

TROISIÈME CHAPITRE.

Espaces complets.

§ 29. Définitions. Généralités.

I. Définitions. Une suite de points $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ (situés dans un espace métrique) *satisfait à la condition de Cauchy*, lorsqu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un n tel qu'on a $|p_n - p_k| < \varepsilon$ pour tout $k > n$; autrement dit, lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(E_n) = 0$, où E_n désigne l'ensemble $(p_n, p_{n+1}, \dots)$.

Un espace métrique est dit *complet*¹⁾ lorsque chaque suite satisfaisant à la condition de Cauchy y est convergente; c. à d. qu'il existe dans cet espace un point p tel que $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

Remarque. La notion d'espace complet n'est pas une notion topologique: l'intervalle ouvert $0 < x < 1$ n'est pas un espace complet, tandis que l'ensemble de tous les nombres réels — qui lui est homéomorphe — est complet (en vertu du théorème classique sur l'équivalence de la condition de Cauchy à la convergence d'une suite de nombres réels).

Nous distinguons entre la notion d'espace complet *au sens métrique* (qui vient d'être définie) et celle d'espace complet *au sens topologique*: à savoir, d'espace homéomorphe à un espace complet au sens métrique²⁾.

¹⁾ Notion due à M. Fréchet (Thèse). Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge...*, p. 315. Il est à remarquer que les espaces métriques satisfaisant à l'ax. I de M. R. L. Moore (*Foundations...*, p. 464) sont complets, voir J. H. Roberts, *Bull. Amer. Math. Soc.* **38** (1932), p. 835. Cf. aussi W. Sierpiński, *Fund. Math.* **6** (1924), p. 106.

²⁾ C'est dans ce dernier sens que M. Fréchet emploie le terme espace complet.

II. Convergence et condition de Cauchy. Toute suite convergente satisfait à la condition de Cauchy.

Car, si l'on admet que $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un n tel que l'on a $|p_k - p| < \varepsilon/2$ pour $k \geq n$; donc $|p_n - p_k| < \varepsilon$.

Le théorème réciproque n'est pas vrai dans les espaces non complets. Cependant:

Si une suite satisfaisant à la condition de Cauchy contient une sous-suite convergente, la suite totale est convergente (et converge vers la limite de la sous-suite en question).

Soit, en effet, $p = \lim_{j \rightarrow \infty} p_{i_j}$. Le sens de ε et n étant le même que dans la définition de la condition de Cauchy, soit m un indice $> n$ et tel que $|p_{i_m} - p| < \varepsilon$. Comme $i_m \geq m > n$, il vient $|p_{i_m} - p_k| < 2\varepsilon$ pour $k > n$. On a donc $|p_k - p| < 3\varepsilon$, d'où $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$.

En particulier, tout espace métrique compact est complet.

III. Produit cartésien. Le produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ de deux espaces complets est complet, lorsqu'il est métrisé par la formule

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1| = \sqrt{|x - x_1|^2 + |y - y_1|^2},$$

où $\mathfrak{z} = (x, y)$ et $\mathfrak{z}_1 = (x_1, y_1)$ (cf. § 15, VI (1)).

En effet, si la suite des points $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots$ satisfait à la condition de Cauchy, les suites des abscisses $x_1, x_2, \dots$ et des ordonnées $y_1, y_2, \dots$ lui satisfont également, car

$$|x_n - x_k| \leq |\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}_k| \quad \text{et} \quad |y_n - y_k| \leq |\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}_k|.$$

Les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant complets, ils contiennent respectivement des points x et y tels que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{et} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \text{d'où} \quad (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{z}_n.$$

Le théorème précédent, valable pour chaque nombre fini d'espaces, s'étend sur les produits dénombrables:

Le produit $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$ d'une suite d'espaces complets est un espace complet, lorsqu'il est métrisé par la formule

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i|}{1 + |\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i|}$$

où $\mathfrak{z}$ désigne la suite $\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots$ et $\mathfrak{y}$ la suite $\mathfrak{y}^1, \mathfrak{y}^2, \dots$ (voir § 15, VI, 2).

Supposons, en effet, que la suite $z_1, z_2, \dots$ satisfasse à la condition de Cauchy. Soit i un indice arbitraire fixe. A tout $\varepsilon > 0$ (tel que $1 - 2^i \varepsilon > 0$) correspond un n tel que l'on a $|z_n - z_k| < \varepsilon$, quel que soit $k > n$. Il vient

$$\frac{|z_n^i - z_k^i|}{1 + |z_n^i - z_k^i|} < 2^i \varepsilon, \text{ d'où } |z_n^i - z_k^i| < \frac{2^i \varepsilon}{1 - 2^i \varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{2^i \varepsilon} - 1}.$$

Le dernier nombre tendant vers 0 avec ε , on en conclut que la suite $z_1^i, z_2^i, \dots, z_n^i, \dots$ satisfait à la condition de Cauchy. L'espace $\mathcal{X}_i$ étant complet, il existe donc un $z^i = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^i$, d'où $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

En particulier, l'espace euclidien $\mathcal{E}^n$, l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ des suites de nombres réels, le cube n -dimensionnel $\mathcal{I}^n$, le cube fondamental $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ de Hilbert, l'espace $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels de l'intervalle $\mathcal{I}$ (en tant que puissance $\aleph_0$ de l'ensemble des nombres naturels) sont topologiquement complets (c. à d. homéomorphes à des espaces complets).

IV. Espace $2^{\mathcal{X}}$. Si $\mathcal{X}$ est complet, l'espace $2^{\mathcal{X}}$ l'est également¹⁾.

Soit, en effet, $A_1, A_2, \dots$ une suite d'ensembles-éléments de $2^{\mathcal{X}}$ satisfaisant à la condition de Cauchy. Autrement dit: à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $n(\varepsilon)$ tel que

$$(1) \quad n > n(\varepsilon) \text{ entraîne } \text{dist}(A_n, A_{n(\varepsilon)}) < \varepsilon.$$

Posons $L = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Nous allons montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(L, A_n) = 0$.

Il suffit de prouver que $\text{dist}(L, A_{n(\varepsilon)}) \leq 2\varepsilon$, car on en conclura en vertu de (1) que $\text{dist}(L, A_n) \leq 3\varepsilon$ pour $n > n(\varepsilon)$.

Ainsi tout revient à montrer que

1° quel que soit $p \in L$, on a $\varrho(p, A_{n(\varepsilon)}) \leq 2\varepsilon$,

2° quel que soit $q \in A_{n(\varepsilon)}$, on a $\varrho(q, L) \leq 2\varepsilon$.

Or, R désignant la sphère (généralisée) fermée de centre $A_{n(\varepsilon)}$ et de rayon ε , on a, selon (1), $A_n \subset R$, pour $n > n(\varepsilon)$ (cf. § 15, VII (2)). En tant que limite supérieure de la suite $\{A_n\}$, l'ensemble L satisfait à l'inclusion $L \subset \overline{A_n + A_{n+1} + \dots}$ (cf. § 25, IV, 8), d'où $L \subset R$, ce qui prouve la proposition 1°.

¹⁾ Théorème de H. Hahn, *Reelle Funktionen*, p. 124, Leipzig 1932.

Pour démontrer 2°, posons $n(\varepsilon/2^k) = n_k$ (on peut admettre que $n_k > n_{k-1}$) et envisageons la suite $q_{n_0}, q_{n_1}, \dots, q_{n_k}, \dots$ définie par induction comme il suit: on choisit dans A_{n_k} un point q_{n_k} de façon que $q_{n_0} = q$ et $|q_{n_k} - q_{n_{k-1}}| < \varepsilon/2^{k-1}$, ce qui est toujours possible en raison de (1).

La suite $q_{n_0}, q_{n_1}, \dots$ satisfait à la condition de Cauchy, car on a $|q_{n_m} - q_{n_k}| < \varepsilon/2^{k-1}$ pour $m > k$. L'espace étant complet, la suite converge donc vers un point l de cet espace. D'après la définition de la limite supérieure, l appartient à L . Comme, en outre, $|q_{n_k} - q_{n_0}| < 2\varepsilon$ quel que soit k , il vient $|q - l| \leq 2\varepsilon$, d'où la proposition 2°.

V. Espace fonctionnel. Nous avons vu au § 15, VIII, 1 que la famille Φ des fonctions bornées $y = f(x)$ qui transforment l'espace $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de l'espace $\mathcal{Y}$ peut être conçue comme espace métrique, lorsqu'on adopte la définition suivante de la distance:

$$(0) \quad |f_1 - f_2| = \sup |f_1(x) - f_2(x)|.$$

1. Si $\mathcal{Y}$ est complet, l'espace Φ l'est également.

Supposons, en effet, que l'on ait $|f_n - f_k| < \varepsilon$ pour $k > n$. Par conséquent, pour x fixe, on a $|f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon$ et la suite $f_1(x), f_2(x), \dots$ satisfait à la condition de Cauchy. Posons donc $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. La suite $\{f_n\}$ étant uniformément convergente, les fonctions f_n convergent vers f au sens de la distance (0).

2. Si $\mathcal{Y}$ est complet, l'espace des fonctions bornées continues est complet.

Car la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues est continue (§ 15, VIII, 2).

Il en est de même de l'espace des fonctions de classe α (cf. § 27, VIII, 2), de celui des fonctions mesurables B , de l'espace des fonctions à propriété de Baire (cf. § 28, III, 2).

VI. Ensembles G_δ dans les espaces complets. Il résulte directement de la définition de l'espace complet que:

Tout sous-ensemble fermé d'un espace complet constitue lui-même un espace complet (avec la même notion de distance).

D'après le corollaire du § 24a, IX, tout sous-ensemble G_δ d'un espace métrique $\mathcal{X}$ est homéomorphe à un ensemble fermé situé dans le produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{E}^{\aleph_0}$ où $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ désigne l'espace des suites

infinies de nombres réels. Or, si l'on suppose que $\mathcal{X}$ est un espace complet, l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$, comme produit de deux espaces complets, l'est également, ainsi que chacun de ses sous-ensembles fermés. On arrive ainsi au suivant

*Théorème de P. Alexandroff*¹⁾. Tout sous-ensemble G_δ d'un espace complet est homéomorphe à un espace complet, c. à d. est complet au sens topologique.

Remarque. Le procédé qui nous a servi à démontrer le corollaire cité du § 24a, IX permet de définir directement une „nouvelle distance” dans un ensemble G_δ de façon que cet ensemble devienne un espace complet. En effet, étant donné un ensemble $Q = G_1 \cdot G_2 \dots$ où G_i est ouvert, posons

$$f_i(x) = \frac{1}{\varrho(x, \mathcal{X} - G_i)}.$$

La nouvelle distance entre deux points x et y de Q est alors:

$$|x - y| + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|f_i(x) - f_i(y)|}{1 + |f_i(x) - f_i(y)|}.$$

VII. Prolongement d'un espace métrique en espace complet.

Nous avons démontré (§ 15, VIII, 9) que tout espace métrique $\mathcal{X}$ est isométrique à un sous-ensemble de l'espace des fonctions à valeurs réelles, définies sur $\mathcal{X}$, continues et bornées. L'espace des nombres réels étant complet, cet espace fonctionnel est complet d'après V, 2. On a ainsi le

Théorème de F. Hausdorff. Tout espace métrique est isométrique à un sous-ensemble d'un espace complet.

Ce théorème peut être établi aussi de la manière suivante²⁾.

Considérons les suites $z = [z^1, z^2, \dots, z^i, \dots]$ extraites de l'espace $\mathcal{X}$ et satisfaisant à la condition de Cauchy comme points d'un espace $\tilde{\mathcal{X}}$; définissons la distance entre deux points z et η de $\tilde{\mathcal{X}}$ par la formule

$$(0) \quad |z - \eta| = \lim_{i \rightarrow \infty} |z^i - \eta^i|,$$

¹⁾ P. Alexandroff, *Sur les ensembles de la première classe et les espaces abstraits*, C. R. Paris **178** (1924), p. 185. Une simple démonstration a été donnée par F. Hausdorff, *Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen*, Fund. Math. **6** (1924), p. 146. Pour le théorème réciproque, voir § 31, III.

²⁾ F. Hausdorff, *Grundzüge...*, p. 315. La démonstration que nous allons reproduire suivant Hausdorff présente une généralisation du procédé bien connu de Cantor-Méray de la définition des nombres irrationnels.

deux suites distantes de 0 étant identifiées (cf. § 15, I, remarque). Avec ces définitions, $\tilde{\mathcal{X}}$ est — comme nous allons démontrer — complet et contient un ensemble isométrique à $\mathcal{X}$.

D'abord, l'espace $\tilde{\mathcal{X}}$ est métrique. Car, d'une part, l'inégalité

$$|z^i - \eta^i| \leq |z^i - z^j| + |z^j - \eta^j| + |\eta^j - \eta^i|$$

donne

$$|z^i - \eta^i| - |z^j - \eta^j| \leq |z^i - z^j| + |\eta^j - \eta^i|$$

et par conséquent, si les suites z et η satisfont à la condition de Cauchy, il en est de même de la suite (numérique) $|z^1 - \eta^1|, |z^2 - \eta^2|, \dots$. L'existence de la limite $\lim_{i \rightarrow \infty} |z^i - \eta^i|$ en résulte. Ainsi la distance se trouve définie pour tout couple d'éléments de $\tilde{\mathcal{X}}$.

D'autre part, la loi du triangle est vérifiée, car l'inégalité $|z^i - \eta^i| + |z^i - w^i| \geq |\eta^i - w^i|$ donne $|z - \eta| + |z - w| \geq |\eta - w|$ par le passage à limite.

Dans le cas où pour tout i on a $z^i = x$ et $\eta^i = y$, il vient évidemment $|x - y| = |z - \eta|$. L'espace $\mathcal{X}$ est donc isométrique au sous-ensemble de $\tilde{\mathcal{X}}$ composé des suites d'éléments identiques.

Reste à prouver que l'espace $\tilde{\mathcal{X}}$ est complet.

Soit $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ une suite extraite de $\tilde{\mathcal{X}}$. Il existe donc une suite d'entiers positifs $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ telle que

$$(1) \quad |z_n^{m_n} - z_n^i| < \frac{1}{n} \quad \text{pour } i > m_n.$$

Supposons que la suite $z_1, z_2, \dots$ satisfasse à la condition de Cauchy. Nous allons prouver qu'il en est de même de la suite $z = [z_1^{m_1}, z_2^{m_2}, \dots]$, donc que $z \in \tilde{\mathcal{X}}$, et qu'en outre $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. La suite $z_1, z_2, \dots$ vérifiant la condition de Cauchy, il existe un indice $q = q(\varepsilon) > 1/\varepsilon$ tel que $|z_q - z_{q+k}| < \varepsilon$, quel que soit k . Il existe donc d'après (0) une suite d'entiers j_k telle que

$$(2) \quad |z_q^i - z_{q+k}^i| < \varepsilon \quad \text{pour } i > j_k.$$

L'inégalité

$$|z_q^{m_q} - z_{q+k}^{m_{q+k}}| \leq |z_q^{m_q} - z_q^i| + |z_q^i - z_{q+k}^i| + |z_{q+k}^i - z_{q+k}^{m_{q+k}}|$$

implique d'après (1) et (2) pour i supérieur à m_q, j_k et m_{q+k} que

$$(3) \quad |z_q^{m_q} - z_{q+k}^{m_{q+k}}| < \frac{1}{q} + \varepsilon + \frac{1}{q+k} < 3\varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite z satisfait à la condition de Cauchy.

L'inégalité

$$|\beta_n^i - \beta_l^m| \leq |\beta_n^i - \beta_n^m| + |\beta_n^m - \beta_l^m|$$

entraîne en vertu de (1) et (3) pour $i > m_n$, $n > q$ et $i > q$:

$$(4) \quad |\beta_n^i - \beta_l^m| < \frac{1}{n} + 6\varepsilon < 7\varepsilon.$$

On voit ainsi qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un indice q tel que pour $n > q$ on a l'inégalité (4), pourvu que i soit suffisamment grand. En faisant croître i à l'infini, il vient en raison de (0) $|\beta_n - \beta| \leq 7\varepsilon$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$.

Remarque. Si l'on identifie les points x de l'espace $\mathcal{X}$ avec les suites $[x, x, x, \dots]$, l'espace $\mathcal{X}$, considéré comme sous-ensemble de $\mathcal{X}$, est dense dans $\mathcal{X}$. En effet, étant donnée une suite $\beta = [\beta^1, \beta^2, \dots]$ appartenant à $\mathcal{X}$, on a $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$, où $\beta_n = [\beta_n^1, \beta_n^2, \beta_n^3, \dots]$. Car d'après (0) $|\beta_n - \beta| = \lim_{i \rightarrow \infty} |\beta_n^i - \beta^i|$ et, la suite β satisfaisant à la condition de Cauchy, il vient $\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n - \beta| = 0$.

En particulier, si $\mathcal{X}$ est séparable, $\mathcal{X}$ l'est également.

§ 30. Suites d'ensembles. Théorème de Baire.

L'espace considéré dans ce § est supposé complet (séparable ou non).

I. Coefficient $\alpha(A)$. Nous désignons par $\alpha(A)$ la borne inférieure des nombres ε pour lesquels l'ensemble A se laisse décomposer en un nombre fini d'ensembles de diamètre $< \varepsilon$. L'égalité $\alpha(A) = 0$ signifie ainsi que A est totalement borné (§ 15, IX).

Théorème¹⁾. Toute suite $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ de sous-ensembles fermés non vides de l'espace $\mathcal{X}$ et tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(A_n) = 0$ converge dans l'espace $2^{\mathcal{X}}$ vers l'ensemble non vide $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots$

Supposons d'abord que la suite $\{A_n\}$ ne satisfasse pas à la condition de Cauchy. Il existe alors un $\varepsilon > 0$ et une suite d'entiers croissants $\{k_n\}$ tels que $\text{dist}(A_n, A_{k_n}) > \varepsilon$. On en conclut qu'il existe une suite de points $\{p_n\}$ telle que $p_n \in A_n$ et $\rho(p_n, A_{k_n}) > \varepsilon$, car l'inclusion $A_n \supset A_{k_n}$ entraîne $\rho(A_n, x) = 0$ pour tout $x \in A_{k_n}$.

Soit m un entier tel que $\alpha(A_m) < \varepsilon$. Posons

$$A_m = Z_1 + \dots + Z_l \quad \text{et} \quad \delta(Z_i) < \varepsilon.$$

Les points $p_m, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots$ appartenant à A_m , l'un des ensembles $Z_1, \dots, Z_l$ (on peut admettre que ce soit Z_1) en contient une sous-suite infinie $p_i, p_{i_1}, \dots$. Soit j un indice tel que $i_j > k_{i_j}$. Donc $A_{k_{i_j}} \supset A_{i_j}$ et $p_{i_j} \in A_{k_{i_j}}$. Les formules $p_i \in Z_1$, $p_{i_j} \in Z_1$ et $\delta(Z_1) < \varepsilon$ entraînent $|p_i - p_{i_j}| < \varepsilon$, d'où $\rho(p_i, A_{k_{i_j}}) < \varepsilon$, contrairement à la définition de la suite $\{p_n\}$.

Cette contradiction montre que la suite $\{A_n\}$ satisfait à la condition de Cauchy, donc — l'espace $2^{\mathcal{X}}$ étant selon § 29, IV, complet — qu'elle est convergente. D'après § 25, IX, 2, elle converge vers l'ensemble $\text{Lim } A_n$, qui coïncide avec le produit $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots$, puisque la suite est décroissante (§ 25, VI, 8).

Corollaire. Etant donnée une famille (dénombrable ou non) d'ensembles fermés $\{F_i\}$ tels que

- 1° le produit de tout système fini d'ensembles F_i est non vide,
 - 2° il existe des ensembles F_i avec $\alpha(F_i)$ aussi petit que l'on veut,
- le produit de tous les ensembles F_i est non vide.

Soit n_n un indice tel que $\alpha(F_{n_n}) < 1/n$. Posons $P = F_{n_1} \cdot F_{n_2} \cdot \dots$. Il vient $\alpha(P) = 0$, c. à d. que P est totalement borné, donc séparable (§ 15, IX, 4). D'après le théorème de Lindelöf (§ 17, I) appliqué à l'ensemble P considéré comme l'espace, il existe une suite d'indices $i_1, i_2, \dots$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P - F_{i_n} = \sum_i P - F_i, \quad \text{donc} \quad \prod_{n=1}^{\infty} P F_{i_n} = \prod_i P F_i = \prod_i F_i.$$

$$\text{Posons } A_n = F_{n_1} \cdot \dots \cdot F_{n_n} \cdot F_{i_1} \cdot \dots \cdot F_{i_n}.$$

Il résulte du théorème précédent que

$$\prod_{n=1}^{\infty} P F_{i_n} = \prod_{n=1}^{\infty} A_n \neq 0, \quad \text{donc} \quad \prod_i F_i \neq 0.$$

II. Théorème de Cantor¹⁾. Pour toute suite $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ d'ensembles fermés, non vides et tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(A_n) = 0$, l'ensemble $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots$ se compose d'un seul point.

C'est une conséquence immédiate du théorème du N° I et de l'inégalité $\alpha(A_n) \leq \delta(A_n)$.

¹⁾ Cf. G. Cantor, Math. Ann. 17 (1880) et F. Hausdorff, Grundzüge... p. 318, où ce théorème se trouve dans la forme énoncée ici.

¹⁾ Voir ma note Sur les espaces complets, Fund. Math. 15 (1930), p. 303. D'après un théorème du Chapitre IV, l'ensemble $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots$ est compact.

Remarques. Le théorème de Cantor peut être démontré plus directement. A savoir, en extrayant un point p_n de chaque A_n , on définit une suite satisfaisant à la condition de Cauchy. La limite de cette suite est un point de chaque A_n (puisque A_n est fermé) et appartient par conséquent à $A_1 \cdot A_2 \dots$.

Il est à remarquer que ce théorème caractérise les espaces complets (parmi les espaces métriques). Considérons, en effet, une suite $p_1, p_2, \dots$ satisfaisant à la condition de Cauchy; en posant $E_n = (p_n, p_{n+1}, \dots)$, il vient $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(E_n) = 0$. D'après le théorème de Cantor, il existe un point

$$p \in \bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2 \dots, \text{ d'où } |p - p_n| \leq \delta(\bar{E}_n) = \delta(E_n), \text{ donc } p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

III. Application aux fonctions continues. f étant une fonction continue définie sur l'espace $\mathcal{X}$, soit $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ une suite d'ensembles fermés, non vides et tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(F_n) = 0$ (en particulier, tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(F_n) = 0$). On a alors

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n).$$

En effet, on a toujours (§ 3, II, 2a):

$$f(F_1 \cdot F_2 \dots) \subset f(F_1) \cdot f(F_2) \dots$$

Réciproquement, soient:

$$y \in f(F_1) \cdot f(F_2) \dots \text{ et } A_n = F_n \cdot f^{-1}(y).$$

Il vient, d'après le théorème du N° I,

$$A_1 \cdot A_2 \dots \neq \emptyset, \text{ d'où } f^{-1}(y) \cdot F_1 \cdot F_2 \dots \neq \emptyset, \text{ donc } y \in f(F_1 \cdot F_2 \dots).$$

IV. Théorème de Baire¹⁾. Tout ensemble de première catégorie est un ensemble frontière.

Soit, en effet, $E = N_1 + N_2 + \dots$ une série d'ensembles non-denses. Soit S_0 une sphère arbitraire (fermée). Il s'agit de prouver que $S_0 - E \neq \emptyset$.

Considérons la suite $S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$ de sphères fermées, définie (par induction) comme suit: l'ensemble N_n étant non-dense, il existe une sphère fermée, désignons-la par S_n , telle que

$$S_n \subset S_{n-1} - N_n \text{ et } \delta(S_n) < 1/n.$$

¹⁾ Thèse, Ann. di Mat. (3) 3 (1899), p. 65.

D'après le théorème de Cantor, il existe un point $p \in \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$. Comme

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (1 - N_n) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} N_n,$$

il vient $p \in S_0 - E$.

Corollaire 1. Le complémentaire d'un ensemble de I-e catégorie n'est pas de I-e catégorie (pourvu que l'espace soit non vide).

Corollaire 2. L'espace n'est de I-e catégorie en aucun point.

Car, dans le cas contraire, il existerait un ensemble ouvert non vide de I-e catégorie.

Corollaire 3. Tout point d'un espace complet dense en soi est un point de condensation.

Car, dans le cas contraire, il existerait un ensemble ouvert dénombrable et, tout point individuel formant un ensemble non-dense, l'ensemble ouvert serait de I-e catégorie.

Corollaire 4. Tout espace complet dénombrable est clairsemé¹⁾.

Car tout espace non clairsemé contient un sous-ensemble parfait non vide (§ 9, VI, 3). Cet ensemble parfait, considéré comme l'espace, est complet et dense en soi, donc indénombrable d'après le corollaire 3.

A côté de ces 4 corollaires fondamentaux, on a les suivants:

Corollaire 5. Etant donnée une décomposition d'un espace complet en une série d'ensembles fermés: $1 = Z_1 + Z_2 + \dots$, si l'ensemble EZ_n est clairsemé pour chaque n , l'ensemble E l'est également.

Soit D un sous-ensemble dense en soi de E . Comme ensemble clairsemé, DZ_n est un ensemble frontière dans D (§ 9, VI, 1). On a donc

$$\overline{D - Z_n} = \bar{D}, \text{ d'où } \bar{D} \cdot Z_n \subset \bar{D} = \overline{D - Z_n} \subset \overline{D - Z_n}^+,$$

ce qui prouve que $\bar{D} \cdot Z_n$ est un ensemble frontière dans $\bar{D}$ (cf. § 8, VI); comme ensemble fermé, il est donc non-dense dans $\bar{D}$.

L'identité $\bar{D} = \bar{D} \cdot Z_1 + \bar{D} \cdot Z_2 + \dots$ implique par conséquent que $\bar{D}$, en tant qu'ensemble de I-e catégorie sur lui-même, est vide (d'après le cor. 1, l'ensemble $\bar{D}$ étant considéré comme un espace complet). Donc $D = \emptyset$.

¹⁾ Voir dans cet ordre d'idées § 32, V, théorème.

Corollaire 6. *E étant un ensemble dense en soi (non vide) situé dans un espace complet 1, et f étant une fonction définie sur cet espace, continue et telle que la fonction partielle $f|E$ est biunivoque, l'ensemble V des valeurs de la fonction f est indénombrable.*

Supposons, par contre, que $V = (y_1, y_2, \dots)$. Posons $Z_n = f^{-1}(y_n)$. Il vient $1 = Z_1 + Z_2 + \dots$ et $Z_n = \bar{Z}_n$. En outre, EZ_n ne contient qu'un seul point au plus, puisque les conditions $x \in EZ_n$ et $x' \in EZ_n$ entraînent $f(x) = y_n = f(x')$, d'où $x = x'$ (la fonction $f|E$ étant biunivoque). D'après le cor. 5, l'ensemble E serait donc clairsemé, contrairement à l'hypothèse.

Corollaire 7. *Etant donné, dans un espace complet, séparable et indénombrable, un système $E_{\alpha, \beta}$, où $\alpha < \Omega$ et $\beta < \Omega$, d'ensembles à propriété de Baire tel que $E_{\alpha, \beta} \cdot E_{\alpha, \beta'} = 0$ pour $\beta \neq \beta'$, — il existe une suite transfinie $\{\gamma_\alpha\}$, $\alpha < \Omega$, telle que*

$$(1) \quad \overline{1 - \sum_{\alpha < \Omega} E_{\alpha, \gamma_\alpha}} > s_0.$$

Il est légitime d'admettre que l'espace est parfait (en lui enlevant, au besoin, sa partie clairsemée).

Nous définirons la suite $\{\gamma_\alpha\}$, ainsi qu'une suite de points $\{p_\alpha\}$, par l'induction transfinie. D'après § 19, I, 3, pour α fixe et β suffisamment grand, l'ensemble $E_{\alpha, \beta}$ est de I-e catégorie. Les ensembles $E_{\alpha, \beta}$ étant disjoints (pour α fixe), il existe donc parmi ces nombres β un, désignons-le par γ_α , tel que $p_\xi \in 1 - E_{\alpha, \gamma_\alpha}$ quel que soit $\xi < \alpha$. Les ensembles $E_{1, \gamma_1}, E_{2, \gamma_2}, \dots, E_{\alpha, \gamma_\alpha}$ étant de I-e catégorie et les p_ξ étant des points d'accumulation de l'espace, on a d'après le th. de Baire:

$$1 - \left(\sum_{\xi < \alpha} E_{\xi, \gamma_\xi} + \sum_{\xi < \alpha} p_\xi \right) \neq 0.$$

Soit p_α un point appartenant à cette différence.

Soit P l'ensemble des points p_α où $\alpha < \Omega$. Comme $p_\alpha \neq p_\xi$ pour $\xi < \alpha$, on a $\bar{P} = s_1$. Comme $PE_{\alpha, \gamma_\alpha} = 0$, on en déduit la formule (1).

Remarques. 1) La démonstration du théorème de Baire peut être rendue effective dans ce sens (cf. § 18, VIII) qu'étant données: 1° la base $R_1, R_2, \dots$ de l'espace, 2° une suite $N_1, N_2, \dots$ d'ensembles non-denses et 3° une sphère S_0 , on peut définir un point p qui appartient à $S_0 - (N_1 + N_2 + \dots)$.

On pose, en effet, pour $n > 0$, $S_n = \bar{R}_{k_n}$ où k_n est le plus petit indice tel que

$$\bar{R}_{k_n} \subset R_{k_{n-1}} - N_n \quad \text{et} \quad \delta(R_{k_n}) < 1/n.$$

Le produit $S_0 \cdot S_1 \cdot S_2 \dots$ se compose alors d'un seul point, que l'on désigne par p.

2) Le théorème de Baire équivaut à l'hypothèse, que toute suite d'ensembles arbitraires X_n remplit l'égalité

$$\overline{1 - \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot 1 - \bar{X}_n} = 1.$$

Car les ensembles non-denses peuvent être définis comme ensembles de la forme $X \cdot 1 - \bar{X}$ (cf. § 8, II).

3) En supprimant l'hypothèse, que $E_{\alpha, \beta}$ jouit de la propriété de Baire, le cor. 7 est en défaut. On démontre, en effet, à l'aide de l'hypothèse du continu qu'il existe dans l'intervalle $\mathcal{I}$ un système d'ensembles $E_{n, \beta}$ où $n = 1, 2, \dots$ et $\beta < \Omega$, tel que $E_{n, \beta} \cdot E_{n, \beta'} = 0$ pour $\beta \neq \beta'$ et que, pour toute suite infinie $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, on a

$$\overline{\mathcal{I} - \sum_{n=1}^{\infty} E_{n, \gamma_n}} \leq s_0^1).$$

V. Applications aux ensembles G_δ . 1. $Q_1, Q_2, \dots$ étant des G_δ denses, l'ensemble $Q_1 \cdot Q_2 \dots$ l'est aussi.

Car, chacun des ensembles $1 - Q_n$, en tant qu'un F_σ frontière, est de I-e catégorie. La somme $(1 - Q_1) + (1 - Q_2) + \dots$ l'est donc également et le complémentaire de cette somme, c. à d. l'ensemble $Q_1 \cdot Q_2 \dots$, est dense.

2. Tout G_δ de I-e catégorie est non-dense.

En effet, si Q n'est pas non-dense, il existe un ensemble ouvert $G \neq 0$ tel que l'ensemble QG est dense dans G. Par conséquent, si Q est un G_δ , $G - Q$ est un F_σ frontière, donc un ensemble de I-e catégorie. Si l'on supposait Q de I-e catégorie, l'ensemble ouvert G, en tant que somme de deux ensembles de I-e catégorie, le serait aussi, contrairement au corollaire 2.

¹⁾ S. Braun et W. Sierpiński, Fund. Math. 19 (1932), p. 1.

Tout ensemble G_δ situé dans un espace complet étant homéomorphe à un espace complet (§ 29, VI), tous les énoncés du N° V se laissent *relativiser* par rapport aux ensembles G_δ . En particulier:

3. *Étant donné un ensemble Q qui est un G_δ , tout sous-ensemble qui est de I-e catégorie dans Q est un ensemble frontière dans Q .*

Tout ensemble G_δ dénombrable est clairsemé.

VI. Applications aux ensembles F_σ et G_δ .

Théorème¹⁾. Tout ensemble F_σ et G_δ est développable en série alternée (transfinie) d'ensembles fermés décroissants.

Soit, en effet, E un ensemble F_σ et G_δ et X un ensemble fermé arbitraire non vide. Il s'agit de démontrer (cf. § 12, V, 1°) que soit XE , soit $X-E$ n'est pas un ensemble frontière dans X . Or dans le cas contraire, les ensembles XE et $X-E$, en tant que des F_σ frontières, seraient de I-e catégorie dans X (cf. § 10, II) et leur somme $X = XE + X-E$ serait par conséquent de I-e catégorie sur elle-même, contrairement au corollaire 1 du N° IV (X étant considéré comme l'espace).

En tenant compte du théorème réciproque (§ 26, X, 5), on voit que *dans les espaces complets, les ensembles F_σ et G_δ coïncident avec les ensembles développables.*

Remarques. 1) On en conclut (cf. § 12, V et IX) que, pour qu'un ensemble E situé dans un espace complet soit un F_σ et G_δ , il faut et il suffit que, quel que soit l'ensemble F fermé et non vide:

1° la frontière de FE relative à F soit non-dense dans F (ou encore: qu'elle diffère de F),

2° que FE soit somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense dans F (ou encore: différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble non-dense dans F),

3° que FE soit localement fermé dans l'un de ses points (ou vide).

2) Il résulte de 3° que tout ensemble F_σ et G_δ homogène dans l'espace est différence de deux ensembles fermés (comme ensemble localement fermé en chacun de ses points, cf. § 12, IX, 2°).

3) Dans les espaces complets séparables, toute famille bien ordonnée d'ensembles F_σ et G_δ croissants (ou décroissants) est dénombrable (cf. § 19, III, 2).

¹⁾ F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 462.

Cet énoncé ne s'étend pas sur les ensembles G_δ . On ne peut non plus supprimer l'hypothèse que l'espace soit complet (voir § 36, III).

Problèmes de l'effectivité. 1. Tout ensemble F_σ et G_δ est un F_σ et un G_δ effectif (cf. § 19, III, remarque 1°).

2. Dans le domaine des ensembles qui sont à la fois des F_σ et G_δ l'axiome du choix se laisse réaliser effectivement, c. à d. que l'on sait nommer une fonction $f(X)$, définie pour tout X qui est un F_σ et G_δ non vide, de façon que l'on ait $f(X) \in X$.

En vertu de l'énoncé précédent, il suffit de démontrer cette proposition pour les G_δ effectifs. Autrement dit, il s'agit de faire correspondre à toute suite d'ensembles ouverts $G_1, G_2, \dots$ tels que $G_1 \cdot G_2 \cdot \dots \neq \emptyset$ un point p qui appartienne à chaque G_n , $n=1, 2, \dots$

$R_1, R_2, \dots$ étant la base de l'espace, soit k_1 le plus petit indice tel que

$$\bar{R}_{k_1} \subset G_1, \quad R_{k_1} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \delta(R_{k_1}) < 1;$$

de façon générale, soit k_m le plus petit indice tel que

$$\bar{R}_{k_m} \subset G_m \cdot R_{k_{m-1}}, \quad R_{k_m} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \delta(R_{k_m}) < 1/m.$$

D'après le théorème de Cantor, le produit $\bar{R}_{k_1} \cdot \bar{R}_{k_2} \cdot \dots$ se réduit à un seul point; c'est bien le point p à choisir.

3. Toute famille dénombrable d'ensembles F_σ disjoints qui couvre l'espace tout entier est *effectivement dénombrable*.

En effet, le complémentaire de chacun de ces ensembles étant un F_σ , chacun d'eux est à la fois un F_σ et un G_δ . En appliquant l'énoncé précédent, on leur fait correspondre les points choisis; l'ensemble E de ces points, comme clairsemé (N° IV, cor. 5), est effectivement dénombrable (§ 19, IV), d'où la conclusion demandée.

VII. Applications aux fonctions de I-e classe. D'après le théorème 1 du § 27, X, si f est une fonction mesurable B de I-e classe qui transforme un espace métrique $\mathcal{X}$ en sous-ensemble d'un espace séparable $\mathcal{Y}$, l'ensemble de ses points de discontinuité est de I-e catégorie dans $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{X}$ est complet, cet ensemble est donc un ensemble frontière; autrement dit, la fonction f est ponctuellement discontinue. En rapprochant cet énoncé du théorème 2 du § 27, X, on parvient au théorème suivant:

Théorème¹⁾. $\mathcal{X}$ étant complet et $\mathcal{Y}$ séparable, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit mesurable B de I-e classe est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé.

Remarques. On voit aussitôt que la discontinuité ponctuelle peut être remplacée par l'existence d'un point de continuité sur tout ensemble fermé non vide et que le terme *fermé* peut être remplacé par *parfait* (voir § 27, X, remarques 1 et 2).

Ce terme peut être remplacé aussi par *ensemble G_δ* . Car A étant un sous-ensemble G_δ de $\mathcal{X}$, A est topologiquement complet (§ 29, VI); or, la fonction f étant supposée de I-e classe, $f|A$ l'est également et est, par conséquent, ponctuellement discontinue.

Corollaire 1. Dans les mêmes hypothèses sur $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, si l'ensemble des points de discontinuité de la fonction f est dénombrable, f est de I-e classe.

Car tout ensemble parfait, comme indénombrable (N^0 V, cor. 3), contient un point de continuité de la fonction f .

Corollaire 2. Toute famille bien ordonnée de fonctions de I-e classe (à valeurs réelles) définies sur un espace complet et telles que

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_\xi(x) \leq f_{\xi+1}(x) \leq \dots$$

est dénombrable.

C'est une conséquence directe du théorème du § 29, III.

VIII. Applications aux théorèmes d'existence. L'importance du théorème de Baire tient aussi au fait, qu'il permet souvent de démontrer l'existence des éléments jouissant d'une propriété **P** donnée: en effet, si dans un espace complet l'ensemble des éléments qui ne jouissent pas de la propriété **P** se décompose en une série d'ensembles non-denses, cet ensemble, comme ensemble de I-e catégorie, n'épuise pas l'espace; c. à d. qu'il existe un élément qui possède la propriété **P** (et même un ensemble dense de tels éléments).

Ainsi, par exemple, le théorème de Menger-Nöbeling d'après lequel tout espace métrique séparable n -dimensionnel $\mathcal{X}$ est homéomorphe à un sous-ensemble du cube $\mathcal{I}^{2n+1}$, se démontre bien facilement en prouvant que, dans l'espace $(\mathcal{I}^{2n+1})^\mathcal{X}$, les fonctions qui ne sont pas des homéomorphismes constituent un ensemble de I-e catégorie²⁾.

¹⁾ R. Baire, Thèse, Ann. di Mat. (3) **3** (1899).

²⁾ Voir W. Hurewicz, Sgb. Preuss. Akad. **24** (1933), p. 757 et ma note de Fund. Math. **28**, (1937), p. 334. Pour d'autres applications à la théorie de la dimension, voir K. Borsuk, Fund. Math. **28**, p. 91, ainsi que *Topologie II*.

Ce procédé s'est montré fécond surtout dans les problèmes d'existence des fonctions (de variable réelle) jouissant de certaines singularités¹⁾.

Considérons comme exemple la démonstration de l'existence d'une fonction continue sans dérivée²⁾. Nous allons établir en effet l'existence d'une fonction plus singulière encore, à savoir d'une fonction continue qui n'admet dans aucun point les deux nombres dérivés droits finis; c'est bien cette dernière propriété des fonctions continues que nous désignerons par **P**.

Envisageons à ce but l'espace Φ des fonctions continues $y=f(x)$, périodiques de période 1 (x et y réels, cf. § 29, V). La condition que la fonction f ne jouisse pas de la propriété **P**, c. à d. qu'elle possède en un point (au moins) les deux nombres dérivés droits finis, équivaut à l'existence d'un entier positif n et d'un point $x \in \mathcal{I}$ tels qu'on ait

$$(1) \quad \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq n, \quad \text{quel que soit } h > 0.$$

L'ensemble des fonctions f dépourvues de la propriété **P** est donc égal à la somme $N_1 + N_2 + \dots$, où N_n désigne l'ensemble des fonctions f pour lesquelles il existe un x assujetti à la condition (1).

L'espace Φ étant complet (cf. § 29, V, 2), tout revient donc à démontrer que l'ensemble N_n est non-dense (dans Φ).

Or, l'ensemble N_n est fermé, car f_k étant une suite de fonctions et x_k une suite de points satisfaisant à la condition (1), on prouve facilement que, si la suite f_k converge uniformément, sa limite appartient à N_n .

Le fait que N_n est fermé est d'ailleurs évident, si l'on se sert des symboles logiques; on a en effet:

$$(2) \quad N_n = \bigcap_f \sum_x \prod_{h>0} \left\{ \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq n \right\},$$

¹⁾ Voir plusieurs ouvrages de Auerbach, Banach, Kaczmarz, Mazurkiewicz dans Studia Math. **3** (1931), de M. Steinhaus, ibid. vol. **1** (1929), p. 51—83, de Saks, Fund. Math. **10** (1927), p. 186—196 et **19** (1932), p. 211—219, de M. Orlicz, Bull. Acad. Polon. 1932, p. 221—228.

²⁾ S. Banach, Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Math. **3** (1931), p. 174.

ce qui prouve que N_n est la projection (parallèle à l'axe $\mathcal{J}$) de l'ensemble fermé

$$E_{\mathcal{J}} \prod_{h>0} \left\{ \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \leq n \right\} = \prod_{h>0} E_{\mathcal{J}} \left\{ \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \leq n \right\}.$$

L'axe $\mathcal{J}$ étant compact, la projection d'un ensemble fermé est fermée (voir § 24, X, 2).

