MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

TOM XX

TOPOLOGIE I

ESPACES MÉTRISABLES, ESPACES COMPLETS

PAR

CASIMIR KURATOWSKI
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE

DEUXIÈME ÉDITION
REVUE ET AUGMENTÉE

Z SUBWENCJI PREZYDIUM RADY MINISTRÓW
I MINISTERSTWA OŚWIATY

WARSZAWA — WROCŁAW 1948

Podpisano do druku 8. IX. 1948 M-01629 Nakład 1100 egz.
Ark. druk.: 29 Papier bezdrz. sat. 100 g Format 70×100 cm.

PRINTED IN POLAND
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
POD ZARZĄDEM KAROLA KIECIA

DÉDIÉ À MONSIEUR WACŁAW SIERPIŃSKI

PRÉFACE À LA PREMIÈRE ÉDITION DU VOLUME I.

La Topologie traite des propriétés des ensembles de points, *invariantes* par rapports aux transformations bicontinues.

Une transformation (univoque) $y=f(x)$ est dite *continue*, lorsque la condition $x=\lim_{n=\infty} x_n$ entraîne $f(x)=\lim_{n=\infty} f(x_n)$. Elle est dite *bicontinue* ou une *homéomorphie* lorsqu'elle admet, en outre, une transformation inverse $x=f^{-1}(y)$ continue.

Le terme „ensemble de *points*" exige quelques explications: on peut notamment se demander quel est *l'espace* dont on considère les points.

Comme on sait, la notion de point de l'espace euclidien à 3 dimensions a été étendue dans la Géométrie analytique sur l'espace à un nombre arbitraire des dimensions: un point p de l'espace euclidien $\mathcal{E}^k$ (à k dimensions) est par définition un système de k nombres réels $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(k)}$; la convergence $\lim_{n=\infty} p_n = p$ signifie que l'on a $\lim_{n=\infty} p_n^{(i)} = p^{(i)}$, quel que soit $i \leqslant k$.

Le développement récent de la Topologie et des autres branches des mathématiques modernes (surtout celui de la Théorie générale des fonctions et du Calcul fonctionnel) a montré que cette conception de l'espace était encore trop étroite: dans un grand nombre des problèmes on est conduit à considérer, outre l'espace $\mathcal{E}^k$, l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ à une *infinité de dimensions* (nommé aussi „espace $\mathcal{E}_\omega$ de Fréchet") et dont les points p sont des suites infinies $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(i)}, \ldots$ de nombres réels; la convergence $\lim_{n=\infty} p_n = p$ y signifie que l'on a $\lim_{n=\infty} p_n^{(i)} = p^{(i)}$, quel que soit i.

Or, c'est précisément l'étude des invariants des homéomorphies entre sous-ensembles de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ qui constitue le vrai domaine de la Topologie à l'état actuel de cette science. Ajoutons que le terme ensemble est entendu ici dans le sens le plus général: les ensembles de points que nous allons envisager ne se réduisent pas à des courbes ou surfaces de la Géométrie élémentaire ou analytique, ni même à des figures considérées en Analyse et définies par des expressions analytiques, mais ils sont complètement arbitraires (dans le sens de la Théorie des ensembles).

Dans la suite, nous n'allons pas admettre d'une manière explicite que l'espace considéré est un sous-ensemble de $\mathcal{E}^{\aleph_0}$, pas plus que dans la Géométrie du plan euclidien on n'étudie explicitement l'ensemble des nombres complexes, mais on déduit les conséquences d'un système d'axiomes qui caractérise cet ensemble au point de vue *géométrique*. Pareillement, nous allons baser ici la Topologie sur un système d'axiomes (I—V) tel que 1° chaque espace satisfaisant à ce système est homéomorphe (donc équivalent au point de vue topologique) à un ensemble situé dans l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ et 2° chaque sous-ensemble de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ satisfait à ce système d'axiomes (cf. § 17, IV). Le seul *terme primitif* du système est le terme $\bar{A}$, désignant la *fermeture* de l'ensemble A (c. à d. l'ensemble A augmenté de tous ses points d'accumulation). La propriété d'appartenir à la fermeture d'un ensemble étant invariante par rapport aux homéomorphies de l'espace, *tout ce qui se laisse exprimer par l'opération* $\bar{A}$ (au moyen, s'il y a lieu, des opérations de la Logique et de la Théorie des ensembles) est également invariant par rapport à ces transformations et *appartient par conséquent à la Topologie* [1]).

