(AB),$$

d'où

$$\overline{g(A)}\cdot\overline{g(B)} \subset g(AB),$$

car l'hypothèse $g \in \Phi_1\cdot\Phi_2\cdot\ldots$ veut dire que

$$\sum_k \overline{g(A_k)}\cdot\overline{g(B)} = 0.$$

Voici une application intéressante du th. 4.

7 [2]). *Étant donnée dans $\mathcal{J}^r$ une suite d'ensembles $A_0, A_1, \ldots$ de dimension $\leqslant n$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite d'homéomorphies $h_0, h_1, \ldots$ telle que*

$$h_i(A_i) \subset \mathcal{J}^r, \quad h_i(A_i)\cdot h_j(A_j) = 0 \quad (si\ j \neq i), \quad |h_i(x) - x| < \varepsilon.$$

[1]) Voir ma note *Quelques théorèmes sur le plongement topologique des espaces*, Fund. Math. **30** (1937), p. 8.

[2]) Voir, dans cet ordre d'idées, P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. **106** (1932), p. 210 (2. Zusatz) et W. Hurewicz, *Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume*, Sgb. Preuss. Akad. **24** (1933), p. 760.

Faisons correspondre, en effet, à tout point $x=[x^1,x^2,\ldots]$ de A_i le point $f_i(x)=[i,x^1,x^2,\ldots]$ de $\mathcal{E}^{r+1}$. Évidemment, f_i est une homéomorphie, et les ensembles $B_i=f_i(A_i)$ sont disjoints deux à deux et fermés-ouverts dans leur somme $S=B_0+B_1+\ldots$ Comme $\dim B_i\leqslant n$, il vient $\dim S\leqslant n$.

Soit g la fonction égale à f_i^{-1} sur B_i, où $i=0,1,\ldots$ On a donc $g\in(\mathcal{J}^r)^S$ et il existe, par conséquent, d'après 1 et 4, une homéomorphie $h\in(\mathcal{J}^r)^S$ telle que

$$|h-g|<\varepsilon \quad \text{et} \quad h(B_i)\cdot h(B_j)=0 \quad \text{pour} \quad j\neq i.$$

Il suffit de poser $h_i(x)=hf_i(x)$ pour $x\in A_i$.

VIII. L'espace $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$ pour $r>\dim\mathcal{X}$. *Théorème de Hurewicz*[1]). *Si* $\dim\mathcal{X}\leqslant n$, *il existe une fonction* $g\in(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$ *qui n'admet aucune valeur en un nombre de points plus grand que* $\dfrac{n+1}{r-n}$.

De façon plus générale, V_k *désignant l'ensemble des valeurs de la fonction* g *d'ordre* $>k$, *on a*

$$\dim V_k\leqslant n-k(r-n) \quad \textit{pour} \quad k\leqslant\frac{n+1}{r-n}. \tag{1}$$

Plus précisément: *l'ensemble* Ψ_k *des fonctions* g *assujetties à la condition* (1), *et par conséquent l'ensemble* $\Psi_0\cdot\Psi_1\cdot\ldots$, *est résiduel dans l'espace* $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$.

Soit, en effet, $R_1,R_2,\ldots$ la base de l'espace $\mathcal{X}$. Soient $g\in(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$ et $y\in V_k$. Il existe donc un système de $k+1$ points différents $x_0,\ldots,x_k$ tels que $y=g(x_0)=\ldots=g(x_k)$. Il existe par conséquent un système d'indices $S=(i_0,\ldots,i_k)$ tel que les ensembles $\overline{R_{i_0}},\ldots,\overline{R_{i_k}}$ sont disjoints et que

$$y\in g(\overline{R_{i_0}})\cdot\ldots\cdot g(\overline{R_{i_k}})\subset\overline{g(\overline{R_{i_0}})}\cdot\ldots\cdot\overline{g(\overline{R_{i_k}})},$$

d'où

$$V_k\subset\sum_S[\overline{g(\overline{R_{i_0}})}\cdot\ldots\cdot\overline{g(\overline{R_{i_k}})}]. \tag{2}$$

Cette sommation étant dénombrable et ses sommandes étant des ensembles fermés, l'hypothèse que l'inégalité (1) est en défaut pour g implique l'existence d'un système S vérifiant la formule

$$\dim[\overline{g(\overline{R_{i_0}})}\cdot\ldots\cdot\overline{g(\overline{R_{i_k}})}]>n-k(r-n). \tag{3}$$

[1]) Op. cit., p. 755. Voir aussi dans le même ordre d'idées, S. Eilenberg, *Remarque sur un théorème de M. Hurewicz*, Fund. Math. **24** (1935), p. 156.

Autrement dit, si g *non*-$\in\Psi_k$, il existe un système S satisfaisant à l'inégalité (3). En désignant par Γ_S l'ensemble des fonctions g satisfaisant à cette inégalité, on a donc

$$(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}-\Psi_k\subset\sum_S\Gamma_S.$$

L'ensemble Γ_S étant un F_σ (d'après IV, 4' et § 38, VI, 5) frontière (d'après § 23, VII, 6), Ψ_k est donc un ensemble résiduel.

Exemple. Si $\dim\mathcal{X}=1$ (si $\mathcal{X}$ est une courbe, par exemple), $\mathcal{X}$ peut être placé sur le plan de façon qu'aucun point du plan ne soit couvert par plus de deux points de $\mathcal{X}$ et qu'en outre, les points du plan qui se trouvent couverts par deux points de $\mathcal{X}$ constituent un ensemble de dimension 0.