N_n étant fermé, il suffit, pour prouver que N_n est non-dense, de montrer qu'il est un ensemble frontière; ou encore: l'ensemble des fonctions-lignes polygonales étant dense dans Φ , il suffit de montrer que, f étant une fonction de ce genre, il existe dans $\Phi - N_n$ une fonction qui en diffère aussi peu qu'on le veut. Ceci est un fait élémentaire.

L'existence des fonctions continues sans dérivée finie se trouve ainsi établie; plus encore: les fonctions qui ne jouissent pas de cette singularité constituent un ensemble de I-e catégorie (elles présentent donc des „exceptions” dans la totalité des fonctions continues).

§ 31. Prolongement des fonctions.

I. Prolongement des fonctions continues. 1. *Etant donnée une fonction $y=f(x)$ définie sur un sous-ensemble A d'un espace (métrique) $\mathcal{X}$, continue et dont les valeurs appartiennent à un espace complet $\mathcal{Y}$, la fonction f se laisse prolonger d'une façon continue sur un ensemble G_δ .*

A savoir: sur l'ensemble A^* des points p de $\bar{A}$ tels que $\omega(p)=0$, c. à d. que l'oscillation de f s'annule au point p (voir § 15, III).

Faisons correspondre à tout point p de A^* une suite $\{p_n\}$ telle que $p_n \in A$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$. En désignant par E_n l'ensemble $(p_n, p_{n+1}, \dots)$, on déduit de l'égalité $\omega(p)=0$ que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta[f(E_n)]=0$, donc que la suite $f(p_1), f(p_2), \dots$ satisfait à la condition de Cauchy. L'espace $\mathcal{Y}$ étant complet, posons

$$f^*(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n), \text{ c. à d. } f^*(p) = \prod_G \overline{f(G)},$$

G étant un entourage variable de p (cf. § 30, I, corollaire).

La fonction f^* se trouve ainsi définie sur l'ensemble A^* (qui est un G_δ selon § 15, III). Pour $x \in A$, on a $f(x) = f^*(x)$. Reste à démontrer que la fonction f^* est continue pour $p \in A^*$, c. à d. que $\omega^*(p)=0$, où ω^* désigne l'oscillation de f^* .

Or, G étant un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{X}$, on a

$$f^*(G) \subset \overline{f(G)}, \text{ d'où } \delta[f^*(G)] \leq \delta[\overline{f(G)}] = \delta[f(G)].$$

Donc (cf. § 15, III):

$$\omega^*(p) = \inf \delta[f^*(G)] \leq \inf \delta[f(G)] = \omega(p) = 0,$$

où G parcourt les ensembles ouverts contenant p .

Remarques. 1°. L'hypothèse que l'espace $\mathcal{Y}$ est complet est essentielle. Pour s'en convaincre on pose: $\mathcal{X} = \mathcal{I}$, $A = \mathcal{Y}$ = ensemble des nombres rationnels de $\mathcal{X}$ et $f(x) = x$ pour $x \in A$.

2°. Nous déduirons du théorème précédent que

$\mathcal{X}$ étant un espace métrique séparable de puissance c , il existe une fonction $g(x)$, $x \in \mathcal{X}$, à valeurs réelles qui est discontinue sur chaque ensemble de puissance c^1 .

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant de la Théorie générale des ensembles:

Soit Φ une famille de transformations de sous-ensembles d'un ensemble donné $\mathcal{X}$ en sous-ensembles d'un ensemble donné $\mathcal{Y}$. Si $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ et Φ sont de puissance m , il existe une transformation g de $\mathcal{X}$ en sous-ensemble de $\mathcal{Y}$ qui ne coïncide sur aucun ensemble de puissance m avec aucune transformation appartenant à Φ .

Pour démontrer ce lemme, on range les éléments de $\mathcal{X}$ et ceux de Φ en deux suites transfinies $\{x_\alpha\}$ et $\{f_\alpha\}$ ayant le plus petit type d'ordre possible et on définit la fonction g par l'induction transfinie en convenant que $g(x_\alpha) \neq f_\xi(x_\alpha)$, quel que soit $\xi < \alpha$.

Substituons à Φ la famille de toutes les fonctions réelles continues définies sur les sous-ensembles G_δ de $\mathcal{X}$. D'après § 26, III et § 19, VI, la famille Φ est de puissance c . La fonction g est la fonction demandée. En effet, si elle était continue sur un ensemble E de puissance c , il existerait une fonction continue f définie sur un G_δ contenant E et telle que $f(x) = g(x)$ pour $x \in E$. Mais ceci est impossible puisque $f \in \Phi$.

3°. Citons sans démonstration le théorème suivant²⁾, qui rentre dans un ordre d'idées analogue au théorème 1:

¹⁾ Théorème de Sierpiński et Zygmund, Fund. Math. 4 (1923), p. 316.

²⁾ Voir S. Mazurkiewicz, Sur les transformations intérieures, Fund. Math. 19 (1932), p. 198.

$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces complets séparables, toute fonction $y=f(x)$ définie sur un ensemble $A \subset \mathcal{X}$, continue et telle que pour tout ensemble ouvert G l'ensemble $f(G)$ est ouvert dans $f(A)$, se laisse prolonger sur un ensemble G_δ de façon que la fonction prolongée soit continue et jouisse de la propriété considérée par rapport à lui.

Applications aux problèmes de puissance. Le rôle des énoncés 2—4 qui suivent est auxiliaire: ils nous serviront pour établir le th. 5¹).

2. Etant donnée une fonction qui fait correspondre à tout $\xi < \omega_\delta$ un ensemble F_ξ de puissance $\aleph_\delta$, il existe une fonction G_ξ où $\xi < \omega_\delta$ telle que

$$(1) \quad G_\xi \cdot G_{\xi'} = 0 \text{ pour } \xi \neq \xi', \quad G_\xi \subset F_\xi, \quad \overline{G_\xi} = \aleph_\delta.$$

Rangeons, en effet, tous les $\xi < \omega_\delta$ en une suite transfinie $\{a_\eta\}$ du type ω_δ et dont chaque terme se répète $\aleph_\delta$ fois. Faisons correspondre à tout $\eta < \omega_\delta$ un élément p_η de F_{a_η} de façon que

$$(2) \quad p_\eta \neq p_{\eta'} \text{ pour } \eta' < \eta.$$

Désignons par G_ξ l'ensemble des p_η tels que $a_\eta = \xi$.

En supposant que $p_\eta \in G_\xi \cdot G_{\xi'}$, il vient $a_\eta = \xi$ et $a_\eta = \xi'$, d'où $\xi = \xi'$, ce qui prouve que la première des conditions (1) est réalisée.

Pour en établir la deuxième, posons $p_\eta \in G_\xi$. Donc $a_\eta = \xi$. D'autre part, d'après la définition de la suite $\{p_\eta\}$, on a $p_\eta \in F_{a_\eta}$. Par conséquent $p_\eta \in F_\xi$, ce qui prouve que $G_\xi \subset F_\xi$.

L'ensemble des η tels que $a_\eta = \xi$ est, pour ξ fixe, de puissance $\aleph_\delta$. D'après (2), il en est de même de l'ensemble de tous les p_η satisfaisant à cette égalité, c. à d. de l'ensemble G_ξ .

3. Etant donné un ensemble (infini) $\mathcal{X}$ de puissance m , il existe une famille $\mathbf{F}$ de puissance 2^m de sous-ensembles de $\mathcal{X}$ tels que les conditions $X \in \mathbf{F}$, $Y \in \mathbf{F}$ et $X \neq Y$ entraînent $\overline{X - Y} = m$.

Plus encore: étant donnée une fonction qui fait correspondre à tout $x \in \mathcal{X}$ un sous-ensemble A_x de $\mathcal{X}$ de puissance m , on peut assujettir la famille $\mathbf{F}$ à la condition plus précise suivante: les formules $X \in \mathbf{F}$, $Y \in \mathbf{F}$ et $X \neq Y$ entraînent $\overline{A_x \cdot X - Y} = m$, quel que soit $x \in \mathcal{X}$.

¹ Théorème signalé par A. Lindenbaum, Ann. Soc. Pol. Math. **10** (1932), p. 114 et **15** (1937), p. 185, et démontré par M. W. Sierpiński, Deux théorèmes sur les familles des transformations, Fund. Math. **34** (1947), p. 30.

Dans un ordre d'idées analogue, voir Z. Waraszkiewicz, Une famille indénombrable de continus plans dont aucun n'est l'image continue d'un autre, Fund. Math. **18** (1932), p. 118.

L'égalité $m = m^2$ implique aussitôt que $\mathcal{X}$ est de la forme:

$$\mathcal{X} = \sum_{x \in \mathcal{X}} M_x, \quad \overline{M_x} = m \text{ et } M_x \cdot M_{x'} = 0 \text{ pour } x \neq x'.$$

Comme $m = 2m$, on a

$$M_x = P_x + Q_x, \quad \overline{P_x} = m = \overline{Q_x} \text{ et } P_x \cdot Q_x = 0.$$

Posons pour $X \subset \mathcal{X}$:

$$F(X) = \sum_{x \in X} P_x + \sum_{x \in X'} Q_x \text{ où } X' = \mathcal{X} - X,$$

et désignons par $\mathbf{F}$ la famille des ensembles $F(X)$, X parcourant la famille de tous les sous-ensembles de $\mathcal{X}$.

On constate aussitôt que, si $x_0 \in X - Y$, on a

$$P_{x_0} \subset F(X) - F(Y), \text{ d'où } \overline{F(X) - F(Y)} = m,$$

et

$$Q_{x_0} \subset F(Y) - F(X), \text{ d'où } \overline{F(Y) - F(X)} = m.$$

La première partie de l'énoncé 3 se trouve ainsi démontrée. Pour en démontrer la deuxième, posons conformément à 2:

$$A_x^* \cdot A_{x'}^* = 0 \text{ pour } x \neq x', \quad A_x^* \subset A_x \text{ et } \overline{A_x^*} = m.$$

Il s'agit de définir une famille $\mathbf{F}^*$ de puissance 2^m de sous-ensembles de $\mathcal{X}$ tels que les conditions: $X \in \mathbf{F}^*$, $Y \in \mathbf{F}^*$, $X \neq Y$ et $x \in \mathcal{X}$ entraînent $\overline{A_x^* \cdot X - Y} = m$.

Les ensembles $\mathcal{X}$ et A_x^* étant de puissance m , à tout $x \in \mathcal{X}$ correspond une transformation biunivoque f_x de $\mathcal{X}$ en A_x^* . Faisons correspondre à tout $X \in \mathbf{F}$ l'ensemble $S(X) = \sum_{x \in X} f_x(X)$ et désignons par $\mathbf{F}^*$ la famille de tous les ensembles $S(X)$, X parcourant la famille $\mathbf{F}$.

Comme $f_x(X) \subset A_x^*$ et comme $A_x^* \cdot A_{x'}^* = 0$ pour $x \neq x'$, on a

$$A_{x_0}^* \cdot S(X) = A_{x_0}^* \cdot \sum_x f_x(X) = A_{x_0}^* \cdot f_{x_0}(X) = f_{x_0}(X),$$

d'où

$$(3) \quad A_{x_0}^* \cdot S(X) - S(Y) = A_{x_0}^* \cdot S(X) - A_{x_0}^* \cdot S(Y) = f_{x_0}(X) - f_{x_0}(Y).$$

La fonction f_{x_0} étant biunivoque, il vient

$$f_{x_0}(X) - f_{x_0}(Y) = f_{x_0}(X - Y),$$

d'où

$$(4) \quad \overline{f_{x_0}(X) - f_{x_0}(Y)} = \overline{f_{x_0}(X - Y)} = \overline{X - Y}.$$

Les ensembles $S(X)$ et $S(Y)$ étant supposés différents, on a $X \neq Y$, d'où $\overline{X - Y} = m$ et en vertu de (3) et (4):

$$\overline{A_{x_0}^* \cdot S(X) - S(Y)} = m, \text{ d'où } \overline{A_{x_0} \cdot S(X) - S(Y)} = m.$$

La même égalité montre que la condition $X \neq Y$ implique que $S(X) \neq S(Y)$; d'où $\overline{F^*} = \overline{F} = 2^m$.

4. *Théorème auxiliaire*¹⁾. *Etant donné un ensemble infini $\mathcal{X}$ de puissance m et une famille Φ de puissance $\leq m$ de transformations de sous-ensembles de $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de puissance m de $\mathcal{X}$, il existe une famille F de puissance 2^m de sous-ensembles de $\mathcal{X}$ tels que les conditions $X \in F$, $Y \in F$ et $X \neq Y$ entraînent $\overline{f(X) - Y} = m$, quelle que soit la fonction $f \in \Phi$.*

Posons $m = \aleph_\delta$ et rangeons les éléments de la famille Φ en une suite transfinie $f_0, f_1, \dots, f_\alpha, \dots$ ($\alpha < \omega_\delta$) de façon que tout élément de Φ se répète m fois. Pour f fixe, faisons correspondre à toute valeur y de la fonction f un x tel que $f(x) = y$ et, pour $f = f_\alpha$, désignons par A_α l'ensemble des x ainsi choisis. On a donc $\overline{A_\alpha} = m$ et la fonction partielle $g_\alpha = f_\alpha|_{A_\alpha}$ est biunivoque.

Il existe une suite transfinie $p_0, p_1, \dots, p_\alpha, \dots$ ($\alpha < \omega_\gamma$) telle que $p_\alpha \in A_\alpha$ et que

- 1° $p_\alpha \neq p_\xi$ pour $\xi < \alpha$,
- 2° $p_\alpha \neq g_\eta(p_\xi)$ pour $\xi < \alpha$ et $\eta < \alpha$,
- 3° $g_\eta(p_\alpha) \neq p_\xi$ pour $\xi < \alpha$ et $\eta < \alpha$.

Car l'ensemble des p_ξ avec $\xi < \alpha$, des $g_\eta(p_\xi)$ avec $\xi < \alpha$ et $\eta < \alpha$, ainsi que des $g_\eta^{-1}(p_\xi)$, est — pour α fixe — de puissance $< \aleph_\delta$, tandis que $\overline{A_\alpha} = \aleph_\delta$.

Les termes de la suite $\{p_\alpha\}$, $\alpha < \omega_\delta$, étant distincts deux à deux (d'après 1°), leur ensemble P est de puissance m . Plus encore, en posant $A_\alpha^* = P \setminus A_\alpha$, on a $\overline{A_\alpha^*} = m$, chaque A_α étant répété m fois dans la suite $\{A_\xi\}$, $\xi < \omega_\delta$. Il est donc légitime de remplacer dans 3: $\mathcal{X}$ par P et A_α par A_α^* . On en déduit l'existence d'une famille F de puissance 2^m de sous-ensembles de P tels que les conditions $X \in F$, $Y \in F$ et $X \neq Y$ entraînent $\overline{A_\alpha^* \cdot X - Y} = m$, quel que soit $\alpha < \omega_\delta$. Nous allons démontrer que cette égalité entraîne $\overline{f_\alpha(X) - Y} = m$ (ce qui achèvera la démonstration).

¹⁾ Voir ma note *Sur l'extension de deux théorèmes topologiques à la Théorie des ensembles*, Fund. Math. **34** (1947), p. 34. Cf. aussi les notes précitées de A. Lindenbaum et de W. Sierpiński.

L'ensemble $A_\alpha^* \cdot X - Y$ étant de puissance $\aleph_\delta$, soit $\{p_{\beta_\eta}\}$, où $\alpha < \eta < \omega_\delta$ et $\eta \leq \beta_\eta$, une suite d'éléments de cet ensemble. Comme $p_{\beta_\eta} \in A_\alpha$, la fonction g_α est définie pour p_{β_η} et l'on a $g_\alpha(p_{\beta_\eta}) \in f_\alpha(X)$. Cette fonction étant biunivoque, l'ensemble des $g_\alpha(p_{\beta_\eta})$ pour η variable est de puissance m . Il reste à prouver que $g_\alpha(p_{\beta_\eta}) \notin Y$.

Supposons le contraire. Comme $Y \subset P$, il existe en vertu de cette hypothèse un $\xi < \omega_\delta$ tel que $g_\alpha(p_{\beta_\eta}) = p_\xi$. Donc $p_\xi \in Y$ et comme $p_{\beta_\eta} \notin Y$ par hypothèse, il vient $\xi \neq \beta_\eta$.

On a ainsi deux cas à considérer:

1) $\beta_\eta < \xi$, d'où $\alpha < \xi$. Or les conditions:

$$p_\xi = g_\alpha(p_{\beta_\eta}), \quad \beta_\eta < \xi \quad \text{et} \quad \alpha < \xi$$

sont incompatibles d'après 2°.

2) $\xi < \beta_\eta$. Les conditions suivantes sont incompatibles d'après 3°:

$$g_\alpha(p_{\beta_\eta}) = p_\xi, \quad \xi < \beta_\eta \quad \text{et} \quad \alpha < \beta_\eta.$$

On aboutit ainsi à une contradiction dans tous les cas.

5. *Théorème. Dans tout espace complet séparable $\mathcal{X}$ de puissance c , il existe une famille F de puissance 2^c d'ensembles dont aucun n'est une image continue d'aucun autre.*

Plus encore: les conditions $X \in F$, $Y \in F$ et $X \neq Y$ entraînent $\overline{f(X) - Y} = c$, quelle que soit la fonction continue f , définie sur X et admettant une infinité de puissance c des valeurs.

Substituons à Φ la famille des transformations continues des ensembles G_δ en sous-ensembles de puissance c de $\mathcal{X}$. On a $\overline{\Phi} = c$ d'après § 26, III et § 19, VI. La famille F du th. 4 est la famille demandée.

En effet, la condition $\overline{f(X) - Y} = c$ implique que $\overline{X} = c$; en conséquence, aucun ensemble-élément de F ne se laisse transformer en aucun autre par une fonction admettant moins que c valeurs. D'autre part, si f est une fonction continue, définie sur X et admettant c valeurs, il existe selon 1 un ensemble G_δ contenant X et une extension continue f^* de f sur cet ensemble; d'où $f^* \in \Phi$ et par conséquent $\overline{f^*(X) - Y} = c$ pour $X \in F$, $Y \in F$ et $X \neq Y$. Comme $f^*(X) = f(X)$, on parvient à la conclusion demandée.

6. *Il existe dans l'intervalle $\mathcal{I} = 01$ un ensemble indénombrable dont $\mathcal{I}$ n'est pas une image continue.*

Nous déduirons ce théorème de l'énoncé suivant, qui sera établi à l'aide de l'hypothèse du continu.

7¹⁾. *Etant donnée, dans un espace complet séparable (indénombrable) $\mathcal{X}$, une famille $\mathbf{F}$ de puissance $\leq \aleph_1$ de sous-ensembles indénombrables de $\mathcal{X}$, il existe dans $\mathcal{X}$ un ensemble indénombrable P tel qu'aucun ensemble-élément de $\mathbf{F}$ n'est une image continue de P .*

Plus précisément: si $Y \in \mathbf{F}$, on a $Y - f(P) \neq \emptyset$, quelle que soit la fonction continue f , définie ou non sur P .

Rangeons tous les couples f, Y , où $Y \in \mathbf{F}$ et où f est une fonction continue définie sur un G_δ et dont l'ensemble des valeurs contient Y , en une suite transfinie du type Ω : $\{f_\alpha, Y_\alpha\}$, $\alpha < \Omega$ (l'existence d'une suite de ce genre résulte du fait, que la famille des ensembles G_δ ainsi que la famille des fonctions continues définies sur des ensembles G_δ , sont de puissance c , donc — en vertu de l'hypothèse du continu — de puissance $\aleph_1$).

Pour α fixe, rangeons l'ensemble Y_α en une suite transfinie $\{y_{\alpha,\beta}\}$ où $\beta < \Omega$ et posons $E_{\alpha,\beta} = f_\alpha^{-1}(y_{\alpha,\beta})$. La fonction f_α étant continue, l'ensemble $E_{\alpha,\beta}$, comme fermé dans l'ensemble des arguments de f_α , est un G_δ , donc un ensemble à propriété de Baire. Comme, en outre, l'inégalité $\beta \neq \beta'$ entraîne $E_{\alpha,\beta} \cdot E_{\alpha,\beta'} = \emptyset$, le cor. 7 du § 30, IV, est applicable. On en déduit l'existence d'une suite γ_α où $\alpha < \Omega$ et d'un ensemble indénombrable P tel que $PE_{\alpha,\gamma_\alpha} = \emptyset$ quel que soit α .

Soient $Y \in \mathbf{F}$ et f une fonction continue. Supposons, par impossible, que $Y \subset f(P)$. Soit, conformément au th. 1, f^* une extension continue de la fonction partielle $f|_P$ sur un G_δ . On a donc $Y \subset f(P) \subset f^*(P)$. Le couple f^*, Y appartient par conséquent à la suite $\{f_\alpha, Y_\alpha\}$. Posons $f^* = f_\alpha$ et $Y = Y_\alpha$.

Comme $PE_{\alpha,\gamma_\alpha} = \emptyset$, c. à d. $P \cdot f_\alpha^{-1}(y_{\alpha,\gamma_\alpha}) = \emptyset$, on a

$$y_{\alpha,\gamma_\alpha} \text{ non-} \in f_\alpha(P), \text{ donc } y_{\alpha,\gamma_\alpha} \in Y_\alpha - f_\alpha(P) \subset Y - f(P).$$

Remarques. 1) Le th. 6 résulte de 7 en posant $\mathcal{X} = \mathcal{I}$ et $\mathbf{F} = (\mathcal{I})$. La démonstration du th. 6 ne demande pas l'hypothèse du continu. Car en supposant que $c > \aleph_1$, le th. 6 est évident.

Cependant, on ne sait pas démontrer sans l'hypothèse du continu l'existence d'un ensemble de puissance c dont l'intervalle ne soit pas une image continue.

¹⁾ Voir W. Sierpiński, *Un théorème concernant les transformations continues des ensembles linéaires*, Fund. Math. **19** (1932), p. 205.

2) L'inégalité $Y - f(P) \neq \emptyset$ de l'énoncé 7 peut être remplacée par l'égalité $\overline{Y - f(P)} = \aleph_1$.

Décomposons, en effet, tout $Y \in \mathbf{F}$ en $\aleph_1$ sous-ensembles disjoints de puissance $\aleph_1$ et désignons par $\mathbf{F}^*$ la famille qui s'obtient de $\mathbf{F}$ en remplaçant chaque Y par ces sous-ensembles. En appliquant le th. 7 à la famille $\mathbf{F}^*$, on obtient le résultat demandé.

3) En remplaçant la famille des fonctions continues par une famille de puissance $\leq \aleph_1$ (ou même $\leq \aleph_0$) de fonctions arbitraires, le th. 6 est en défaut. On a, en effet, le théorème suivant (équivalent à l'hypothèse du continu): *il existe une famille dénombrable Φ de transformations de $\mathcal{I}$ telle qu'à tout sous-ensemble indénombrable de $\mathcal{I}$ corresponde une transformation appartenant à Φ qui le transforme en $\mathcal{I}^1$.*

4) Une notion analogue à celle de type topologique est la notion de *type de continuité*. Deux ensembles sont dits du même type de continuité lorsque chacun est une image continue de l'autre ²⁾. D'après le th. 5, *dans tout espace complet, séparable, de puissance c , il existe 2^c différents types de continuité* ³⁾.

II. Prolongement des fonctions bicontinues.

Théorème de M. Laurentieff ⁴⁾. *Toute homéomorphie entre deux ensembles A et B situés dans deux espaces complets $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ se laisse prolonger sur deux ensembles G_δ situés dans ces espaces.*

Soit, en effet, $y = f(x)$ une fonction bicontinue, définie sur A et telle que $f(A) = B$. Soit $x = g(y)$ la fonction inverse. Prolongeons (cf. N° I, 1) la fonction f d'une façon continue à une fonction f^* définie sur un ensemble A^* qui est un G_δ . Attribuons un sens analogue aux symboles g^* et B^* par rapport à la fonction g . Posons

$$I = \bigcup_{xy} [y = f^*(x)] \quad \text{et} \quad J = \bigcup_{xy} [x = g^*(y)].$$

¹⁾ Voir S. Braun et W. Sierpiński, Fund. Math. **19** (1932), p. 2.

²⁾ Voir W. Sierpiński, *Sur les images continues des ensembles de points*, Fund. Math. **14** (1929), p. 234.

³⁾ Pour d'autres problèmes concernant les types de continuité, voir Z. Wąraszkiewicz, *Sur une famille des types de continuité qui remplit un intervalle*, Fund. Math. **18** (1932), p. 309, la note précitée de M. Sierpiński, N. Aronszajn, *Sur les invariants des transformations continues d'ensembles*, Fund. Math. **19** (1932), p. 92.

⁴⁾ C. R. Paris **178** (1924), p. 187 et *Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes*, Fund. Math. **6** (1924), p. 149.

Désignons par A_1 et B_1 respectivement les projections de $I \cdot J$ sur l'axe $\mathcal{X}$ et sur l'axe $\mathcal{Y}$. La fonction f^* est évidemment une homéomorphie entre A_1 et B_1 .

Reste à démontrer que A_1 et B_1 sont des G_δ . Or, en posant $h(x) = [x, f^*(x)]$, on a $A_1 = h^{-1}(J)$. La fonction h étant continue et l'ensemble J étant fermé dans $\mathcal{X} \times B^*$ (§ 24, XI, 2), donc un G_δ dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, l'ensemble $h^{-1}(J)$ est un G_δ dans A^* (§ 13, IV (5)), donc dans $\mathcal{X}$. De même, B_1 est un G_δ dans $\mathcal{Y}$.

On rapprochera le corollaire suivant du théorème 1 du N° I:

Corollaire. Etant donnée une fonction $y = f(x)$, définie sur un sous-ensemble A d'un espace métrique $\mathcal{X}$ (complet ou non), bicontinue et dont les valeurs appartiennent à un espace complet $\mathcal{Y}$, la fonction f se laisse prolonger d'une façon bicontinue sur un ensemble G_δ .

Désignons, en effet, par $\mathcal{X}^*$ un espace complet qui contient topologiquement $\mathcal{X}$ (voir § 29, VII). L'homéomorphie f se laisse prolonger sur un ensemble A_1 qui est un G_δ relativement à $\mathcal{X}^*$. On a donc $A \subset A_1 \subset \mathcal{X}^*$. L'ensemble $A_2 = A_1 \cdot \mathcal{X}$ est l'ensemble demandé: il est un G_δ (dans $\mathcal{X}$), il contient A et la fonction prolongée est bicontinue sur lui.

Remarques. 1. L'ensemble $f(A_2)$ peut ne pas être un G_δ . Soient, en effet, $\mathcal{X} = A =$ l'ensemble des nombres rationnels de l'intervalle 01, $\mathcal{Y} =$ l'intervalle 01 et $f(x) = x$.

2. Le théorème de M. Lavrentieff permet d'établir le théorème suivant, qui a été démontré par une autre voie au § 22, IV (théor. 5): *tout ensemble n -dimensionnel* (situé dans un espace métrique séparable) *est contenu dans un ensemble G_δ n -dimensionnel*; il est donc contenu *topologiquement* dans un espace complet *n -dimensionnel*¹⁾.

La démonstration²⁾ se ramène au cas où $n = 0$ (cf. § 22, IV, th. 5). Or, A étant un ensemble 0-dimensionnel, il existe une homéomorphie entre A et un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor (§ 21, IV, th. VI). Cette homéomorphie se laisse prolonger, en vertu du corollaire précédent, à un ensemble G_δ . Ce dernier ensemble est 0-dimensionnel comme homéomorphe à un sous-ensemble de $\mathcal{C}$, donc à un ensemble 0-dimensionnel.

¹⁾ Comme on verra dans *Topologie II*, le terme *complet* peut être remplacé par *compact*.

²⁾ L. Tumarkin, Math. Ann. **98** (1928), p. 653.

III. Caractérisation des espaces topologiquement complets.

Tout ensemble (situé dans un espace métrique arbitraire $\mathcal{X}$) homéomorphe à un espace complet $\mathcal{Y}$ est un G_δ ¹⁾.

Car, en supposant dans le corollaire précédent que les valeurs de la fonction f remplissent l'espace $\mathcal{Y}$, le prolongement f^* de f coïncide avec f (puisque la fonction f^* est biunivoque): le domaine des arguments de f (c. à d. l'ensemble A) est donc identique à celui de f^* et ce dernier est un G_δ ²⁾.

En rapprochant ce corollaire du théorème du § 29, VI, on en conclut que, pour qu'un sous-ensemble d'un espace complet soit homéomorphe à un espace complet (c. à d. qu'il soit *topologiquement complet*), il faut et il suffit qu'il soit un G_δ ³⁾. Il en résulte que tout ensemble homéomorphe à un G_δ contenu dans un espace complet est un G_δ ⁴⁾.

Les espaces complets séparables ne sont autre chose — au point de vue topologique — que les ensembles G_δ situés dans le cube fondamental $\mathcal{I}^$ de Hilbert.*

Car, d'après le théorème d'Urysohn, tout espace métrique séparable est homéomorphe à un sous-ensemble de $\mathcal{I}^*$ (§ 17, IV); si cet espace est en outre complet, le sous-ensemble en question est — comme nous venons de démontrer — un G_δ .

IV. Invariance intrinsèque des différentes familles d'ensembles. D'après § 13, IX, une propriété **P** d'ensembles est dite un *invariant intrinsèque* relativement aux espaces complets, lorsque tout ensemble situé dans un espace complet, homéomorphe à un ensemble jouissant de la propriété **P** et situé dans le même ou dans un autre espace complet jouit également de la propriété **P**.

¹⁾ Cet énoncé présente un cas particulier de l'invariance de la classe borelienne (voir N° IV).

²⁾ Pour une démonstration plus directe, voir W. Sierpiński, *Sur les ensembles complets d'un espace (D)*, Fund. Math. **11** (1928), p. 203.

³⁾ C'est en particulier à ce fait que tient l'importance et l'utilité de la notion d'ensemble G_δ .

⁴⁾ Théorème de S. Mazurkiewicz, *Über Borelsche Mengen*, Bull. Acad. Cracovie 1916, p. 490—494. Voir aussi W. Sierpiński, *Sur l'invariance topologique des ensembles G_δ* , Fund. Math. **8** (1926), p. 135. Le théorème peut être déduit aussi directement du théorème de M. Lavrentieff sans avoir recours au théorème du § 29, VI; voir M. Lavrentieff, loco cit.

C. Kuratowski, Topologie 1.

Théorème¹⁾. Soit $\mathbf{P}$ un invariant intrinsèque tel que, X jouissant de la propriété $\mathbf{P}$, tout ensemble qui est un G_δ dans X en jouit également. Dans ces hypothèses, les propriétés suivantes sont des invariants intrinsèques:

1°: propriété $\mathbf{P}_\sigma$ d'être somme d'une famille dénombrable d'ensembles à propriété $\mathbf{P}$.

2°: propriété $\mathbf{P}_\delta$ d'être produit d'une famille dénombrable d'ensembles à propriété $\mathbf{P}$,

3°: propriété $\mathbf{P}_e$ d'être différence de deux ensembles à propriété $\mathbf{P}$,

4°: propriété $\mathbf{P}_c$ d'être complémentaire d'un ensemble à propriété $\mathbf{P}$, dans l'hypothèse supplémentaire qu'un ensemble à propriété $\mathbf{P}$ ne cesse pas de la posséder lorsqu'on lui ajoute un ensemble F_σ .

L'invariance de la propriété $\mathbf{P}_\sigma$ est évidente (elle ne dépend guère de l'hypothèse que les G_δ relatifs jouissent de la propriété $\mathbf{P}$).

Pour établir 2°, posons $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots$, où A_n jouit de la propriété $\mathbf{P}$ et A est homéomorphe à B . D'après le théorème de M. Lavrentieff, l'homéomorphie f entre A et B se laisse prolonger à un ensemble G_δ ; désignons-le par A^* . Il vient donc $A = A \cdot A^*$, d'où

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot A^*) \quad \text{et} \quad B = f(A) = \prod_{n=1}^{\infty} f(A_n \cdot A^*),$$

puisque la fonction f est biunivoque.

A^* étant un G_δ , l'ensemble $A_n \cdot A^*$ jouit de la propriété $\mathbf{P}$ et il en est de même de l'ensemble $f(A_n \cdot A^*)$. Donc B jouit de la propriété $\mathbf{P}_\delta$.

La démonstration de 3° et 4° est analogue. Soit $A = A_1 - A_2$, les symboles B , f et A^* ayant le même sens qu'auparavant. Il vient

$$A = A \cdot A^* = A_1 \cdot A^* - A_2 \cdot A^*, \quad \text{d'où} \quad B = f(A) = f(A_1 \cdot A^*) - f(A_2 \cdot A^*),$$

ce qui achève la démonstration de 3°.

Soit enfin $A = A'_1$ (complémentaire de A_1). Il vient

$$A = A^* \cdot A'_1 = A^* - A_1 \cdot A^*$$

et

$$B = f(A) = f(A^*) - f(A_1 \cdot A^*) = \{[f(A^*)]'\} + f(A_1 \cdot A^*)'.$$

¹⁾ M. Lavrentieff, Fund. Math. 6, op. cit.

L'ensemble $f(A^*)$ étant un G_δ , $[f(A^*)]'$ est un F_σ . L'ensemble entre crochets $\{ \}$ jouit donc de la propriété $\mathbf{P}$ et B jouit de la propriété $\mathbf{P}_c$.

On déduit de 1°, 2°, 4° et de l'invariance intrinsèque de la notion d'ensemble G_δ (établie au N° III) le

Corollaire 1¹⁾. Les propriétés d'être un ensemble borelien de classe G_α avec $\alpha > 0$ (G_δ , $G_{\delta\sigma}$ etc.) et celle d'être de classe F_α avec $\alpha > 1$ ($F_{\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$ etc.) sont des invariants intrinsèques.

Il suffit d'ailleurs de supposer que A est situé dans un espace complet, tandis que B (qui est homéomorphe à A) peut être supposé situé dans un espace métrique arbitraire $\mathcal{X}$. Car, $\mathcal{X}^*$ désignant l'espace $\mathcal{X}$ „complété” (cf. § 29, VII), B est — d'après le corollaire 1 — de classe G_α (de classe F_α) relativement à l'espace $\mathcal{X}^*$, donc relativement à $\mathcal{X}$, qui contient B .

Corollaire 2. La propriété de Baire au sens restreint est un invariant intrinsèque.

Car la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble A jouisse de cette propriété est, que tout ensemble Z fermé dans A soit somme d'un ensemble borelien et d'un ensemble de I-e catégorie dans Z (§ 11, VI).

Remarque. L'invariance de la propriété $\mathbf{P}_e$ peut servir à démontrer l'invariance intrinsèque des développements en séries alternées (finies ou transfinies) des ensembles de classe G_α (ou de classe F_α)²⁾. Par exemple, la propriété d'être une différence de deux ensembles G_δ est un invariant intrinsèque³⁾.

¹⁾ Sans l'emploi du théorème de M. Lavrentieff, ce corollaire a été établi pour quelques cas particuliers (d'ailleurs dans des hypothèses supplémentaires sur l'espace); outre les travaux précités de S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, voir W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles $F_{\sigma\delta}$* et *Sur une définition topologique des ensembles $F_{\sigma\delta}$* , Fund. Math. 6 (1924), p. 21—29, du même auteur: C. R. Paris 171 (1920), p. 24 (cas des ensembles $G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, ...) et S. Mazurkiewicz, *Sur l'invariance de la notion d'ensemble $F_{\sigma\delta}$* , Fund. Math. 2 (1921), p. 104.

²⁾ Cf. les „petites classes” de Borel, § 33.

³⁾ W. Sierpiński, *Sur quelques invariants d'Analysis Situs*, Fund. Math. 3 (1922), p. 119.

V. Applications aux rangs topologiques. 1. Dans tout espace complet séparable de puissance c , il existe une famille composée de 2^c ensembles dont les rangs topologiques sont incomparables deux à deux¹⁾.

Ce théorème est une conséquence facile du th. I, 5. D'une façon plus directe, il peut être déduit du théorème suivant de la Théorie générale des ensembles:

Φ étant une famille de transformations des sous-ensembles d'un ensemble donné $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de $\mathcal{X}$, convenons d'appeler deux ensembles X et Y (contenus dans $\mathcal{X}$) *incomparables* par rapport à Φ , lorsqu'il n'existe dans Φ aucune transformation d'un de ces ensembles en sous-ensemble de l'autre. On a le théorème:

2. Si les transformations appartenant à Φ sont biunivoques et $\overline{X} = \overline{Y} = m$, il existe une famille F composée de 2^m sous-ensembles de $\mathcal{X}$ qui sont incomparables deux à deux.

Rangeons l'ensemble $\mathcal{X}$, ainsi que la famille Φ augmentée de toutes les fonctions inverses aux fonctions qu'elle contient, en deux suites transfinies $\{x_\alpha\}$ et $\{f_\alpha\}$ ayant le plus petit type d'ordre possible. Soit $P = \{p_\alpha\}$ une suite transfinie définie par induction de manière que p_α soit différent de tous les p_ξ et de tous les $f_\xi(p_\eta)$ avec $\xi < \alpha$ et $\eta < \alpha$. Soit F une famille de sous-ensembles de P telle que $\overline{F} = 2^m$ et que $\overline{X} - \overline{Y} = m$ pour tout couple d'ensembles distincts appartenant à F (cf. I, 3, première partie).

Supposons par impossible qu'une fonction $f_\gamma \in \Phi$ transforme X en Y_1 où $X \in F$ et $Y_1 \subset Y \in F$. Soit $f_\gamma^{-1} = f_\xi$. Nous allons démontrer que les formules $p_\alpha \in X - Y$ et $\xi < \alpha$ entraînent $\alpha < \gamma$, d'où on conclura que $\overline{X} - \overline{Y} < m$, contrairement à l'hypothèse.

Posons $f_\gamma(p_\alpha) = p_\eta$, donc $p_\alpha = f_\xi(p_\eta)$. Il vient $\eta \geq \alpha$ d'après la définition de p_α . D'autre part, $\eta \neq \alpha$, car $p_\eta \in Y$ et $p_\alpha \notin Y$. Les formules $\alpha < \eta$ et $p_\eta = f_\gamma(p_\alpha)$ entraînent $\eta \leq \gamma$, d'où $\alpha < \gamma$.

Le th. 2 établi, substituons à Φ — pour en déduire le th. 1 — la famille de toutes les fonctions bicontinues, définies sur des sous-ensembles G_α de l'espace $\mathcal{X}$. Si l'on suppose que $X \in F$, que $X \neq Y \in F$ et que X soit topologiquement contenu dans Y , il existe d'après le théorème de Lavrentieff une homéomorphie f définie sur un G_α

¹⁾ Voir ma note *Sur la puissance de l'ensemble des „nombres de dimension“ au sens de M. Fréchet*, Fund. Math. **8** (1926), p. 201. Cf. aussi: W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les types de dimensions*, Fund. Math. **19** (1932), p. 70 et S. Banach, ibid. p. 10.

contenant X et telle que $f(X) \subset Y$. Mais ceci est impossible, puisque $f \in \Phi$ et X et Y sont incomparables par rapport à Φ .

Remarques. Dans un ordre d'idées analogue on établit l'existence d'une suite transfinie de puissance $> c$ d'ensembles dont le rang topologique va en augmentant, ainsi que d'une suite transfinie de puissance c d'ensembles dont le rang topologique va en diminuant¹⁾.

VI. Prolongement des fonctions mesurables B.

Théorème²⁾. Soient $\mathcal{X}$ un espace métrique arbitraire, $\mathcal{Y}$ un espace complet séparable, A un sous-ensemble de $\mathcal{X}$. Toute fonction f de classe α , définie sur A , se laisse prolonger (sans en altérer la classe) sur un ensemble A^* de classe $\alpha + 1$ multiplicative.

Si, en particulier, l'ensemble A est de classe $\alpha > 0$ multiplicative, la fonction f peut être prolongée sur l'espace $\mathcal{X}$ tout entier³⁾.

Le théorème étant établi au N° I pour $\alpha = 0$, posons $\alpha > 0$. D'après § 27, VIII, 3, il existe une suite de fonctions f_n de classe α , définies sur A , qui approchent uniformément f et pour lesquelles les ensembles $f_n(A)$ sont isolés. On peut donc poser:

$$(1) \quad |f_n(x) - f_k(x)| < \frac{1}{2^k}, \quad \text{quel que soit } n \geq k,$$

et $f_n(A) = [y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^i, \dots]$, suite finie ou infinie d'éléments distincts.

Soit $B_{i_1 \dots i_n} = [f_1^{-1}(y_{i_1}^1) \cdot \dots \cdot f_n^{-1}(y_{i_n}^n)]$.

Chacun des ensembles $f_n^{-1}(y_k^i)$ étant ambigu de classe α par rapport à A (puisque le point y_k^i , comme point isolé de l'ensemble $f_k(A)$, constitue dans cet ensemble un ensemble ouvert et fermé), les hypothèses du théorème 2 du § 26, VIII, se trouvent vérifiées.

Il existe par conséquent, pour tout n , un ensemble A_n de classe $\alpha + 1$ multiplicative et un système $\{C_{i_1 \dots i_n}\}$ d'ensembles ambigus de classe α par rapport à A_n , tels que:

$$1^0 \quad C_{i_1 \dots i_n} \cdot C_{j_1 \dots j_k} = 0 \quad \text{pour } (i_1 \dots i_n) \neq (j_1 \dots j_k) \text{ et } k \leq n$$

$$2^0 \quad A_n = \sum C_{i_1 \dots i_n} \qquad 3^0 \quad A \cdot C_{i_1 \dots i_n} = B_{i_1 \dots i_n}$$

$$4^0 \quad \text{si } B_{i_1 \dots i_n} = 0, \text{ on a } C_{i_1 \dots i_n} = 0.$$

¹⁾ Voir W. Sierpiński, l. c. et la note de M. Sierpiński et de moi-même *Sur un problème de M. Fréchet concernant les dimensions des ensembles linéaires*, Fund. Math. **8** (1926), p. 193.