L'avantage de la méthode axiomatique tient d'abord à des raisons méthodologiques. En particulier, elle permet de mieux se rendre compte des prémisses qui sont essentielles dans les démonstrations des théorèmes topologiques. Bien que G. Cantor, le fondateur de la Théorie des ensembles, et les autres mathématiciens qui s'occupaient de la „Théorie des ensembles de points", ne procédassent pas par la voie axiomatique, on s'est aperçu plus tard (Fréchet) que, dans la majorité des problèmes topologiques, bien peu de propriétés de l'espace intervenaient dans les raisonnements. En admettant ces propriétés comme axiomes, on est parvenu aux „espaces abstraits". Tel est en particulier l'espace considéré dans ce livre; il équivaut topologiquement — comme nous l'avons

[1]) Au lieu de la fermeture, on pourrait employer comme termes primitifs de la Topologie: la limite d'une suite de points (Fréchet), l'entourage (Hausdorff), l'ensemble ouvert (Sierpiński) etc.

Par contre, la notion de distance entre deux points p. ex. ne pourrait servir au même but, puisqu'elle n'est pas invariante par rapport à l'homéomorphie.

dit — à un sous-ensemble arbitraire de $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ ou, en d'autres termes, à un espace métrique séparable (dans le sens établi aux § 14, VI et § 15, I).

Cependant, la valeur de la méthode axiomatique n'est pas uniquement de nature méthodologique. Il y a, en effet, des problèmes où l'on est conduit à considérer une famille d'ensembles ou de fonctions comme formant elle-même un espace (nommé parfois „hyper-espace"), de démontrer que cet hyper-espace satisfait à certains axiomes et d'appliquer les théorèmes qui en résultent. Ainsi p. ex. le problème de l'existence des fonctions continues sans dérivée se ramène à un théorème (théorème de Baire) sur l'„espace des fonctions continues" (voir § 30,VIII), qui est — comme on le montre — complet et séparable.

C'est là un des procédés caractéristiques des mathématiques modernes: pour démontrer un théorème concernant un espace donné, on définit un nouvel espace (en conférant ainsi le caractère géométrique au problème considéré) et on opère ensuite sur ce dernier. On procède de la sorte dans maintes applications du Calcul fonctionnel aux équations intégrales, au Calcul des variations etc. Dans ce mode de procéder les différentes branches des mathématiques deviennent utiles les unes aux autres: dans de nombreux problèmes d'Analyse, l'hyper-espace est un espace géométrique ou topologique, dans certains problèmes de Topologie il est d'une nature algébrique (il constitue un groupe).

* * *

L'étude de l'espace assujetti aux axiomes I—V est divisée en deux chapitres, dont le premier ne concerne que les trois premiers axiomes (voir § 4, I). Ces trois axiomes se distinguent par leur caractère „algébro-logique" [1]). En conséquence, le même caractère appartient aux méthodes de raisonnement du Chapitre I.

Le Chapitre III et les suivants (du vol. II) sont d'un caractère plus spécial. L'espace du Chap. III est supposé complet, celui du Chap. IV compact, celui du Chap. V connexe etc.

Au lieu de considérer les espaces spéciaux (tels que les espaces complets, compacts etc.), on pourrait, bien entendu, envisager les ensembles complets, compacts etc., situés dans un espace assujetti aux axiomes I—V, de sorte que la Topologie toute entière

[1]) Sur l'importance de l'algorithme algébro-logique en Topologie a attiré l'attention S. Janiszowski.

rentrerait dans le Chap. II (ou même dans le Chap. I!). Or, il est avantageux de formuler partout où c'est possible les propriétés d'un ensemble situé dans un espace comme des propriétés *intrinsèques* de cet ensemble, considéré comme formant un espace pour lui-même. Telle est, par exemple, la propriété d'être compact, d'être dense en soi, d'être de dimension n (par contre, la propriété, d'être fermé ou d'être ouvert est une propriété extrinsèque: propriété de l'ensemble par rapport à l'espace).