IX. L'espace $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$ pour $r\leqslant\dim\mathcal{X}$. *Théorème de Hurewicz*[1]). *Si* $\dim\mathcal{X}\leqslant n$, *il existe une fonction* $g\in(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$ *telle que*

$$\dim[g^{-1}(y)]\leqslant n-r, \quad \textit{quel que soit} \quad y\in g(\mathcal{X}). \tag{1}$$

Plus précisément: *si* $\mathcal{X}$ *est compact et* $\dim\mathcal{X}\leqslant n$, *les fonctions* g *assujetties à la condition* (1) *constituent un* G_δ *résiduel dans l'espace* $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$.

Tout espace étant contenu dans un espace compact de même dimension (VII, 2), il suffit d'établir la deuxième partie du théorème.

Envisageons d'abord le cas où $r=n$. L'ensemble $g^{-1}(y)$ étant compact, la condition $\dim[g^{-1}(y)]=0$ équivaut (d'après IV, 1) à l'égalité $d_1[g^{-1}(y)]=0$, qui veut dire que l'on a pour $k=1,2,\ldots$:

$$d_1[g^{-1}(y)]<1/k. \tag{2}$$

Enfin, l'inégalité (2) équivaut à l'existence d'une décomposition de l'ensemble $g^{-1}(y)$ en un nombre fini d'ensembles fermés, disjoints et de diamètre $<1/k$ (cf. N° IV). Par conséquent, en désignant par Ψ l'ensemble des fonctions g satisfaisant à la condition (1) et par Ψ_k celui des fonctions g satisfaisant à (2), on a

$$\Psi=\Psi_1\cdot\Psi_2\cdot\ldots$$

L'ensemble Ψ_k étant dense d'après le th. 7 du § 23, VII et ouvert d'après IV, 5, l'ensemble Ψ est donc un G_δ résiduel.

[1]) Op. cit. Dans le cas où $\mathcal{X}$ est un polytope, la première partie du théorème devient élémentaire.

Passons au cas où $r<n$. L'ensemble Ψ étant un G_δ d'après IV, 5, il s'agit de prouver qu'il est dense.

Soit $f \in (\mathcal{J}^r)^{\mathfrak{X}}$ et $\varepsilon>0$. Soit f_* la fonction-élément de $(\mathcal{J}^n)^{\mathfrak{X}}$ définie par les conditions:

$$f_*^i(x)=\begin{cases} f^i(x) & \text{pour } i\leqslant r\\ 0 & \text{pour } r<i\leqslant n.\end{cases}$$

Comme nous venons de prouver, il existe une fonction $g_*\in(\mathcal{J}^n)^{\mathfrak{X}}$ à tranches 0-dimensionnelles et telle que $|g_*-f_*|<\varepsilon$.

Posons $g(x)=[g_*^1(x),\dots,g_*^r(x)]$. Il vient

$$g\in(\mathcal{J}^r)^{\mathfrak{X}} \quad\text{et}\quad |g-f|<\varepsilon.$$

Enfin, $g\in\Psi$, car la condition (1) est une conséquence directe du th. VI, 3, en y posant:

$$\mathcal{Y}_1=\mathcal{J}^r,\quad \mathcal{Y}_2=\mathcal{J}^{n-r},\quad f_1=g,\quad f_2=(g_*^{r+1},\dots,g_*^n),\quad\text{donc}\quad f=g_*.$$

CINQUIÈME CHAPITRE.

Espaces connexes.

§ 41. Notion de connexité.

I. Définition. Généralités. L'espace 1 est dit *connexe* lorsqu'il ne contient aucun ensemble X tel que

(1) $$0\neq X\neq 1 \quad\text{et}\quad \bar{X}\cdot\overline{1-X}=0\ [1];$$

autrement dit: si la *frontière* d'aucun ensemble satisfaisant à la condition $0\neq X\neq 1$ n'est vide.

Pour que l'espace soit connexe, il faut et il suffit qu'il ne se laisse pas décomposer en deux ensembles fermés, disjoints et non vides.

Car si l'espace se laisse décomposer de la sorte en X et Y, X satisfait à (1); inversement, si X satisfait à (1), la décomposition $1=\bar{X}+\overline{1-X}$ est une décomposition en deux ensembles fermés, disjoints et non vides.

En relativisant la définition de connexité, on en conclut que, pour qu'un *ensemble* C (situé dans l'espace donné) soit connexe, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout sous-ensemble X de C tel que $0\neq X\neq C$, l'inégalité $C\cdot\bar{X}\cdot\overline{C-X}\neq 0$; autrement dit, que C ne se laisse pas décomposer en deux ensembles X et Y fermés dans C, disjoints et non vides; ou encore, en deux ensembles X et Y *séparés* (cf. § 16, V) et non vides, c.-à-d. satisfaisant aux conditions:

(2) $$C=X+Y,\quad \bar{X}Y+X\bar{Y}=0,\quad X\neq 0\neq Y.$$

Un ensemble connexe et ouvert est dit une *région*.

[1] La définition de connexité adoptée ici remonte à C. Jordan, *Cours d'analyse I*, p. 25, Paris 1893. Cf. N. J. Lennes, Amer. Journ of Math. **33** (1911), p. 303. Elle a pour but, d'exprimer de façon topologique la notion intuitive de la continuité d'un ensemble de points.