²⁾ Voir ma note *Sur les théorèmes topologiques de la théorie des fonctions de variables réelles*, C. R. Paris **197** (1933), p. 19.

³⁾ Pour la deuxième partie du théorème, restreinte aux fonctions à valeurs réelles, voir F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 244.

De plus (d'après la deuxième partie du théorème précité), si A est de classe α multiplicative, on a $A_n = \mathfrak{X}$, puisque l'égalité

$$A = f_k^{-1} f_k(A) = f_k^{-1}(y_k^1) + f_k^{-1}(y_k^2) + \dots,$$

valable pour tout k , entraîne $A = \sum B_{i_1 \dots i_n}$, quel que soit n .

L'ensemble $A^* = A_1 \cdot A_2 \dots$ est donc de classe $\alpha+1$ multiplicative; en outre, dans le cas où A est de classe α multiplicative (donc où $A_n = \mathfrak{X}$) on a $A^* = \mathfrak{X}$.

Prolongeons chacune des fonctions f_n sur l'ensemble A_n , en convenant que $f_n(x) = y_n^{i_n}$ si $x \in C_{i_1 \dots i_n}$. L'ensemble des valeurs de la fonction f_n ainsi définie étant dénombrable, il suffit — pour prouver que cette fonction est de classe α (sur A_n) — de démontrer que l'ensemble $f_n^{-1}(y_n^{i_n})$ est de classe α additive par rapport à A_n pour n et i fixes. Or, cela résulte directement de la formule $f_n^{-1}(y_n^{i_n}) = \sum C_{i_1 \dots i_{n-1} i}$, la sommation étant étendue à tous les systèmes de $n-1$ indices.

Ceci établi, nous allons démontrer que les fonctions f_n (prolongées) convergent uniformément sur l'ensemble A^* , à savoir, que l'inégalité (1) est valable, quel que soit $x_0 \in A^*$.

Soit, en effet, $x_0 \in C_{i_1 \dots i_n}$ et $x_0 \in C_{j_1 \dots j_k}$ pour $k \leq n$. D'après 1^o il vient $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k$. Soit $x \in B_{i_1 \dots i_n}$, donc

$$x \in f_n^{-1}(y_n^{i_n}), \text{ d'où } f_n(x) = y_n^{i_n} = f_n(x_0).$$

L'égalité $i_k = j_k$ implique de même que

$$x \in f_k^{-1}(y_k^{j_k}), \text{ d'où } f_k(x) = y_k^{j_k} = f_k(x_0).$$

Comme point de A , x satisfait à la formule (1). Il en est de même de x_0 , puisque $f_n(x) = f_n(x_0)$ et $f_k(x) = f_k(x_0)$.

L'espace $\mathcal{Y}$ étant complet, posons $f(x) = \lim f_n(x)$. La fonction $f(x)$ se trouve ainsi définie pour tout $x \in A^*$ et, comme limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe α , elle est encore de classe α (§ 27, VIII, 2).

Corollaire 1¹⁾. Dans les mêmes hypothèses sur les espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$, toute fonction f de classe α , définie sur A , se laisse prolonger sur l'espace tout entier de façon qu'elle devienne une fonction de classe $\alpha+1$.

¹⁾ Pour le cas où $\mathcal{Y}$ est l'espace des nombres réels, voir W. Sierpiński, *Sur l'extension des fonctions de Baire définies sur les ensembles linéaires quelconques*, Fund. Math. 16 (1930), p. 81 et G. v. Alexits, *Über die Erweiterung einer Baireschen Funktion*, Fund. Math. 15 (1930), p. 51.

En effet, d'après la première partie du théorème précédent, il existe un ensemble E de classe $\alpha+1$ multiplicative sur lequel la fonction f se laisse prolonger sans altérer sa classe (pour $\alpha=0$, voir N^o I) et d'après la deuxième partie du même théorème, la fonction f , ainsi prolongée, peut être étendue à l'espace tout entier comme fonction de classe $\alpha+1$.

VII. Prolongement de l'homéomorphie de classe α, β .

Les énoncés qui suivent permettent de généraliser ceux des NN^o II—IV dans l'hypothèse que les espaces considérés sont séparables.

Théorème 1¹⁾. Toute homéomorphie de classe α, β entre deux ensembles arbitraires A et B situés dans deux espaces complets séparables $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ se laisse prolonger sur deux ensembles respectivement de classes $\alpha+\beta+1$ et $\beta+\alpha+1$ situés dans ces espaces.

Reprenons la démonstration du théorème de Lavrentieff. Soient: $y=f(x)$ une homéomorphie de classe α, β entre A et B , A^* un ensemble de classe $\alpha+1$ multiplicative, $A \subset A^*$, $y=f^*(x)$ une fonction de classe α définie sur A^* et qui coïncide avec $f(x)$ sur A (cf. N^o VI), $I = \prod_{xy} [y=f^*(x)]$. Attribuons un sens analogue aux symboles B^*, g^* et J par rapport à la fonction $x=g(y)$, inverse de $y=f(x)$. Soient enfin A_1 et B_1 les projections de l'ensemble $I \cdot J$ sur les axes $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement. L'ensemble J étant de classe $\beta+1$ multiplicative (cf. § 27, VII, 1), l'ensemble A_1 est de classe $\alpha+\beta+1$ multiplicative par rapport à A^* (cf. § 27, VII, 2), donc par rapport à $\mathfrak{X}$, c. q. f. d.

Le théorème établi, considérons le cas particulier où A est de classe $\alpha > 0$ multiplicative. Posons $A^* = A$ et $f^* = f$. Il vient $A_1 = A$ et $B_1 = B$. L'ensemble I étant à présent de classe α multiplicative, B_1 est de classe $\beta+\alpha$ multiplicative par rapport à B^* , donc par rapport à $\mathcal{Y}$. On parvient ainsi aux

Corollaires. 1. La propriété d'être un ensemble de classe $\alpha > 0$ multiplicative est invariante par rapport aux homéomorphismes de classe $\alpha, 0$.

2. Si A est de classe $\alpha > 0$ multiplicative et f est une homéomorphie de classe α, β , l'ensemble $f(A)$ est de classe $\beta+\alpha$ multiplicative.

3. Toute homéomorphie de classe $1, \beta$, définie sur un espace complet séparable, transforme cet espace en un ensemble de classe $\beta+1$ multiplicative.

¹⁾ Voir ma note *Sur le prolongement de l'homéomorphie*, C. R. Paris 197 (1933), p. 1090.

§ 32. Rapports des espaces complets séparables à l'espace $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels.

I. Opération ($\mathcal{A}$). Admettons qu'à tout système $n_1 \dots n_k$ d'entiers positifs corresponde un sous-ensemble fermé (vide ou non) $F_{n_1 \dots n_k}$ d'un espace complet $\mathcal{X}$.

Désignons, comme d'habitude, par $\mathfrak{z}$ une suite variable $[\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots]$ d'entiers positifs. En identifiant cette suite avec le nombre irrationnel $\frac{1}{|\mathfrak{z}^1|} + \frac{1}{|\mathfrak{z}^2|} + \dots$, on peut admettre que $\mathfrak{z}$ parcourt l'espace $\mathcal{N}$ (cf. § 1, VI et § 14, V).

Nous supposons dans la suite que:

$$(1) \quad F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k \mathfrak{z}^{k+1}} \subset F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} \quad (2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \delta(F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}) = 0.$$

Soit Z l'ensemble des $\mathfrak{z}$ tels que $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} \neq 0$, quel que soit k . L'ensemble $F_{\mathfrak{z}^1} \cdot F_{\mathfrak{z}^2} \cdot F_{\mathfrak{z}^3} \cdot \dots$ se réduit alors (§ 30, II) à un seul point, que nous désignons par $f(\mathfrak{z})$. Par conséquent

$$(3) \quad f(Z) = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k},$$

de sorte que $f(Z)$ est le résultat de l'opération ($\mathcal{A}$) effectuée sur le système $\{F_{n_1 \dots n_k}\}$.

Désignons par $\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}$ l'ensemble des $\mathfrak{z}$ tels que $\mathfrak{z}^1 = n_1, \dots, \mathfrak{z}^k = n_k$. Les ensembles $\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}$ sont fermés-ouverts dans $\mathcal{N}$ et constituent une base de $\mathcal{N}$.

On a l'inclusion suivante:

$$(4) \quad f(Z \cdot \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \subset F_{n_1 \dots n_k}.$$

En effet, si $\mathfrak{z} \in Z$, on a $f(\mathfrak{z}) \in F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$, quel que soit k . En supposant que $\mathfrak{z} \in \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}$, on a $\mathfrak{z}^1 = n_1, \dots, \mathfrak{z}^k = n_k$. Donc $f(\mathfrak{z}) \in F_{n_1 \dots n_k}$, d'où l'inclusion (4).

(a) L'ensemble Z est fermé dans $\mathcal{N}$.

Soit, en effet, $\mathfrak{z} \in \mathcal{N} - Z$. Il existe donc un k tel que $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} = 0$. D'après (4), $f(Z \cdot \mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}) = 0$, d'où $Z \cdot \mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} = 0$. L'ensemble $\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ étant ouvert et contenant $\mathfrak{z}$, on parvient à la conclusion que tout point de $\mathcal{N} - Z$ appartient à un ensemble ouvert disjoint de Z . L'ensemble Z est donc fermé (dans $\mathcal{N}$).

(b) La fonction f est continue (sur Z).

Soient, en effet, $\mathfrak{z} \in Z$ et $\varepsilon > 0$. Soit, conformément à (2), k un indice tel que $\delta(F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}) < \varepsilon$. D'après (4), $\delta[f(Z \cdot \mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k})] < \varepsilon$. $\mathcal{N}_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ étant un entourage de $\mathfrak{z}$, on en conclut que la fonction f est continue au point $\mathfrak{z}$.

La proposition suivante est évidente:

(c) Si $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} \neq 0$, quels que soient $\mathfrak{z}$ et k , alors $Z = \mathcal{N}$.

(d) Si le système $\{F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}\}$ est dyadique, c. à d. que l'ensemble $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ s'annule toujours sauf quand le système $\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k$ se compose de chiffres 1 et 2, — l'ensemble Z est homéomorphe à l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor.

Car, dans ces hypothèses, Z est l'ensemble des suites composées de chiffres 1 et 2.

(e) Si deux ensembles $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ et $F_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^k}$ pourvus de différents systèmes de k indices sont toujours disjoints, la fonction f est biunivoque.

En outre,

$$(5) \quad f(Z) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{z}} F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k},$$

(de sorte que l'ensemble $f(Z)$ est alors un $F_{\sigma\delta}$) et

$$(6) \quad f(Z \cdot \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) = f(Z) \cdot F_{n_1 \dots n_k}.$$

En effet, si $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{y}$, il existe un indice k tel que $\mathfrak{z}^k \neq \mathfrak{y}^k$. Comme $f(\mathfrak{y}) \in F_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^k}$, il vient $f(\mathfrak{y}) \notin F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$, d'où $f(\mathfrak{z}) \neq f(\mathfrak{y})$.

La formule (5) résulte directement de l'énoncé 5 du § 1, VI, rapproché de l'égalité (3).

La démonstration de l'égalité (6) se réduit en vertu de (4) à démontrer que son membre droit est contenu dans le membre gauche.

Or, posons $p \in f(Z) \cdot F_{n_1 \dots n_k}$. On a donc

$$p = f(\mathfrak{z}) \in F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}, \quad \mathfrak{z} \in Z \quad \text{et} \quad p \in F_{n_1 \dots n_k}.$$

Par hypothèse, la formule $p \in F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} \cdot F_{n_1 \dots n_k}$ implique que $\mathfrak{z}^1 = n_1, \dots, \mathfrak{z}^k = n_k$. Donc $\mathfrak{z} \in \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}$, d'où la formule $p \in f(Z \cdot \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})$.

(f) Si l'on ajoute à l'hypothèse de l'énoncé (e) celle que les ensembles $F_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$ soient ouverts (tout en étant fermés), la fonction $f(\mathfrak{z})$ établit une homéomorphie entre Z et $f(Z)$.

Soit, en effet, $\lim_{m \rightarrow \infty} f(z_m) = f(z)$. Il s'agit de prouver que $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = z$, c. à d. que $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m^k = z^k$, quel que soit k , ou encore que, k étant fixe, on a $z_m^k = z^k$ pour m suffisamment grand.

Or, l'ensemble $F_{z^1 \dots z^k}$ étant ouvert, on conclut de la formule $\lim_{m \rightarrow \infty} f(z_m) = f(z) \in F_{z^1 \dots z^k}$ que $f(z_m) \in F_{z^1 \dots z^k}$ pour m suffisamment grand. D'autre part $f(z_m) \in F_{z_m^1 \dots z_m^k}$. L'hypothèse de l'énoncé (e) entraîne donc $z_m^1 = z^1, \dots, z_m^k = z^k$.

(g) Si $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i$ et $F_{z^1 \dots z^k} = \sum_{i=1}^{\infty} F_{z^1 \dots z^k i}$, quels que soient z et k , on a $f(Z) = \mathcal{X}$.

En effet, p étant un point donné, il existe un indice n_1 tel que $p \in F_{n_1}$. Procédons par induction. Supposons que $p \in F_{n_1 \dots n_k}$. Il existe par hypothèse un indice n_{k+1} tel que $p \in F_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$. En désignant par z la suite $n_1, n_2, n_3, \dots$, il vient $p = f(z)$.

En vue des applications postérieures, nous établirons les trois énoncés suivants:

(h) Si $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i$ et $F_{z^1 \dots z^k} = \sum_{i=1}^{\infty} F_{z^1 \dots z^k i}$, quels que soient z et k , on a

$$(7) \quad \overline{f(Z)} = \mathcal{X} \quad \text{et} \quad \overline{f(Z) \cdot F_{z^1 \dots z^k}} = F_{z^1 \dots z^k}.$$

Soit $p \in F_{n_1 \dots n_k}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de prouver qu'il existe un $z \in Z$ tel que $f(z) \in F_{n_1 \dots n_k}$ et que $|f(z) - p| \leq \varepsilon$.

Il existe par hypothèse un indice n_{k+1} et un point p_1 tels que

$$p_1 \in F_{n_1 \dots n_k n_{k+1}} \quad \text{et} \quad |p_1 - p| < \varepsilon/2.$$

De façon générale, il existe une suite d'entiers $n_{k+1}, n_{k+2}, \dots$ et une suite de points $p_1, p_2, \dots$ tels que

$$p_j \in F_{n_1 \dots n_k \dots n_{k+j}} \quad \text{et} \quad |p_j - p_{j-1}| < \varepsilon/2^j.$$

Désignons par z la suite infinie $n_1, n_2, \dots$; on a donc $z^m = n_m$, quel que soit m . Il vient

$$f(z) \in F_{z^1 \dots z^m} = F_{n_1 \dots n_m} \quad \text{et} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} |f(z) - p_j| = 0$$

d'après (2). Donc $f(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} p_j$ et comme $|p_j - p| < \varepsilon$, il vient $|f(z) - p| \leq \varepsilon$.

La deuxième égalité (7) se trouve ainsi établie. La première en est un cas particulier en convenant que, pour $k=0$, on pose $F = \mathcal{X}$.

(i) Si les hypothèses des énoncés (c), (e) et (h) sont satisfaites et si, en outre, l'ensemble $F_{n_1 \dots n_k}$ est non-dense dans $F_{n_1 \dots n_{k-1}}$ (quel que soit le système d'indices $n_1 \dots n_{k-1}$), la fonction f transforme tout ensemble ouvert dans $\mathcal{N}$ en un ensemble de I-e catégorie sur lui-même.

Les ensembles $\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}$ formant une base de $\mathcal{N}$, il suffit de démontrer que $f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})$ est de I-e catégorie sur lui-même.

Or, d'après (c): $Z = \mathcal{N}$, donc d'après (4): $f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \subset F_{n_1 \dots n_k}$, d'où

$$f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k i}) \subset \sum_{i=1}^{\infty} F_{n_1 \dots n_k i}.$$

Chacun des ensembles $F_{n_1 \dots n_k i}$ étant non-dense dans $F_{n_1 \dots n_k}$ (par hypothèse), leur somme est de I-e catégorie dans $F_{n_1 \dots n_k}$. Donc $f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})$ est de I-e catégorie dans $F_{n_1 \dots n_k}$. D'autre part, d'après (7), (6) et (c):

$$F_{n_1 \dots n_k} = \overline{f(Z) \cdot F_{n_1 \dots n_k}} = \overline{f(Z \cdot \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})} = \overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})}.$$

Comme ensemble de I-e catégorie sur sa fermeture, l'ensemble $f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})$ est de I-e catégorie sur lui-même (cf. § 10, IV, 2).

Nous complétons l'énoncé (i) par le suivant:

(j) Il existe, dans l'espace $\mathcal{C}$ de Cantor, un système $\{F_{n_1 \dots n_k}\}$ d'ensembles parfaits satisfaisant aux hypothèses du théorème (i).

Remarquons d'abord que, p étant un point du produit cartésien $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, on peut lui faire correspondre un ensemble parfait $P_p \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ contenant p et non-dense dans $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ (homéomorphe d'ailleurs à $\mathcal{C}$).

L'espace $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ étant homéomorphe à $\mathcal{C}$ (§ 24 a, V), on peut faire correspondre — de façon analogue — à tout point de $\mathcal{C}$, un ensemble parfait non-dense dans $\mathcal{C}$ et qui contient ce point. Par conséquent, $p_1, p_2, \dots$ désignant une suite de points dense dans $\mathcal{C}$, il existe une suite $F_1, F_2, \dots$ d'ensembles parfaits, non-denses dans $\mathcal{C}$, non vides et tels que

$$F_n \cdot F_m = 0 \quad \text{pour} \quad n \neq m \quad \text{et} \quad p_n \in (F_1 + \dots + F_n).$$

On a donc $\mathcal{C} = \overline{F_1 + F_2 + \dots}$

En remplaçant dans ce raisonnement $\mathcal{C}$ par F_n , on définit les ensembles F_{n,n_s} , puis les ensembles $F_{n_1 n_2 n_s}$ etc. On peut admettre de plus que $\delta(F_{n_1 \dots n_k}) < 1/k$.

Le système $\{F_{n_1 \dots n_k}\}$ satisfait donc aux hypothèses du théorème (i).

II. Transformations de l'ensemble $\mathcal{N}$ en espaces complets.

Théorème 1¹. *Tout espace complet séparable est (effectivement²) l'image continue de l'espace $\mathcal{N}$.*

Soit, en effet, $R_1, R_2, \dots$ une base de l'espace $\mathcal{X}$ telle que $R_i \neq \emptyset$ et $\delta(R_i) < 1$ (cf. § 17, I et II). Posons $F_i = \bar{R}_i$. Il vient

$$(1) \quad \mathcal{X} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \quad \text{et} \quad \delta(F_i) \leq 1.$$

Procédons par induction. L'ensemble fermé non vide $F_{n_1 \dots n_k}$ étant supposé défini et considéré comme l'espace, il existe une suite infinie d'ensembles fermés et non vides $F_{n_1 \dots n_k i}$, où $i = 1, 2, \dots$, telle que

$$(2) \quad F_{n_1 \dots n_k} = \sum_{i=1}^{\infty} F_{n_1 \dots n_k i} \quad \text{et} \quad \delta(F_{n_1 \dots n_k i}) \leq 1/(k+1).$$

D'après (b), (c) et (g), $\mathcal{X}$ est l'image continue de $\mathcal{N}$.

Théorème 2. *Tout espace complet séparable de dimension 0 est homéomorphe à un sous-ensemble fermé de l'espace $\mathcal{N}$.*

En effet, l'espace $\mathcal{X}$ étant 0-dimensionnel, tout ensemble ouvert est somme d'une suite infinie d'ensembles disjoints (vides ou non) qui sont à la fois fermés et ouverts et de diamètre aussi petit que l'on veut (§ 21, I, cor. 1). On a donc, comme dans la démonstration précédente, les formules (1) et (2), les ensembles $F_{n_1 \dots n_k}$ étant fermés, ouverts et disjoints pour k fixe.

D'après (a), (f) et (g), $\mathcal{X}$ est homéomorphe à un ensemble Z fermé dans $\mathcal{N}$.

Corollaire. *Dans l'espace $\mathcal{N}$, tout ensemble G_δ est homéomorphe à un ensemble fermé.*

Car, en vertu de § 29, VII, tout ensemble G_δ contenu dans $\mathcal{N}$ est homéomorphe à un espace complet de dimension 0.

¹) Ce théorème sera étendu dans le § 33 sur les ensembles boreliens.

²) c. à d. que la démonstration qui suit permet de nommer une fonction continue f qui transforme $\mathcal{N}$ en $\mathcal{X}$ (cf. § 18, VIII).

Théorème 3 (de S. Mazurkiewicz)¹. *Tout ensemble G_δ , dense et frontière dans un espace complet, séparable et 0-dimensionnel est homéomorphe à l'espace $\mathcal{N}$.*

En effet, d'après le théor. I' du § 21, I, l'ensemble G_δ en question est le résultat de l'opération ($\mathcal{A}$) effectuée sur un système d'ensembles $\{F_{n_1 \dots n_k}\}$ non vides, fermés, ouverts, disjoints pour k fixe et satisfaisant aux conditions (1) et (2) du N° I. D'après (3), (c) et (f), cet ensemble est donc homéomorphe à $\mathcal{N}$.

Corollaire. *Tout ensemble G_δ dense et frontière dans l'espace $\mathcal{E}$ des nombres réels est homéomorphe à $\mathcal{N}$.*

Soient Q l'ensemble G_δ considéré et D un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{E} - Q$, dense et tel que l'ensemble $\mathcal{E} - Q - D$ est dense (un ensemble D de ce genre existe, car l'ensemble $\mathcal{E} - Q$ est dense et dense en soi). L'ensemble Q est par conséquent dense et frontière dans $\mathcal{E} - D$. De plus, comme ensemble G_δ , $\mathcal{E} - D$ est un espace topologiquement complet de dimension 0 (§ 29, VII). Q est donc homéomorphe à $\mathcal{N}$ en vertu du théor. 3.

III. Transformations biunivoques. *Théorème*. *L'intervalle $\mathcal{I}$, ainsi que le cube n -dimensionnel $\mathcal{I}^n$ (n fini ou $\aleph_0$), se laissent obtenir de $\mathcal{N}$ par une homéomorphie de classe 0, 1.*

Soit N l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor dépourvu des extrémités gauches des intervalles contigus. La fonction $t(x)$ qui fait correspondre au nombre

$$x = \frac{c_1}{3^1} + \frac{c_2}{3^2} + \dots + \frac{c_m}{3^m} + \dots \quad (c_m = 0 \text{ ou } 2)$$

le nombre

$$t(x) = \frac{c_1}{2^1} + \frac{c_2}{2^2} + \dots + \frac{c_m}{2^{m+1}} + \dots$$

transforme N en $\mathcal{I}$ de façon biunivoque et continue (cf. § 24 a, VI a).

La fonction inverse t^{-1} n'admet qu'un ensemble dénombrable de points de discontinuité (à savoir, les points qui sont représentés par des fractions dyadiques finies); elle est donc de I-e classe (§ 30, VII, cor. 1).

¹) *Teorja zbiorów G_δ* , Wektor 1918. Cf. dans cet ordre d'idées L. E. J. Brouwer, *On linear inner limiting sets*, Proc. Akad. Amsterdam **20** (1917), p. 1191, et P. Alexandroff et P. Urysohn, *Über nulldimensionale Mengen*, Math. Ann. **98** (1927), p. 89 (cas de l'ensemble F_σ homogène).

N étant dense et frontière dans $\mathcal{C}$, les ensembles N et $\mathcal{N}$ sont homéomorphes (théor. 3 du N° II); soit $s(x)$ une homéomorphie telle que $s(\mathcal{N})=N$. La fonction $f(x)=ts(x)$ satisfait au théorème pour $n=1$.

En faisant correspondre à la suite (finie ou infinie), composée des nombres irrationnels $x_1, x_2, \dots$, la suite $f(x_1), f(x_2), \dots$, on définit une transformation continue g de $\mathcal{N}^n$ en $\mathcal{J}^n$ (§ 24a, VI, 2).

La transformation inverse $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), \dots$ fait correspondre à tout point $y_1, y_2, \dots$ de l'espace $\mathcal{J}^n$ un point de $\mathcal{N}^n$; la transformation g^{-1} est donc de I-e classe, puisque f^{-1} est de I-e classe (§ 27, VI, 3). $\mathcal{N}^n$ étant homéomorphe à $\mathcal{N}$ (§ 24a, V, remarque), désignons par h une homéomorphie telle que $h(\mathcal{N})=\mathcal{N}^n$. La fonction superposée $gh(x)$ est bien la fonction demandée.

Remarque. Le théorème précédent se laisse généraliser en remplaçant $\mathcal{J}^n$ par un F_σ arbitraire, composé exclusivement de points de condensation (et situé dans un espace complet séparable)¹⁾.

*Corollaire*²⁾. *Tout espace métrique séparable $\mathcal{X}$ se laisse obtenir d'un sous-ensemble E de $\mathcal{N}$ par une homéomorphie de classe 0, 1.*

En outre, si $\mathcal{X}$ est complet, E est fermé (donc topologiquement complet, séparable et 0-dimensionnel).

En effet, $\mathcal{X}$ peut être considéré comme un sous-ensemble Q de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ (§ 17, IV).

En outre, si l'espace $\mathcal{X}$ est complet, Q est un G_δ (cf. § 31, III). Or, f étant la fonction considérée dans le théorème précédent (pour $n=\aleph_0$), l'ensemble $f^{-1}(Q)$ est un G_δ dans $\mathcal{N}$; il est donc homéomorphe à un sous-ensemble fermé de $\mathcal{N}$ (corollaire du théor. 2, N° II).

IV. Théorèmes de décomposition. 1. *Tout espace complet, séparable, 0-dimensionnel et indénombrable se compose d'un ensemble infini dénombrable et d'un ensemble homéomorphe à $\mathcal{N}$.*

En effet, d'après le théorème de Cantor-Bendixson (§ 18, V), l'espace se compose d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble P parfait et non vide. Soit D un ensemble dénombrable dense dans P . L'ensemble P , considéré comme l'espace, est complet, séparable et 0-dimensionnel. En outre, chaque point en est un point

¹⁾ F. Hausdorff, *Die schlichten stetigen Bilder des Nullraums*, Fund. Math. **29** (1937), p. 153.

²⁾ Dans le § 33 ce corollaire sera étendu sur les ensembles boreliens.

de condensation (§ 30, IV, cor. 3); l'ensemble $P-D$ est donc dense dans P . En tant qu'un G_δ dense et frontière dans P , l'ensemble $P-D$ est homéomorphe à $\mathcal{N}$ selon le théor. 3 du N° II.

Remarque. On en conclut que tout ensemble G_δ indénombrable situé dans $\mathcal{E}$ devient homéomorphe à $\mathcal{N}$, lorsqu'on y supprime un ensemble dénombrable convenablement choisi¹⁾. Car en enlevant les points rationnels, on parvient à un ensemble G_δ de dimension 0, qui devient — comme nous venons de démontrer — homéomorphe à $\mathcal{N}$, lorsqu'on le prive d'un ensemble dénombrable.

2. *Tout espace complet, séparable et indénombrable se compose d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble qui s'obtient de $\mathcal{N}$ par une homéomorphie de classe 0, 1.*

Soient, en effet, $\mathcal{Y}$ l'espace considéré et $\mathcal{X}$ un espace complet, séparable, 0-dimensionnel et tel que $\mathcal{N}$ s'en obtienne par une homéomorphie f de classe 0, 1 (N° III, corollaire). D'après le théorème précédent, on a $\mathcal{X}=D+N$, où D est dénombrable et N homéomorphe à $\mathcal{N}$. La formule $\mathcal{Y}=f(D)+f(N)$ représente la décomposition demandée.

V. Rapports à l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor. *Théorème.* *Toute transformation continue d'un espace complet séparable $\mathcal{X}$ est une homéomorphie sur un ensemble A homéomorphe à l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor, pourvu que cette transformation admette une infinité indénombrable de valeurs différentes.*

En outre²⁾, *tout espace complet, dense en soi et non vide (qu'il soit séparable ou non) contient $\mathcal{C}$ topologiquement.*

Faisons correspondre à chaque valeur y de la fonction f considérée un point x_y tel que $y=f(x_y)$. L'espace $\mathcal{X}$ étant séparable et l'ensemble des x_y étant indénombrable, soit D un sous-ensemble dense en soi (non vide) de cet ensemble (cf. § 18, V).

Soient $p_0 \neq p_2$ deux points de l'ensemble D et soient F_0 et F_2 deux sphères (fermées) de centre p_0 et p_2 telles que:

$$1^\circ \delta(F_0) < 1, \quad \delta(F_2) < 1, \quad 2^\circ f(F_0) \cdot f(F_2) = 0.$$

L'existence des sphères F_0 et F_2 résulte de la continuité de la fonction f : si elles n'existaient pas, on pourrait définir (en considérant des sphères de plus en plus petites) deux suites $\{r_n\}$ et $\{s_n\}$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = p_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = p_2 \quad \text{et} \quad f(r_n) = f(s_n);$$

¹⁾ Théorème de S. Mazurkiewicz, l. cit.

²⁾ Cf. W. H. Young, *Leipziger Ber.* **55** (1903), p. 287.

mais on aurait alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n), \text{ d'où } f(p_0) = f(p_2) \text{ et } p_0 = p_2,$$

car la fonction f est biunivoque sur D .

L'ensemble D étant dense en soi, il existe à l'intérieur de F_0 deux points p_{00} et p_{02} de D et deux sphères F_{00} et F_{02} telles que

$$\delta(F_{00}) < 1/2, \quad \delta(F_{02}) < 1/2, \quad f(F_{00}) \cdot f(F_{02}) = 0 \text{ et } F_{00} + F_{02} \subset F_0.$$

En attribuant un sens analogue aux symboles F_{20} et F_{22} et en procédant ainsi de proche en proche, on parvient à un système dyadique d'ensembles fermés non vides $\{F_{c_1 \dots c_k}\}$ qui satisfait aux conditions (1) et (2) du N° I. On a en outre

$$(i) \quad f(F_{c_1 \dots c_k}) \cdot f(F_{d_1 \dots d_k}) = 0 \text{ si } (c_1 \dots c_k) \neq (d_1 \dots d_k),$$

ce qui implique que $F_{c_1 \dots c_k} \cdot F_{d_1 \dots d_k} = 0$.

Il en résulte en vertu de N° I, (d) et (e), que l'ensemble $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \sum F_{c_1 \dots c_k}$, où la sommation s'étend à tous les systèmes de k chiffres $c_1 \dots c_k$, est une image biunivoque et continue de $\mathcal{C}$: $A = g(\mathcal{C})$ ¹⁾. Selon § 14, VIII, 6, A est donc homéomorphe à $\mathcal{C}$.

Pour prouver que la fonction partielle $f|A$ est bicontinue, il suffit de démontrer que cette fonction est biunivoque. Or, étant donnés deux points $x_1 \neq x_2$ de A , il existe deux systèmes différents d'indices $c_1 \dots c_k$ et $d_1 \dots d_k$ tels que $x_1 \in F_{c_1 \dots c_k}$ et $x_2 \in F_{d_1 \dots d_k}$. Il vient d'après (i): $f(x_1) \neq f(x_2)$, c. q. f. d.

Pour établir la deuxième partie du théorème, il suffit de poser dans le raisonnement précédent $D = \mathcal{X}$ et $f(x) = x$.

Corollaire 1. *Toute image continue indénombrable d'un espace complet séparable contient $\mathcal{C}$ topologiquement. Elle est donc de puissance du continu.*

Corollaire 2. *Tout espace complet, séparable et indénombrable contient un ensemble G_δ (homéomorphe à $\mathcal{N}$) dont chaque espace complet séparable est une image continue.*

¹⁾ La fonction $g(c)$ peut être définie directement, en convenant que

$$g(c) = F_{c_1} \cdot F_{c_1 c_2} \cdot F_{c_1 c_2 c_3} \dots \text{ pour } c = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{9} + \frac{c_3}{27} + \dots$$

Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 134.

C'est une conséquence du corollaire précédent, du théor. 1 (N° II) et du fait que l'ensemble $\mathcal{C}$ dépourvu des extrémités des intervalles contigus est homéomorphe à $\mathcal{N}$.

Corollaire 3. *Étant donnée une fonction continue f , définie sur un espace complet séparable, la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des valeurs de cette fonction soit indénombrable est qu'il existe un ensemble dense en soi E (situé dans cet espace) tel que la fonction partielle $f|E$ soit biunivoque.*

La condition est nécessaire en vertu du théorème de ce N°. Elle est suffisante d'après le corollaire 6 du § 30, IV.

Remarque¹⁾. Le théorème se laisse étendre aux espaces métriques arbitraires de la façon suivante. Convenons de dire qu'une fonction f est *localement constante au point x_0* , s'il existe un entourage E de x_0 tel que la fonction partielle $f|E$ soit une constante. On a alors le théorème:

Soit f une transformation continue d'un espace métrique $\mathcal{X}$. S'il existe dans cet espace un ensemble A tel que la fonction partielle $f|A$ ne soit constante en aucun point, $\mathcal{X}$ contient un ensemble parfait P tel que la fonction $f|P$ est une homéomorphie.

De là résulte que:

Toute transformation continue d'un espace métrique séparable, qui admet une infinité indénombrable de valeurs est une homéomorphie sur un ensemble parfait.

§ 33. Ensembles boreliens dans les espaces complets séparables²⁾.

I. Rapports des ensembles boreliens à l'espace $\mathcal{N}$.

Théorème 1. *Tout ensemble borelien est image continue de l'espace $\mathcal{N}$.*

Tout ensemble fermé étant un espace topologiquement complet (§ 29, VI), donc d'après § 32, II, 1, image continue de $\mathcal{N}$, il s'agit de prouver (cf. § 26, I, 1, 3, 3') qu'étant donnée une suite de transformations continues $f_1, f_2, \dots$ de $\mathcal{N}$ en sous-ensembles $f_1(\mathcal{N}), f_2(\mathcal{N}), \dots$ d'un espace $\mathcal{X}$, les ensembles

$$S = f_1(\mathcal{N}) + f_2(\mathcal{N}) + \dots \text{ et } P = f_1(\mathcal{N}) \cdot f_2(\mathcal{N}) \cdot \dots$$

sont des images continues de $\mathcal{N}$.

¹⁾ W. Hurewicz, *Ein Satz über stetige Abbildungen*, Fund. Math. **23** (1934), p. 54.

²⁾ Cf. N. Lusin, *Ensembles analytiques*, chap. II, ainsi que ma note *Sur une généralisation de la notion d'homéomorphie*, Fund. Math. **22** (1934), p. 206. Voir aussi § 35, NN° IV et V.

C. Kuratowski, *Topologie I*.

Or, désignons par N_n l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle $n-1, n$ et posons $f(x) = f_n(x-n+1)$ pour $x \in N_n$, $n=1, 2, \dots$. La fonction f est donc continue sur $\mathcal{N}^* = N_1 + N_2 + \dots$ et $f(\mathcal{N}^*) = S$. En outre, $\mathcal{N}^*$ est évidemment homéomorphe à $\mathcal{N}$.

Pour prouver que P est une image continue de $\mathcal{N}$, envisageons dans l'espace $\mathcal{N}^{\aleph_0}$ des suites $z = [z^1, z^2, \dots]$, où $z^n \in \mathcal{N}$, l'ensemble $\mathcal{Z}$ des z tels que $f_1(z^1) = f_2(z^2) = \dots$ et posons, pour $z \in \mathcal{Z}$, $f^*(z) = f_1(z^1)$. D'après § 24a, VII, 2, $\mathcal{Z}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{N}^{\aleph_0}$, donc une image continue de $\mathcal{N}$. D'après le même théorème, f^* est une transformation continue de $\mathcal{Z}$ en P .

Théorème 2. *Tout ensemble borelien est image biunivoque et continue d'un espace complet, séparable et 0-dimensionnel¹⁾.*

Tout ensemble ouvert étant un espace topologiquement complet (§ 29, VI), donc satisfaisant à la thèse du théorème (selon § 32, III, cor.), il s'agit de prouver (cf. § 26, V, 3) que, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$ étant une suite d'espaces complets, séparables et 0-dimensionnels, et $f_1, f_2, \dots$ étant une suite de transformations biunivoques et continues de ces espaces en sous-ensembles $f_1(\mathcal{X}_1), f_2(\mathcal{X}_2), \dots$ d'un espace $\mathcal{X}$,

1°: l'ensemble $P = f_1(\mathcal{X}_1) \cdot f_2(\mathcal{X}_2) \cdot \dots$ satisfait à la thèse du théorème,

2°: l'ensemble $S = f_1(\mathcal{X}_1) + f_2(\mathcal{X}_2) + \dots$ lui satisfait aussi, dans l'hypothèse supplémentaire que les ensembles $f_1(\mathcal{X}_1), f_2(\mathcal{X}_2), \dots$ sont deux à deux disjoints.

Pour établir 1°, envisageons dans le produit cartésien dénombrable $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$ l'ensemble $\mathcal{Z}$ des $z = [z^1, z^2, \dots]$ tels que $f_1(z^1) = f_2(z^2) = \dots$ et posons, pour $z \in \mathcal{Z}$, $f^*(z) = f_1(z^1)$. Le produit $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$ étant complet (§ 29, III), séparable (§ 14, VI) et 0-dimensionnel (§ 24a, V), il en est de même de $\mathcal{Z}$ (puisque $\mathcal{Z}$ en est un sous-ensemble fermé, selon § 24a, VII, 2). De plus, f^* est une transformation continue de $\mathcal{Z}$ en P .

Afin d'établir 2°, considérons — conformément à § 32, II, 2 — l'espace $\mathcal{X}_n$ comme sous-ensemble fermé de l'ensemble N_n (des nombres irrationnels de l'intervalle $n-1, n$). Les fonctions f_n , $n=1, 2, \dots$ définissent alors une transformation biunivoque et con-

¹⁾ Ajoutons que, si l'ensemble borelien se compose exclusivement de points de condensation, il est image biunivoque et continue de $\mathcal{N}$. Voir W. Sierpiński, *Sur les images biunivoques et continues de l'ensemble de tous les nombres irrationnels*, *Mathematica* 2 (1924), p. 18.

tinue de la somme $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \dots$ en S . Comme fermée dans l'espace des nombres irrationnels positifs, cette somme constitue un espace topologiquement complet, séparable et 0-dimensionnel.

Les th. 1 et 2 impliquent (chacun séparément) l'important

Théorème 3 (d'Alexandroff-Hausdorff)¹⁾. *Tout ensemble borelien indénombrable contient topologiquement l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor. Sa puissance est donc c .*

Ce théorème résulte du th. 1 rapproché du cor. 1 du § 32, V, ainsi que du th. 2 rapproché du th. 1 du § 32, IV.

II. Caractérisation de la classe borelienne d'un ensemble à l'aide des homéomorphismes généralisées. Le th. 2 du N° I se laisse préciser comme suit.

Théorème 1. *A tout ensemble A de classe multiplicative (resp. ambigu) $\alpha+1 > 0$ situé dans l'espace $\mathcal{X}$ correspondent un espace complet séparable $\mathcal{T}$ et une homéomorphie de classe 0, α qui transforme $\mathcal{T}$ en $\mathcal{X}$ de façon que l'ensemble $f^{-1}(A)$ soit un G_δ (resp. un F_σ et G_δ).*

De plus, si $\alpha+1 > 1$, $\mathcal{T}$ peut être supposé de dimension 0.

Nous allons établir ce théorème d'abord pour les classes ambiguës.

Supposons que le théorème soit vrai pour chaque ensemble ambigu de classe $< \beta$ ($\beta > 1$). Nous allons démontrer qu'il en est encore ainsi, quand A est un ensemble ambigu de classe β .

D'après § 26, IX, 1, l'ensemble A est de la forme:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot A_{n+1} \cdot \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} (A_n + A_{n+1} + \dots)$$

où A_n est ambigu de classe α_n et $0 < \alpha_n < \beta$.

Si $\beta > 2$, il existe par hypothèse un ensemble C_n fermé dans $\mathcal{N}$ et une homéomorphie f_n de classe 0, α_n , définie sur C_n et telle que $f_n(C_n) = A_n$. Si $\beta = 2$, on parvient à la même conclusion en vertu du corollaire du § 32, III (où l'espace $\mathcal{X}$ peut être remplacé par l'ensemble A_n , car celui-ci est un G_δ).

L'ensemble $\mathcal{X} - A_n$ étant aussi ambigu de classe α_n , il existe un ensemble D_n fermé dans l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle $(1, 2)$ et dont le rapport à $\mathcal{X} - A_n$ est identique à

¹⁾ P. Alexandroff, C. R. Paris 162 (1916), p. 323. F. Hausdorff, *Math. Ann.* 77 (1916), p. 430.

celui de C_n à A_n ; de sorte qu'en posant $\mathcal{X}_n = C_n + D_n$, la fonction f_n définie sur l'ensemble $\mathcal{X}_n$ tout entier est continue, biunivoque et remplit les formules $f_n(C_n) = A_n$ et $f_n(D_n) = \mathcal{X} - A_n$. La fonction f_n^{-1} est de classe α_n , car les fonctions partielles $f_n^{-1}|_{A_n}$ et $f_n^{-1}|_{(\mathcal{X} - A_n)}$ sont par hypothèse de classe α_n et l'ensemble A_n est ambigu de classe α_n (cf. § 27, IV, 2).