Parmi les problèmes considérés dans ce volume, il y a qui se distinguent par leur caractère purement géométrique, il y en a d'autres qui se rapprochent par leur origine de la Théorie des fonctions de variables réelles. La majorité des §§ (4—10, 13—19, 24—25, 29, 30) embrasse les deux tendances. Comme exemples d'une section par excellence géométrique, citons les §§ 20—23 (théorie de la dimension): ils concernent un domaine où le succès des méthodes topologiques en Géométrie est particulièrement frappant. Un grand nombre de problèmes traités dans les §§ 26—28, 33—36 représente la deuxième tendance[1]). La théorie des fonctions mesurables B, qui n'était à son origine qu'une théorie des fonctions réelles de variable réelle, est devenue (dans sa partie la plus importante) une théorie des transformations des espaces topologiques (satisfaisant aux. ax. I—V) en espaces topologiques, de sorte qu'il est juste de traiter cette théorie comme une section de la Topologie. Les §§ 25 et 33 concernent la notion d'ensemble borelien, notion purement topologique, dont l'origine est liée à la Théorie de la mesure. Les §§ 10, 34 et 35 concernent les généralisations plus récentes de cette notion: ces généralisations sont traitées dans le chapitre consacré aux espaces complets et donnent lieu à des applications importantes dans le Calcul fonctionnel. En outre, la notion d'ensemble projectif (§ 34) semble présenter un grand intérêt philosophique, grâce surtout aux liaisons avec la Logique mathématique. L'emploi des notations logiques s'impose d'une façon très naturelle dans l'étude de ces ensembles, ainsi que dans celle des ensembles boreliens et analytiques, où elle rend des services incontestables.

[1]) Le lecteur qui ne s'intéresse qu'aux problèmes géométriques peut omettre la lecture des §§ précités. Il importe toutefois de remarquer qu'il n'y a pas de ligne de démarcation précise entre notions et problèmes des deux genres. Par exemple, la notion d'ensemble de I-e catégorie, introduite par Baire pour les besoins de l'étude des fonctions discontinues, est d'une grande importance dans maintes questions purement géometriques.

Les *méthodes de raisonnement* que j'emploie dans ce volume appartiennent à la Théorie des ensembles[1]), les méthodes de la Topologie combinatoire (homologies, groupes de Betti etc.) n'intervenant pas, en général, dans les questions traitées ici.

Sans prétendre de donner une bibliographie complète, j'ai tâché d'indiquer dans les *renvois bibliographiques* les ouvrages les plus importants parmi ceux qui se rattachent au sujet de ce volume.

Le lecteur qui s'intéresse à la bibliographie consultera les excellents exposés de MM. Rosenthal-Zoretti, Encyklopädie d. Math. Wiss. II C 9a, Leipzig 1924 et de MM. Tietze-Vietoris, ibid. III AB 13, Leipzig 1931.

Parmi les livres sur la Topologie dont je me suis servi en rédigeant ce volume et dont la valeur ne se réduit pas seulement à leur intérêt historique, sont à citer: F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, Veit 1914 et *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig, Gruyter 1927, W. Sierpiński, *Zarys teorii mnogości II*, Warszawa 1928, M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Monographies Borel, Paris 1928. Le manuscrit de ce volume était déjà terminé, quand ont paru les livres: H. Hahn, *Reelle Funktionen* I, Leipzig 1932 et R. L. Moore, *Foundations of point set theory*, Coll. Publ., New York 1932.

En terminant, je tiens à exprimer ici mon affectueuse gratitude à MM. Čech, Hurewicz, Knaster, Otto, Posament, Szpilrajn et Zygmund, qui ont bien voulu contribuer à ma tâche soit par leurs précieux conseils, soit par la lecture des épreuves.

[1]) „point set theoretic method" selon la dénomination des mathématiciens américains.

Casimir Kuratowski

Lwów, Décembre 1933.

PRÉFACE À LA DEUXIÈME ÉDITION DU VOLUME I.

La première édition de la „Topologie I" était en 1939 presque épuisée. La réédition miméographique effectuée pendant la guerre par la Maison Stechert et Co. à New York est aussi presque entièrement enlevée. Ces circonstances et la prochaine issue de la „Topologie II", qui est actuellement sous presse, m'ont porté à reprendre une nouvelle édition du volume I.

Les modifications que j'y ai apportées sont dictées soit par le soin de mieux adapter le premier volume au second qui en constituera la suite naturelle, soit par le désir de compléter les chapitres de la topologie qui peuvent être définitivement achevés dans le volume I et sur lesquels je n'aurai plus à revenir dans la suite. Les modifications de cette nature touchent pour la plupart aux problèmes liés plutôt à la théorie des fonctions qu'à la géométrie; elles concernent en particulier la théorie des ensembles boreliens, des fonctions de Baire, des ensembles projectifs, la géométrisation des types ordinaux et les espaces singuliers.