Remarquons que $\mathcal{X}_n$ est topologiquement complet, séparable, 0-dimensionnel et que les ensembles C_n et D_n sont fermés et ouverts dans cet espace. Soit $E = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$ le produit cartésien des espaces $\mathcal{X}_n$, c. à d. l'espace des suites $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots]$ où $\mathfrak{z}^n \in \mathcal{X}_n$. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des $\mathfrak{z}$ tels que $f_1(\mathfrak{z}^1) = f_2(\mathfrak{z}^2) = \dots$. Posons $f(\mathfrak{z}) = f_1(\mathfrak{z}^1)$ pour $\mathfrak{z} \in \mathcal{T}$ (cf. § 24a, VII).

$\mathcal{T}$ étant fermé dans E et E étant topologiquement complet, séparable et 0-dimensionnel (§ 29, III, § 14, VI, § 24a, V), il en est de même de $\mathcal{T}$.

D'après § 24a, VII, $f(\mathcal{T}) = \mathcal{X}$ et d'après § 27, VI, 3, f est une homéomorphie de classe 0, β si β est un nombre limite et de classe 0, α si $\beta = \alpha + 1$.

L'ensemble $f^{-1}(A)$ est un F_σ et G_δ . On a d'abord, en effet,

$$f^{-1}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} [f^{-1}(A_n) \cdot f^{-1}(A_{n+1}) \cdot \dots] = \prod_{n=1}^{\infty} [f^{-1}(A_n) + f^{-1}(A_{n+1}) + \dots].$$

La fonction f étant continue, il suffit donc de démontrer que l'ensemble $f^{-1}(A_n)$ est fermé et ouvert dans $\mathcal{T}$. Or, on a pour $\mathfrak{z} \in \mathcal{T}$:

$$\{f(\mathfrak{z}) \in A_n\} = \{f_n(\mathfrak{z}^n) \in A_n\} = \{\mathfrak{z}^n \in C_n\}$$

et l'ensemble C_n étant fermé et ouvert dans $\mathcal{X}_n$, l'ensemble

$$f^{-1}(A_n) = \mathcal{T} \cdot E_{\mathfrak{z}} \{\mathfrak{z}^n \in C_n\}$$

est fermé et ouvert dans $\mathcal{T}$, puisque

$$E_{\mathfrak{z}} \{\mathfrak{z}^n \in C_n\} = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_{n-1} \times C_n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \dots$$

Le cas d'ensembles ambigus étant établi, nous en déduirons le théorème pour le cas des classes multiplicatives.

A étant de classe $\alpha + 1$ (> 0) multiplicative, on a $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots$ où A_n est ambigu de classe $\alpha + 1$. Il existe donc, d'après le théorème que nous venons d'établir, un espace $\mathcal{X}_n$ complet séparable, un G_δ (même un F_σ et G_δ) C_n et une homéomorphie f_n de classe 0, α tels que

$$f_n(\mathcal{X}_n) = \mathcal{X} \quad \text{et} \quad f_n^{-1}(A_n) = C_n.$$

$\mathcal{T}$ et f étant définis comme auparavant, il vient

$$f(\mathcal{T}) = f_1(\mathcal{X}_1) \cdot f_2(\mathcal{X}_2) \cdot \dots = \mathcal{X}, \quad f^{-1}(A) = f^{-1}(A_1) \cdot f^{-1}(A_2) \cdot \dots, \\ f^{-1}(A_n) = \mathcal{T} \cdot (\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_{n-1} \times C_n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \dots),$$

ce qui prouve que $f^{-1}(A_n)$ est un G_δ dans $\mathcal{T}$. Il en est donc de même de $f^{-1}(A)$.

Remarques. 1° La classe de la fonction f^{-1} ne peut pas être réduite. Car f^{-1} étant de classe ξ , l'ensemble $A = ff^{-1}(A)$ est ambigu de classe $\xi + 1$, puisque $f^{-1}(A)$ est ambigu de classe 1 (§ 27, III, 1). Par conséquent, si A est de classe $\alpha + 1$ sans être de classe α , on a $\xi \geq \alpha$.

2° Le th. 1 peut être généralisé en remplaçant $\alpha + 1$ par $\alpha + \beta$ et G_δ (resp. F_σ et G_δ) par la classe β multiplicative (resp. ambiguë)¹⁾.

Corollaire 1. Tout ensemble A de classe multiplicative $\alpha + 1 > 0$ se laisse obtenir d'un espace complet séparable, convenablement défini, à l'aide d'une homéomorphie de classe 0, α .

Si $\alpha + 1 > 1$, cet espace peut être supposé de dimension 0.

Car l'ensemble $f^{-1}(A)$ du th. 1 est un G_δ , donc un espace topologiquement complet.

Le cor. 1 rapproché du cor. 3 du § 31, VII, implique le

Corollaire 2. Pour qu'un ensemble soit de classe $\alpha + 1 > 0$ multiplicative, il faut et il suffit qu'il s'obtienne d'un espace complet séparable à l'aide d'une homéomorphie de classe 0, α .

Corollaire 3. Dans tout ensemble borelien indénombrable A de classe multiplicative $\alpha + 1 > 1$, il existe un ensemble infini dénombrable D tel que l'ensemble $A - D$ se laisse obtenir de $\mathcal{N}$ à l'aide d'une homéomorphie de classe 0, α .

¹⁾ Voir ma note précitée de Fund. Math. 22, p. 217.

Soient, conformément au cor. 1, $\mathcal{T}$ un espace complet, séparable, 0-dimensionnel, et f une homéomorphie de classe $0, \alpha$ telle que $f(\mathcal{T}) = A$. E étant un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{T}$ tel que l'ensemble $\mathcal{T} - E$ est homéomorphe à $\mathcal{N}$ (cf. § 32, IV, 1), on pose $D = f(E)$.

Théorème 2. *Entre tout couple d'ensembles indénombrables A et B de classes multiplicatives $\alpha + 1 > 2$ et $\beta + 1 > 2$ respectivement, il existe une homéomorphie de classe α, β .*

Soient, conformément au cor. 3, D et E deux ensembles dénombrables infinis et f_1 et f_2 deux homéomorphismes respectivement de classes $0, \alpha$ et $0, \beta$ et telles que $f_1(\mathcal{N}) = A - D$ et $f_2(\mathcal{N}) = B - E$. Posons $f(x) = f_2 f_1^{-1}(x)$ pour $x \in A - D$ et définissons $f(x)$ pour $x \in D$ de manière que l'ensemble D se trouve transformé en E de façon biunivoque.

La fonction f , ainsi définie, est de classe α sur $A - D$ (§ 27, III, 2) et de classe 1 (§ 27, X, rem. 9), donc de classe α , sur D . Les ensembles D et $A - D$ étant des ensembles $G_{\delta\sigma}$ par rapport à A , donc de classe α additive, la fonction f est de classe α sur l'ensemble A tout entier (d'après § 27, IV, 1).

Par raison de symétrie, f^{-1} est de classe β sur B .

Remarques. 1°. On voit ainsi que dans le domaine des sous-ensembles boreliens des espaces complets séparables, l'équivalence au sens de la Théorie des ensembles (identité de la puissance) se laisse réaliser toujours à l'aide d'une homéomorphie généralisée.

2°. Dans le même ordre d'idées, on montre¹⁾ que:

Entre tout couple d'espaces complets séparables²⁾ de même puissance, il existe une homéomorphie de classe 1,1.

III. Développement des ensembles ambigus en séries alternées. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble A soit ambigu de classe $\alpha + 1$ est qu'il soit développable en série alternée dénombrable (transfinie) d'ensembles décroissants de classe α multiplicative:

$$(1) \quad A = B_1 - B_2 + B_3 - B_4 + \dots + B_\omega - B_{\omega+1} + \dots$$

¹⁾ Voir ma note de Fund. Math. 22, p. 212.

²⁾ donc entre tout couple d'ensembles G_δ . En ce qui concerne les ensembles $F_{\delta\delta}$, cf. la remarque du § 32, III.

La condition est suffisante d'après § 26, VI, 3. Pour prouver qu'elle est nécessaire, considérons, conformément au théor. 1 du N° II, un espace complet séparable $\mathcal{T}$ et une homéomorphie f de classe $0, \alpha$ qui transforme $\mathcal{T}$ en l'espace $\mathcal{X}$ (qui contient A) de façon que l'ensemble $f^{-1}(A)$ soit un F_σ et G_δ . En vertu du théorème du § 30, VI, l'ensemble $f^{-1}(A)$ est de la forme

$$f^{-1}(A) = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + F_\omega - F_{\omega+1} + \dots,$$

où les ensembles F_ξ sont fermés et décroissants.

La fonction f étant biunivoque, il vient:

$$A = f f^{-1}(A) = f(F_1) - f(F_2) + \dots + f(F_\omega) - f(F_{\omega+1}) + \dots$$

et les ensembles décroissants $B_\xi = f(F_\xi)$ sont de classe α multiplicative, puisque la fonction f^{-1} est de classe α .

IV. Petites classes de Borel. Le théorème précédent conduit d'une façon naturelle à une classification des ensembles ambigus d'une classe α donnée (où α n'est pas un nombre limite). A savoir, la série (1) étant du type β , nous dirons que A appartient à la *petite classe* F_α^β . De façon analogue, si le complémentaire de A est développable en une série du type β , A est dit de *petite classe* G_α^β .

On voit ainsi que la classification des ensembles ambigus de classe α (pour α fixe) en „petites classes” est tout à fait analogue à celle des ensembles boreliens en classes F_α (ou G_α).

Ainsi, par exemple, les ensembles de petites classes $F_1^1, F_1^2, F_1^3, \dots$ et $G_1^1, G_1^2, G_1^3, \dots$ sont respectivement de la forme:

$$F, F_1 - F_2, F_1 - F_2 + F_3, \dots \\ \mathcal{X} - F, \mathcal{X} - F_1 + F_2, \mathcal{X} - F_1 + F_2 - F_3, \dots$$

Par une méthode analogue à celle qui nous a servi pour démontrer qu'à tout α correspond (dans l'espace des nombres irrationnels) un ensemble borelien qui est de classe α sans être de classe $< \alpha$ (§ 26, XIV), on établit l'existence des ensembles qui appartiennent à une petite classe donnée sans appartenir aux petites classes à indices inférieurs¹⁾.

¹⁾ M. Lavrentieff, *Sur les sous-classes de la classification de M. Baire*, C. R. Paris 1925. Cf. aussi N. Lusin, op. cit. p. 123, et W. Sierpiński, *Sur l'existence de diverses classes d'ensembles*, Fund. Math. 14 (1929), p. 82.

Remarque. La définition des classes G_α^β s'exprime d'une façon plus naturelle, lorsqu'on emploie la *division* des ensembles, en posant par définition $X:Y = X + Y'$ (où $Y' =$ complémentaire de Y). G_α^β est alors la classe des ensembles qui se laissent développer en un „produit alterné” du type β d'ensembles croissants de classe α additive:

$$A = (G_1:G_2) \cdot (G_3:G_4) \cdot \dots \cdot (G_\omega:G_{\omega+1}) \cdot \dots \text{ où } G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_\omega \subset \dots$$

En effet, la formule

$$A' = B_1 - B_2 + \dots + B_\omega - B_{\omega+1} + \dots$$

entraîne

$$A = (B_1 - B_2)' \cdot \dots \cdot (B_\omega - B_{\omega+1})' \cdot \dots = (B_1':B_2') \cdot \dots \cdot (B_\omega':B_{\omega+1}') \cdot \dots$$

§ 34. Ensembles projectifs.

L'espace est supposé complet séparable.

I. Définitions. On appelle *ensembles projectifs de classe 0* les ensembles boreliens. Les *ensembles projectifs de classe $2n+1$* sont les images continues des ensembles projectifs de classe $2n$ (situés dans le même espace); les *ensembles projectifs de classe $2n$* sont les complémentaires des ensembles projectifs de classe $2n-1$ ¹⁾.

En particulier, les ensembles projectifs de classe 1, c. à d. les images continues des ensembles boreliens, sont appelés *analytiques* ou *ensembles A^2* , leur complémentaires, c. à d. les ensembles projectifs de classe 2, sont nommés *complémentaires analytiques* ou *ensembles CA^3* .

¹⁾ Avec les opérations dénombrables $\sum_{n=1}^{\infty}$ et $\prod_{n=1}^{\infty}$, il n'y aurait aucune difficulté de prolonger cette classification au transfini ($< \Omega$), en imitant la classification des ensembles boreliens.

²⁾ ou „ensembles de Souslin“ (F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 177).

³⁾ La notion d'ensemble analytique a été introduite par MM. Souslin et Lusin; voir *Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis*, C. R. Paris **164** (1917), p. 88 et suiv. La théorie des ensembles analytiques a été développée surtout par MM. Lusin et Sierpiński. La notion d'ensemble projectif est due à M. Lusin; voir *Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue*, C. R. Paris **180** (1925), p. 1570. Cf. L. Kantorovitch et E. Livenson, *Memoir on the analytical operations and projective sets*, Fund. Math. **18** (1932), p. 214 et **20** (1933), p. 54.

II. Relations entre les classes projectives. Désignons, de façon générale, par CX la famille des complémentaires des ensembles appartenant à une famille donnée X et par PX la famille des images continues des ensembles appartenant à X . On a les formules évidentes:

$$1. CCX = X. \quad 2. X \subset PX = PPX.$$

$$3. X \subset Y \text{ entraîne } CX \subset CY \text{ et } PX \subset PY.$$

En outre, L_n désignant la n -ième classe projective, on a:

$$4. L_{2n+1} = PL_{2n}, \quad PL_{2n+1} = L_{2n+1}.$$

$$5. L_{2n} = CL_{2n-1}, \quad CL_{2n} = L_{2n-1}.$$

$$6. CL_0 = L_0 \text{ et } PL_0 = L_1 = A.$$

Nous allons démontrer que

$$7. L_{2n} \subset L_{2n+k} \text{ et } L_{2n+1} \subset L_{2n+2+k} \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } k=1,2,\dots$$

Il suffit évidemment de prouver que:

$$(i) L_{2n} \subset L_{2n+1}, \quad (ii) L_n \subset L_{n+2}, \quad (iii) L_{2n+1} \subset L_{2n+4}.$$

L'inclusion (i) est une conséquence directe de 2 et 4.

L'inclusion (ii) est satisfaite pour $n=0$ en vertu de 3 et 6. Pour $n>0$ on a soit $L_n = PCL_{n-2}$, soit $L_n = CPL_{n-2}$ (en posant $L_{-1} = L_0$). Si l'on admet (en raisonnant par induction) l'inclusion $L_{n-2} \subset L_n$, il vient selon 3: $PCL_{n-2} \subset PCL_n$ et $CPL_{n-2} \subset CPL_n$, d'où l'inclusion (ii).

Enfin, l'inclusion (i) donne $CL_{2n+1} = L_{2n+2} \subset L_{2n+3}$, d'où selon 3 et 1: $L_{2n+1} = CCL_{2n+1} \subset CL_{2n+3} = L_{2n+4}$.

III. Propriétés des ensembles projectifs.

1. P_k étant un ensemble projectif de classe n situé dans un espace complet séparable $\mathcal{X}_k$, où $k=1,2,\dots$, le produit cartésien (fini ou infini) $P_1 \times P_2 \times \dots$ est un ensemble projectif de classe n dans l'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$

2. P et Q étant deux ensembles projectifs de classe n , situés respectivement dans les espaces complets séparables $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, et $y = f(x)$ étant une fonction continue définie sur P , l'ensemble $f^{-1}(Q)$ est de classe n .

En outre, si n est impair, $f(P)$ est de classe n ; si n est pair, $f(P)$ est de classe $n+1$.

3¹⁾. La propriété d'être un ensemble projectif de classe n est additive et multiplicative au sens dénombrable; autrement dit, si les ensembles $P_1, P_2, \dots$ sont des ensembles projectifs de classe n , les ensembles $P_1 + P_2 + \dots$ et $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots$ le sont également.

Nous établirons ces propriétés par l'induction finie.

Pour $n=0$ (cas des ensembles boreliens), les propriétés 1, 3 et la première partie de 2 sont satisfaites (§ 26, III). La deuxième partie de 2 l'est également. Car $\mathcal{Y}$ étant supposé indénombrable (ce qui est légitime, puisque autrement $f(P)$ serait dénombrable, donc de classe 1), il existe un sous-ensemble borelien N de $\mathcal{Y}$ dont P est une image continue: $P=g(N)$ (cf. § 32, V, cor. 2 et § 33, I, th. 1). L'ensemble $f(P)=fg(N)$ est donc de classe 1.

Admettons que $n>0$ et que les trois propriétés soient réalisées pour $n-1$ (nous les désignerons par 1_{n-1} , 2_{n-1} , 3_{n-1}).

a) Cas de n impair. Posons $P_k=p_k(R_k)$, l'ensemble R_k étant un sous-ensemble de $\mathcal{X}_k$ de classe $n-1$ et p_k étant une fonction continue définie sur R_k .

ad 1). En faisant correspondre au point $(x_1, x_2, \dots)$ de l'ensemble $R_1 \times R_2 \times \dots$ le point $[p_1(x_1), p_2(x_2), \dots]$ de l'ensemble $P_1 \times P_2 \times \dots$, le premier ensemble se trouve transformé de façon continue en le deuxième (voir § 24a, VI, 1). Le premier étant de classe $n-1$ (paire) en vertu de 1_{n-1} , le deuxième est donc de classe n .

ad 2). Soit, comme auparavant, $P=p(R)$ où $R \subset \mathcal{X}$. Soit en outre, $Q=q(T)$, l'ensemble T étant un sous-ensemble de $\mathcal{Y}$ de classe $n-1$ et q étant une fonction continue définie sur T .

On a les équivalences évidentes (où $x \in \mathcal{X}$, $x^* \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$):

$$\begin{aligned} \{x \in f^{-1}(Q)\} &= \{f(x) \in Q\} = \sum_{x^*} \{[x=p(x^*)] \cdot [fp(x^*) \in Q]\} = \\ &= \sum_{x^*y} \{[x=p(x^*)] \cdot [fp(x^*)=q(y)]\}, \end{aligned}$$

d'où

$$f^{-1}(Q) = E_x \sum_{x^*y} \{[x=p(x^*)] \cdot [fp(x^*)=q(y)]\}.$$

¹⁾ Cf. W. Sierpiński, *Sur les familles inductives et projectives d'ensembles*, Fund. Math. 13 (1929), pp. 228—239.

L'ensemble $f^{-1}(Q)$ est par conséquent une projection (§ 2, V, 3), donc une image continue, de l'ensemble M des points $\{x, x^*, y\}$ qui satisfont à la condition entre crochets $\{ \}$. Les fonctions p, fp et q étant continues, et les deux premières ayant R et la troisième T pour l'ensemble des arguments, l'ensemble M est fermé dans le produit $\mathcal{X} \times R \times T$. Celui-ci étant selon 1_{n-1} de classe $n-1$, M est la partie commune d'un ensemble fermé (donc de classe $n-1$) et d'un ensemble de classe $n-1$. Selon 3_{n-1} , M est par conséquent de classe $n-1$ dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ et $f^{-1}(Q)$, en tant qu'image continue de M , est de classe n d'après la dernière partie de 2_{n-1} .

En outre, l'identité $f(P)=fp(R)$ implique selon 2_{n-1} que l'ensemble $f(P)$ est de classe n dans $\mathcal{Y}$, comme image continue de R .

ad 3). Soit, à présent, $P_k=p_k(R_k)$ et $R_k \subset \mathcal{X}$. On a

$$\begin{aligned} \{x \in \sum_{k=1}^{\infty} P_k\} &= \{x \in \sum_{k=1}^{\infty} p_k(R_k)\} = \sum_k \{x \in p_k(R_k)\} = \sum_k \sum_{x^*} \{x = p_k(x^*)\} = \\ &= \sum_{x^*} \sum_k \{x = p_k(x^*)\}. \text{ Donc } \sum_{k=1}^{\infty} P_k = E_x \sum_{x^*} \sum_k \{x = p_k(x^*)\}. \end{aligned}$$

Cela prouve que $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ est la projection de

$$M = E_{xx^*} \sum_k \{x = p_k(x^*)\} = \sum_{k=1}^{\infty} E_{xx^*} \{x = p_k(x^*)\}.$$

Or, la fonction p_k , définie sur R_k , étant continue, l'ensemble $M_k = E_{xx^*} \{x = p_k(x^*)\}$ est fermé dans le produit $\mathcal{X} \times R_k$, qui est de classe $n-1$ selon 1_{n-1} ; donc, comme partie commune d'un ensemble fermé et d'un ensemble de classe $n-1$, l'ensemble M_k est de classe $n-1$ en raison de 3_{n-1} ; en vertu de la même proposition, l'ensemble $M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k$ est de classe $n-1$ et, d'après 2_{n-1} , $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ est de classe n en tant qu'image continue (projection) de M .

D'autre part, la condition $x \in \prod_{k=1}^{\infty} P_k$ veut dire qu'il existe une suite de points $x_1, x_2, \dots$ telle que $x = p_k(x_k)$. En désignant, comme d'habitude, par $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots]$ une variable qui parcourt $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$, on a

$$\{x \in \prod_{k=1}^{\infty} P_k\} = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_k \{x = p_k(\mathfrak{z}^k)\}.$$

$\prod_{k=1}^{\infty} P_k$ est par conséquent la projection de l'ensemble

$$E_{x\mathfrak{z}} \prod_k \{x = p_k(\mathfrak{z}^k)\} = \prod_{k=1}^{\infty} E_{x\mathfrak{z}^k} \{x = p_k(\mathfrak{z}^k)\}.$$

Il suffit donc (en raison de 3_{n-1}) de démontrer que l'ensemble $\bigcup_{k \geq 3} \{x = p_k(z^k)\}$ est de classe $n-1$ (dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$). Or, cela résulte, comme auparavant, du fait que la fonction $p_k(z^k)$, considérée comme fonction de z , est continue (puisque z^k est une fonction continue de z pour k fixe; cf. § 24a, I) et définie sur l'ensemble

$$\bigcup_{k \geq 3} \{z^k \in R_k\} = \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X} \times R_k \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \dots,$$

qui est de classe $n-1$ d'après 1_{n-1} .

b) *Cas de $n > 0$ pair.* L'ensemble P étant de classe n , l'ensemble P' (le complémentaire de P) est de classe $n-1$ impaire.

La proposition 3 résulte directement de 3_{n-1} et des formules de de Morgan:

$$(\sum_k P_k)' = \prod_k P_k' \quad \text{et} \quad (\prod_k P_k)' = \sum_k P_k'.$$

En vertu de l'identité (cf. § 2, II, 3): $P \times \mathcal{Y} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y} - (P' \times \mathcal{Y})$ et de 1_{n-1} , l'ensemble $P \times \mathcal{Y}$ est de classe n , et il en est encore de même de l'ensemble $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_{k-1} \times P_k \times \mathcal{X}_{k+1} \times \dots$. On en déduit la proposition 1_n , en tenant compte de 3_n et de l'identité (cf. § 2, II, 6a):

$$P_1 \times P_2 \times \dots = (P_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \dots) \cdot (\mathcal{X}_1 \times P_2 \times \mathcal{X}_3 \times \dots) \cdot \dots$$

Enfin, passons à la proposition 2. D'après le théorème sur le prolongement des fonctions continues (§ 31, I, 1), il existe un ensemble P^* qui est un G_δ contenant P et une fonction continue f_1 définie sur P^* et identique à f aux points de P ; ceci peut être exprimé par l'égalité $f = f_1|_P$. Il vient (cf. § 3, II, 14):

$$f^{-1}(Q) = P \cdot f_1^{-1}(Q) \quad \text{et} \quad f_1^{-1}(Q) = f_1^{-1}(\mathcal{Y} - Q') = P^* - f_1^{-1}(Q').$$

D'après 2_{n-1} , $f_1^{-1}(Q')$ est de classe $n-1$; selon 3_n , l'ensemble $f_1^{-1}(Q) = P^* \cdot [\mathcal{X} - f_1^{-1}(Q')]$ est donc de classe n . En multipliant cet ensemble par P et en appliquant 3_n , on en conclut que $f^{-1}(Q)$ est un ensemble projectif de classe n .

En outre, N désignant (comme dans le cas de $n=0$) un sous-ensemble borelien de $\mathcal{Y}$ dont $\mathcal{X}$ est une image continue: $\mathcal{X} = g(N)$, l'ensemble $g^{-1}(P)$ est de classe n dans $\mathcal{Y}$ et par conséquent l'ensemble $f(P) = fg[g^{-1}(P)]$ y est de classe $n+1$.

Les propositions 1—3 se trouvent établies complètement.

4. *f étant une fonction mesurable B définie sur un ensemble P de classe n , l'ensemble $I = \bigcup_{xy} \{y = f(x)\}$ est de classe n .*

En effet, I est borelien relativement au produit cartésien $P \times \mathcal{Y}$ (§ 27, VII, 1). Comme partie commune d'un ensemble borelien et de l'ensemble $P \times \mathcal{Y}$, qui est de classe n (selon 1), I est donc de classe n (d'après 3).

5. *La proposition 2 reste vraie, lorsqu'on admet que f est une fonction mesurable B arbitraire.*

En effet, il existe d'après § 31, VI, une fonction f_1 mesurable B , définie sur l'espace $\mathcal{X}$ tout entier et telle que $f = f_1|_P$. Il vient (§ 3, II, 14): $f^{-1}(Q) = P \cdot f_1^{-1}(Q)$. Il suffit donc de démontrer que $f_1^{-1}(Q)$ est de classe n . Or, il en est ainsi, si n est impair, car en posant $J = \bigcup_{xy} \{y = f_1(x)\}$, l'ensemble $f_1^{-1}(Q)$ est la projection de $J \cdot (\mathcal{X} \times Q)$ sur l'axe $\mathcal{X}$. Si n est pair, il en est de même en vertu de l'identité $f_1^{-1}(\mathcal{Y} - Q) = \mathcal{X} - f_1^{-1}(Q)$.

En outre, $f(P)$ est la projection de l'ensemble $\bigcup_{xy} \{y = f(x)\}$ sur l'axe $\mathcal{Y}$.

Remarque. On voit ainsi qu'on n'altère pas la notion de classe projective, en admettant dans sa définition qu'un ensemble P situé dans l'espace $\mathcal{X}$ est de classe $2n+1$ lorsqu'il existe (dans $\mathcal{X}$ ou dans un autre espace complet séparable) un ensemble R de classe $2n$ et une fonction f définie sur R , mesurable B et telle que $P = f(R)$.

Concernant la relativisation des ensembles projectifs, on a l'énoncé suivant:

6. *Soit E un G_δ situé dans l'espace $\mathcal{X}$. Pour qu'un ensemble $A \subset E$ soit projectif de classe n relativement à E , il faut et il suffit qu'il soit de classe n (relativement à $\mathcal{X}$).*

Procédons par induction. Pour $n=0$ le théorème est évident: pour que A soit borelien relativement à E (qui est borelien), il faut et il suffit que A soit borelien.

Admettons que $n > 0$ et que le théorème soit vrai pour $n-1$.

Soit n impair. En supposant que A est de classe n relativement à E , A est une image continue d'un sous-ensemble de E de classe $n-1$. D'après 2, A est donc de classe n rel. à $\mathcal{X}$. De façon analogue, l'hypothèse que A est de classe n implique que A est de classe n rel. à E .

Soit n pair. A étant supposé de classe n rel. à E , on a $A = E - B$ où B est de classe $n-1$ rel. à E , donc rel. à $\mathcal{X}$. L'ensemble $\mathcal{X} - B$ étant de classe n , on conclut de 3 que l'ensemble $A = E \cdot (\mathcal{X} - B)$ l'est également.

Réciproquement, en supposant que A est de classe n , on a $A = \mathcal{X} - B$ où B est de classe $n-1$. Donc EB l'est également et par conséquent EB est de classe $n-1$ rel. à E . Comme $A \subset E$, il vient $A = E - B = E - EB$, ce qui prouve que A est de classe n rel. à E .

IV. Projections. Les ensembles projectifs de classe n impaire situés dans l'espace $\mathcal{X}$ coïncident avec les projections des ensembles de classe $n-1$ situés dans le produit $\mathcal{X} \times \mathcal{X}^1$.

En effet, d'une part, les projections des ensembles de classe $n-1$ sont de classe n (d'après 2). D'autre part, tout ensemble P de classe n est une image continue d'un ensemble R de classe $n-1$: $f(R) = P$ où $R \subset \mathcal{X}$. P est donc une projection de l'ensemble $\bigcup_{x \in R} \{x^* = f(x)\}$, qui est, d'après 4, de classe $n-1$ (dans $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$).

La proposition qui vient d'être démontrée reste vraie lorsqu'on remplace l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ par $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$.

En effet, d'après le th. 1 du § 32, II, l'espace $\mathcal{X}$ est une image continue de $\mathcal{N}$; c. à d. $\mathcal{X} = f(\mathcal{N})$. P étant de classe n (paire ou impaire), l'ensemble $P_1 = f^{-1}(P)$ l'est également (selon III, 2). Par conséquent, P est une image continue d'un ensemble de classe n situé dans $\mathcal{N}$, et celui-ci est — pour n impair — une image continue d'un sous-ensemble de $\mathcal{N}$ de classe $n-1$. Par conséquent P est la projection sur l'axe $\mathcal{X}$ d'un ensemble de classe $n-1$ situé dans le produit $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$.

En particulier, les ensembles analytiques coïncident avec les projections (sur l'axe $\mathcal{X}$) des ensembles fermés situés dans $\mathcal{X} \times \mathcal{N}^2$.

En effet, d'après le th. 1 du § 33, I, tout ensemble borelien est image continue de $\mathcal{N}$; il en est donc de même de tout ensemble analytique. Par conséquent, A étant un ensemble analytique, il existe une fonction continue f définie sur $\mathcal{N}$ et telle que A

¹⁾ Cette proposition justifie l'emploi du terme „ensemble projectif“.

²⁾ Cf. la note de M. Szpilrajn-Marczewski et de moi-même *Sur les oribles fermés et leurs applications*, Fund. Math. 18 (1931), p. 160.

est la projection sur l'axe $\mathcal{X}$ de l'ensemble fermé $\bigcup_{x \in \mathcal{N}} \{x = f(x)\}$ situé dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ (la variable x parcourant l'ensemble $\mathcal{N}$).

Réciproquement, la projection d'un ensemble fermé est un ensemble analytique (d'après N° III, 2).

V. Fonctions universelles. Conformément à la définition du § 26, XIII, une fonction $L_n(x)$ qui fait correspondre à tout nombre irrationnel x un ensemble projectif de classe n (situé dans un espace $\mathcal{X}$) est dite universelle relativement à la classe $\mathcal{L}_n$, lorsque L_n coïncide avec la famille des valeurs de la fonction $L_n(x)$. Nous allons prouver que:

A tout $n > 0$ correspond une fonction universelle $L_n(x)$ telle que l'ensemble $\bigcup_{x \in \mathcal{L}_n} \{x \in L_n(x)\}$ est de classe n ¹⁾.

Soit, conformément à l'énoncé final du N° XIII du § 26, $F(x)$ une fonction universelle relativement à la famille des sous-ensembles fermés de l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ et telle que l'ensemble $\bigcup_{x \in \mathcal{N}} \{(x, x^*) \in F(x)\}$ soit fermé dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ (x et x^* parcourant $\mathcal{N}$).

Tout sous-ensemble analytique de $\mathcal{X}$ étant une projection d'un ensemble fermé situé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$, on obtient une fonction $L_1(x)$ universelle relativement à $\mathcal{L}_1 (= \mathcal{A})$ lorsqu'on fait correspondre à x la projection de $F(x)$ sur $\mathcal{X}$. En symbole:

$$\{x \in L_1(x)\} = \sum_{x^*} \{(x, x^*) \in F(x)\}.$$

L'ensemble

$$\bigcup_{x \in \mathcal{L}_1} \{x \in L_1(x)\} = \bigcup_{x \in \mathcal{L}_1} \sum_{x^*} \{(x, x^*) \in F(x)\}$$

est analytique, comme projection de l'ensemble fermé $\bigcup_{x \in \mathcal{L}_1} \{(x, x^*) \in F(x)\}$.

Procédons par induction. Posons pour n pair $L_n(x) = \mathcal{X} - L_{n-1}(x)$. La fonction $L_n(x)$ est universelle relativement à $\mathcal{L}_n$ et l'ensemble

$$\bigcup_{x \in \mathcal{L}_n} \{x \in L_n(x)\} = \bigcup_{x \in \mathcal{L}_n} \{x \text{ non-} \in L_{n-1}(x)\} = \mathcal{X} \times \mathcal{N} - \bigcup_{x \in \mathcal{L}_{n-1}} \{x \in L_{n-1}(x)\}$$

est de classe n .

¹⁾ Cf. N. Lusin, *Ensembles analytiques*, p. 290.

Pour $n > 1$ impair, désignons par $L_{n-1}^*(\mathfrak{z})$ une fonction universelle relativement à la famille des ensembles de classe $n-1$ situés dans $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ et telle que l'ensemble $\bigcup_{x \in \mathfrak{z}} \{(x, \mathfrak{z}^*) \in L_{n-1}^*(\mathfrak{z})\}$ soit de classe $n-1$ (dans $\mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$). En raisonnant comme pour $n=1$, on prouve que la fonction $L_n(\mathfrak{z})$, définie par l'équivalence

$$\{x \in L_n(\mathfrak{z})\} = \sum_{\mathfrak{z}^*} \{(x, \mathfrak{z}^*) \in L_{n-1}^*(\mathfrak{z})\},$$

est bien la fonction demandée.

VI. Théorème d'existence¹⁾. *L'espace $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels de l'intervalle 01 contient, pour tout $n > 0$, un ensemble projectif de classe n et qui n'est pas de classe $< n$.*

$\mathcal{N}$ contient aussi des ensembles non projectifs.

Considérons la fonction universelle $L_n(\mathfrak{z})$ du $N^0 V$ (en y posant $\mathcal{X} = \mathcal{N}$). L'indice $n \geq 1$ étant impair, soient

$$E_n = \bigcup_{\mathfrak{z}} \{x \in L_n(\mathfrak{z})\} \text{ et } E_{n+1} = \mathcal{N} - E_n = \bigcup_{\mathfrak{z}} \{x \text{ non-} \in L_n(\mathfrak{z})\}.$$

Comme projection de l'ensemble $\bigcup_{x \in \mathfrak{z}} \{x \in L_n(\mathfrak{z})\} \cdot \bigcup_{x \in \mathfrak{z}} \{x = \mathfrak{z}\}$, qui est de classe n , E_n est aussi de classe n . Donc E_{n+1} est de classe $n+1$.

D'autre part, d'après le théorème de la diagonale (§ 26, XIV), E_{n+1} n'est pas de classe n ni — à plus forte raison — de classe $< n$ (puisque n est impair). Il en résulte que E_n n'est pas de classe $< n$, car, dans le cas contraire, E_{n+1} serait de classe $< n+1$.

Imaginons à présent chacun des ensembles E_n placé dans l'intervalle $(n-1, n)$. L'ensemble $E_\infty = E_1 + E_2 + \dots$ est non projectif.

Remarques. 1^o. Le procédé employé dans les $NN^0 V$ et VI permet de définir *effectivement* (cf. § 18, VIII) les ensembles E_n et E_∞ .

L'existence des ensembles non projectifs peut d'ailleurs être établie (non effectivement) d'une façon plus simple. En effet, la famille des ensembles boreliens étant de puissance du continu et la famille de toutes les images continues d'un ensemble étant également de cette puissance (§ 19, VI), on voit aussitôt que, quel que soit n , la classe L_n est de puissance c . Il en est donc de même

¹⁾ Ibidem.

de la somme $L_1 + L_2 + \dots$. La famille de tous les sous-ensembles d'un espace complet séparable et indénombrable ayant la puissance $2^c > c$, l'existence des ensembles non-projectifs en résulte directement.

2^o On peut démontrer¹⁾ qu'il existe dans l'espace $\mathcal{I}^{\mathcal{I}}$ (des fonctions continues) un ensemble *linéaire* de classe $2n$ qui n'est pas de classe inférieure (un ensemble est dit linéaire, s'il contient, avec f et g , toute fonction de la forme $\lambda f(x) + \mu g(x)$).

3^o Dans le cas de l'espace des nombres réels, le problème de la *mesurabilité lebesguienne* de l'ensemble E_3 s'impose. Notons que cet ensemble est nommé explicitement²⁾.

VII. Invariance. *P étant un ensemble projectif de classe n , tout ensemble homéomorphe à P (situé dans le même espace ou dans un autre espace complet séparable) l'est également.*

Le théorème est évident dans le cas où n est impair, car toute image continue de P est alors de classe n . Dans le cas où $n=0$ (cas des ensembles boreliens), le théorème est vrai d'après le cor. 1 du § 31, IV. Si $n > 0$ est pair, la propriété L_{n-1} satisfait aux hypothèses du théorème du § 31, IV; c. à d. qu'elle est un invariant de l'homéomorphie et qu'en outre: 1) tout G_δ relatif à un ensemble de classe $n-1$ est de classe $n-1$, 2) la somme d'un ensemble de classe $n-1$ et d'un F_σ est de classe $n-1$. On en conclut que la propriété d'être le complémentaire d'un ensemble de classe $n-1$, c. à d. d'être de classe n , est un invariant intrinsèque³⁾.

VIII. Fonctions propositionnelles projectives⁴⁾. Une fonction propositionnelle $\varphi(x)$ est dite *fonction de classe L_n* lorsque l'ensemble $\bigcup_x \varphi(x)$ est de classe L_n . Nous établirons les règles suivantes du „calcul projectif”:

1. Si $\varphi(x)$ est de classe L_n , sa négation $\varphi'(x)$ est de classe CL_n .

Car $\bigcup_x \varphi'(x) = [\bigcup_x \varphi(x)]'$.

¹⁾ Voir la note de S. Banach et de moi-même *Sur la structure des ensembles linéaires*, Studia Math. 4 (1933), p. 95.

²⁾ Voir à ce sujet ma note *Sur le problème de la mesurabilité des ensembles définissables*, Congr. Int. Math. Zürich 1932, vol. II, p. 117. Cf. aussi § 35, I, 2^o.

³⁾ Pour l'invariance de la classe CA , voir P. Alexandroff, *Sur les ensembles complémentaires aux ensembles (A)*, Fund. Math. 5 (1924), pp. 160—165.

⁴⁾ Cf. §§ 1, 2, et 26, XI. Voir les notes sur ce sujet de M. Tarski et de moi-même dans Fund. Math. 17 (1931), pp. 241—272.

2. Si $\varphi(x)$ est de classe L_n dans l'espace $\mathcal{X}$, $\varphi(x)$ est de classe L_n dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Car (N° III, 1): $E_{xy} \varphi(x) = [E_x \varphi(x)] \times \mathcal{Y}$.

3. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ étant une suite finie ou infinie de fonctions de classe L_n (n fixe)¹⁾, les fonctions $\sum_k \varphi_k(x)$ et $\prod_k \varphi_k(x)$ sont aussi de classe L_n .

C'est une conséquence directe de l'énoncé N° III, 3.

4. $\varphi(x, y)$ étant de classe L_n (dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$), la fonction propositionnelle $\sum_y \varphi(x, y)$ est de classe PL_n et $\prod_y \varphi(x, y)$ est de classe $CPCL_n$ (dans $\mathcal{X}$).

Car l'ensemble $E_{xy} \varphi(x, y)$ est la projection (cf. p. 15, V, 3) de l'ensemble $E_{xy} \varphi(x, y)$; il est donc de classe PL_n (N° IV). En outre: $\prod_y \varphi(x, y) = [\sum_y \varphi'(x, y)]'$.

5. $\varphi(x, y)$ étant de classe L_n , il en est de même de la fonction $\varphi(x) = \varphi(x, y_0)$ pour y_0 fixe, ainsi que de la fonction $\chi(x) = \varphi(x, x)$.

En effet, les fonctions $\varphi(x, y)$ ($y = y_0$) et $\varphi(x, y)$ ($x = y$) étant de classe L_n , l'ensemble $E_{xy} \varphi(x, y)$ ($y = y_0$) est de classe L_n relativement à $E_{xy} (y = y_0)$ et l'ensemble $E_{xy} \varphi(x, y)$ ($x = y$) est de classe L_n relativement à la diagonale $E_{xy} (x = y)$ (cf. III, 6). Par conséquent (§ 24, III et XII), les ensembles $E_x \varphi(x, y_0)$ et $E_x \varphi(x, x)$ sont de classe L_n (dans $\mathcal{X}$); d'où la conclusion demandée.

Les règles précédentes montrent que les opérations logiques: ', +, ·, $\sum_x$, $\prod_x$, effectuées sur des fonctions propositionnelles projectives, conduisent toujours à des fonctions propositionnelles projectives. Rapprochées des règles du § 26, XI, elles permettent, en même temps, d'évaluer la classe borelienne ou projective d'une fonction propositionnelle, donc de l'ensemble qu'elle définit.

Ces règles mettent bien en évidence qu'en se servant de la notation logique, on est conduit d'une façon très naturelle à la notion d'ensemble projectif.

¹⁾ On pourrait se débarrasser de cette hypothèse, en prolongeant les classes L_n au-delà des indices finis (cf. N° I, renvoi).

Remarques. Etant donnée une fonction propositionnelle de deux variables $\varphi(x, y)$, on peut se servir pour évaluer la classe de $\sum_y \varphi(x, y)$, tantôt de la règle 4, d'après laquelle l'ensemble $E_x \sum_y \varphi(x, y)$ est la projection de $E_{xy} \varphi(x, y)$, tantôt de la règle 1 du § 2, V, d'après laquelle $E_x \sum_y \varphi(x, y)$ est la somme $\sum_y E_x \varphi(x, y)$. La deuxième règle — où y est considéré comme *indice* — est plus avantageuse dans le cas où y parcourt un ensemble dénombrable, ainsi que dans le cas particulier où l'ensemble $E_x \varphi(x, y)$ est ouvert (pour y fixe), puisque la somme d'une famille (de puissance *arbitraire*) d'ensembles ouverts est ouverte (cf. § 24, X).