Dans la topologie géométrique, la différence essentielle entre l'ancienne et la nouvelle édition est représentée par un nouveau paragraphe sur les simplexes et les polytopes (§ 23), ajouté à la théorie de la dimension. Il contient — outre les théorèmes fondamentaux (sur l'équivalence de la définition topologique de la dimension à la définition géométrique, sur le point fixe des transformations continues du simplexe) — une série de théorèmes sur l'approximation des transformations continues arbitraires par des transformations $\varkappa$; ce sont des préparatoires aux théorèmes du volume II, en particulier à ceux sur le plongement d'espaces métriques séparables arbitraires dans les espaces euclidiens. Leur démonstration a été placée dans le volume II parce qu'elle est particulièrement simple lorsqu'on l'appuie sur la théorie des espaces métriques compacts faisant l'objet du Chapitre IV, qui appartient au volume II.

Certains théorèmes sur les espaces compacts, surtout ceux sur les espaces $\mathcal{L}^*$ compacts, trouvent cependant leur place dans la nouvelle édition du volume I. Ils y sont nécessaires pour les applications et pour la consctruction de la théorie de l'espace des fonctions continues, plus détaillée qu'elle n'était dans la première édition du même volume. L'espace en question, désigné par $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, est envisagé pour des espaces $\mathcal{L}^*$ quelconques $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, la limite des fonctions $f_1, f_2, \ldots$ étant par définition la fonction f telle que $\lim_{n=\infty} x_n = x$ entraîne $\lim_{n=\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

Par ailleurs, j'ai cherché à éviter toute modification essentielle dans l'arrangement des matières, notamment pour ne pas causer de difficultés à la lecture du volume II au lecteur de l'ancienne édition du volume I.

Parmi les traités de Topologie dont je me suis servi en rédigeant la nouvelle édition de ce volume et qui ont paru après sa première édition, les suivants sont à citer:

P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie I*, Berlin, Springer 1935;

P. Aleksandrow, *Kombinatornaja Topologia*, Moscou—Leningrad, OGIZ 1947 (en russe);

W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press 1941;

G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 1942;

S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 1942;

M. H. A. Newman, *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge University Press 1939.

En terminant, je tiens à exprimer mon affectueuse gratitude à MM. B. Knaster et R. Sikorski qui ont bien voulu m'aider de leurs conseils et de lire une bonne partie des épreuves.

Casimir Kuratowski

Varsovie, Juillet 1948.

Le théorème précédent, rapproché du théorème de l'existence d'espaces ν de puissance du continu, entraîne *la solution négative du problème généralisé de la mesure*, à savoir, *qu'il n'existe, en dehors de la fonction identiquement nulle, aucune fonction non-négative qui satisfasse aux conditions* (i) *et* (ii) *et qui soit définie pour chaque sous-ensemble de l'intervalle* $\mathcal{J}$[1]).

Car, d'une part, ce dernier énoncé, comme théorème de la Théorie générale des ensembles, est réalisé sur chaque espace de puissance du continu dès qu'il est réalisé sur un seul; d'autre part, il existe des espaces de puissance $\mathfrak{c}$ sur lesquels il est réalisé (à savoir, des espaces ν).

Il est essentiel de remarquer que le raisonnement qui précède permet de déduire du fait topologique (existence d'un espace ν de puissance $\mathfrak{c}$) un théorème de la Théorie générale des ensembles. Inversement, on démontre (sans l'emploi de l'hypothèse du continu) que l'existence des espaces ν de puissance $\mathfrak{c}$ équivaut à un théorème de la Théorie générale des ensembles[2]).

Dans un ordre d'idées analogue, on déduit de l'existence d'ensembles indénombrables à propriété ν les deux théorèmes remarquables suivants[3]):

Il existe une fonction continue f définie sur un ensemble de puissance $\mathfrak{c}$, qui n'est uniformément continue sur aucun ensemble indénombrable.

Il existe une suite convergente de fonctions $f_1, f_2, \ldots$ définies sur $\mathcal{E}$ qui n'est uniformément convergente sur aucun ensemble indénombrable.

---

[1]) Théorème de S. Banach et de moi-même, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fund. Math. **14** (1930), p. 127. Le fait, que l'existence des espaces ν indénombrables implique la solution du problème généralisé de la mesure à été observé par M. Szpilrajn-Marczewski dans sa note citée de Fund. Math. **22**, p. 304.

[2]) Voir ma note *Sur le rapport des ensembles de M. Lusin à la Théorie générale des Ensembles*, Fund. Math. **22** (1934), p. 315.

[3]) Voir W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, p. 52. Ces deux théorèmes ne se laissent établir qu'en appliquant l'hypothèse du continu; ils sont d'ailleurs équivalents. Ajoutons que le deuxième a été suggéré par le théorème de Egoroff, d'après lequel toute suite convergente de fonctions *mesurables* est uniformément convergente en négligeant un ensemble de mesure (extérieure) aussi petite qu'on le veut.

INDEX TERMINOLOGIQUE.

Notations.

Symboles de la Logique et de la Théorie des ensembles.

Symboles topologiques et métriques.

Termes.

AUTEURS CITÉS.

TABLE DES MATIÈRES.

„MONOGRAFIE MATEMATYCZNE"

Warszawa, Hoża 69, Seminarium Matematyczne U. W.
Wrocław, Politechnika, Seminarium Matematyczne

- I. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932, VIII+256 . $3.50
- II. S. Saks, Théorie de l'intégrale, 1933, X+292, épuisé.
- III. C. Kuratowski, Topologie I, 1933, X+288 . . . . $5.00
- IV. W. Sierpiński, Hypothèse du continu, 1934, VI+194 . . . $4.50
- V. A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935, IV+332 . . . . $6.00
- VI. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, 1935, VI+300 . . . . $5.00
- VII. S. Saks, Theory of the Integral, 1937, VIII+348 . . . . . $6.00
- VIII. S. Banach, Mechanika I, 1938, VI+234, nowe wydanie niezmienione, 1947.
- IX. S. Banach, Mechanika II, 1938, 235—556, nowe wydanie niezmienione, 1947.
- X. S. Saks i A. Zygmund, Funkcje Analityczne, 1938, VIII+432, nowe wydanie niezmienione, 1948.
- XI. W. Sierpiński, Zasady Algebry Wyższej, 1946, XII+438.
- XII. K. Borsuk, Geometria Analityczna (w druku).
- XIII. W. Sierpiński, Działania Nieskończone, 1947, XI+503.
- XIV. W. Sierpiński, Rachunek Różniczkowy (poprzedzony badaniem funkcji elementarnych), 1947, VII+262.
- XV. K. Kuratowski, Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego I, 1948, 236.
- XVI. E. Otto, Geometria Wykreślna (w druku).
- XVII. S. Banach, Teoria Funkcji Zmiennej Rzeczywistej (w druku).
- XVIII. A. Mostowski, Logika Matematyczna, 1948, VIII+388.
- XIX. W. Sierpiński, Teoria Liczb, nowe wydanie powiększone (w druku).
- XX. C. Kuratowski, Topologie I, nouvelle édition, 1948, XII+452 . . . . $7.50
- XXI. C. Kuratowski, Topologie II (sous presse).

EN PRÉPARATION:

M. Biernacki, Geometria Różniczkowa.
M. Kac and H. Steinhaus, Independent Functions.
K. Kuratowski, Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego II.
K. Kuratowski i A. Mostowski, Kurs Teorii Mnogości.
E. Marczewski, General Theory of Measure.
S. Mazur, Functional Analysis.
S. Mazurkiewicz, Rachunek Prawdopodobieństwa.
W. Nikliborc, Równania Różniczkowe.
W. Nikliborc, Problème de trois corps.
O. Nikodym, Theory of Vectors and Vector-Fields.
W. Rubinowicz, Wektory i Tensory.
W. Sierpiński, Algèbre des Ensembles.
W. Sierpiński, The Axiom of Choice and the Continuum Hypothesis.
W. Sierpiński, Teoria Mnogości, nowe wydanie powiększone.
W. Ślebodziński, Les formes différentielles symboliques et leurs applications.
A. Zygmund, Trigonometrical Series, new edition.

Les tomes I, III—VII et XX sont en vente chez Stechert-Hafner Inc., 31—37 East 10-th Street, New York, U.S.A.