Des remarques analogues concernent l'opérateur Π . C'est ainsi, par exemple, que dans § 30, VIII (2), h est considéré comme indice et non comme point d'un espace.

Application. Accessibilité rectilinéaire. Le point x est dit rectilinéairement accessible par rapport à M , en symbole $x \in M_a$, lorsqu'il existe dans l'espace $\mathcal{X}$ un segment rectiligne xy qui n'a avec M que le point x en commun (et qui ne se réduit pas à ce point). La condition pour que le point z appartienne au segment xy s'exprimant par l'égalité $|x-z| + |z-y| = |x-y|$, on en conclut que (les variables x, y, z parcourant l'espace $\mathcal{X}$):

$$\begin{aligned} \{x \in M_a\} &= \\ &= (x \in M) \cdot \sum_y \{ (y \neq x) \cdot \prod_z [(|x-z| + |z-y| = |x-y|) \cdot (z \neq x) \rightarrow (z \in M)] \} \\ &= (x \in M) \cdot \sum_y \{ (y \neq x) \cdot \prod_z [(|x-z| + |z-y| \neq |x-y|) + (z = x) + (z \in M)] \}. \end{aligned}$$

La fonction propositionnelle $\varphi(x) = \{x \in M_a\}$ s'obtient ainsi à l'aide des opérations logiques effectuées sur les fonctions:

$$\beta(x) = \{x \in M\}, \quad \gamma(x, y) = \{x = y\}, \quad \delta(x, y, z) = \{|x-z| + |z-y| = |x-y|\}.$$

La deuxième et troisième sont évidemment de classe F . Quant à la première, elle dépend des hypothèses faites sur l'ensemble M . Si M est un F_σ , on voit aussitôt, en appliquant les règles du § 26, XI, que la fonction entre crochets [] est de classe G_δ . Si l'espace est compact, l'opération $\prod_z$ effectuée sur cette fonction donne encore

une fonction de classe G_δ (d'après 5); en multipliant la dernière par la fonction $(y \neq x)$, qui est de classe G , on n'altère pas sa classe; puis, en appliquant l'opération Σ , on parvient à une fonction de classe A (règle 4); en la multipliant par la fonction $(x \in M)$, qui est de classe F_σ , on obtient finalement la fonction $\varphi(x)$, qui est donc de classe A .

Autrement dit: M étant un ensemble F_σ situé dans un espace compact, l'ensemble de ses points rectilinéairement accessibles est analytique ¹⁾.

De façon générale, M étant un ensemble de classe L_{2n+1} situé dans un espace complet, M_a est de classe L_{2n+3} .

Remarque. La classe de l'ensemble M_a ne peut être réduite. Il existe en effet (dans $\mathcal{E}^2$) un ensemble fermé M pour lequel M_a est non borelien ²⁾.

IX. Invariance des classes projectives par rapport à l'opération du crible et à l'opération $(\mathcal{A})$.

Rappelons (cf. § 1, VII) que l'on appelle *crible* toute fonction W_r qui fait correspondre un ensemble à chaque fraction binaire finie $r \in \mathcal{R}$ (c. à d. que $0 < r < 1$). L'ensemble A des x tels qu'il existe une suite infinie $r_1 < r_2 < \dots$ satisfaisant à la condition $x \in W_{r_1} \cdot W_{r_2} \cdot \dots$, est dit *criblé* par le crible considéré.

En symboles logiques: en désignant par $\mathfrak{z}$ une variable parcourant l'espace $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, on a

$$(1) \quad \begin{aligned} x \in A &= \sum_{\mathfrak{z}} \prod_k (\mathfrak{z}^k < \mathfrak{z}^{k+1}) (x \in W_{\mathfrak{z}^k}) \\ &= \sum_{\mathfrak{z}} \prod_k [(\mathfrak{z}^k < \mathfrak{z}^{k+1}) \sum_r (r = \mathfrak{z}^k) (x \in W_r)]. \end{aligned}$$

Dans la suite, nous allons supposer que les W_r sont des sous-ensembles d'un espace complet séparable $\mathcal{X}$.

Le résultat principal concernant les cribles est que la classe projective L_n est un invariant de l'opération du crible pour $0 \neq n \neq 2$ (théorèmes 1 et 5).

¹⁾ Théorème de Nikodym-Urysohn.

²⁾ Voir: O. Nikodym, Fund. Math. 7 (1925), p. 250 et 11 (1928), ainsi que Ann. Soc. Pol. Math. 7 (1929), p. 79, P. Urysohn, Proc. Acad. Amsterdam 28 (1925), p. 984 et N. Lusin, Fund. Math. 12 (1928), p. 158.

1. *Théorème.* Si tous les ensembles formant le crible $\{W_r\}$ sont de classe n impaire, l'ensemble A criblé par ce crible est aussi de classe n .

C'est une conséquence facile de la formule (1). En effet, la sommation $\sum_r$ étant dénombrable, la fonction propositionnelle entre crochets [], des variables x et $\mathfrak{z}$, est de classe L_n . L'ensemble A est donc de classe $PL_n = L_n$.

Nous allons appliquer ce théorème à un cas particulier important, à savoir, où C_r est le crible défini au § 1, VIII. L'ensemble criblé par ce crible est alors le complémentaire de l'ensemble $L = \bigcap_i (i < \Omega)$ (pour les notations, voir § 1, VIII). Les ensembles C_r étant analytiques (même: fermés-ouverts), on parvient à l'énoncé suivant:

2. *Corollaire* ¹⁾. L'ensemble $L = \bigcap_i (i < \Omega)$ est de classe CA .

De façon plus directe:

$$(2) \quad [x \in (C - L)] \equiv \sum_{\mathfrak{z}} \prod_k [(\mathfrak{z}^k < \mathfrak{z}^{k+1}) \sum_i (r_i = \mathfrak{z}^k) (i^l = 2)].$$

Envisageons, à présent, deux cribles $\{W_r\}$ et $\{Z_r\}$ situés dans les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement et posons

$$(3) \quad M_x = \bigcap_r (x \in W_r) \quad \text{et} \quad N_y = \bigcap_r (y \in Z_r).$$

Nous allons établir l'énoncé suivant:

3. *Lemme* ²⁾. Si les ensembles W_r sont de classe $2n$ et les ensembles Z_r sont de classe $2n-1$, l'ensemble P composé des couples xy tels que M_x est semblable à un sous-ensemble de N_y est de classe $2n-1$ (dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$).

Remarquons au préalable que, M et N étant deux sous-ensembles de $\mathcal{R}$, la condition pour que M soit semblable à un sous-ensemble de N , équivaut à l'existence de deux suites de nombres réels (de l'intervalle $\mathcal{I}$) $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots]$ et $\mathfrak{y} = [\mathfrak{y}^1, \mathfrak{y}^2, \dots]$ telles que:

- 1° la suite $\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots$ contient tous les éléments de M ,
- 2° la suite $\mathfrak{y}^1, \mathfrak{y}^2, \dots$ est entièrement contenue dans N ,
- 3° l'inégalité $\mathfrak{z}^i > \mathfrak{z}^j$ entraîne $\mathfrak{y}^i > \mathfrak{y}^j$.

¹⁾ Voir N. Lusin et W. Sierpiński, Journ. de Math. 1923, p. 53.

²⁾ Cf. le „deuxième principe“ de N. Lusin, Ensembles analytiques, p. 210, ainsi que ma note Sur la géométrisation des types d'ordre dénombrable, Fund. Math. 28 (1937), p. 167 ss.

En symboles logiques:

$$\sum_{xy} \{ \prod_r [(r \in M) \rightarrow \sum_n (r = 3^n)] \cdot \prod_k (\eta^k \in N) \cdot \prod_{ij} [(3^i > 3^j) \rightarrow (\eta^i > \eta^j)] \}.$$

Substituons M_x à M et N_y à N et remarquons que (d'après les définitions de M_x et N_y) on a les équivalences:

$$(r \in M_x) = (x \in W_r) \text{ et } (\eta^k \in N_y) = (y \in Z_{\eta^k}) = \sum_r [(r = \eta^k) (y \in Z_r)].$$

En remplaçant $(\alpha \rightarrow \beta)$ par $(\alpha' + \beta)$, il vient en définitive:

$$[(xy) \in P] = \sum_{xy} \{ \prod_r [(x \in W_r) + \sum_n (r = 3^n)] \cdot \prod_k \sum_r [(r = \eta^k) (y \in Z_r)] \cdot \prod_{ij} [(3^i \leq 3^j) + (\eta^i > \eta^j)] \}.$$

Les ensembles W_r et Z_r étant de classe $2n-1$ et les opérations $\prod_r, \sum_n, \prod_k, \sum_r$ étant dénombrables, on en conclut aisément que la fonction propositionnelle (des variables $x, y, 3$ et η) entre crochets $\{ \}$ est de classe $2n-1$. L'ensemble P est donc de classe $PL_{2n-1} = L_{2n-1}$.

Le lemme étant établi, appliquons-le d'abord au cas particulier où les cribles $\{W_r\}$ et $\{Z_r\}$ coïncident avec le crible $\{C_r\}$ du § 1, VIII.

τ et σ désignant deux types d'ordre, convenons d'écrire

$$(4) \quad \tau \prec \sigma$$

lorsque l'ensemble T de type τ est semblable à un sous-ensemble de l'ensemble S de type σ (dans le cas particulier où τ et σ sont des types du bon ordre, la relation $\tau \prec \sigma$ coïncide évidemment avec $\tau \leq \sigma$). Le lemme implique le corollaire suivant:

4. *Corollaire.* L'ensemble $E_{tu}(\bar{t} \prec \bar{u})$ est analytique.

Car, dans le cas où $W_r = C_r$, $\bar{t}$ est par définition (§ 1, VIII) le type d'ordre de l'ensemble M_t , défini par l'égalité (3).

5. *Théorème¹⁾.* Si tous les ensembles formant le crible $\{W_r\}$ sont de classe paire $n \geq 4$, l'ensemble criblé A est aussi de classe n .

Appliquons le lemme au cas où $Z_r = C_r$ (cf. § 1, VIII) et désignons, pour abrégé, par $\mu(x)$ le type d'ordre de l'ensemble M_x . L'ensemble $P = E_{xt}[\mu(x) \prec \bar{t}]$ est donc de classe $n-1$.

¹⁾ Pour les théor. 5 et 6, voir ma note *Les ensembles projectifs et l'opération (A)*, C. R. Paris **203** (1936), p. 211.

D'autre part, $\bar{t}$ parcourant tous les types ordinaux α dénombrables (§ 1, VIII), il vient, d'après la définition du crible

$$\begin{aligned} [x \in (\mathcal{X} - A)] &= [\mu(x) < \Omega] = \sum_{\alpha} [\mu(x) \leq \alpha < \Omega] \\ &= \sum_t [\mu(x) \leq \bar{t} < \Omega] = \sum_t [(x, t) \in P] (\bar{t} < \Omega). \end{aligned}$$

L'ensemble $E_t(\bar{t} < \Omega)$ étant, d'après 2, de classe 2, donc de classe $n-1$ (cf. II, 7), l'ensemble $E_{xt}[(x, t) \in P] (\bar{t} < \Omega)$ est aussi de classe $n-1$. Comme ensemble de classe $PL_{n-1} = L_{n-1}$, l'ensemble $\mathcal{X} - A$ est de classe $n-1$. Donc A est de classe n (selon II, 5).

6. *Théorème.* Les classes projectives L_n , pour $0 \neq n \neq 2$, sont des invariants de l'opération $(\mathcal{A})$.

Soit $A = \sum_{\delta} \prod_m A_{\delta^1 \dots \delta^m}$. Le système $\{A_{\delta^1 \dots \delta^m}\}$ peut être supposé régulier (cf. § 1, VI), car on peut le „régulariser” en le remplaçant par

$$A_{\delta^1 \dots \delta^m}^* = A_{\delta^1} \cdot A_{\delta^1 \delta^2} \cdot \dots \cdot A_{\delta^1 \delta^2 \dots \delta^m},$$

sans affecter la classe projective des ensembles qui le composent.

D'après le théorème du § 1, VII, l'ensemble A est alors criblé par un crible formé d'ensembles appartenant au système $\{A_{\delta^1 \dots \delta^m}\}$, donc d'ensembles de classe n . En vertu des th. 1 et 5, A est donc de classe L_n .

Remarque. Dans le cas de n impair, le th. 6 se laisse établir d'une façon plus directe. On a, en effet,

$$(x \in A) = \sum_{\delta} \prod_m (x \in A_{\delta^1 \dots \delta^m}).$$

Donc, pour démontrer que la fonction propositionnelle est de classe n , il suffit de prouver que la fonction $x \in A_{\delta^1 \dots \delta^m}$ est, pour m fixe, de classe n (dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$). Or, cela résulte directement de l'équivalence:

$$(x \in A_{\delta^1 \dots \delta^m}) = \sum_{k_1} \dots \sum_{k_m} (3^1 = k_1) \dots (3^m = k_m) (x \in A_{k_1 \dots k_m}).$$

Le théorème 6 implique aussitôt le corollaire suivant:

7. *Corollaire.* L'opération $(\mathcal{A})$ et la soustraction, effectuées sur les ensembles qui sont simultanément de classe PCA et $CPCA$, ne conduisent pas en dehors de cette famille d'ensembles.

En conséquence, la plus petite famille d'ensembles qui contient tous les ensembles fermés et qui est close par rapport à l'opération $(\mathcal{A})$ et à la soustraction est contenue dans les classes PCA et CPCA¹⁾.

Le lemme 3 concernait la relation $\tau \prec \sigma$; le lemme suivant concerne l'égalité $\tau = \sigma$.

8. Lemme. Si les ensembles W_r et Z_r sont simultanément de classe $2n$ et de classe $2n-1$, l'ensemble T composé des couples xy tels que M_x est semblable à N_y est de classe $2n-1$.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du lemme 3. En effet, la condition que l'ensemble M soit semblable à N s'exprime comme suit:

$$\sum_{\alpha\beta} \left\{ \prod_r [(r \in M) \rightarrow \sum_n (r = 3^n)] \cdot \prod_r [(r \in N) \rightarrow \sum_n (r = \eta^n)] \cdot \prod_n (3^n \in M) (\eta^n \in N) \cdot \prod_{ij} [(3^i > 3^j) \rightarrow (\eta^i > \eta^j)] \right\}.$$

Il en résulte que:

$$[(xy) \in T] = \sum_{\alpha\beta} \left\{ \prod_r [(x \in W_r) + \sum_n (r = 3^n)] \cdot \prod_r [(x \in Z_r) + \sum_n (r = \eta^n)] \cdot \prod_{rs} \sum_{ts} [(r = 3^n) (x \in W_r) (s = \eta^n) (y \in Z_s)] \cdot \prod_{ij} [(3^i \leq 3^j) + (\eta^i > \eta^j)] \right\}.$$

Un calcul facile montre que l'ensemble T est de classe $2n-1$.

9. Corollaire. L'ensemble $E_{tu}(\bar{t} = \bar{u})$ est analytique.

Pour s'en convaincre, on substitue aux cribles $\{W_r\}$ et $\{Z_r\}$ le crible $\{C_r\}$ du § 1, VIII.

10. Corollaire. L'ensemble $L_\tau = E_t(\bar{t} = \tau)$ est analytique, quel que soit le type d'ordre (dénombrable) τ .

¹⁾ L'étude de cette famille d'ensembles, qui présentent une généralisation très naturelle des ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{CA}$, a été proposée par M. Lusin (voir Fund. Math. 5 (1924), p. 165, renvoi 3. Cf. O. Nikodym, Fund. Math. 14 (1929), p. 145.

Le corollaire 7 a été signalé par MM. Kantorovitch et Livensohn dans les C. R. Paris 190 (1930), p. 1115 et dans Fund. Math. 18 (1932), p. 217. Cf. aussi les indications de M. Lusin dans son „Compte rendu sur la théorie descriptive des fonctions présenté à l'Académie des Sciences d'URSS“, 1935, p. 61.

Pour τ fixe, soit u_0 un élément de $\mathcal{C}$ tel que $\bar{u}_0 = \tau$. La fonction propositionnelle de deux variables $\bar{t} = \bar{u}$ étant de classe $\mathcal{A}$, il en est de même de la fonction propositionnelle de la seule variable $\bar{t}$: $\bar{t} = \bar{u}_0$ (cf. VIII, 5). D'où la conclusion demandée.

Remarque. Le problème s'impose: les ensembles L_τ sont-ils boreliens? ¹⁾ D'après § 26, XII, 1, il en est ainsi pour $\tau < \Omega$, c. à d. pour les nombres ordinaux.

X. Induction transfinie. Nous allons démontrer qu'à côté des opérations déjà considérées, l'induction transfinie ne conduit non plus — dans des hypothèses très générales — en dehors des ensembles projectifs ²⁾.

Remarquons d'abord que toute opération $F(\mathbf{X})$ qui fait correspondre à chaque famille $\mathbf{X}$ d'ensembles (extraits d'un espace $\mathcal{X}$) un sous-ensemble de $\mathcal{X}$, détermine une suite transfinie d'ensembles $A_0, A_1, \dots, A_\alpha, \dots$ définie comme suit:

$$A_0 = F(0) \text{ et } A_\alpha = F(\mathbf{X}_\alpha) \text{ pour } \alpha > 0,$$

$\mathbf{X}_\alpha$ désignant la famille d'ensembles $\{A_\xi\}$ avec $\xi < \alpha$.

Le problème s'impose de reconnaître dans quelles conditions l'ensemble $E_{xt}(x \in A_{\bar{t}}) (\bar{t} < \Omega)$ est projectif.

Désignons par des majuscules gothiques les sous-ensembles du produit cartésien $\mathcal{C} \times \mathcal{X}$. Posons ³⁾:

$$(1) \quad 3^t = E_x [(t, x) \in 3] \text{ où } t \in \mathcal{C},$$

et comme d'habitude:

$$(2) \quad L = E_{\bar{t}} (\bar{t} < \Omega).$$

1. Soit $R_t(\mathcal{B})$ une opération qui fait correspondre à tout $t \in L$ et à tout $\mathcal{B} \subset E_{\bar{u}}(\bar{u} < \bar{t}) \times \mathcal{X}$ un ensemble $R_t(\mathcal{B}) \subset \mathcal{X}$.

Il existe alors un et un seul ensemble $3 \subset L \times \mathcal{X}$ tel que

$$(3) \quad 3^t = R_t[3 \cdot E_{\bar{u}}(\bar{u} < \bar{t})], \text{ quel que soit } \bar{t} < \Omega.$$

¹⁾ Voir, dans cet ordre d'idées, S. Hartman, Zur Geometrisierung der abzählbaren Ordnungstypen, Fund. Math. 29 (1937), p. 210.

²⁾ Voir ma note Les ensembles projectifs et l'induction transfinie, Fund. Math. 27 (1936), p. 269.

³⁾ Il ne faut pas confondre cette notation avec celle du § 24, III.

Envisageons, en effet, la suite transfinie d'ensembles $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_\alpha, \dots$ ($\alpha < \Omega$), situés dans $L \times \mathfrak{X}$ et définis par induction comme suit:

$$(4) \quad \mathfrak{A}_0 = E_{tx} (t=0) [x \in R_0(0)],$$

$$(5) \quad \mathfrak{A}_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta + \mathfrak{R}_\alpha, \text{ où } \mathfrak{R}_\alpha = E_{tx} (t=\alpha) [x \in R_t(\sum_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta)].$$

On prouve facilement par induction que

$$(6) \quad \mathfrak{A}_\alpha \subset E_u (\bar{u} \leq \alpha) \times \mathfrak{X}.$$

En outre, $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{A}_\alpha \subset \dots$

Posons $\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{A}_\alpha + \dots$

En vertu de (6), on a

$$(7) \quad \mathfrak{A}_\alpha^t = \mathfrak{A}_t^t \text{ pour } t \leq \alpha,$$

$$(8) \quad \mathfrak{A}_\alpha^t = 0 \text{ pour les autres } t.$$

Il vient

$$(9) \quad \mathfrak{Z}^t = \sum_{\alpha < \Omega} \mathfrak{A}_\alpha^t = \mathfrak{A}_t^t = R_t(\sum_{\beta < t} \mathfrak{A}_\beta),$$

d'où la formule (3), puisque $\sum_{\beta < t} \mathfrak{A}_\beta = \mathfrak{Z} \cdot E_{ux} (\bar{u} < t)$.

L'unicité de l'ensemble $\mathfrak{Z}$ se démontre facilement par induction.

En mêmes notations, on a l'énoncé suivant (qui présente une définition explicite de l'ensemble $\mathfrak{Z}$, défini implicitement par la condition (3)):

2. Etant donnée une fonction $\mathfrak{G}(z)$, $z \in \mathcal{C}$, qui admet parmi ses valeurs tous les ensembles $\mathfrak{A}_\alpha$, $\alpha < \Omega$, on a les deux équivalences suivantes (où $t, v, z \in \mathcal{C}$, $x \in \mathfrak{X}$):

$$\begin{aligned} \{(v, x) \in \mathfrak{Z}\} &= \\ &= (\bar{v} < \Omega) \cdot \sum_z \prod_t \{(\bar{t} \leq \bar{v}) \rightarrow [\mathfrak{G}^t(z) = R_t(\mathfrak{G}(z) \cdot E_{ux} (\bar{u} < \bar{t}))]\} \{x \in \mathfrak{G}^v(z)\} \\ &= (\bar{v} < \Omega) \cdot \prod_z \{[\prod_t (\bar{t} \leq \bar{v}) \rightarrow [\mathfrak{G}^t(z) = R_t(\mathfrak{G}(z) \cdot E_{ux} (\bar{u} < \bar{t}))]] \rightarrow [x \in \mathfrak{G}^v(z)]\}. \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que l'ensemble $\mathfrak{A}_\alpha$ peut être défini par les conditions:

$$\mathfrak{A}_\alpha^t = R_t[\mathfrak{A}_\alpha \cdot E_{ux} (\bar{u} < \bar{t})] \text{ pour } t \leq \alpha \text{ et } \mathfrak{A}_\alpha^t = 0 \text{ pour les autres } t.$$

Car en vertu de (5):

$$\mathfrak{A}_\alpha \cdot E_{ux} (\bar{u} < \bar{t}) = \sum_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta,$$

d'où la conclusion demandée en raison de (7) et (9).

Par conséquent, $\mathfrak{Z}$, comme somme des $\mathfrak{A}_\alpha$, est l'ensemble des points v, x tels que $\bar{v} < \Omega$ et pour lesquels il existe un $z \in \mathcal{C}$ tel que:

$$1^\circ \text{ pour } t \leq \bar{v}, \text{ on a } \mathfrak{G}^t(z) = R_t[\mathfrak{G}(z) \cdot E_{ux} (\bar{u} < \bar{t})]$$

$$2^\circ x \in \mathfrak{G}^v(z)$$

(bien entendu, $\mathfrak{G}(z) = \mathfrak{A}_\alpha$).

Traduite en symboles logiques, cette condition donne la première équivalence.

L'ensemble $\mathfrak{A}_\alpha$ étant défini par les conditions (7) et (8) d'une façon univoque, la condition pour que (v, x) appartienne à $\mathfrak{Z}$ (où $\bar{v} < \Omega$) peut être énoncée aussi de cette façon: quel que soit z satisfaisant à 1° , la condition 2° se trouve remplie. Cela conduit à la deuxième équivalence.

3. Soit $\mathfrak{G}(z)$, $z \in \mathcal{C}$, une fonction universelle par rapport aux ensembles projectifs de classe L_n ($n \geq 1$) situés dans $\mathcal{C} \times \mathfrak{X}$ et telle que les ensembles

$$E_{ztx} [(t, x) \in \mathfrak{G}(z)] \text{ et } E_{ztx} \{x \in R_t[\mathfrak{G}(z) \cdot E_{ux} (\bar{u} < \bar{t})]\}$$

sont projectifs de classe L_n . L'ensemble $\mathfrak{Z}$ considéré au th. 1 est alors projectif (de classes L_{n+4} et CL_{n+4}).

D'abord, la fonction $\mathfrak{G}(z)$ satisfait à l'hypothèse du th. 2; c. à d. les ensembles $\mathfrak{A}_\alpha$ définis par les formules (4) et (5) sont de classe L_n . En effet, en raisonnant par induction, on n'a qu'à prouver que l'ensemble $\mathfrak{R}_\alpha$ est de classe L_n , en supposant qu'il en est ainsi de $\mathfrak{A}_\beta$ pour $\beta < \alpha$. Or $\sum_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta$ étant de classe L_n , il existe un z_0 tel que

$$\mathfrak{G}(z_0) = \sum_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta \text{ et comme } \sum_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta \subset E_{ux} (\bar{u} < \alpha), \text{ il vient}$$

$$(\bar{t} = \alpha) [x \in R_t(\sum_{\beta < \alpha} \mathfrak{A}_\beta)] = (\bar{t} = \alpha) \{x \in R_t[\mathfrak{G}(z_0) \cdot E_{ux} (\bar{u} < \bar{t})]\}.$$

La fonction propositionnelle entre crochets $\{ \}$ étant de classe L_n par hypothèse (cf. VIII, 5) et l'ensemble $\bigcup_t (t = \alpha)$ étant borelien (§ 26, XII), l'ensemble R_α est de classe L_n .

Ceci établi, on conclut de l'identité

$$(10) \quad \{A=B\} = \prod_x [(x \in A) (x \in B) + (x \text{ non-} \in A) (x \text{ non-} \in B)]$$

que l'ensemble

$$\bigcup_{x \in A} [G^t(z) = R_t(G(z) \cdot \bigcup_{u \in x} E(\bar{u} < t))]$$

est projectif (de classe $n+2$ ou $n+3$ suivant que n est pair ou impair). En remplaçant $\bar{t} \leq \bar{v}$ par $\bar{t} < \bar{v}$ (cf. IX, 4), et l'ensemble $\bigcup_{t \in \Omega} (t < \bar{v})$ étant projectif (même analytique, cf. IX, 4) et $\bigcup_{v \in \Omega} (v < \Omega)$ étant un CA (IX, 2), on déduit de 2 que 3 est projectif (de classes L_{n+4} et CL_{n+4}).

Applications. 1) L'ensemble de Lebesgue, universel par rapport aux fonctions représentables analytiquement, est projectif¹⁾.

On définit cet ensemble comme suit. Posons, pour $t = \frac{t^{(1)}}{3} + \frac{t^{(2)}}{9} + \dots$,

$$(11) \quad t^{(n)} = \frac{t^{(1 \cdot 2^n)}}{3} + \frac{t^{(3 \cdot 2^n)}}{9} + \frac{t^{(5 \cdot 2^n)}}{27} + \dots$$

Soit A un ensemble borelien plan $\subset \mathcal{C} \times \mathcal{E}$ contenant parmi ses sections verticales tous les ensembles fermés et tous les ensembles ouverts. Considérons, dans l'espace $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{E}$, l'ensemble 3 défini par les conditions:

$$3^0 = A, \quad 3^{t,y} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 3^{t^{[n]}, y^{(n)}} \text{ pour } 0 < t < \Omega \text{ et } y \in \mathcal{C}^2,$$

$$3^t = 0 \text{ pour tous les autres } t.$$

Dans ce cas, la fonction $R_t(\mathfrak{B})$ se laisse définir comme suit: $\mathfrak{B}$ étant un sous-ensemble de $\bigcup_u (u < \bar{t}) \times \mathcal{C} \times \mathcal{E}$, $R_t(\mathfrak{B})$ est le sous-ensemble plan de $\mathcal{C} \times \mathcal{E}$ défini par les conditions:

$$R_0(0) = A, \quad R_t(\mathfrak{B}) = \bigcup_{y \in \mathcal{E}} [x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}^{t^{[n]}, y^{(n)}}] \text{ pour } t \neq 0.$$

¹⁾ Pour la définition de cet ensemble, voir le mémoire de Lebesgue dans le Journal de Math., 1905, Chap. VIII. Le problème de la projectivité de cet ensemble a été posé par M. Lusin. Je l'ai résolu dans la note *Sur un problème concernant l'induction transfinie*, C. R. Paris 202 (1936), p. 1239.

²⁾ Pour la définition de la fonction $t^{[n]}$, voir § 26, XII. Conformément à (1), $3^{t,y}$ désigne l'ensemble $\bigcup_x [(t, y, x) \in \mathfrak{B}]$. Par définition: $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{n+k}$.

Soit $G(z)$, $z \in \mathcal{C}$, une fonction universelle par rapport à tous les sous-ensembles analytiques de $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{E}$ et telle que l'ensemble $\bigcup_{z \in \mathcal{C}} [(t, y, x) \in G(z)]$ est analytique (cf. N° V). Reste à prouver que l'ensemble $\bigcup_{z \in \mathcal{C}} [(y, x) \in R_t(G(z) \cdot \bigcup_{u \in x} E(\bar{u} < t))]$ est analytique. Or on a (pour $t \neq 0$):

$$\begin{aligned} (y, x) \in R_t(G(z) \cdot \bigcup_{u \in x} E(\bar{u} < t)) &= \\ &= x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} G^{t^{[n]}, y^{(n)}}(z) = \prod_n \sum_k x \in G^{t^{[n+k]}, y^{(n+k)}}(z) \\ &= \prod_n \sum_k [(t^{[n+k]}, y^{(n+k)}, x) \in G(z)]. \end{aligned}$$

Les fonctions $t^{[n]}$ et $y^{(n)}$ étant, pour n fixe, continues (cf. § 26, XII), la conclusion demandée en résulte.

2) Modifications, à présent, la définition de la fonction $R_t(\mathfrak{B})$ de la façon suivante: posons $\mathcal{X} = \mathcal{C}$, $R_0(0) = A$ = ensemble ouvert tel que A^y est une fonction universelle par rapport aux ensembles ouverts (cf. § 26, XIII, renvoi 2),

$$R_t(\mathfrak{B}) = \bigcup_{y \in \mathcal{E}} \{x \in \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}^{t^{[n]}, y^{(n)}}\} \text{ ou } \bigcup_{y \in \mathcal{E}} \{x \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}^{t^{[n]}, y^{(n)}}\}$$

suivant que t est pair ou impair (dans le sens de § 26, XII, 4).

L'ensemble 3 dont la définition se déduit de celle de $R_t(\mathfrak{B})$ est un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{C}^3$ tel que, pour chaque $t < \Omega$, 3^t est un ensemble borelien de classe G_t et que la fonction $3^{t,y}$ (fonction de l'argument y) est universelle par rapport à la famille des sous-ensembles de $\mathcal{C}$ de classe G_t . La projectivité de 3 résulte, comme dans l'exemple précédent, de la définition de la fonction $R_t(\mathfrak{B})$. La seule prémisses supplémentaire est que l'ensemble des t pour lesquels t est un type ordinal pair est borelien; nous l'avons démontré au § 26, XII, 4.

3) Soit t^* le point de $\mathcal{C}$ tel que l'ensemble $\bigcup_{r_n} (t^{*n} = 2)$ s'obtienne de $\bigcup_{r_n} (t^n = 2)$ ¹⁾ en supprimant le dernier élément (s'il existe, sinon nous posons $t^* = t$). On voit facilement que t^* est une fonction mesurable B de t (cf. § 35, V, 2).

¹⁾ Dans le N° VIII du § 1, cet ensemble a été désigné par le symbole R_t .

$\mathfrak{Z}$ est défini par les conditions:

$$\mathfrak{Z}^0 = A, \quad \mathfrak{Z}^{t,u} = \sum_1^\infty \mathfrak{Z}^{t^{(n)}, u_n} \text{ ou } \mathcal{E} - \mathfrak{Z}^{t^*, u}$$

suivant que t est pair ou impair.

L'opération $R_t(\mathfrak{B})$ correspondante est définie comme dans l'ex. 2 en remplaçant $\Pi \mathfrak{B}^{t^{(n)}, u(n)}$ par $\mathcal{E} - \mathfrak{B}^{t^*, u(n)}$. Comme auparavant $\mathfrak{Z}$ est projectif.

Dans les exemples 1)–3), l'ensemble $\mathfrak{Z}^t$ ne dépend que de t (et non de u). De sorte que, en posant $A_\alpha = \mathfrak{Z}^t$ où t est un nombre quelconque tel que $t = \alpha$, on définit une suite transfinie d'ensembles boreliens (précisément de classe α dans les ex. 2 et 3). Dans l'exemple qui suit, $\mathfrak{Z}^t$ dépend de t :

$$4) \text{ Soit: } \mathfrak{Z}^0 = A, \quad \mathfrak{Z}^{t,u} = \prod_{n=1}^\infty \mathfrak{Z}^{t^*, u(n)} \text{ pour } t \text{ impair,}$$

$$x \in \mathfrak{Z}^{t,u} = \sum_{n=1}^\infty (\bar{y}_{(2n+1)} < t) (x \in \mathfrak{Z}^{u(2n+1), u(2n)}) \text{ pour } 0 < t \text{ pair} < \Omega.$$

Ici l'opération $R_t(\mathfrak{B})$ peut être définie comme suit:

$$\{(y, x) \in R_t(\mathfrak{B})\} = \{(t=0)((y, x) \in A) + (t \text{ impair}) \prod_n (x \in \mathfrak{B}^{t^*, u(n)}) + \\ + (t > 0 \text{ pair}) \sum_n (\bar{y}_{(2n+1)} + 1 \leq t) (x \in \mathfrak{B}^{u(2n+1), u(2n)})\}.$$

On constate, comme auparavant, que l'ensemble $\mathfrak{Z}$ est projectif¹⁾.

XI. Opérations de Hausdorff. Etant donnés une suite d'ensembles $A_1, A_2, \dots$ et un ensemble B des suites infinies d'entiers positifs (conçu comme sous-ensemble de l'espace $\mathcal{N}$), on dit que l'ensemble H s'obtient de la suite $\{A_n\}$ à l'aide de l'opération de Hausdorff de base B ²⁾, lorsque

$$(1) \quad (x \in H) = \sum_{\mathfrak{z}} \{(\mathfrak{z} \in B) \prod_n (x \in A_{\mathfrak{z}n})\}.$$

¹⁾ Cet ensemble intervient dans ma note *Sur l'existence effective des fonctions représentables analytiquement de toute classe de Baire*, C. R. Paris **176** (1923), p. 229.

²⁾ F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 87. A. Kolmogoroff, *Opérations sur des ensembles*, Rec. Math. Moscou **25**, p. 418. Voir aussi L. Kantorovitch et E. Livensohn, *Memoir on the Analytical Operations and Projective Sets* (I), Fund. Math. **18** (1932), p. 214, où l'on trouve de nombreux renvois bibliographiques.

Ainsi, par exemple, l'opération

$$\text{Lim sup}_{n=\infty} A_n = \prod_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty A_{n+k}$$

est une opération de Hausdorff. Sa base se compose des suites $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots]$ contenant une infinité de termes différents deux à deux.

Les opérations Σ et Π sont aussi des opérations de Hausdorff. Plus généralement, on peut ramener l'opération $(\mathcal{A})$ à une opération de Hausdorff¹⁾.

1. Si les ensembles A_n , ainsi que la base B , sont projectifs de classe k impaire, l'ensemble H l'est également.

On a, en effet:

$$(x \in A_{\mathfrak{z}n}) = \prod_m [(m = \mathfrak{z}^n) \rightarrow (x \in A_m)],$$

donc en vertu de (1):

$$(x \in H) = \sum_{\mathfrak{z}} \{(\mathfrak{z} \in B) \cdot \prod_{m,n} [(m = \mathfrak{z}^n) \rightarrow (x \in A_m)]\}.$$

On en déduit que H est de classe $PL_k = L_k$.

Revenons à présent à l'évaluation de la classe projective de l'ensemble $\mathfrak{Z}$ défini par l'induction transfinie (voir N° X). Lorsque cette définition s'obtient moyennant une opération de Hausdorff, il est souvent plus avantageux de se servir d'une méthode différente de celle exposée dans le N° X. La méthode suivante, due à M. J. v. Neumann²⁾, permet de démontrer qu'en particulier l'ensemble $\mathfrak{Z}$ considéré dans les exemples 1), 2) et 4) du N° X, est la différence de deux ensembles analytiques.

Pour simplifier les notations, nous allons nous borner à formuler un théorème qui embrasse le cas de l'ensemble de Lebesgue (ex. 1); une généralisation de ce théorème donne l'évaluation demandée pour les ex. 2 et 4.

Nous allons nous servir des notations suivantes. En désignant par r un système fini variable d'entiers positifs $k_1, \dots, k_n$ ($n \geq 0$), considérons les fonctions $\gamma(r)$ qui font correspondre à chaque r un

¹⁾ Cf. F. Hausdorff, op. cit., p. 93.

²⁾ Voir la note de M. J. v. Neumann et de moi-même *On some analytic sets defined by transfinite induction*, Annals of Mathematics **38** (1937), pp. 521–525.

entier ≥ 0 ; r peut être conçu comme fraction binaire finie $0 \leq r < 1$, à savoir (cf. § 1, VII):

$$r = \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2}} + \dots + \frac{1}{2^{k_1+\dots+k_n}}.$$

Soit Γ l'ensemble des fonctions γ . On attribue à cet ensemble le caractère d'un espace topologique en admettant que la suite $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ converge vers γ lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(r) = \gamma(r)$ quel que soit r . L'espace Γ est complet séparable; il est en effet homéomorphe à l'espace des nombres irrationnels. Pour s'en convaincre, on range les nombres r en une suite infinie $r_1, r_2, \dots$ et on fait correspondre à l'élément γ de Γ l'élément $\mathfrak{z} = \{\gamma(r_1), \gamma(r_2), \dots\}$ de $\mathcal{N}$.

Désignons par $\eta_r(\gamma) = \eta_{k_1, \dots, k_n}(\gamma)$ la suite infinie

$$\gamma(k_1, \dots, k_n, 1), \gamma(k_1, \dots, k_n, 2), \dots$$

En particulier $\eta_0(\gamma) = \{\gamma(1), \gamma(2), \dots\}$.

Enfin, posons $\overline{\gamma, r} = \{\gamma(k_1), \dots, \gamma(k_1, \dots, k_n)\}$. Donc $\overline{\gamma, 0} = 0$ (l'ensemble vide).

On constate aussitôt que, pour r fixe, les fonctions $\gamma(r)$ et $\eta_r(\gamma)$, considérées comme fonctions de γ variable, sont continues.

Les symboles $t^{[n]}$ et $t_{(n)}$ ayant (pour $t \in \mathcal{C}$) le même sens que dans le N° X (ex. 1), définissons les symboles $t^{[r]}$ et $t_{(r)}$ par l'induction finie en convenant que: $t^{[0]} = t = t_{(0)}$ et

$$t^{[k_1, \dots, k_n, k_{n+1}]} = (t^{[k_1, \dots, k_n]})^{[k_{n+1}]}, \quad t_{(k_1, \dots, k_n, k_{n+1})} = (t_{(k_1, \dots, k_n)})_{(k_{n+1})}.$$

On démontre facilement que les fonctions $t^{[r]}$ et $t_{(r)}$ sont, pour r fixe, des fonctions continues de t et γ et que

$$(t^{[k_1]})^{[k_2, \dots, k_n]} = t^{[k_1, k_2, \dots, k_n]} \quad (t_{(k_1)})_{(k_2, \dots, k_n)} = t_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}.$$

2. *Théorème.* Soient $A \subset \mathcal{C} \times \mathcal{E}$ et $B \subset \mathcal{N}$ deux ensembles analytiques. L'ensemble $\mathfrak{Z} \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{E}$ défini par les conditions:

$$\mathfrak{Z}^0 = A, \quad \mathfrak{Z}^t = \sum \prod_n \mathfrak{Z}^{t^{[3^n]}, y_{(3^n)}} \text{ où } 0 < t < \Omega, y \in \mathcal{C}, \mathfrak{z} \in B,$$

$$\mathfrak{Z}^t = 0 \text{ pour tous les autres } t,$$

est différence de deux ensembles analytiques.

Plus précisément, on a l'équivalence:

$$[(tyx) \in \mathfrak{Z}] = (\bar{t} < \Omega) \cdot \sum_r \{(\gamma(0) \neq 0) \prod_r [(\gamma(r) \neq 0) (t^{[r]} = 0) \rightarrow (y_{(\overline{0, r})}, x) \in A] \cdot [(\gamma(r) \neq 0) (t^{[r]} \neq 0) \rightarrow \eta_r(\gamma) \in B]\}.$$

Dès que cette équivalence sera établie, on en conclura que $\mathfrak{Z}$ est le produit d'un ensemble $\mathcal{CA}$ et d'un ensemble analytique; car, d'une part, l'ensemble $\mathfrak{Z}(\bar{t} < \Omega)$ est un $\mathcal{CA}$ (d'après IX, 2) et, d'autre part, la fonction propositionnelle entre crochets $\{ \}$ est analytique, puisque la multiplication $\prod_r$ est dénombrable et les fonctions $\gamma(r)$, $t^{[r]}$, $y_{(\overline{0, r})}$ et $\eta_r(\gamma)$ sont continues (pour r fixe).

Passons à la démonstration de cette équivalence.

1) Soit $(tyx) \in \mathfrak{Z}$. Nous allons démontrer par l'induction transfinie qu'il existe une fonction $\gamma \in \Gamma$ satisfaisant à la condition entre crochets, et — de plus — admettant pour $r=0$ une valeur $p \neq 0$ donnée en avance.

Soit d'abord $\bar{t} = 0$, c. à d. $t = 0$. Donc $(yx) \in A$. Soit γ la fonction définie comme suit: $\gamma(0) = p$ et $\gamma(r) = 0$ pour $r \neq 0$. La condition entre crochets est évidemment satisfaite.

Admettons à présent que $\alpha > 0$ et que notre hypothèse soit satisfaite pour chaque t tel que $\bar{t} < \alpha$.

Soit $\bar{t} = \alpha$. La formule $(tyx) \in \mathfrak{Z}$ implique l'existence d'une suite infinie $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots)$ appartenant à B et telle que l'on ait pour tout n :

$$x \in \mathfrak{Z}^{t^{[3^n]}, y_{(3^n)}}, \text{ c. à d. } (t^{[3^n]}, y_{(3^n)}, x) \in \mathfrak{Z}.$$

Comme $\overline{t^{[3^n]}} < \bar{t}$, à tout n correspond par hypothèse une fonction $\gamma_n \in \Gamma$ telle que:

$$1^0 \quad \gamma_n(0) = \mathfrak{z}^n,$$

$$2^0 \quad \text{si } \gamma_n(r) \neq 0 \text{ et } t^{[3^n]} \overline{\gamma_n(r)} = 0, \text{ on a } (y_{(\mathfrak{z}^n(\overline{0, r})}, x) \in A,$$

$$3^0 \quad \text{si } \gamma_n(r) \neq 0 \text{ et } t^{[3^n]} \overline{\gamma_n(r)} \neq 0, \text{ on a } \eta_r(\gamma_n) \in B.$$

Définissons γ comme suit: $\gamma(0) = p$ et, pour $r = (k_1, \dots, k_m)$ où $(m \neq 0)$, $\gamma(k_1, \dots, k_m) = \gamma_{k_1}(k_2, \dots, k_m)$. Il vient

$$\overline{\gamma, r} = \overline{\gamma, (k_1, \dots, k_m)} = \{\gamma(k_1), \gamma(k_1, k_2), \dots, \gamma(k_1, k_2, \dots, k_m)\} = \\ = \{3^{k_1}, \gamma_{k_1}(k_2), \dots, \gamma_{k_1}(k_2, \dots, k_m)\} = \{3^{k_1}, \gamma_{k_1}, k_2, \dots, k_m\}$$

et

$$\eta_r(\gamma) = \{\gamma(k_1, \dots, k_m, 1), \gamma(k_1, \dots, k_m, 2), \dots\} = \\ = \{\gamma_{k_1}(k_2, \dots, k_m, 1), \gamma_{k_1}(k_2, \dots, k_m, 2), \dots\} = \eta_{k_2 \dots k_m}(\gamma_{k_1}).$$

On en déduit facilement que la condition entre crochets $\{ \}$ est vérifiée.

2) Admettons, d'autre part, que γ satisfait à la condition entre crochets. Il s'agit de prouver que $(tyx) \in \mathfrak{Z}$.

Soit d'abord $t = 0$. Comme $\gamma(0) \neq 0$ et $t^{[0,0]} = t^{[0]} = t$, il vient $(y_{\overline{(0,0)}}, x) \in A$. Mais $y_{\overline{(0,0)}} = y_{(0)} = y$. Donc $(y, x) \in A = \mathfrak{Z}^0$, c. à d. $(tyx) \in \mathfrak{Z}$.

Admettons à présent que $\alpha > 0$ et que notre hypothèse soit satisfaite pour chaque t tel que $t < \alpha$.

Soit $t = \alpha$. Posons $\mathfrak{z} = \eta_0(\gamma) = \{\gamma(1), \gamma(2), \dots\}$. Comme $\gamma(0) \neq 0$ et $t^{[0,0]} = t \neq 0$, il vient $\eta_0(\gamma) \in B$, c. à d. que $\mathfrak{z} \in B$. Reste à démontrer que l'on a pour tout n :

$$x \in \mathfrak{Z}^{t^{[3^n]}, y_{(\mathfrak{z}^n)}}, \text{ c. à d. } (t^{[3^n]}, y_{(\mathfrak{z}^n)}, x) \in \mathfrak{Z}.$$

Or, posons $\gamma_k(k_2, \dots, k_m) = \gamma(k_1, k_2, \dots, k_m)$, $m \neq 0$. On vérifie facilement que les conditions 1°—3° sont satisfaites pour tout n . Comme $t^{[3^n]} < \alpha$, on en déduit par hypothèse que $(t^{[3^n]}, y_{(\mathfrak{z}^n)}, x) \in \mathfrak{Z}$.

§ 35. Ensembles analytiques.

L'espace est supposé complet séparable.

I. Généralités. Rappelons d'abord quelques propriétés des ensembles analytiques établies au § 34. Par définition, les ensembles analytiques coïncident avec les images continues des ensembles boreliens (§ 34, I). Tout ensemble borelien étant image continue de l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels, on peut définir les ensembles analytiques comme les *images continues de l'ensemble $\mathcal{N}$* (§ 34, IV).

La propriété d'être un ensemble analytique est *invariante* par rapport aux opérations dénombrables: d'addition, de multiplication et de multiplication cartésienne, de même que par rapport à l'opération $(\mathcal{A})$ et par rapport aux transformations mesurables B (de cet ensemble en sous-ensemble du même espace ou d'un autre).

D'après le corollaire 1 du § 32, V, *tout ensemble analytique indénombrable contient un ensemble parfait*¹⁾. Les ensembles analytiques „réalisent” donc l'hypothèse du continu: *leur puissance est soit finie, soit $\aleph_0$, soit c .*

Comme on verra (cf. N° II), tout ensemble analytique (donc aussi tout ensemble CA) jouit de la propriété de Baire au sens restreint et est mesurable au sens de Lebesgue (s'il est contenu dans l'espace des nombres réels).

Remarques. 1° Les propriétés précitées montrent que les ensembles analytiques jouissent d'une certaine „régularité”, qui détermine leurs applications. Parmi les applications de la théorie des ensembles analytiques, citons l'important théorème sur l'inversion des fonctions continues (N° V, th. 3), que l'on ne sait pas établir sans l'emploi de cette théorie.

Comme on verra, il y a de nombreux problèmes d'un caractère élémentaire qui conduisent aux ensembles analytiques ou aux ensembles CA . Il y a aussi des exemples importants et très simples d'ensembles qui sont projectifs sans être boreliens; ainsi, dans l'espace $2^{\mathcal{J}}$ (des sous-ensembles fermés de l'intervalle), l'ensemble des ensembles fermés indénombrables est analytique et non borelien²⁾; les fonctions différentiables constituent dans l'espace $\mathcal{E}^{\mathcal{J}}$ un ensemble CA non borelien³⁾; dans l'espace $\mathcal{E}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$, les fonctions $f(x, y)$ pour lesquelles il existe un y tel que la dérivée partielle $f'_x(x, y)$ existe pour tout $x \in \mathcal{J}$ — constituent un ensemble PCA qui n'est pas de classe inférieure⁴⁾.

¹⁾ Voir M. Souslin, C. R. Paris **164** (1917).

²⁾ W. Hurewicz, *Zur Theorie der analytischen Mengen*, Fund. Math. **15** (1930), p. 4—17.

³⁾ S. Mazurkiewicz, *Über die Menge der differenzierbaren Funktionen*, Fund. Math. **27** (1936), p. 244.

⁴⁾ S. Mazurkiewicz, *Eine projektive Menge der Klasse PCA im Funktionalraum*, Fund. Math. **28** (1937), p. 7.

2° Il est essentiel de remarquer que la „régularité” dont jouissent les ensembles analytiques n'appartient pas, en général, aux ensembles projectifs de classe plus élevée. M. Gödel¹⁾ a signalé en effet que l'hypothèse de l'existence (dans l'espace des nombres réels) d'ensembles non mesurables de classe **PCA** et **CPCA** est compatible avec le système d'axiomes de la Théorie des ensembles.

Il en est de même de l'existence des ensembles **CA** indénombrables dépourvus de sous-ensembles parfaits.

3° Comme l'a démontré M. Hurewicz²⁾, le résultat de l'opération $\mathcal{A}$ effectuée sur des sous-ensembles fermés d'un espace métrique séparable (complet ou non) contient un ensemble parfait (pourvu qu'il soit indénombrable).

Vu que tout ensemble analytique est le résultat de l'opération $\mathcal{A}$ effectuée sur des ensembles fermés (N^0 II), le théorème précité est une généralisation du théorème d'après lequel tout ensemble analytique indénombrable contient un ensemble parfait.

Pour une autre généralisation, voir N^0 II, corollaire 3.

Nous allons établir à présent le théorème suivant:

A étant un ensemble analytique indénombrable, tout ensemble analytique A^ s'en obtient par une transformation de I-e classe³⁾.*

Il suffit évidemment de démontrer qu'il en est ainsi pour $A^* = \mathcal{N}$.

Or, en tant qu'ensemble analytique et indénombrable, A contient un ensemble homéomorphe à $\mathcal{C}$; donc un ensemble N homéomorphe à $\mathcal{N}$. Posons $f(x) = x$ pour $x \in N$. L'ensemble N étant un G_δ dans l'espace $\mathcal{X}$ (qui contient A , cf. § 31, III), donc un espace topologiquement complet, il existe une fonction f^* de I-e classe définie sur l'espace $\mathcal{X}$ tout entier, dont les valeurs appartiennent à N et qui coïncide sur N avec f (§ 31, VI, corollaire). Par conséquent $f^*(A) = N$, c. q. f. d.

¹⁾ The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sc. **24** (1938), p. 556.

²⁾ Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A), Fund. Math. **12** (1928), p. 78—109.

³⁾ W. Sierpiński, Sur les images de Baire des ensembles linéaires, Fund. Math. **15** (1930), p. 195.

Dans le même ordre d'idées, citons les théorèmes suivants:

1. *Étant donnés deux ensembles analytiques indénombrables de dimension 0, l'un d'eux est une image continue de l'autre¹⁾.*

2. *Tout ensemble analytique est image biunivoque et continue d'un ensemble **CA**²⁾.*

Plus précisément, $x = f(z)$ étant une fonction continue, définie sur un sous-ensemble fermé F de $\mathcal{N}$, l'ensemble F contient un complémentaire analytique C tel que $f(C) = f(F)$ et que la fonction partielle $f|C$ est biunivoque³⁾.

Afin d'établir ce dernier énoncé, rangeons d'abord les nombres irrationnels $z = [z^1, z^2, \dots]$ dans l'ordre lexicographique; en symbole:

$$(1) \quad [z \prec y] = (z^1 \leq y^1) \cdot \prod_k [(z^k \leq y^k) + \sum_{l < k} (z^l < y^l)].$$

On voit aussitôt que la fonction propositionnelle $[z \prec y]$ est de classe F . En outre, il existe dans tout ensemble fermé $X (\neq 0)$ le premier élément. C'est en effet le point $p(X) = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots$, où X_1 est l'ensemble des $z \in X$ pour lesquels z^1 admet la valeur minimum et où X_n , avec $n > 1$, est l'ensemble des $z \in X_{n-1}$ pour lesquels z^n admet la valeur minimum. En vertu du th. de Cantor (§ 30, II) le produit des ensembles X_n se réduit à un seul point.

Ceci établi, soit C l'ensemble des points $p[f^{-1}(x)]$ où x parcourt l'ensemble $f(F)$; en symbole:

$$(2) \quad [z \in C] = [z \in F] \cdot \prod_y \{[f(z) = f(y)] \rightarrow [z \prec y]\}.$$

L'ensemble C est un **CA**, car la fonction propositionnelle entre crochets $\{ \}$ est borelienne. En outre, la fonction partielle $f|C$ est biunivoque, car les conditions $z \in C$, $y \in C$ et $f(z) = f(y)$ entraînent $z \prec y \prec z$ d'où $z = y$. On a enfin $f(C) = f(F)$, car $p[f^{-1}(x)]$ peut être substitué à z dans le membre gauche de l'équivalence (2).

¹⁾ Pour la démonstration, voir W. Sierpiński, Sur les images continues des ensembles analytiques linéaires ponctiformes, Fund. Math. **14** (1929), p. 345.

²⁾ S. Mazurkiewicz, Sur une propriété des ensembles $C(A)$, Fund. Math. **10** (1927), p. 172.

³⁾ Pour une généralisation de cet énoncé, voir N^0 V, 5.

II. Ensembles analytiques comme résultats de l'opération $(\mathcal{A})$.

L'ensemble $\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}$ des nombres irrationnels $z = \frac{1}{z^1} + \frac{1}{z^2} + \dots$

tels que: $z^1 = n_1, \dots, z^k = n_k$ (cf. § 32, I), vérifie — comme on voit facilement — les propositions suivantes:

$$(1) \quad \mathcal{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n \quad \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k n}$$

$$(2) \quad \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k} \cdot \mathcal{N}_{m_1 \dots m_k} = 0 \text{ pour } (n_1 \dots n_k) \neq (m_1 \dots m_k)$$

$$(3) \quad z = \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{z^1 \dots z^k}$$

$$(4) \quad \mathcal{N} = \sum_z \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{z^1 \dots z^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_z \mathcal{N}_{z^1 \dots z^k}.$$

La formule (4) montre que l'ensemble $\mathcal{N}$ est le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur le système des ensembles $\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}$.

$$(5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{N}_{z^1 \dots z^k}) = 0.$$

(6) f étant une fonction continue définie sur $\mathcal{N}$, on a

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{z^1 \dots z^k}) = \prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{z^1 \dots z^k})}.$$

Car

$$f(z) = f\left(\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{z^1 \dots z^k}\right) \subset \prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{z^1 \dots z^k}) \subset \prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{z^1 \dots z^k})}$$

d'après (3), et l'ensemble $\prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{z^1 \dots z^k})}$ se réduit à un seul point, puisque la continuité de la fonction f implique en vertu de (5) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta[f(\mathcal{N}_{z^1 \dots z^k})] = 0, \text{ d'où } \lim_{k \rightarrow \infty} \delta[\overline{f(\mathcal{N}_{z^1 \dots z^k})}] = 0 \text{ et } \delta\left(\prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{z^1 \dots z^k})}\right) = 0.$$

Théorème. Pour qu'un ensemble soit analytique, il faut et il suffit qu'il soit le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur un système régulier d'ensembles fermés.

En effet, A étant analytique, il existe une fonction continue f telle que $A = f(\mathcal{N})$. L'ensemble A est le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur les ensembles $\overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})}$, car on a d'après (6):

$$A = f(\mathcal{N}) = \sum_z f(z) = \sum_z \prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{z^1 \dots z^k})}.$$

Inversement, l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur des ensembles fermés (même sur des ensembles analytiques) conduit toujours à des ensembles analytiques (§ 34, IX, 6).

Corollaire 1. Les ensembles analytiques jouissent de la propriété de Baire au sens restreint.

Car cette propriété appartient à tout ensemble fermé et est un invariant de l'opération $(\mathcal{A})$ d'après le corollaire du § 11, VII.

Pour la même raison, les ensembles analytiques sont mesurables au sens de Lebesgue (dans le cas de l'espace des nombres réels, complexes etc.).

La propriété de Baire, ainsi que la mesurabilité, appartenant au complémentaire de tout ensemble qui la possède, il en résulte que les ensembles **CA** en jouissent également. Il en est encore de même des ensembles qui s'obtiennent à partir des ensembles fermés à l'aide de la soustraction et de l'opération $(\mathcal{A})$.

Remarque. D'après le corollaire 1, l'ensemble E_1 du § 34, VI, qui est analytique et non borelien, répond au problème de H. Lebesgue (Journ. de Math. 1905, p. 188) sur l'existence des ensembles non boreliens à propriété de Baire au sens restreint¹⁾.

Corollaire 2. Tout ensemble analytique A est criblé par un crible composé d'ensembles fermés.

En d'autres termes: il existe une famille d'ensembles fermés W_r , où $r \in \mathcal{R}$, telle que la condition $x \in A$ équivaut à l'existence d'une suite infinie de nombres $r_1 < r_2 < \dots$ satisfaisant à la formule $x \in W_{r_1} \cdot W_{r_2} \cdot \dots$

C'est une conséquence immédiate du théorème, en raison du théorème du § 1, VII.

Corollaire 3. Tout ensemble projectif E de classe **PCA** est somme de $\aleph_1$ ensembles boreliens.

En conséquence, si E est de puissance $> \aleph_1$, E contient un ensemble parfait (non vide).

Admettons d'abord que l'ensemble E soit analytique. Il est donc le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur un système d'ensembles fermés. En notations du § 1, VI, 6, on a alors

¹⁾ Voir N. Lusin et W. Sierpiński, Sur un ensemble non mesurable B , Journ. de Math. 1923, p. 53.

$$(7) \quad E = \prod_{\alpha < \Omega} E_\alpha = \sum_{\alpha < \Omega} K_\alpha,$$

et on constate facilement par l'induction transfinie que les ensembles E_α et K_α sont boreliens. La première partie du corollaire se trouve ainsi établie pour le cas où E est un ensemble $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{CA}$ ¹⁾.

Dans le cas général, où E est un $\mathcal{PCA}$, posons $E = f(C)$, où C est un $\mathcal{CA}$ et où la fonction f est continue. Il vient

$$C = \sum_{\alpha < \Omega} B_\alpha, \text{ donc } E = f(C) = \sum_{\alpha < \Omega} f(B_\alpha).$$

B_α étant borelien, $f(B_\alpha)$ est analytique; il est donc une somme de $\aleph_1$ ensembles boreliens. Par conséquent E l'est également.

La deuxième partie du corollaire découle de la première. Car, en supposant que $\bar{E} > \aleph_1$, l'un au moins parmi les $\aleph_1$ sommandes en lesquels E se décompose, est indénombrable; comme ensemble borelien indénombrable, il contient un sous-ensemble parfait non vide (§ 33, I, 3).

Remarque. On voit ainsi que parmi les ensembles $\mathcal{PCA}$ indénombrables il n'y a que deux puissances qui peuvent se présenter: à savoir $\aleph_1$ et c . D'ailleurs, on ne sait pas s'il existe des ensembles $\mathcal{PCA}$ ou, plus généralement, des ensembles projectifs de puissance $\aleph_1$.

Quant aux ensembles $\mathcal{CPCA}$, on ne connaît pas d'énoncé analogue.

Corollaire 4. Tout espace $\mathcal{X}$ complet, séparable et indénombrable se laisse décomposer en $\aleph_1$ ensembles boreliens, disjoints et non vides.

Soit, en effet, E un sous-ensemble analytique non borelien de $\mathcal{X}$ (l'existence d'un ensemble de ce genre résulte du § 34, VI). En appliquant la formule (7) et en posant

$$A_\alpha = K_\alpha - \sum_{\xi < \alpha} K_\xi, \text{ il vient } E = \sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha.$$

De façon analogue, en posant

$$L_\alpha = \mathcal{X} - E_\alpha \text{ et } B_\alpha = L_\alpha - \sum_{\xi < \alpha} L_\xi, \text{ on a } \mathcal{X} - E = \sum_{\alpha < \Omega} L_\alpha = \sum_{\alpha < \Omega} B_\alpha.$$

¹⁾ Nous reviendrons au N° IX sur les décompositions des ensembles $\mathcal{CA}$ en $\aleph_1$ ensembles boreliens.

Par conséquent,

$$(8) \quad \mathcal{X} = \sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha + \sum_{\alpha < \Omega} B_\alpha.$$

Les ensembles A_α et B_α sont boreliens. Tous les sommandes de la décomposition (8) sont disjoints deux à deux. Il y a une infinité indénombrable d'indices α tels que $A_\alpha \neq 0$, car en supposant le contraire, l'ensemble E serait borelien (comme somme dénombrable d'ensembles boreliens).

Remarque. On est conduit aussi à une décomposition d'un espace $\mathcal{X}$ complet, séparable et indénombrable en $\aleph_1$ ensembles boreliens, disjoints et non vides, en se basant sur le théorème suivant de F. Hausdorff¹⁾: il existe dans l'espace $\mathcal{X}$ une suite transfinie $G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_\alpha \subset \dots$ ($\alpha < \Omega$) d'ensembles G_α distincts et tels que $\mathcal{X} = \sum_{\alpha < \Omega} G_\alpha$.

En posant $F_\alpha = G_\alpha - \sum_{\xi < \alpha} G_\xi$, il vient $\mathcal{X} = \sum_{\alpha < \Omega} F_\alpha$ où les F_α sont des ensembles $\mathcal{F}_{\alpha\delta}$, disjoints et non vides.

Cette décomposition a l'avantage vis-à-vis la décomposition (8) d'avoir les sommandes de classe $\mathcal{F}_{\alpha\delta}$, tandis que les sommandes de la décomposition (8) sont de classes non bornées. D'autre part, la décomposition (8) est effective (l'ensemble E , ainsi que ses sommandes, peuvent être nommés), tandis que l'existence de la suite $\{G_\alpha\}$ n'est établie que d'une façon non effective.

Ajoutons que le problème de décomposer l'espace en $\aleph_1$ ensembles G_α disjoints et non vides reste ouvert²⁾.

III. Premier théorème de séparation. A et B étant deux ensembles analytiques disjoints, il existe un ensemble borelien E tel que

$$A \subset E \text{ et } E \cdot B = 0 \text{ }^3).$$

¹⁾ Summen von $\aleph_1$ Mengen, Fund. Math. **26** (1936), p. 248.

²⁾ Cf. W. Sierpiński, Sur deux conséquences d'un théorème de Hausdorff, Fund. Math. **33** (1945), p. 272.

³⁾ Théorème de N. Lusin, Sur les ensembles analytiques, Fund. Math. **10** (1927), p. 52. Il importe de remarquer qu'un théorème analogue pour les ensembles $\mathcal{CA}$ serait en défaut. Voir un simple exemple de M. Sierpiński, Sur deux complémentaires analytiques non séparables B , Fund. Math. **17** (1931), p. 298, de même que N. Lusin, Ensembles analytiques, p. 220, 260, 263 et P. Novikoff, Fund. Math. **17**, p. 25.

Lemme¹⁾. Nommons „séparable B” tout couple d'ensembles A, B satisfaisant à la thèse du théorème. Les ensembles $P = P_1 + P_2 + \dots$ et $Q = Q_1 + Q_2 + \dots$ étant non séparables B, il existe un couple P_n, Q_m non séparable B.

Supposons, en effet, que Z_{nm} soit un ensemble borelien tel que

$$P_n \subset Z_{nm} \subset Q'_m (= \mathcal{X} - Q_m).$$

Il vient

$$P_n \subset \prod_{m=1}^{\infty} Z_{nm} \subset \prod_{m=1}^{\infty} Q'_m = \left(\sum_{m=1}^{\infty} Q_m \right)' = Q',$$

donc

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} Z_{nm} \subset Q',$$

ce qui prouve que l'ensemble borelien $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} Z_{nm}$ sépare les ensembles P et Q .

Le lemme établi, supposons par impossible que les ensembles analytiques disjoints A et B ne soient pas séparables B. Soient f et g deux fonctions continues qui transforment $\mathcal{N}$ en A et en B : $A = f(\mathcal{N})$, $B = g(\mathcal{N})$. Il vient (cf. II, 1):

$$A = f(\mathcal{N}_1) + f(\mathcal{N}_2) + \dots \quad \text{et} \quad B = g(\mathcal{N}_1) + g(\mathcal{N}_2) + \dots$$

Il existe donc, d'après le lemme précédent, deux ensembles $f(\mathcal{N}_{n_1})$ et $g(\mathcal{N}_{m_1})$ non séparables B. Comme on a, en outre, d'après II (1):

$$f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k n}) \quad \text{et} \quad g(\mathcal{N}_{m_1 \dots m_k}) = \sum_{m=1}^{\infty} g(\mathcal{N}_{m_1 \dots m_k m}),$$

on en déduit par induction l'existence de deux suites infinies $n_1, n_2, \dots$ et $m_1, m_2, \dots$ telles que les ensembles $f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})$ et $g(\mathcal{N}_{m_1 \dots m_k})$ sont non séparables B, quel que soit k .

$$\text{Posons } \mathfrak{z} = \frac{1}{|n_1|} + \frac{1}{|n_2|} + \dots \quad \text{et} \quad \mathfrak{y} = \frac{1}{|m_1|} + \frac{1}{|m_2|} + \dots$$

¹⁾ Sierpiński, *Zarys teorii mnogości II*, p. 180.

Comme $f(\mathfrak{z}) \in A$, $g(\mathfrak{y}) \in B$ et $AB = 0$, il vient $|f(\mathfrak{z}) - g(\mathfrak{y})| > 0$. Les fonctions f et g étant continues, on a (cf. II, 5) pour k suffisamment grand:

$$\delta[f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})] + \delta[g(\mathcal{N}_{m_1 \dots m_k})] < |f(\mathfrak{z}) - g(\mathfrak{y})|$$

et comme (cf. II, 3):

$$f(\mathfrak{z}) \in f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \quad \text{et} \quad g(\mathfrak{y}) \in g(\mathcal{N}_{m_1 \dots m_k}),$$

il vient:

$$\overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})} \cdot g(\mathcal{N}_{m_1 \dots m_k}) = 0.$$

Cette dernière formule montre, en raison de l'inclusion $f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \subset \overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})}$, que les ensembles $f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})$ et $g(\mathcal{N}_{m_1 \dots m_k})$ sont séparables B, contrairement à l'hypothèse.

Corollaire 1¹⁾. Si les ensembles A et $\mathcal{X} - A$ sont analytiques, A est borelien.

Car, en posant $B = \mathcal{X} - A$ dans le théorème précédent, il vient $E = A$.

Le corollaire 1 implique que la famille des ensembles qui sont simultanément A et CA coïncide avec celle des ensembles boreliens.

Corollaire 2 (séparation simultanée). Etant donnée une suite d'ensembles analytiques disjoints $A_1, A_2, \dots$, il existe une suite d'ensembles boreliens disjoints $B_1, B_2, \dots$ tels que $A_n \subset B_n$.

D'après le théorème de séparation, il existe, en effet, un système d'ensembles boreliens E_{nm} tels que

$$A_n \subset E_{nm} \quad \text{et} \quad E_{nm} \cdot A_m = 0 \quad (\text{pour } n \neq m).$$

Posons:

$$B_1 = \prod_{m=2}^{\infty} E_{1m} \quad \text{et} \quad B_n = \prod_{m \neq n} E_{nm} - (B_1 + \dots + B_{n-1}).$$

L'inclusion $B_m \subset E_{mn}$ entraîne $A_n \cdot B_m \subset A_n \cdot E_{mn} = 0$ pour $m < n$. Donc $A_n \subset B_n$.

Pour une autre généralisation du th. de séparation, voir N° X.

¹⁾ M. Souslin, l. cit.

IV. Applications aux ensembles boreliens. *Théorème¹⁾.* Toute image biunivoque et continue d'un ensemble borelien est un ensemble borelien.

Tout ensemble borelien étant composé d'un ensemble dénombrable et d'une image biunivoque et continue de l'ensemble $\mathcal{N}$ (§ 33, II, cor. 3), il suffit de démontrer que f étant une fonction biunivoque et continue, définie sur $\mathcal{N}$, l'ensemble $f(\mathcal{N})$ est borelien.

La fonction f étant biunivoque, on conclut de II (2) que, pour k fixe, les ensembles du système $\{f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})\}$ sont disjoints. D'après le cor. 2 du N° III, il existe pour tout k un système d'ensembles boreliens disjoints $B_{n_1 \dots n_k}$ tels que $f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \subset B_{n_1 \dots n_k}$.

Posons $B_{n_i}^* = B_{n_i} \cdot \overline{f(\mathcal{N}_{n_i})}$ et, de façon générale,

$$B_{n_1 \dots n_k}^* = B_{n_1 \dots n_k} \cdot \overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})} \cdot B_{n_1 \dots n_{k-1}}^*.$$

On a l'inclusion

$$(1) \quad f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \subset B_{n_1 \dots n_k}^* \subset \overline{f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k})}.$$

En effet, cette formule étant évidente pour $k=1$, admettons-la pour $k-1$; d'après II (1):

$$f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \subset f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_{k-1}}) \subset B_{n_1 \dots n_{k-1}}^*,$$

d'où la formule (1).

La formule (1) implique en vertu de II (6) que

$$\prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{\delta^1 \dots \delta^k}) = \prod_{k=1}^{\infty} B_{\delta^1 \dots \delta^k}^* = \prod_{k=1}^{\infty} \overline{f(\mathcal{N}_{\delta^1 \dots \delta^k})} \text{ d'où } f(\mathcal{N}) = \sum_{\delta} \prod_{k=1}^{\infty} B_{\delta^1 \dots \delta^k}^*,$$

car $f(\mathcal{N}) = \sum_{\delta} \prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{\delta^1 \dots \delta^k})$ d'après II (6).

En outre, le système $\{B_{n_1 \dots n_k}^*\}$ étant régulier, c. à d. que $B_{n_1 \dots n_k} \subset B_{n_1 \dots n_{k-1}}$ et composé, pour k fixe, d'ensembles disjoints, il vient (cf. § 1, VI, 5):

$$\sum_{\delta} \prod_{k=1}^{\infty} B_{\delta^1 \dots \delta^k}^* = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\delta} B_{\delta^1 \dots \delta^k}^*.$$

¹⁾ M. Souslin, l. cit. Pour des généralisations de ce théorème, voir N° V et N° VIII.

La sommation $\sum_{\delta} B_{\delta^1 \dots \delta^k}^*$ étant étendue (pour k fixe) à un système dénombrable d'ensembles boreliens, l'ensemble $\sum_{\delta} B_{\delta^1 \dots \delta^k}^*$ est borelien. L'ensemble $f(\mathcal{N})$ l'est donc également, c. q. f. d.

En rapprochant le théorème précédent du corollaire 1 du § 33, II, on voit que les sous-ensembles boreliens des espaces complets séparables coïncident avec les images biunivoques et continues des espaces complets séparables 0-dimensionnels.

Remarque. B étant un ensemble borelien et g étant une transformation biunivoque et continue, l'espace $\mathcal{Y}$ qui contient $g(B)$ peut être supposé métrique arbitraire (complet séparable ou non). En effet, en tant qu'image continue d'un ensemble séparable, $g(B)$ est séparable. Complétons l'ensemble $g(B)$, qui est lui aussi séparable,

à un espace $\widetilde{g(B)}$ (voir § 29, VII). D'après le théorème qui vient d'être démontré, $g(B)$ est borelien dans $\widetilde{g(B)}$, donc dans $\overline{g(B)}$, c. à d. que $g(B)$ est la partie commune de $\widetilde{g(B)}$ et d'un ensemble borelien dans $\mathcal{Y}$. L'ensemble $g(B)$ est donc borelien dans $\mathcal{Y}$.

D'autre part, les hypothèses que l'espace $\mathcal{X}$ (contenant B) soit complet et séparable sont essentielles. Admettons, en effet, que B soit un ensemble non borelien situé dans l'intervalle $\mathcal{I} = \mathcal{Y}$ et que

1° $\mathcal{X} = B$ (cas où $\mathcal{X}$ est non complet)

2° $\mathcal{X}$ se compose de points de l'intervalle $\mathcal{I}$, la distance entre tout couple de points étant définie comme égale à l'unité (cas où $\mathcal{X}$ est non séparable).

Dans les deux cas l'ensemble B (borelien dans $\mathcal{X}$) se transforme par l'identité en un ensemble non borelien (dans $\mathcal{Y}$).

V. Applications aux fonctions mesurables B. 1. f étant une fonction biunivoque et mesurable B , définie sur un ensemble borelien E , l'ensemble $f(E)$ est borelien.

En effet, la fonction f étant biunivoque, on transforme l'ensemble $I = \bigcup_{x \in E} \{y = f(x)\}$ en $f(E)$ de façon biunivoque et continue, en le projetant sur l'axe $\mathcal{Y}$. L'ensemble I étant borelien d'après § 34, III, 4, $f(E)$ l'est également en vertu du théorème du N° IV.

2. Toute fonction f définie sur un ensemble analytique A et telle que l'ensemble $I = \bigcup_{xy} \{y = f(x)\}$ est analytique, est mesurable B .

Par conséquent (cf. § 34, III, 4), si A est borelien, l'hypothèse que l'ensemble I soit analytique implique qu'il est borelien.

Il s'agit de prouver que l'ensemble $f^{-1}(F)$ est borelien dans A , quel que soit l'ensemble fermé $F \subset \mathcal{Y}$. Or, en tant que projection de l'ensemble analytique $I \cdot (\mathcal{X} \times F)$, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est analytique. Pour la même raison l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{Y} - F) = A - f^{-1}(F)$ est analytique. D'après le théorème de séparation (N° III), il existe un ensemble borelien E tel que $f^{-1}(F) \subset E$ et $EA - f^{-1}(F) = 0$, d'où $f^{-1}(F) = EA$. Ceci prouve que $f^{-1}(F)$ est borelien dans A .

3. $y = f(x)$ étant une fonction biunivoque et mesurable B , définie sur un ensemble analytique A , la fonction inverse $x = f^{-1}(y)$ est mesurable B sur l'ensemble $f(A)$; c. à d. que la fonction f est une homéomorphie généralisée (dans le sens du § 27, I)¹⁾.

C'est une conséquence de l'énoncé précédent (en y remplaçant x par y , y par x et A par $f(A)$) en raison de l'identité

$$\bigcup_{xy} \{x = f^{-1}(y)\} = \bigcup_{xy} \{y = f(x)\} = I$$

et de l'analyticité des ensembles I et $f(A)$ (cf. § 34, III, 4 et 5).

4. f étant une fonction biunivoque et mesurable B , définie sur un ensemble borelien E , si P est un sous-ensemble projectif de E de classe $\mathbf{L}_n (n \geq 0)$, l'ensemble $f(P)$ est aussi de classe $\mathbf{L}_n$.

Car, la fonction $x = f^{-1}(y)$ étant selon 3 et 1. mesurable B sur $f(E)$, l'ensemble $f(P) = (f^{-1})^{-1}(P)$ est de classe $\mathbf{L}_n$ d'après § 34, III, 5.

5. f étant une fonction continue sur un ensemble borelien E , il existe un sous-ensemble C de E de classe $\mathbf{CA}$, tel que $f(C) = f(E)$ et que la fonction partielle $f|C$ est biunivoque.

Comme ensemble borelien, E est image biunivoque et continue d'un ensemble fermé $F \subset \mathcal{N}$ (voir § 33, II, cor. 1): $E = g(F)$. Posons $h(z) = fg(z)$ où $z \in F$. Selon I, 2, F contient un ensemble H

¹⁾ Ce théorème remonte (pour le cas où A est un intervalle) à Lebesgue (Journ. de Math. 1905, op. cit.). L'analyse de la démonstration de Lebesgue, qui n'était pas exacte, a suggéré à Souslin l'introduction des ensembles analytiques. La démonstration correcte est due à Lusin et Souslin.

de classe $\mathbf{CA}$, tel que $h(H) = h(F)$ et que la fonction $h|H$ est biunivoque. La fonction $g(z)$ étant biunivoque et continue, l'ensemble $C = g(H)$ est un $\mathbf{CA}$ d'après 4. En outre,

$$f(C) = fg(H) = h(H) = h(F) = fg(F) = f(E).$$

Enfin, si $x \neq x'$, $x \in C$ et $x' \in C$, il vient

$$x = g(z), x' = g(z'), z \neq z', z \in H \text{ et } z' \in H.$$

L'inégalité $z \neq z'$ entraîne

$$f(x) = h(z) \neq h(z') = f(x'),$$

de sorte que la fonction $f|C$ est biunivoque.

Remarques. 1°. Pour tout α , il existe une fonction f continue, biunivoque et telle que la fonction inverse f^{-1} n'est pas de classe α (voir § 27, I, 5)¹⁾.

2°. L'hypothèse que l'espace $\mathcal{X}$ (de la proposition 3) est *complet séparable* est essentielle. Soient, en effet, Z un ensemble non borelien situé dans l'intervalle $\mathcal{I} = 0,1$, Z^* son complémentaire placé dans l'intervalle $1,2$, $\mathcal{X} = Z + Z^*$, $\mathcal{Y} = \mathcal{I}$, $f(x) = x$ pour $x \in Z$ et $f(x) = x - 1$ pour $x \in Z^*$. La fonction f^{-1} est non mesurable B (elle est même dépourvue de la propriété de Baire, si Z en est dépourvu).

La séparabilité est essentielle d'après l'exemple 2° du N° IV (remarque).

3°. Il serait intéressant, d'autre part, de reconnaître, si l'on peut omettre dans l'énoncé 1 l'hypothèse de la séparabilité de l'espace $\mathcal{Y}$ (cf. la remarque du N° IV). Cette question est liée au problème de l'invariance de la séparabilité par rapport aux transformations mesurables B , qui se résout (cf. § 27, X, 7) par affirmative si l'on admet l'hypothèse du continu.

4°. *Application aux groupes métriques.* Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces complets qui constituent des groupes topologiques (cf. § 13, XII). Soit f une fonction additive (c. à d. que $f(x + x') = f(x) + f(x')$) qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$. On prouve que, si la fonction f jouit de la propriété de Baire (en particulier, si elle

¹⁾ Cf. W. Sierpiński, *Sur l'inversion des fonctions représentables analytiquement*, Fund. Math. 3 (1922), p. 26.

est mesurable B), elle est continue¹⁾. Il en résulte que si les groupes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{Y}$ sont complets séparables, toute fonction f additive, continue, biunivoque et telle que $f(\mathcal{E}) = \mathcal{Y}$ est bicontinue²⁾. Car $y = f(x)$ étant une fonction additive, la fonction inverse $x = f^{-1}(y)$ l'est également; comme la fonction f^{-1} est, en outre, mesurable B d'après 3, elle est continue.

VI. Deuxième théorème de séparation³⁾. A et B étant deux ensembles analytiques, il existe deux ensembles CA : D et H tels que

$$(1) \quad A - B \subset D, \quad B - A \subset H \quad \text{et} \quad DH = 0.$$

Les ensembles W_r étant les mêmes que dans le corollaire 2 du N° II, ordonnons l'ensemble $M_x = \bigcup_r (x \in W_r)$ selon la relation $r > s$. On a donc l'équivalence suivante:

$$\{x \in A\} = \{\text{l'ensemble } M_x = \bigcup_r (x \in W_r) \text{ n'est pas bien ordonné}\}.$$

De façon analogue, il existe une famille d'ensembles fermés Z_r avec $r \in \mathcal{R}$, telle que l'on a:

$$\{x \in B\} = \{\text{l'ensemble } N_x = \bigcup_r (x \in Z_r) \text{ n'est pas bien ordonné}\}.$$

Posons $M_x \prec N_x$ lorsque l'ensemble M_x est semblable à une partie de N_x . Soient:

$$D = B' \cdot \left[\bigcup_x (M_x \prec N_x) \right]' \quad \text{et} \quad H = A' \cdot \left[\bigcup_x (N_x \prec M_x) \right]',$$

X' désignant, comme toujours, le complémentaire de X .

La formule (1) est vérifiée. En effet, si $x \in A - B$, M_x n'est pas un ensemble bien ordonné, tandis que N_x en est un; on ne peut donc avoir $M_x \prec N_x$. Par conséquent,

$$x \in \left[\bigcup_x (M_x \prec N_x) \right]'$$

et comme $x \in B'$, il vient $x \in D$.

Donc $A - B \subset D$ et par raison de symétrie, $B - A \subset H$.

¹⁾ S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Mon. Mat. t. I (1932), p. 23.

²⁾ S. Banach, *Über metrische Gruppen*, Studia Math. 3 (1931), p. 111. Pour les nombreuses applications de ce théorème à l'Analyse (en particulier aux équations différentielles), on consultera le livre précité de Banach, chap. III. Cf. du même auteur, *Sur les fonctionnelles linéaires II*, Studia Math. 1 (1929), p. 238 et J. Schauder, *Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen*, Studia Math. 2 (1930), p. 1.

³⁾ Voir N. Lusin, *Ensembles analytiques*, p. 210 („deuxième principe“).

D'autre part, si $x \in B' \cdot A'$, les deux ensembles M_x et N_x sont bien ordonnés. Ils sont donc comparables, c. à d. que l'on a soit $M_x \prec N_x$, soit $N_x \prec M_x$. Par conséquent on ne peut avoir $x \in \left[\bigcup_x (M_x \prec N_x) \right]' \cdot \left[\bigcup_x (N_x \prec M_x) \right]'$. Il en résulte que $DH = 0$.

Pour prouver que D et H sont des ensembles CA , il suffit de démontrer que l'ensemble $\bigcup_x (M_x \prec N_x)$ est analytique. Or, c'est un cas particulier de § 34, IX, 3 (pour $n = 1$).

Corollaire 1 (séparation simultanée). Etant donnée une suite d'ensembles analytiques $A_1, A_2, \dots$, il existe une suite d'ensembles CA disjoints $C_1, C_2, \dots$ tels que

$$A_n - (A_1 + \dots + A_{n-1} + A_{n+1} + \dots) \subset C_n.$$

Soit, en effet, conformément au théorème précédent:

$$A_n - \sum_{k \neq n} A_k \subset D_n, \quad \sum_{k \neq n} A_k - A_n \subset H_n, \quad D_n \cdot H_n = 0.$$

Posons: $C_n = D_n \cdot \prod_{k \neq n} H_k$. Les ensembles C_n sont donc des ensembles CA disjoints. En outre:

$$A_n - \sum_{k \neq n} A_k \subset A_n - A_k \subset \sum_{n \neq k} A_n - A_k \subset H_k,$$

quel que soit $k \neq n$. Donc $A_n - \sum_{k \neq n} A_k \subset \prod_{k \neq n} H_k$, d'où l'inclusion demandée.

Corollaire 2. Etant donné un système d'ensembles analytiques $A_{n_1 \dots n_k}$ tels que

$$A_{n_1 \dots n_k} = A_{n_1 \dots n_{k-1}} + A_{n_1 \dots n_{k-2}} + \dots,$$

il existe un système régulier $\{C_{n_1 \dots n_k}\}$ d'ensembles CA , disjoints pour k fixe et tels que

$$(i) \quad A_{n_1 \dots n_k} - \sum' A_{m_1 \dots m_k} \subset C_{n_1 \dots n_k},$$

la sommation $\sum'$ s'étendant aux systèmes $(m_1 \dots m_k) \neq (n_1 \dots n_k)$.

Conformément au corollaire 1, soit, pour k fixe, $\{D_{n_1 \dots n_k}\}$ un système d'ensembles CA disjoints et tels que

$$A_{n_1 \dots n_k} - \sum' A_{m_1 \dots m_k} \subset D_{n_1 \dots n_k}.$$

Posons

$$C_{n_1} = D_{n_1} \quad \text{et} \quad C_{n_1 \dots n_k} = D_{n_1 \dots n_k} \cdot C_{n_1 \dots n_{k-1}} \quad \text{pour } k > 1.$$

Il s'agit de prouver que

$$A_{n_1 \dots n_k} - \sum' A_{m_1 \dots m_k} \subset C_{n_1 \dots n_{k-1}}.$$

Or cela résulte de l'inclusion (i) admise pour $k-1$ et des formules suivantes admises par hypothèse:

$$A_{n_1 \dots n_k} \subset A_{n_1 \dots n_{k-1}},$$

$$A_{m_1 \dots m_{k-1}} = A_{m_1 \dots m_{k-1}^1} + A_{m_1 \dots m_{k-1}^2} + \dots \subset \sum' A_{m_1 \dots m_k}.$$

Pour d'autres généralisations du II théorème de séparation, voir N° X.

Le N° suivant contient des applications de ce théorème.

VII. Ordre de valeur d'une fonction mesurable B .

Le point y est dit valeur d'ordre 1 de la fonction f , en symbole: $y \in Z_f$, lorsqu'il existe un et un seul x tel que $y = f(x)$. Le théorème suivant présente une généralisation de celui du N° IV.

Théorème 1¹⁾. Les valeurs d'ordre 1 d'une fonction f mesurable B définie sur un ensemble borelien constituent un ensemble CA .

Le théorème sera établi d'abord pour le cas de fonction continue. Tout ensemble borelien (indénombrable) dépourvu d'un ensemble dénombrable convenablement choisi étant image bi-univoque et continue de l'ensemble $\mathcal{N}$ (§ 33, II, cor. 3), il suffit de démontrer que, f étant une fonction continue définie sur $\mathcal{N}$, l'ensemble Z de ses valeurs d'ordre 1 est un CA .

On a par définition

$$Z = \sum_{\delta} [f(\delta) - f(\mathcal{N} - \delta)].$$

D'après II et § 30, III, on a

$$\delta = \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\delta^1 \dots \delta^k} \text{ et } f[\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\delta^1 \dots \delta^k}] = \prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{\delta^1 \dots \delta^k}).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} f(\delta) - f(\mathcal{N} - \delta) &= \prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{\delta^1 \dots \delta^k}) - f[\sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{N} - \mathcal{N}_{\delta^1 \dots \delta^k})] = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} [f(\mathcal{N}_{\delta^1 \dots \delta^k}) - f(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{\delta^1 \dots \delta^k})]. \end{aligned}$$

¹⁾ N. Lusin, op. cit., p. 257.

Posons

$$A_{n_1 \dots n_k} = f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \text{ et } B_{n_1 \dots n_k} = f(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}).$$

$$\text{Donc } Z = \sum_{\delta} \prod_{k=1}^{\infty} (A_{\delta^1 \dots \delta^k} - B_{\delta^1 \dots \delta^k}).$$

D'après II (1) et (2), on a $B_{n_1 \dots n_k} = \sum' A_{m_1 \dots m_k}$, la sommation $\sum'$ s'étendant aux systèmes $(m_1 \dots m_k) \neq (n_1 \dots n_k)$. D'autre part,

$$A_{n_1 \dots n_{k+1}} = A_{n_1 \dots n_k 1} + A_{n_1 \dots n_k 2} + \dots$$

selon II (1). Le cor. 2 du N° VI est donc applicable. Posons

$$C_{n_1 \dots n_k}^* = C_{n_1 \dots n_k} \cdot \bar{A}_{n_1 \dots n_k} - B_{n_1 \dots n_k},$$

$C_{n_1 \dots n_k}$ ayant le même sens que dans le cor. 2. On a par conséquent

$$(1) \quad A_{n_1 \dots n_k} - B_{n_1 \dots n_k} \subset C_{n_1 \dots n_k}^* \subset \bar{A}_{n_1 \dots n_k} - B_{n_1 \dots n_k},$$

et les ensembles $C_{n_1 \dots n_k}^*$ sont des CA disjoints pour k fixe. En outre, le système $\{C_{n_1 \dots n_k}^*\}$ est régulier, car $\{C_{n_1 \dots n_k}\}$ est régulier et l'inclusion $\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k} \subset \mathcal{N}_{n_1 \dots n_{k-1}}$ (cf. II (1)) donne:

$$A_{n_1 \dots n_k} = f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \subset f(\mathcal{N}_{n_1 \dots n_{k-1}}) = A_{n_1 \dots n_{k-1}} \subset \bar{A}_{n_1 \dots n_{k-1}},$$

$$B_{n_1 \dots n_k} = f(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{n_1 \dots n_k}) \supset f(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{n_1 \dots n_{k-1}}) = B_{n_1 \dots n_{k-1}},$$

d'où on déduit la formule

$$\begin{aligned} C_{n_1 \dots n_k}^* &= C_{n_1 \dots n_k} \cdot \bar{A}_{n_1 \dots n_k} - B_{n_1 \dots n_k} \subset \\ &\subset C_{n_1 \dots n_{k-1}} \cdot \bar{A}_{n_1 \dots n_{k-1}} - B_{n_1 \dots n_{k-1}} = C_{n_1 \dots n_{k-1}}^*. \end{aligned}$$

La double inclusion (1) implique que

$$(2) \quad Z \subset \sum_{\delta} \prod_{k=1}^{\infty} C_{\delta^1 \dots \delta^k}^* \subset \sum_{\delta} \prod_{k=1}^{\infty} (A_{\delta^1 \dots \delta^k} - B_{\delta^1 \dots \delta^k}).$$

D'après II (6) et § 1, V, il vient

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} (A_{\delta^1 \dots \delta^k} - B_{\delta^1 \dots \delta^k}) &= \prod_{k=1}^{\infty} f(\overline{\mathcal{N}_{\delta^1 \dots \delta^k}}) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} B_{\delta^1 \dots \delta^k}' = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} f(\mathcal{N}_{\delta^1 \dots \delta^k}) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} B_{\delta^1 \dots \delta^k}' = \prod_{k=1}^{\infty} (A_{\delta^1 \dots \delta^k} - B_{\delta^1 \dots \delta^k}), \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{\delta} \prod_{k=1}^{\infty} (A_{\delta^1 \dots \delta^k} - B_{\delta^1 \dots \delta^k}) = \sum_{\delta} \prod_{k=1}^{\infty} (A_{\delta^1 \dots \delta^k} - B_{\delta^1 \dots \delta^k}) = Z.$$

Par conséquent, les trois membres de la double inclusion (2) sont identiques. Le système $\{C_{n_1 \dots n_k}^*\}$ étant régulier et disjoint pour k fixe, la formule § 1, VI, 5 implique donc que l'ensemble

$$Z = \sum_{\delta} \prod_{k=1}^{\infty} C_{\delta^1 \dots \delta^k}^* = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\delta} C_{\delta^1 \dots \delta^k}^* = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 \dots n_k} C_{n_1 \dots n_k}^*$$

est un **CA**.

Passons à présent au cas où g est une fonction mesurable B définie sur un ensemble borelien E . Les ensembles E et $g(E)$ étant situés dans les espaces (complets séparables) $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, l'ensemble $I = \overline{E} \{y = g(x)\}$ est borelien dans l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Evidemment l'ensemble des valeurs d'ordre 1 de la fonction g coïncide avec celui des valeurs d'ordre 1 de la projection sur l'axe $\mathcal{Y}$ (considérée comme fonction continue définie sur l'ensemble I) et ce dernier est — comme nous venons de démontrer — un ensemble **CA**.

Remarques. 1° La formule

$$\{y \in Z_f\} = \sum_x [y = f(x)] \cdot \prod_{xx'} \{[y = f(x) = f(x')] \rightarrow (x = x')\}$$

conduirait, dans le cas considéré ici, à un résultat moins précis. Cependant on en déduit que, si f est définie sur un F_σ d'un espace compact, Z_f est différence de deux F_σ (ce résultat est précis).

2° *Théorème réciproque.* C étant un **CA** contenu dans $\mathcal{X}$, il existe une fonction continue f définie sur un sous-ensemble fermé de $\mathcal{N}$ et telle que $C = Z_f$.

Soient, en effet, F un sous-ensemble fermé de $\mathcal{N}$ contenu dans l'intervalle $0, \frac{1}{2}$ et $f(\zeta)$, $\zeta \in F$, une fonction biunivoque, continue et telle que $f(F) = \mathcal{X}$ (cf. § 32, III, corollaire). Il suffit de définir la fonction $f(\zeta)$ pour $\frac{1}{2} < \zeta < 1$ de façon que la partie commune de $\mathcal{N}$ et de l'intervalle $\frac{1}{2}, 1$ soit transformée en $\mathcal{X} - C$.

La valeur y de la fonction f est dite d'ordre indénombrable lorsque l'ensemble $f^{-1}(y)$ est indénombrable. En symbole:

$$(y \in A_f) = [\overline{f^{-1}(y)}] > \aleph_0.$$

Théorème 2¹⁾. Les valeurs d'ordre indénombrable d'une fonction f mesurable B , définie sur un ensemble analytique, constituent un ensemble analytique.

¹⁾ Cf.: S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, Sur un problème concernant les fonctions continues, Fund. Math. 6 (1924), p. 161, ma note de Fund. Math. 17, p. 261 et S. Saks, Fund. Math. 19 (1932), p. 218.

Posons, en effet, $I = \overline{E}_{xy} [y = f(x)]$. L'ensemble I étant analytique (§ 34, III, 4), tout revient à établir l'énoncé suivant:

Théorème 3. Etant donné, dans le produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ de deux espaces complets séparables, un ensemble analytique I , l'ensemble A des y tels que l'ensemble $\overline{E}_x [(xy) \in I]$ est indénombrable est analytique.

Or, en tant qu'ensemble analytique, I admet une représentation paramétrique sur l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels, c. à d. qu'il existe deux fonctions continues g et h définies sur $\mathcal{N}$ et telles qu'à tout point xy de I correspond un ζ remplissant les égalités $x = g(\zeta)$ et $y = h(\zeta)$. La condition pour que l'ensemble $\overline{E}_x [(xy) \in I]$ soit indénombrable équivaut donc (§ 32, V, cor. 3) à l'existence dans $\mathcal{N}$ d'une suite dense en soi sur laquelle:

1° la fonction $h(\zeta)$ est identiquement égale à y ,

2° la fonction $g(\zeta)$ est biunivoque.

En symbole:

$$\{y \in A\} = \sum_{\xi} \prod_n \{[y = h(\xi^n)] \cdot \prod_{m \neq n} [g(\xi^n) \neq g(\xi^m)]\},$$

où ξ parcourt l'ensemble des suites denses en soi extraites de $\mathcal{N}$. Cet ensemble de suites est topologiquement complet, en tant qu'un G_δ dans l'espace complet $\mathcal{N}^{\aleph_0}$ (§ 26, XII, 6). Il en résulte que l'ensemble

$$\overline{E}_{\xi} \prod_n \{[y = h(\xi^n)] \cdot \prod_{m \neq n} [g(\xi^n) \neq g(\xi^m)]\}$$

est un G_δ . Comme projection de ce dernier, A est analytique.

Remarques. 1) Réciproquement, à tout ensemble analytique A correspond une fonction continue $f(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{N}$, telle que $A = A_f$.

Posons, en effet,

$$g\left(\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right) = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots$$

Par conséquent $g(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$, et l'ensemble $g^{-1}(\zeta)$ est indénombrable pour chaque ζ . Soit h une fonction continue qui transforme $\mathcal{N}$ en A . Il suffit de poser $f(\zeta) = hg(\zeta)$.

2) L'ensemble A du th. 3 peut ne pas être borelien même dans le cas où la fonction f est continue et où $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{I}$.

3) Saks (loco cit.) a déduit du th. 3 l'intéressante application suivante. Soient: $\mathcal{X} = \mathcal{I}$, $\mathcal{Y} = \mathcal{G}^{\mathcal{I}}$, I = l'ensemble des „points” xy du produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ tels que la dérivée droite de la fonction y est égale à $+\infty$ au point x . L'ensemble I est analytique (il est un $F_{\sigma\delta}$), car

$$\{(xy) \in I\} = \prod_n \sum_m \prod_{0 < h \leq \frac{1}{m}} \left\{ \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \geq n \right\}.$$

Le th. 3 implique donc que l'ensemble des fonctions continues qui possèdent la dérivée droite infinie dans une infinité indénombrable de points est analytique (dans l'espace $\mathcal{Y}$).

En outre, cet ensemble n'est en aucun point de I-e catégorie (ibid. p. 215), donc — en vertu de la propriété de Baire (cf. § 11, IV, cor. 2) — son complémentaire est de I-e catégorie (et non vide d'après un théorème de M. Besicovitch, ibid. p. 212). On rapprochera cet énoncé de § 30, VIII.

Désignons respectivement par I_f , D_f et C_f les ensembles des y tels que:

- 1° $f^{-1}(y)$ contient un point isolé,
- 2° $f^{-1}(y)$ est dénombrable (fini ou infini) et non vide,
- 3° $f^{-1}(y)$ contient un point qui n'en est pas un point de condensation.

Les corollaires qui suivent présentent des généralisations du théorème du N° IV.

*Corollaires 1—3*¹⁾. Si la fonction f définie sur un ensemble borelien est mesurable B , les ensembles I_f , D_f et C_f sont des CA .

ad 1. Soit $R_1, R_2, \dots$ la base de l'espace $\mathcal{X}$. Désignons par f_n la fonction partielle $f|_{R_n}$. Il vient

$$I_f = Z_{f_1} + Z_{f_2} + \dots$$

ad 2. La démonstration se ramène, comme celle du th. 1, au cas où f est une fonction continue définie sur l'espace $\mathcal{N}$. Les ensembles dénombrables et non vides (situés dans l'espace $\mathcal{N}$ complet) sont caractérisés parmi les ensembles fermés F par les deux conditions suivantes: 1° F contient un point isolé, 2° F n'est pas indénombrable. Il vient

$$D_f = I_f - A_f.$$

¹⁾ S. Braun, *Quelques théorèmes sur les cribles boreliens*, Fund. Math. **20** (1933), p. 168—172.

ad 3. La fonction f_n étant la même que dans 1, on a

$$C_f = D_{f_1} + D_{f_2} + \dots$$

*Corollaire 4*¹⁾. Si la fonction f est mesurable B et l'ensemble E est borelien, tandis que l'ensemble $f(E)$ ne l'est pas, l'ensemble $f(E) - C_f$ ne l'est non plus.

Car dans le cas contraire l'ensemble $f(E) = C_f + [f(E) - C_f]$ serait un CA d'après le cor. 3. Comme ensemble analytique (V, 1), $f(E)$ serait donc (N^0 III, cor. 1) borelien.

Le corollaire suivant résulte directement du cor. 2:

Corollaire 5. f étant une fonction continue sur un espace $\mathcal{X}$ complet séparable et telle que $f(\mathcal{X}) = D_f$ (c. à d. telle que toutes les valeurs de f sont d'ordre dénombrable), l'ensemble $f(\mathcal{X})$ est borelien.

Plus encore, $\mathcal{X}$ est somme d'une série d'ensembles boreliens: $\mathcal{X} = B_1 + B_2 + \dots$, tels que les fonctions partielles $f|_{B_n}$ sont bicontinues²⁾.

VIII. Constituantes des ensembles CA . Soit A un ensemble analytique et — conformément au corollaire 2 du N° II — soit $\{W_r\}$ un crible composé d'ensembles fermés (ou, plus généralement: boreliens) par lequel A est criblé. Posons, comme d'habitude:

$$(1) \quad M_x = \bigcup_r (x \in W_r), \quad (2) \quad \mu(x) = \text{le type d'ordre de } M_x,$$

$$(3) \quad A_\tau = \bigcup_x [\mu(x) = \tau].$$

L'ensemble A étant criblé par le crible $\{W_r\}$, on a donc

$$(4) \quad \mathcal{X} - A = \sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha.$$

Les ensembles A_α avec $\alpha < \Omega$ sont appelés *constituantes de l'ensemble $\mathcal{X} - A$ déterminées par le crible $\{W_r\}$* ³⁾.

Rangeons les fractions binaires $r \in \mathcal{R}$ en une suite infinie $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, considérée désormais comme fixe. Rappelons les définitions du crible $\{C_r\}$ et des constituantes L_α envisagées au § 1, VIII. L'ensemble C_{r_n} est défini par l'équivalence

$$(5) \quad (t \in C_{r_n}) \equiv (t^{(n)} = 2),$$

¹⁾ Ibid. Cf. aussi N. Lusin, loco cit. p. 171.

²⁾ Pour la démonstration voir N. Lusin, loco cit. p. 237 et H. Hahn, *Reelle Funktionen*, p. 381 (42.5.3).

³⁾ Cette notion est due à M. Lusin, *Ensembles analytiques* (1930), p. 188.

où $t = [t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(n)}, \dots]$ est un point de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor. On pose, en outre,

$$(6) \quad R_t = \bigcup_r (t \in C_r), \quad (7) \quad \bar{t} = \text{le type d'ordre de } R_t,$$

$$(8) \quad L_\tau = \bigcup_t (\bar{t} = \tau) \quad \text{et} \quad L = \bigcup_t (\bar{t} < \Omega) = \sum_{\alpha < \Omega} L_\alpha.$$

L'équivalence (5) signifie que la fonction caractéristique de la suite $C_1, C_2, \dots$ est l'identité.

1. Soit f la fonction caractéristique de la suite $W_1, W_2, \dots$, c. à d. que $f(x)$ est un point de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor tel que

$$(9) \quad [f^{(n)}(x) = 2] = (x \in W_{r_n}).$$

On a alors les formules:

$$(10) \quad M_x = R_{f(x)}, \quad \text{d'où} \quad (11) \quad \mu(x) = \overline{f(x)},$$

$$(12) \quad A_\tau = f^{-1}(L_\tau) \quad \text{et} \quad (13) \quad \mathcal{X} - A = f^{-1}(L).$$

On a, en effet, selon (1), (9), (5) et (6):

$$(r_n \in M_x) = (x \in W_{r_n}) = [f^{(n)}(x) = 2] = [f(x) \in C_{r_n}] = [r_n \in R_{f(x)}],$$

d'où la formule (10) et, en vertu de (2) et (7), la formule (11).

L'identité (12) se déduit de (8), (11) et (3):

$$[x \in f^{-1}(L_\tau)] = [f(x) \in L_\tau] = [\overline{f(x)} = \tau] = [\mu(x) = \tau] = (x \in A_\tau).$$

Enfin (13) résulte de (4), (12) et (8):

$$\mathcal{X} - A = \sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha = \sum_{\alpha < \Omega} f^{-1}(L_\alpha) = f^{-1}\left(\sum_{\alpha < \Omega} L_\alpha\right) = f^{-1}(L).$$

Nous déduirons de l'énoncé 1 les deux théorèmes suivants:

2. *Théorème de Lusin-Sierpiński*¹⁾. L'ensemble $L = \bigcup_t (\bar{t} < \Omega)$ n'est pas analytique (il est un $\mathcal{CA}$ d'après le corollaire 2 du § 34, IX).

En effet, il existe dans l'espace $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels un ensemble analytique A dont le complémentaire n'est pas analytique (§ 34, VI). Soit $\{W_r\}$ un crible composé d'ensembles fermés par lequel A est criblé. L'ensemble W_{r_n} étant fermé, sa fonction caractéristique (donc la fonction $f^{(n)}$ définie par la formule (9))

est de I-e classe (§ 27, I, 1); il en est donc de même de la fonction caractéristique f de la suite $W_1, W_2, \dots$ (§ 27, VI, 1'). En supposant que l'ensemble L soit analytique, on en déduirait (§ 34, III, 5) que $f^{-1}(L)$ l'est également. Mais (d'après (13)): $f^{-1}(L) = \mathcal{N} - A$, tandis que l'ensemble $\mathcal{N} - A$ est non analytique par hypothèse.

3. Les constituantes A_α sont des ensembles boreliens.

De façon générale, les ensembles A_τ sont analytiques.

En effet, tout L_α étant borelien pour $\alpha < \Omega$ (d'après § 26, XII, 1) et la fonction f étant de I-e classe, l'ensemble A_α est borelien en vertu de (12) (cf. § 27, III, 1).

Chaque L_τ étant analytique (§ 34, IX, 10), il en est de même de $f^{-1}(L_\tau)$ (cf. § 34, III, 5).

4. Lemme. Les ensembles $\bigcup_{ix} [\bar{t} \prec \mu(x)]$, $\bigcup_{ix} [\mu(x) \prec \bar{t}]$ et $\bigcup_{ix} [\bar{t} = \mu(x)]$ sont analytiques.

Ce lemme se déduit directement des lemmes 3 et 8 du § 34, IX, 3 et 8.

5. *Théorème de recouvrement*¹⁾. Soit E un ensemble analytique disjoint de A , c. à d.

$$(13) \quad E \subset \mathcal{X} - A = \sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha.$$

Il existe un indice $\alpha_0 < \Omega$ tel que

$$(14) \quad E \subset \sum_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha.$$

Supposons, par contre, qu'il existe pour tout $\alpha < \Omega$ un $\xi \geq \alpha$ tel que $E A_\xi \neq \emptyset$; cela veut dire qu'il existe un $x \in E$ tel que $\mu(x) = \xi$, donc que $\mu(x) \geq \alpha$. L'inégalité $\bar{t} < \Omega$ équivaut, par conséquent, à l'existence d'un $x \in E$ tel que $\mu(x) \geq \bar{t}$, donc que $\bar{t} \prec \mu(x)$ (puisque, pour $x \in E$, $\mu(x)$ est un nombre ordinal). En symbole:

$$(\bar{t} < \Omega) = \sum_x (x \in E) [\bar{t} \prec \mu(x)].$$

Les fonctions propositionnelles $x \in E$ et $\bar{t} \prec \mu(x)$ étant de classe $\mathcal{A}$ (la première par hypothèse et la deuxième d'après 4), il en est de même de la fonction propositionnelle $\bar{t} < \Omega$; mais cela contredit le th. 2, d'après lequel l'ensemble $L = \bigcup_t (\bar{t} < \Omega)$ n'est pas analytique.

¹⁾ Journ. de Math. 1923, p. 53. La démonstration du texte se trouve dans ma note *Sur les suites analytiques d'ensembles*, Fund. Math. 29 (1937), p. 57.

¹⁾ Théorème dû à M. Lusin. Cf. *Ensembles analytiques*, p. 183.

Remarque. Le th. 5 conduit à une démonstration du corollaire 1 du N° III qui ne fait pas intervenir le I théorème séparation.

En effet, les ensembles A et $\mathcal{X}-A$ étant supposés analytiques, on a d'après 5:

$$\mathcal{X}-A \subset \sum_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha, \text{ donc } \mathcal{X}-A = \sum_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha.$$

Chacun des ensembles A_α étant borelien (th. 3), il en est de même de l'ensemble $\sum_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha = \mathcal{X}-A$.

Rapproché du th. 3, le th. 5 implique aussitôt le corollaire suivant:

6. Pour que l'ensemble $\mathcal{X}-A = \sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha$ soit analytique (ou, ce qui revient au même, borelien), il faut et il suffit que la fonction $\mu(x)$ n'admette qu'un ensemble dénombrable de nombres ordinaux comme valeurs; c. à d. que l'on ait $A_\alpha = 0$ pour α suffisamment grand.

7. Il existe un $\alpha_0 < \Omega$ tel que l'ensemble $\sum_{\xi \geq \alpha_0} A_\xi$ est de I-e catégorie.

En effet, comme ensemble $\mathcal{CA}$, l'ensemble $\mathcal{X}-A$ jouit de la propriété de Baire (II, 1). Il contient donc un ensemble borelien E (un G_δ) tel que $\mathcal{X}-A-E$ est de I-e catégorie (§ 11, IV, 2). Conformément à (14), il vient

$$\sum_{\xi \geq \alpha_0} A_\xi = \mathcal{X}-A - \sum_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha \subset \mathcal{X}-A-E,$$

d'où la conclusion demandée.

8. Tout ensemble Z qui se laisse ranger en une suite du type Ω : $x_0, x_1, \dots, x_\alpha, \dots$ telle que $\mu(x_0) < \mu(x_1) < \dots < \mu(x_\alpha) < \dots < \Omega$, est de I-e catégorie sur tout ensemble parfait¹⁾.

Le raisonnement précédent se relativise en effet par rapport à tout ensemble parfait P donné en avance. De sorte que, pour P fixe, il existe un α_0 tel que l'ensemble des x_ξ avec $\xi \geq \alpha_0$ (qui appartiennent à P) est de I-e catégorie sur P . L'ensemble des x_α avec $\alpha < \alpha_0$ étant dénombrable, donc de I-e catégorie sur P (vu que P est parfait), on en conclut que ZP est de I-e catégorie sur P .

¹⁾ Pour une autre construction d'ensembles de I-e catégorie sur tout ensemble parfait, voir § 19, I, 5.

9. Les ensembles L_α ($\alpha < \Omega$) sont de classes boreliennes non bornées, c. à d. à tout $\beta < \Omega$ correspond un L_α qui n'est pas de classe β .

Pour s'en convaincre, il suffit — en vertu de (12) — d'établir l'existence d'un ensemble $\mathcal{CA}$ dont les constituantes sont de classes non bornées. Or, nous allons démontrer que:

10¹⁾. $F(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{N}$, désignant une fonction universelle par rapport à la famille des sous-ensembles analytiques de l'espace $\mathcal{N}$ et telle que l'ensemble $A = \bigcup_{\zeta \in \mathcal{N}} F(\zeta)$ est analytique (cf. § 34, V) et $\{W_r\}$ désignant un crible (composé d'ensembles fermés) par lequel A est criblé, — les constituantes A_α qui correspondent à ce crible sont de classes boreliennes non bornées.

Supposons, par impossible, que toutes ces constituantes soient de classe borelienne β . Soit B un ensemble borelien ($\subset \mathcal{N}$) qui n'est pas de classe $\beta+1$. Il existe un ζ_0 tel que $F(\zeta_0) = \mathcal{N}-B$. Posons

$$V = \zeta_0 \times \mathcal{N} \text{ (la „verticale” d'abscisse } \zeta_0) \text{ et } D = \zeta_0 \times B.$$

Il vient

$$D = \zeta_0 \times [\mathcal{N} - F(\zeta_0)] = V - VA = V - A.$$

L'ensemble D étant borelien, il existe d'après 5 un α_0 tel que

$$D \subset \sum_{\alpha < \alpha_0} A_\alpha, \text{ d'où } V - A \subset \sum_{\alpha < \alpha_0} VA_\alpha, \text{ donc } V - A = \sum_{\alpha < \alpha_0} VA_\alpha,$$

puisque (cf. (13)) $VA_\alpha \subset V - A$. Or, les ensembles A_α étant par hypothèse de classe β , on en conclut que l'ensemble $V - A$ (c. à d. l'ensemble D , donc l'ensemble $\mathcal{N} - F(\zeta_0)$) est de classe $\beta+1$. Mais alors l'ensemble B serait de classe $\beta+1$, contrairement à l'hypothèse.

IX. Notion de projectivité des fonctions propositionnelles comprenant des types ordinaux variables²⁾. Soit τ une variable parcourant l'ensemble $\mathcal{T}$ des types d'ordre dénombrables; t étant un élément de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor, i désigne son type d'ordre conformément au § 1, VIII.

Définition 1. Une fonction propositionnelle de n variables $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ est dite de classe projective L_n lorsque la fonction propositionnelle $\varphi(i_1, \dots, i_n)$ est de classe L_n , c. à d. que l'ensemble $\bigcup_{i_1, \dots, i_n} \varphi(i_1, \dots, i_n)$ est de classe L_n .

¹⁾ Voir N. Lusin et W. Sierpiński, C. R. Paris **189** (1929), p. 794.

²⁾ Voir mes notes: Sur la géométrisation des types d'ordre dénombrable et Les suites transfinies d'ensembles et les ensembles projectifs, Fund. Math. **28** (1937).

Exemples. Les fonctions propositionnelles: „ τ est un type limite”, „ τ est un type pair”, „ τ est un type impair”, „ $\tau = \alpha$ ” où α est un nombre fixe $< \Omega$, sont boreliennes, car les ensembles correspondants sont boreliens (d'après § 26, XII, 3, 4 et 1). De façon analogue, les relations (fonctions propositionnelles de deux variables) „ $\tau < \sigma$ ” et „ $\tau = \sigma$ ” sont analytiques (d'après § 34, IX, 4 et 9). La fonction propositionnelle „ $\tau < \Omega$ ” est de classe **CA** (non analytique, cf. VIII, 2).

Dans le même ordre d'idées, nous allons établir les deux énoncés suivants:

1. L'addition $\tau = \sigma + \varrho$, considérée comme fonction propositionnelle de trois variables, est une opération analytique.

Soient, en effet, T , S et R trois sous-ensembles de l'ensemble des fractions binaires $\mathcal{R} = (r_1, r_2, \dots)$, ayant respectivement les types d'ordre τ , σ et ϱ . Désignons par R^* l'ensemble qui s'obtient de R en ajoutant 2 à chaque élément de R ; les ensembles S et R^* étant disjoints, $\sigma + \varrho$ est donc le type d'ordre de l'ensemble $S + R^*$. La condition pour que l'ensemble T soit semblable à $S + R^*$ peut s'exprimer comme suit: il existe deux suites de nombres réels $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots]$ et $\eta = [\eta^1, \eta^2, \dots]$ telles que:

1° tout élément de $\mathfrak{z}$ appartient à T et tout élément de η appartient à $S + R^*$,

2° tout élément de T est un terme de la suite $\mathfrak{z}$ et tout élément de $S + R^*$ est un terme de η ,

3° les conditions $\mathfrak{z}^i < \mathfrak{z}^j$ et $\eta^i < \eta^j$ sont équivalentes.

En symbole:

$$(\tau = \sigma + \varrho) = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_n \{ (\mathfrak{z}^n \in T) [(\eta^n \in S) + ((\eta^n - 2) \in R)] \} \cdot \\ \cdot \prod_k \{ [(r_k \in T) \rightarrow \sum_n (r_k = \mathfrak{z}^n)] \cdot [(r_k \in S) \rightarrow \sum_n (r_k = \eta^n)] [(r_k \in R) \rightarrow \sum_n (r_k = \eta^n - 2)] \} \cdot \\ \cdot \prod_j \{ (\mathfrak{z}^i < \mathfrak{z}^j) = (\eta^i < \eta^j) \}.$$

$\mathfrak{z}$ étant le type d'ordre de R_t (cf. § 1, VIII), l'égalité $\mathfrak{z} = \mathfrak{z} + \mathfrak{r}$ équivaut à l'expression qui s'obtient de l'équivalence précédente en remplaçant T par R_t , S par R_s et R par R_r . En tenant compte de l'équivalence

$$(\mathfrak{z}^n \in R_t) = \sum_k (r_k = \mathfrak{z}^n) (r_k \in R_t) = \sum_k (r_k = \mathfrak{z}^n) (t^{(k)} = 2)$$

et des équivalences analogues concernant $(\eta^n \in R_s)$ et $[(\eta^n - 2) \in R_r]$, on constate facilement que la fonction propositionnelle (des va-

riables $\mathfrak{z}$, η , t , s et r) qui suit l'opérateur $\sum$ est borelienne. La fonction propositionnelle $\mathfrak{z} = \mathfrak{z} + \mathfrak{r}$ est donc analytique.

2. La multiplication $\tau = \sigma \varrho$ est une opération analytique.

En notations de la démonstration précédente, on a

$$(\tau = \sigma \varrho) = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_n [(\mathfrak{z}^n \in T) (\eta^n \in S) (w^n \in R)] \cdot \\ \cdot \prod_k [(r_k \in T) \rightarrow \sum_n (r_k = \mathfrak{z}^n)] [(r_k \in S) \rightarrow \sum_n (r_k = \eta^n)] [(r_k \in R) \rightarrow \sum_n (r_k = w^n)] \cdot \\ \cdot \prod_j [(\mathfrak{z}^i < \mathfrak{z}^j) = (w^i < w^j) + (w^i = w^j) (\eta^i < \eta^j)].$$

Un raisonnement tout à fait analogue au précédent prouve que la fonction propositionnelle $\mathfrak{z} = \mathfrak{z} \cdot \mathfrak{r}$ est analytique.

La définition 1 peut être étendue de façon à embrasser les fonctions propositionnelles qui — à côté des types ordinaux variables — contiennent des variables parcourant un ou plusieurs espaces complets séparables.

Définition 2. Une fonction propositionnelle $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n, x_1, \dots, x_n)$ est dite de classe L_n lorsque la fonction propositionnelle $\varphi(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n, x_1, \dots, x_n)$ est de classe L_n .

Ainsi, par exemple, en notations du N° VIII, les fonctions propositionnelles $\tau < \mu(x)$ et $\tau = \mu(x)$ sont analytiques (VIII, 4); il en est donc de même de la fonction propositionnelle $x \in A_\tau$, c. à d. de l'ensemble $\bigcup_{\tau \in A} (x \in A_\tau)$.

Pour calculer la classe projective d'une fonction propositionnelle comprenant des types ordinaux variables, on se sert des règles suivantes, qui se déduisent facilement des règles 1—5 du § 34, VIII:

1° Si $\varphi(\tau, x)$ est de classe L_n , sa négation $\varphi'(\tau, x)$ est de classe CL_n .

2° Si $\varphi(\tau, x)$ est de classe L_n dans $\mathcal{T} \times \mathcal{X}$, $\varphi(\tau, x)$ est de classe L_n dans $\mathcal{T}^2 \times \mathcal{X}$, ainsi que dans $\mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

3° $\varphi_1(\tau, x)$, $\varphi_2(\tau, x)$, ... étant une suite finie ou infinie de fonctions de classe L_n (n fixe), les fonctions $\sum_k \varphi_k(\tau, x)$ et $\prod_k \varphi_k(\tau, x)$ le sont également.

4° $\varphi(\tau, \sigma, w, y)$ étant de classe L_n , les fonctions $\sum_\sigma \varphi(\tau, \sigma, w, y)$ et $\sum_\tau \varphi(\tau, \sigma, w, y)$ sont de classe PL_n et les fonctions $\prod_\sigma \varphi(\tau, \sigma, w, y)$ et $\prod_\tau \varphi(\tau, \sigma, w, y)$ sont de classe $CPCL_n$.

5° $\varphi(\tau, \sigma, w, y)$ étant de classe L_n , il en est de même des fonctions $\varphi(\tau, \sigma_0, w, y)$, $\varphi(\tau, \sigma, w, y_0)$, $\varphi(\tau, \tau, w, y)$ et $\varphi(\tau, \sigma, w)$.

Complétons cette liste par les deux règles suivantes:

6° $\varphi(\sigma, x)$ étant de classe L_n , les fonctions

$$\psi(\tau, x) = \sum_{\sigma < \tau} \varphi(\sigma, x) \quad \text{et} \quad \chi(\tau, x) = \prod_{\sigma < \tau} \varphi(\sigma, x)$$

le sont également.

Il suffit évidemment d'établir ce théorème pour la fonction $\varphi(\sigma)$, qui ne dépend pas de x . Or, nous avons défini au § 26, XII, 1 une suite de fonctions continues $\{t^{[k]}\}$ telle que la suite $\overline{t^{[1]}}, \overline{t^{[2]}}, \dots$ parcourt tous les nombres ordinaux $< \bar{t}$ (à condition que $t \neq 0$). Par conséquent, l'existence d'un $\sigma < \bar{t}$ (où $t \neq 0$) tel que $\varphi(\sigma)$, équivaut à l'existence d'un k tel que $\varphi(\overline{t^{[k]}})$. Autrement dit: en posant $\tau = \bar{t}$, on a

$$\psi(\tau) = \psi(\bar{t}) = (t \neq 0) \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\overline{t^{[k]}}).$$

La fonction $t^{[k]}$ étant continue, on conclut de la règle 3° que ψ est de classe L_n . Par l'application de la règle de Morgan, on en déduit que la fonction χ est également de classe L_n .

Étant donnée une fonction $\mu(\xi)$ dont l'argument parcourt l'espace $\mathcal{X}$ ou l'ensemble $\mathcal{T}$ et dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{C}$ nous dirons que cette fonction est de classe L_n lorsque la fonction propositionnelle $\sigma = \mu(\xi)$ est de classe L_n . Avec cette définition, on a la règle suivante:

7° Φ étant un ensemble de classe L_n ($n > 0$) de types ordinaux et μ une fonction analytique, l'ensemble

$$\mu^{-1}(\Phi) = \bigcup_{\xi} [\mu(\xi) \in \Phi]$$

est de classe L_n .

En conséquence, $\varphi(\tau, x)$ étant de classe L_n ($n > 0$), la fonction propositionnelle $\varphi[\mu(\xi), x]$ est aussi de classe L_n .

On a, en effet,

$$[\mu(\xi) \in \Phi] = \sum_{\sigma} [\sigma = \mu(\xi)] \quad (\sigma \in \Phi).$$

Il en résulte, dans le cas où Φ est de classe L_n impaire, que l'ensemble $\mu^{-1}(\Phi)$ est de classe $PL_n = L_n$. Si Φ est de classe L_n paire (> 0), son complémentaire Φ' est de classe L_{n-1} impaire, donc $\mu^{-1}(\Phi')$ est de classe L_{n-1} ; l'ensemble $\mu^{-1}(\Phi) = [\mu^{-1}(\Phi')]'$ est donc de classe $CL_{n-1} = L_n$.

Pour établir la deuxième partie de la règle 7°, on peut se borner au cas où φ est une fonction de la variable τ seule. Or, remarquons qu'en vertu de l'identité $\varphi(\sigma) = [\sigma \in \bigcup_{\tau} \varphi(\tau)]$, on a

$$\varphi[\mu(\xi)] = [\mu(\xi) \in \bigcup_{\tau} \varphi(\tau)].$$

Posons $\Phi = \bigcup_{\tau} \varphi(\tau)$. L'ensemble $\bigcup_{\tau} \varphi(\tau)$ étant de classe L_n par hypothèse, la fonction propositionnelle $\mu(\xi) \in \Phi$ est — comme nous venons de prouver — de classe L_n . Il en est de même de $\varphi[\mu(\xi)]$.

8° La superposition de deux fonctions analytiques est une fonction analytique.

En effet, μ_1 étant une fonction analytique, la fonction propositionnelle $\sigma = \mu_1(\tau)$ est analytique. Par conséquent, en supposant la fonction μ_2 analytique, la fonction propositionnelle $\sigma = \mu_1[\mu_2(\xi)]$ est analytique d'après 7° (II-me partie). Cela veut dire que la fonction superposée $\mu_1\mu_2(\xi)$ est analytique.

Exemple. La fonction $(\tau \cdot 2 + 1)2^n$ est analytique (pour n fixe), comme superposition des fonctions analytiques $\tau \cdot 2$, $\tau + 1$ et $\tau \cdot 2^n$. Nous allons appliquer cette fonction dans le N° X.

Remarque. On constate facilement que, dans les règles 1°—8°, les variables τ et σ peuvent être remplacées par des variables „complexes” (parcourant un produit cartésien). On peut admettre aussi que les valeurs de la fonction μ sont complexes.

Dans l'étude des fonctions propositionnelles ayant pour arguments des nombres ordinaux, il est utile d'introduire comme suit la notion de fonction propositionnelle *relativement analytique*: une fonction propositionnelle $\varphi(\alpha)$ définie pour $\alpha < \Omega$ est dite relativement analytique lorsqu'il existe une fonction propositionnelle $\varphi^*(\tau)$, définie pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, analytique et telle que

$$\varphi^*(\tau) \quad (\tau < \Omega) = \varphi(\tau).$$

De façon plus générale, une fonction $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est relativement analytique lorsqu'elle est de la forme

$$\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) = \varphi^*(\tau_1, \dots, \tau_n) (\tau_1 < \Omega) \dots (\tau_n < \Omega)$$

où φ^* est analytique.

Les fonctions propositionnelles $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, où $\alpha_1 < \Omega, \dots, \alpha_n < \Omega$, qui sont simultanément: de classe CA et relativement analytiques

sont nommées *élémentaires*. Cette dénomination tient au fait que les fonctions propositionnelles habituellement considérées dans la théorie des nombres ordinaux sont élémentaires.

Telles sont, par exemple, les relations $\alpha = \beta$, $\alpha \leq \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta + \gamma$, $\alpha = \beta \gamma^1$.

Ainsi, pour démontrer que l'égalité $\alpha = \beta$ est élémentaire, remarquons que, pour $\alpha, \beta < \Omega$, on a l'équivalence

$$(\alpha = \beta) \equiv (\alpha \text{ non } \prec \beta) (\beta \text{ non } \prec \alpha).$$

La relation $\tau \prec \sigma$ étant analytique et la relation $\tau < \Omega$ étant de classe **CA**, il en résulte que la relation

$$(\tau \text{ non } \prec \sigma) (\sigma \text{ non } \prec \tau) (\tau, \sigma < \Omega),$$

donc la relation $\alpha = \beta$, est de classe **CA**. En outre, la relation $\alpha = \beta$ est relativement analytique, puisque la relation $\tau = \sigma$ (dans le domaine des types ordinaux tout entier) est analytique.

L'application de l'induction transfinie ne conduit pas, en général, en dehors des fonctions élémentaires. Cela tient au théorème suivant ²⁾:

Soient α un nombre donné $< \Omega$ et $\kappa(\xi)$ une fonction qui fait correspondre à tout $\xi < \Omega$ un nombre ordinal $< \Omega$. Admettons que la fonction κ soit élémentaire (c. à d. que la relation $\lambda = \kappa(\xi)$ soit élémentaire). Dans cette hypothèse, la fonction $\mu(\xi)$, $\xi < \Omega$, définie par les conditions suivantes est élémentaire:

$$1) \mu(0) = \alpha, \quad 2) \mu(\xi + 1) = \kappa[\mu(\xi)], \quad 3) \mu(\xi) = \lim_{\eta < \xi} \mu(\eta)$$

si ξ est un nombre limite ($\neq 0$).

On en conclut que par ex. la relation $\alpha = \beta^\gamma$ est élémentaire.

X. Théorèmes de réduction ³⁾. 1. Etant donnée une suite infinie d'ensembles $U^1, U^2, \dots$ de classe **CA**, il existe une suite d'ensembles disjoints $V^1, V^2, \dots$ de classe **CA** tels que

$$(1) \quad V^n \subset U^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} V^n = \sum_{n=1}^{\infty} U^n.$$

Par conséquent, si $\mathcal{X} = U^1 + U^2 + \dots$, les ensembles V^n sont boreliens.

¹⁾ Pour les démonstrations et pour plus de détails, on pourra consulter ma note précitée de Fund. Math. **28**, pp. 179—185.

²⁾ Ibidem, p. 181.

³⁾ Voir ma note Sur les théorèmes de séparation dans la Théorie des ensembles, Fund. Math. **26** (1936), pp. 183—191.

Soit $U^n = \sum_{\alpha < \Omega} A_\alpha^n$ un développement en constituantes (correspondant à un crible composé d'ensembles fermés). Conformément à VIII (3) et à 4, il existe une fonction $\mu_n(x)$ qui fait correspondre à tout $x \in \mathcal{X}$ un type d'ordre dénombrable de façon que

$$1^\circ A_\alpha^n = \int_x [\mu_n(x) = \alpha] \quad \text{pour } \alpha < \Omega,$$

2° la fonction $\mu_n(x)$ est analytique dans le sens du N° IX, c. à d. l'ensemble $\int_{\mathcal{X}} [\mu_n(x) = i]$ est analytique.

Posons:

$$(2) \quad \gamma_n(x) = [\mu_n(x) \cdot 2 + 1] \cdot 2^n$$

et

$$(3) \quad V^n = U^n \cdot \prod_{k \neq n} \int_x [\gamma_k(x) \text{ non } \prec \gamma_n(x)],$$

la relation $\tau \text{ non } \prec \sigma$ signifiant que l'ensemble ayant le type d'ordre τ n'est semblable à aucun sous-ensemble d'un ensemble ayant le type d'ordre σ (cf. § 34, IX (4)).

Comme superposition de fonctions analytiques, la fonction $\gamma_n(x)$ est analytique (voir IX, 8°, exemple). La relation $\tau \prec \sigma$ étant analytique (IX, exemples, déf. 1), il en est donc de même de la relation $\gamma_k(x) \prec \gamma_n(x)$ pour k et n fixes (d'après IX, 7°). L'ensemble V^n est donc de classe **CA**.

On a $V^n \cdot V^k = 0$ pour $n \neq k$. Car en supposant que $x \in V^n \cdot V^k$, on aurait

$$\gamma_n(x) < \Omega, \quad \gamma_k(x) < \Omega, \quad \gamma_k(x) \text{ non } \prec \gamma_n(x) \text{ non } \prec \gamma_k(x).$$

Or, la relation $\alpha \prec \beta$ signifiant pour les nombres ordinaux que $\alpha \leq \beta$, il vient $\gamma_k(x) = \gamma_n(x)$. D'autre part, dans le domaine des nombres ordinaux, l'égalité

$$(\alpha 2 + 1) 2^n = (\beta 2 + 1) 2^k$$

entraîne $n = k$ (et $\alpha = \beta$) ¹⁾.

La formule $x \in V^n V^k$ ne peut donc se présenter que pour $n = k$. Autrement dit, les ensembles $V^1, V^2, \dots$ sont disjoints.

Reste à prouver l'inclusion

$$(3a) \quad U^n \subset \sum_{m=1}^{\infty} V^m.$$

¹⁾ Voir p. ex. W. Sierpiński, *Teoria Mnogości* t. I, p. 215, Warszawa 1928. C. Kuratowski, *Topologie* I.

Soit donc $x \in A_\alpha^n$, c. à d. $\mu_n(x) = \alpha < \Omega$, d'où $\gamma_n(x) < \Omega$. Soit m_0 l'indice m du plus petit nombre $\gamma_m(x) < \Omega$. On a donc pour tout $k \neq m_0$:

$$\gamma_k(x) \text{ non } \prec \gamma_{m_0}(x), \text{ d'où } x \in \prod_{k \neq m_0} E[\gamma_k(x) \text{ non } \prec \gamma_{m_0}(x)].$$

Enfin $x \in U^{m_0}$, c. à d. que $\mu_{m_0}(x) < \Omega$. Car, en supposant que τ ne soit pas un nombre ordinal, $(\tau+1)2^n$ ne le serait non plus. L'inégalité $\mu_{m_0}(x) < \Omega$ est donc une conséquence de l'inégalité $\gamma_{m_0}(x) < \Omega$.

Il est ainsi établi que $x \in V^{m_0}$; d'où l'inclusion (3a).

Afin d'établir la deuxième partie du théorème, remarquons que, les ensembles $V^1, V^2, \dots$ étant disjoints, l'égalité $\mathfrak{X} = V_1 + V_2 + \dots$ entraîne

$$\mathfrak{X} - V^n = \sum_{k \neq n} V^k.$$

Comme somme d'une série d'ensembles **CA**, l'ensemble $\mathfrak{X} - V^n$ est un **CA**. Donc V^n , en tant qu'un ensemble **A** et **CA**, est borelien.

Remarques. 1) La fonction $\varrho(\alpha, n) = (\alpha+1)2^n$ range tous les couples (α, n) en une suite transfinie du type Ω de façon biunivoque. La définition de l'ensemble V^n peut donc être exprimée comme suit: le point x appartient à V^n lorsqu'il appartient à une constituante A_α^n telle que le „rang” $\varrho(\alpha, n)$ du couple (α, n) est inférieur au rang de tout autre couple (β, k) pour lequel $x \in A_\beta^k$.

2) En analysant la démonstration du th. 1, il importe de remarquer le rôle essentiel de l'analyticité de la relation $x \in A_\alpha^n$, c. à d. de l'ensemble $E[x \in A_\alpha^n]$.

Le théorème de réduction entraîne les deux théorèmes suivants, qui généralisent les théorèmes de séparation des NN^0 III et VI et dont la démonstration est identique à celle de § 21, II, th. III et cor. 4.

2. *Premier théorème de séparation généralisé*¹⁾. *Etant donnée une suite d'ensembles analytiques $A_1, A_2, \dots$ tels que $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = 0$, il existe une suite d'ensembles boreliens $B_1, B_2, \dots$ tels que*

$$(4) \quad A_n \subset B_n \text{ et } \prod_{n=1}^{\infty} B_n = 0.$$

¹⁾ Théorème de P. Novikoff, C. R. Acad. Sc. URSS, 2 (1934), p. 165.

3. *Deuxième théorème de séparation généralisé.* *Etant donnée une suite d'ensembles analytiques $A_1, A_2, \dots$, il existe une suite d'ensembles $B_1, B_2, \dots$ de classe **CA** tels que*

$$(5) \quad A_n - \prod_{m=1}^{\infty} A_m \subset B_n \text{ et } \prod_{n=1}^{\infty} B_n = 0.$$

Le théorème de réduction est aussi valable dans le domaine des ensembles **PCA**:

4. *Etant donnée une suite infinie d'ensembles $U^1, U^2, \dots$ de classe **PCA**, il existe une suite d'ensembles disjoints $V^1, V^2, \dots$ de classe **PCA** satisfaisant aux conditions (1)¹⁾.*

Comme dans le cas des ensembles **CA**, le théorème de réduction pour les ensembles **PCA** entraîne les deux théorèmes de séparation généralisés²⁾:

5. *Etant donnée une suite d'ensembles $A_1, A_2, \dots$ de classe **CPCA** et tels que $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = 0$, il existe une suite d'ensembles $B_1, B_2, \dots$ appartenant simultanément aux classes **PCA** et **CPCA** et satisfaisant aux conditions (4).*

6. *Etant donnée une suite d'ensembles $A_1, A_2, \dots$ de classe **CPCA**, il existe une suite d'ensembles $B_1, B_2, \dots$ de classe **PCA** qui satisfont aux conditions (5).*

Les th. 2 et 5 entraînent le suivant:

7³⁾. *Etant donnée une suite d'ensembles $A_1, A_2, \dots$ analytiques (resp. de classe **CPCA**) et tels que $\text{Lim sup } A_n = 0$, il existe une suite d'ensembles $D_1, D_2, \dots$ boreliens (resp. simultanément de classe **PCA** et **CPCA**) et tels que*

$$(8) \quad A_n \subset D_n \text{ et } \text{Lim sup } D_n = 0.$$

Posons, en effet, $A_n^* = A_n + A_{n+1} + \dots$. On a par hypothèse

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n^* = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{n+k} = \text{Lim sup } A_n = 0.$$

Le th. 2 (resp. 5) est applicable. Il vient

$$A_n^* \subset B_n \text{ et } \prod_{n=1}^{\infty} B_n = 0.$$

Posons:

$$(9) \quad D_1 = B_1 \text{ et, en général, } D_n = D_{n-1} \cdot B_n.$$

On a

$$A_n \subset A_n^* \subset B_n \text{ et } A_n^* \subset A_{n-1}^*.$$

¹⁾ Pour la démonstration, voir ma note précitée de Fund. Math. 26, ainsi que Fund. Math. 28 (1937), p. 136.

²⁾ Théorèmes de P. Novikoff, Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe, Fund. Math. 25 (1935), th. VI, p. 465 et th. VII, p. 466.

³⁾ Etabli pour le cas des ensembles analytiques par M. Liapounoff, C. R. Acad. Sc. URSS, 2 (1934), p. 276.

L'inclusion (8) s'établit par induction: d'abord

$$A_1 \subset A_1^* \subset B_1 = D_1;$$

puis, en supposant que $A_{n-1}^* \subset D_{n-1}$, il vient $A_n^* \subset D_{n-1}$ et en multipliant cette inclusion par l'inclusion $A_n^* \subset B_n$, on a

$$A_n^* \subset D_{n-1} \cdot B_n = D_n, \text{ d'où } A_n \subset A_n^* \subset D_n.$$

En outre, comme $D_n \subset D_{n-1}$, on a

$$\limsup_{n=1} D_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} D_{n+k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = 0.$$

Enfin, les ensembles B_n étant boreliens (resp. de classe **PCA** et **CPCA**), il en est de même de D_n en vertu de (9).

XI. Fonctions A et CA . Appelons une fonction f à valeurs réelles *fonction A* (fonction **CA**), lorsque l'ensemble $\bigcup_x [f(x) > c]$ est un ensemble **A** (ensemble **CA**), quel que soit c^1 .

On voit aussitôt que les fonctions **A** et les fonctions **CA** sont *mesurables* au sens de Lebesgue (lorsque x est réel) et *jouissent de la propriété de Baire au sens restreint*. Les fonctions qui sont *simultanément A et CA* coïncident avec les fonctions mesurables **B**. La *fonction caractéristique* d'un ensemble **A** (ou **CA**) est une fonction **A** (ou **CA**).

La limite d'une suite convergente de fonctions **A** (ou **CA**) est une fonction **A** (ou **CA**).

Car la condition $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ entraîne l'équivalence

$$\{f(x) > c\} \equiv \sum_n \prod_k [f_{n+k}(x) > c + 1/n],$$

d'où

$$\bigcup_x \{f(x) > c\} = \sum_n \prod_k \bigcup_x [f_{n+k}(x) > c + 1/n].$$

f étant une fonction **A** ou **CA**, l'ensemble $\bigcup_{xy} [y = f(x)]$ est différence de deux ensembles analytiques.

Car $\{r_n\}$ désignant la suite des nombres rationnels, on a l'équivalence

$$[y \neq f(x)] \equiv \sum_n \{[y < r_n < f(x)] + [f(x) < r_n < y]\}.$$

$f(x, t)$ étant une fonction (bornée) mesurable **B**, la fonction $g(x) = \max_t f(x, t)$ est une fonction **A** et la fonction $h(x) = \min_t f(x, t)$ est une fonction **CA**².

¹ Cf. L. Kantorovitch, *Sur les fonctions du type (U)*, C. R. Paris **192**, p. 1267. Bien entendu, on peut définir les fonctions d'une classe projective arbitraire.

² F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 274.

En effet, l'équivalence

$$[\max_t f(t) \leq c] \equiv \prod_t [f(t) \leq c]$$

entraîne

$$[g(x) \leq c] \equiv \prod_t [f(x, t) \leq c], \text{ c. à d. } [g(x) > c] \equiv \sum_t [f(x, t) > c],$$

ce qui prouve que l'ensemble $\bigcup_x [g(x) > c]$ est analytique en tant que projection de l'ensemble borelien $\bigcup_{xt} [f(x, t) > c]$. De façon analogue, l'équivalence

$$[h(x) > c] \equiv \sum_t [f(x, t) < c]$$

entraîne

$$[h(x) \leq c] \equiv \prod_n [h(x) < c + 1/n] \equiv \prod_n \sum_t [f(x, t) < c + 1/n],$$

d'où on conclut que l'ensemble $\bigcup_x [h(x) \leq c]$ est analytique.

Dans les mêmes hypothèses, la fonction $\limsup_{t \rightarrow a} f(x, t)$ est une fonction **A** et la fonction $\liminf_{t \rightarrow a} f(x, t)$ est une fonction **CA**.

Car on a $\limsup_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$ où $m_n = \max_{|a-t| < 1/n} f(t)$. Par conséquent $\limsup_{t \rightarrow a} f(x, t)$ est une fonction **A** comme limite d'une suite de fonctions **A**.

Exemple. Les dérivées partielles supérieures (ou inférieures) de Dini d'une fonction $g(x, y)$ mesurable **B** sont des fonctions **A** (ou **CA**) (qui peuvent d'ailleurs admettre des valeurs infinies)¹. Car en posant

$$f(x, y, t) = \frac{g(x+t, y) - g(x, y)}{t},$$

on a

$$\limsup_{t \rightarrow +0} \frac{g(x+t, y) - g(x, y)}{t} = \limsup_{t \rightarrow 0} f(x, y, t),$$

où $f(x, y, t)$ est une fonction mesurable **B** (on admet que $t > 0$).

§ 36. Espaces totalement imparfaits et autres espaces singuliers.

Les espaces considérés dans ce § sont supposés métriques séparables.

I. Espaces totalement imparfaits. Un espace qui ne contient aucun ensemble homéomorphe à l'ensemble parfait **C** de Cantor est dit *totalement imparfait*.

Dans un espace complet séparable, l'hypothèse qu'un ensemble E est totalement imparfait signifie que E ne contient aucun ensemble parfait non vide ou, ce qui revient au même, aucun en-

¹ M. Neubauer, *Über die partiellen Derivierten unstetiger Funktionen*, Mon. f. Math. u. Phys. **38** (1931), p. 139.

semble analytique indénombrable, car tout ensemble analytique indénombrable contient $\mathcal{C}$ topologiquement (§ 35, I).

1. *Théorème de F. Bernstein*¹⁾. Il existe dans tout espace complet séparable et indénombrable un ensemble Z qui — de même que son complémentaire — est totalement imparfait et de puissance du continu.

Ce théorème résulte directement du lemme suivant, qui appartient à la Théorie générale des ensembles:

Soient R un ensemble de puissance c , $\mathcal{M}$ une famille de puissance $\leq c$ de sous-ensembles de R dont chacun est de puissance c . R renferme alors un ensemble Z qui, de même que $R-Z$, est de puissance c et contient au moins un élément de tout ensemble appartenant à la famille $\mathcal{M}$.

Nous appuyons la démonstration de ce lemme sur le théorème du „bon ordre“: Ω_c désignant le plus petit nombre ordinal de puissance c , nous imaginons les ensembles-éléments de $\mathcal{M}$ rangés en une suite transfinie du type Ω_c :

$$(1) \quad M_1, M_2, \dots, M_\omega, M_{\omega+1}, \dots$$

à termes différents ou non.

Soit, de façon analogue:

$$(2) \quad x_1, x_2, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots$$

une suite du type Ω_c , à termes distincts, composée de tous les éléments de R .

On définit par l'induction transfinie deux suites $\{p_\alpha\}$ et $\{q_\alpha\}$ ($\alpha < \Omega_c$), en admettant que:

1°: p_1 est le premier terme de la suite (2) contenu dans M_1 , et q_1 est le premier terme de la suite (2) tel que $p_1 \neq q_1$ et $q_1 \in M_1$,

2°: S_α désignant pour $\alpha > 1$ l'ensemble de tous les p_ξ et q_ξ avec $\xi < \alpha$, p_α est le premier terme de la suite (2) contenu dans $M_\alpha - S_\alpha$ (un terme de ce genre existe, puisque l'ensemble S_α est de puissance $< c$) et, de façon analogue, q_α est le premier terme de la suite (2) contenu dans $M_\alpha - S_\alpha - p_\alpha$.

Z est l'ensemble de tous les points p_α avec $\alpha < \Omega_c$.

¹⁾ Leipz. Ber. **60** (1908), p. 329. Cf. P. Mahlo, ibid. **63** (1911), p. 346 et A. Schönflies, *Entwicklung der Mengenlehre I*, Leipzig 1913, p. 361. Pour la démonstration, cf. la note de M. Sierpiński et de moi-même, *Fund. Math.* **8** (1926), p. 193.

Le problème de l'existence des espaces séparables totalement imparfaits remonte à L. Scheeffer, *Acta Math.* **5** (1884), p. 287.

Remarques. 1) Dans le cas où l'espace R est un intervalle, l'ensemble Z est non mesurable au sens de Lebesgue. Car Z , ainsi que le complémentaire de Z , sont de mesure intérieure nulle, comme ensembles totalement imparfaits.

2) La démonstration, qui vient d'être exposée, de l'existence des ensembles indénombrables totalement imparfaits n'est pas effective, c. à d. que l'existence en a été démontrée sans nommer aucun ensemble Z individuel (on remarquera que les suites (1) et (2) n'ont pas été définies). On n'en connaît aucune démonstration effective (même dans le cas de l'espace des nombres réels). C'est là un des problèmes fondamentaux liés avec la notion d'effectivité¹⁾.

3) Il existe dans l'intervalle un ensemble indénombrable (totalement imparfait) dont toute image continue (située dans $\mathcal{J}^{\aleph_0}$) est un ensemble totalement imparfait.

En effet, si l'on suppose que $c > \aleph_1$, tout ensemble de puissance $\aleph_1$ jouit de ladite propriété. Si l'on admet l'hypothèse du continu, il suffit de substituer, dans le th. 7 du § 31, I, la famille des sous-ensembles parfaits ($\neq 0$) de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ à $\mathcal{F}$, pour en déduire la conclusion demandée.

3. Z étant totalement imparfait dans un espace $\mathcal{X}$ complet, séparable et dense en soi, $\mathcal{X} - Z$ n'est de I-e catégorie en aucun point.

Supposons, en effet, que G soit un ensemble ouvert non vide tel que $G - Z$ est de I-e catégorie. Soit B un $\mathcal{F}_\sigma$ de I-e catégorie tel que $G - Z \subset B$. L'ensemble $G - B$ est donc dense dans G (§ 30, IV), donc dense en soi (§ 9, V, 3). Comme ensemble G_δ dense en soi, $G - B$ est indénombrable (§ 30, V, 3) et contient par conséquent un ensemble parfait non vide (§ 32, V). Mais alors l'ensemble Z , qui contient $G - B$, n'est pas totalement imparfait.

4. Dans un espace $\mathcal{X}$ complet séparable et dense en soi, tout ensemble totalement imparfait à propriété de Baire est de I-e catégorie.

Par conséquent, si les ensembles Z et $\mathcal{X} - Z$ sont totalement imparfaits, ils sont dépourvus de la propriété de Baire.

C'est une conséquence directe de 3 et de § 11, IV, cor. 2.

II. Espaces toujours de I-e catégorie. Nous appellerons ainsi chaque espace dont tout sous-ensemble dense en soi est de I-e catégorie sur lui-même.

¹⁾ Cf. à ce propos les remarques de M. Bernstein, loco cit.

1. Dans un espace complet séparable les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) être un ensemble B_r (c. à d. un ensemble à propriété de Baire au sens restreint) totalement imparfait,
- (ii) être un ensemble de I-e catégorie sur tout ensemble parfait,
- (iii) être un ensemble toujours de I-e catégorie,
- (iv) être un ensemble dont tout sous-ensemble est un B_r .

Démonstrations: (i)→(ii). C'est une conséquence de I, 4.

(ii)→(iii). Si E jouit de la propriété (ii) et si X est un sous-ensemble dense en soi de E , l'ensemble $E \cdot \bar{X}$ est de I-e catégorie sur $\bar{X}$. L'ensemble $X = E \cdot X$ est donc (§ 10, IV, 2) de I-e catégorie sur lui-même.

(iii)→(iv). Car la propriété (iii) implique évidemment la propriété B_r et appartient à chaque sous-ensemble d'un ensemble qui la possède.

(iv)→(i). Car d'après I, 1 et 4, tout ensemble parfait non vide contient un ensemble dépourvu de la propriété de Baire.

L'existence des ensembles indénombrables toujours de I-e catégorie a été signalée au § 19, I, 5 et au § 35, VIII, 8. Nous l'établirons de façon plus directe au N° III.

2. La propriété d'être toujours de I-e catégorie est dénombrablement additive.

Soit $\mathcal{X}$ un espace métrique séparable tel que $\mathcal{X} = E_1 + E_2 + \dots$ où E_n est toujours de I-e catégorie. Soit $\mathcal{X}^*$ un espace complet séparable contenant $\mathcal{X}$. P étant un sous-ensemble parfait de $\mathcal{X}^*$, les ensembles PE_n sont, conformément à (ii), de I-e catégorie sur P ; leur somme $\mathcal{X}P$ l'est donc également.

III. Espaces raréfiés (ou espaces λ)¹⁾. Nous appelons ainsi un espace dont tout sous-ensemble dénombrable est un G_δ .

1. Tout espace raréfié est toujours de I-e catégorie.

Soient, en effet, W un ensemble dense en soi et D un ensemble dénombrable dense dans W , c. à d. $DCW \subset \bar{D}$. En tant qu'un F_σ frontière dans $\bar{W}$, l'ensemble $\bar{W} - D$ est de I-e catégorie sur $\bar{W}$. Il en est donc de même de la somme $\bar{W} = \bar{W} - D + D$. L'ensemble W est par conséquent de I-e catégorie sur lui-même (§ 10, IV, 2).

¹⁾ Voir ma note *Sur une famille d'ensembles singuliers*, Fund. Math. 21 (1933), p. 127.

Remarque. Le théorème inverse est en défaut. Cf. NN° V, p. 430 et VIII, 6.

2. Tout espace complet séparable et indénombrable contient un ensemble raréfié indénombrable, donc une infinité de puissance $2^{\aleph_1}$ d'ensembles de ce genre (puisque tout sous-ensemble d'un ensemble raréfié est raréfié).

Il suffit d'établir cet énoncé pour l'espace $\mathcal{N}$, puisque tout espace complet séparable et indénombrable contient $\mathcal{N}$ topologiquement.

Or, nous allons démontrer d'abord que l'espace $\mathcal{N}$ contient une suite transfinie indénombrable d'ensembles G_δ croissants (et distincts):

$$(1) \quad Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_\alpha \subset Q_{\alpha+1} \subset \dots$$

Soit, en effet, $Q_0 = 0$. Pour $\alpha > 0$, supposons que tous les ensembles Q_ξ avec $\xi < \alpha$ soient des G_δ de mesure (lebesguienne) nulle. Donc $\sum_{\xi < \alpha} Q_\xi$ est encore de mesure nulle et comme (d'après un théorème de la théorie de la mesure) tout ensemble de mesure nulle est contenu dans un G_δ de mesure nulle; il existe un ensemble Q_α qui est un G_δ tel que

$$Q_\alpha \supset \sum_{\xi < \alpha} Q_\xi \quad \text{et} \quad Q_\alpha \neq \sum_{\xi < \alpha} Q_\xi.$$

On peut évidemment supposer que les ensembles Q_α sont contenus dans $\mathcal{N}$.

L'existence de la suite (1) se trouve ainsi établie. L'ensemble E des points $p_1, p_2, \dots, p_{\alpha+1}, p_{\alpha+2}, \dots$ tels que $p_{\alpha+1} \in Q_{\alpha+1} - Q_\alpha$ est un espace raréfié. Soit, en effet, D un sous-ensemble dénombrable de E . Posons $D = (p_{\xi_1}, p_{\xi_2}, \dots, p_{\xi_n}, \dots)$. Soit α un nombre transfini supérieur à tous les indices ξ_n . Par conséquent

$$D \subset Q_\alpha \cdot E, \quad \text{d'où} \quad D = Q_\alpha \cdot E \cdot D = E \cdot [Q_\alpha - (Q_\alpha \cdot E - D)]$$

et, l'ensemble $Q_\alpha \cdot E$ étant dénombrable (car, pour $\beta > \alpha$, p_β n'appartient pas à Q_α), $Q_\alpha - (Q_\alpha \cdot E - D)$ est un G_δ . Cela prouve que D est un G_δ relativement à E ²⁾.

¹⁾ Cette proposition est due à Z. Zalcwasser. Pour une démonstration qui n'utilise pas la théorie de la mesure, voir W. Sierpiński, C. R. Soc. Sc. de Varsovie, 1934. Cf. aussi F. Hausdorff, *Summen von $\aleph_1$ Mengen*, Fund. Math. 26 (1936), p. 248.

²⁾ Ce raisonnement est dû à M. Sierpiński, *Sur un ensemble linéaire non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait*, C. R. Soc. Sc. de Varsovie, 1933, p. 102.

Remarque. On est conduit aux espaces raréfiés dans l'étude de l'ordre de croissance des suites d'entiers positifs. En effet, $z = [z^1, z^2, \dots]$ et $\eta = [\eta^1, \eta^2, \dots]$ étant deux nombres irrationnels ou, ce qui revient au même, deux suites d'entiers positifs, posons $z \prec \eta$ lorsqu'on a $z^i < \eta^i$ à partir d'un indice i :

$$\{z \prec \eta\} = \sum_n \prod_k \{z^{n+k} < \eta^{n+k}\}.$$

Tout ensemble $\mathcal{E}$ de suites (considéré comme sous-ensemble de $\mathcal{N}$), bien ordonné selon la relation $z \prec \eta$ en type Ω^1) est raréfié.

Soit, en effet, $\mathcal{D}$ un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = [z_0, z_1, \dots, z_\omega, z_{\omega+1}, \dots], \quad \mathcal{D} = [z_{\xi_1}, z_{\xi_2}, \dots, z_{\xi_n}, \dots].$$

Soient α un nombre supérieur à tous les ξ_n et $\mathcal{S}$ l'ensemble $(z_0, z_1, \dots, z_\alpha)$. L'ensemble $\mathcal{S}$ contenant $\mathcal{D}$ et la différence $\mathcal{S} - \mathcal{D}$ étant dénombrable, il suffit de démontrer que $\mathcal{S}$ est un G_δ dans $\mathcal{E}$, ou encore, que $\mathcal{E} - \mathcal{S}$ est un F_σ dans $\mathcal{E}$.

On a les équivalences évidentes:

$$\{z \in (\mathcal{E} - \mathcal{S})\} = \{(z \in \mathcal{E}) (z_\alpha \prec z)\} \quad \text{et} \quad \{z_\alpha \prec z\} = \sum_n \prod_k \{z_\alpha^{n+k} < z^{n+k}\},$$

d'où

$$\mathcal{E} - \mathcal{S} = \mathcal{E} \cdot \sum_n \prod_k E \{z_\alpha^{n+k} < z^{n+k}\}.$$

L'ensemble $E \{m < z^i\} = E \{m+1 \leq z^i\}$ étant fermé (pour i et m fixes), il en est de même de l'ensemble $E \{z_\alpha^{n+k} < z^{n+k}\}$. Cela implique aussitôt que $\mathcal{E} - \mathcal{S}$ est un F_σ dans $\mathcal{E}^2$.

IV. Transformations. 1. *Les propriétés: être un ensemble totalement imparfait et être un espace raréfié sont des invariants de toute transformation biunivoque $y=f(x)$ dont la transformation inverse $x=f^{-1}(y)$ est continue.*

En effet, si l'espace $\mathcal{Y}=f(\mathcal{X})$ renferme un ensemble C homéomorphe à $\mathbb{C}$, l'espace $\mathcal{X}$ contient l'ensemble $f^{-1}(C)$, qui contient C topologiquement (§ 32, V).

¹⁾ L'existence d'une échelle de ce genre résulte facilement du théorème de Zermelo.

²⁾ C'est au fond la marche du raisonnement qui a servi à M. Lusin pour établir l'existence des ensembles indénombrables à propriété (ii). Voir *Sur l'existence d'un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait*, Fund. Math. 2 (1921), p. 155—157.

D'autre part, si $\mathcal{X}$ est raréfié et P est un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{Y}$, l'ensemble $f^{-1}(P)$, comme dénombrable, est un G_δ dans $\mathcal{X}$ et l'ensemble $P = ff^{-1}(P)$ est un G_δ , car la fonction f^{-1} est continue. $\mathcal{Y}$ est donc raréfié.

2. *$y=f(x)$ étant une fonction arbitraire définie sur un espace $\mathcal{X}$ qui est soit totalement imparfait, soit raréfié, l'ensemble $I = E_{xy} \{y=f(x)\}$ l'est également.*

Car la projection parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$ transforme I en $\mathcal{X}$ de façon biunivoque et continue.

3. *Tout ensemble Z de puissance $\aleph_1$ situé dans un espace complet séparable $\mathcal{Y}$ est image biunivoque et continue d'un espace raréfié contenu dans $\mathcal{N} \times \mathcal{Y}$, donc, d'un ensemble jouissant de la propriété de Baire au sens restreint.*

En effet, conformément à III, 2, l'espace $\mathcal{N}$ contient un ensemble raréfié $\mathcal{E}$ de puissance $\aleph_1$. Soit $y=f(x)$ une transformation biunivoque de $\mathcal{E}$ en Z . L'ensemble $I = E_{xy} \{y=f(x)\}$ est raréfié (d'après 2) et Z en est une image biunivoque et continue.

4. *Une fonction arbitraire $y=f(x)$, définie sur un espace toujours de I-e catégorie possède la propriété de Baire au sens restreint.*

Plus encore: A étant un ensemble arbitraire, l'ensemble D des points de discontinuité de la fonction partielle $f|A$ est de I-e catégorie sur A^1 .

En effet, il existe dans A un ensemble dénombrable E tel que $A - E$ est dense en soi (§ 18, V). Comme, en outre, D ne contient aucun point isolé de A (§ 13, III), il vient $D \subset (A - E) + E \cdot A^1$. L'ensemble $E \cdot A^1$, comme formé d'une suite de points d'accumulation, est de I-e catégorie dans A ; l'ensemble $A - E$ l'étant également par hypothèse, il en est de même de D .

En admettant l'hypothèse du continu, on a l'énoncé suivant:

5. *Il existe des espaces raréfiés de toute dimension finie ou infinie²⁾.*

En effet, d'après § 24a, VIa, 1b, à chaque espace raréfié $\mathcal{X}$ de puissance c correspond un espace $\mathcal{X}^*$ de dimension donnée à l'avance et dont $\mathcal{X}$ est image biunivoque et continue. D'après 1, $\mathcal{X}^*$ est raréfié.

¹⁾ Cf. la remarque 3 du § 27, X.

²⁾ Voir S. Mazurkiewicz et E. Szpilrajn-Marzewski, *Sur la dimension de certains ensembles singuliers*, Fund. Math. 28 (1937), p. 306.

Remarques. 1° L'ensemble $I = \bigcup_{xy} \{y = f(x)\}$ peut jouir de la propriété de Baire au sens restreint sans que la fonction f en jouisse, même au sens large¹⁾.

Cela résulte de 2 en vertu de l'hypothèse du continu. Soient, en effet, A un ensemble dépourvu de la propriété de Baire dans l'intervalle $\mathcal{J}$, E un espace raréfié indénombrable, F un sous-ensemble fermé de E et tel que les ensembles F et $E - F$ sont indénombrables et enfin $y = f(x)$ une fonction biunivoque telle que $f(\mathcal{J}) = E$ et $f(A) = F$.

2° Ni la propriété de Baire au sens restreint, ni celle d'être raréfié n'est invariante par rapport aux transformations biunivoques et continues.

Cela résulte de 3 en vertu de l'hypothèse du continu. Car A étant un ensemble dépourvu de la propriété de Baire (au sens large, cf. § 11, IVa), il existe un ensemble raréfié dont A est image biunivoque et continue.

V. Propriété λ' . Définition²⁾. Un sous-ensemble E de l'espace $\mathcal{X}$ jouit de la propriété λ' lorsque, quel que soit l'ensemble dénombrable $X \subset \mathcal{X}$, l'ensemble $E + X$ est raréfié. Autrement dit: lorsque tout ensemble dénombrable $X^* \subset E + X$ est un G_δ relativement à $E + X$.

1. Le th. III, 2 reste vrai en remplaçant le terme „raréfié“ par λ' .

En effet, les ensembles Q_α dans la formule III (1) peuvent être assujettis à la condition supplémentaire (cf. § 35, II, cor. 4, remarque):

$$\mathcal{N} = \sum_{\alpha < \Omega} Q_\alpha.$$

L'ensemble correspondant E possède alors la propriété λ' ³⁾.

En effet, l'ensemble $X^* \subset E + X$ étant dénombrable, il existe un $\alpha < \Omega$ tel que $X^* \subset Q_\alpha$. On a donc $X^* \subset Q_\alpha \cdot (E + X)$, d'où

$$X^* = Q_\alpha \cdot (E + X) \cdot X^* = (E + X) \cdot \{Q_\alpha - [Q_\alpha \cdot (E + X) - X^*]\}.$$

$Q_\alpha \cdot E$ étant dénombrable, de même que $Q_\alpha \cdot (E + X)$, l'ensemble entre crochets $\{ \}$ est un G_δ . L'ensemble X^* est donc un G_δ relativement à $E + X$.

2. Pour qu'un sous-ensemble E de l'espace $\mathcal{X}$ jouisse de la propriété λ' , il faut et il suffit qu'à chaque ensemble dénombrable $D \subset \mathcal{X}$ corresponde un ensemble Q qui est un G_δ tel que $QE \subset D \subset Q$.

En effet, si E jouit de la propriété λ' , $E + D$ est raréfié, donc $D = Q(E + D)$ où Q est un G_δ convenablement choisi. Par suite $QE \subset D \subset Q$.

Réciproquement, soient D et X deux ensembles dénombrables et Q un G_δ tels que

$$(1) \quad D \subset E + X \quad \text{et} \quad QE \subset D \subset Q.$$

Posons

$$Q^* = (Q - X) + D = Q - (X - D).$$

L'ensemble Q^* est donc un G_δ et il vient

$$Q^* \cdot (E + X) = (Q - X) (E + X) + D(E + X) = D,$$

puisque

$$(Q - X) (E + X) \subset QE \subset D \quad \text{et} \quad D(E + X) = D$$

selon (1). L'égalité $D = Q^* \cdot (E + X)$ prouve que $E + X$ est raréfié, donc que E est un λ' .

3. La propriété λ' est dénombrablement additive.

Soit $E_1, E_2, \dots$ une suite (finie ou infinie) de sous-ensembles de $\mathcal{X}$ à propriété λ' . Soit D un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{X}$. Il s'agit de définir un ensemble Q qui soit un G_δ tel que $Q(E_1 + E_2 + \dots) \subset D \subset Q$.

Or, il existe par hypothèse une suite $Q_1, Q_2, \dots$ d'ensembles G_δ tels que $Q_n \cdot E_n \subset D \subset Q_n$. En posant $Q = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \dots$, il vient

$$Q(E_1 + E_2 + \dots) \subset Q_1 \cdot E_1 + Q_2 \cdot E_2 + \dots \subset D \subset Q.$$

Remarques. La propriété: être un ensemble raréfié, n'est pas additive¹⁾. Plus encore: un ensemble raréfié augmenté d'un ensemble dénombrable peut cesser d'être raréfié.

Pour s'en convaincre, on définit l'ensemble $\mathcal{E}$ (N° III, remarque) comme suit. Soit $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_\alpha, \dots$ ($\alpha < \gamma$) une suite transfinie formée de tous les nombres irrationnels (considérés comme suites d'entiers positifs), γ désignant le plus petit type de bon ordre correspondant à la puissance c . Posons $\eta_0 = \eta_0$. Soit $\alpha > 0$; les η_ξ avec $\xi < \alpha$ supposés définis, soit η_α le premier terme de la suite $\{\eta_\beta\}$, $\beta < \gamma$, satisfaisant à l'inégalité $\eta_\xi < \eta_\alpha$ pour tout $\xi < \alpha$, à condition qu'un terme de ce genre existe; dans le cas où il n'en existe aucun, l'ensemble $\mathcal{E}$ est du type α .

On démontre¹⁾ que l'ensemble $\mathcal{E}$ ainsi défini est raréfié, tandis que $\mathcal{E}$ augmenté de l'ensemble R_0 des nombres rationnels ne l'est pas.

L'ensemble $\mathcal{E}$ présente donc en même temps un exemple d'un ensemble raréfié qui n'est pas un λ' . L'existence des exemples de ce genre résulte aussi de l'invariance topologique de la propriété d'être raréfié, puisqu'il existe des ensembles homéomorphes à des ensembles λ' qui ne sont pas des λ' ²⁾.

¹⁾ Cf. F. Rothberger, Sur un ensemble toujours de première catégorie qui est dépourvu de la propriété λ , Fund. Math. **32** (1939), p. 294.

²⁾ W. Sierpiński, Sur un ensemble à propriété λ , Fund. Math. **32** (1939), p. 306.

³⁾ W. Sierpiński, Sur la non-invariance topologique de la propriété λ' , Fund. Math. **33** (1945), p. 264.

¹⁾ Cf. § 28, III, p. 310, remarque 1. Voir W. Sierpiński, La propriété de Baire des fonctions et de leurs images, Fund. Math. **11** (1928), p. 306.

²⁾ W. Sierpiński, Sur une propriété additive d'ensembles, C. R. Soc. Sc. Varsovie **30** (1937), p. 257. On y trouvera les th. 6 et 7.

³⁾ W. Sierpiński, Sur deux conséquences d'un théorème de Hausdorff, Fund. Math. **33** (1945), p. 269.

Ajoutons enfin qu'en vertu de II, 2, l'ensemble $\mathcal{E} + E_0$ est toujours de I-e catégorie sans être raréfié¹⁾.

4. Si tout sous-ensemble indénombrable de l'ensemble $E \subset \mathcal{X}$ est de dimension infinie²⁾, E jouit de la propriété λ' ³⁾.

En effet, D étant un ensemble dénombrable arbitraire, il est contenu dans un G_δ de dimension 0, soit Q . Posons

$$Q^* = Q - (QE - D).$$

Comme $\dim QE = 0$, on a par hypothèse $\overline{QE} \leq \aleph_0$. L'ensemble Q^* est donc un G_δ .

Comme $D \subset Q$, il vient

$$Q^* = (Q - E) + QD = (Q - E) + D \supset D \quad \text{et} \quad Q^*E = Q^*D \subset D.$$

Il en résulte d'après 2 que E jouit de la propriété λ' .

VI. Espaces σ . Nous appelons ainsi tout espace dont chaque sous-ensemble F_σ est en même temps un G_δ ⁴⁾.

L'existence des espaces σ indénombrables (contenus dans $\mathcal{N}$) résulte de l'hypothèse du continu. La démonstration en est tout à fait analogue à celle de l'existence des espaces raréfiés (N° III, 2). On imagine d'abord, en vertu de l'hypothèse du continu, la famille de tous les ensembles G_δ de mesure nulle rangée en une suite transfinie du type Ω :

$$(1) \quad K_0, K_1, \dots, K_\omega, K_{\omega+1}, \dots$$

Parmi les différences $K_\alpha - \sum_{\xi < \alpha} K_\xi$, il y a une infinité indénombrable de différences non vides. En effet, dans le cas contraire, il existerait un indice α à partir duquel on aurait

$$\sum_{\xi < \alpha} K_\xi = \sum_{\xi < \alpha+1} K_\xi = \sum_{\xi < \alpha+2} K_\xi = \dots$$

Comme chaque ensemble G_δ composé d'un point individuel appartient à la suite (1), on obtiendrait $\sum_{\xi < \alpha} K_\xi = \mathcal{N}$, ce qui est impossible, la somme $\sum_{\xi < \alpha} K_\xi$ étant de mesure nulle.

¹⁾ L'existence d'ensembles jouissant de cette propriété a été établie d'abord par M. Lusin à l'aide de l'hypothèse du continu, voir *Sur les ensembles toujours de première catégorie*, Fund. Math. **21** (1933) p. 119; puis par M. Rothberger dans sa Note précitée.

²⁾ Quant à l'existence d'ensembles E de ce genre, voir § 23, IV, remarque 2°.

³⁾ Voir Mazurkiewicz et Szpilrajn-Marczewski, loco cit. p. 307.

⁴⁾ Voir W. Sierpiński, *Sur l'hypothèse du continu*, Fund. Math. **5** (1924), p. 184 et E. Szpilrajn-Marczewski, *Sur un problème de M. Banach*, Fund. Math. **15** (1930), p. 212.

Tout ensemble E qui contient un seul point de chaque ensemble $K_\alpha - \sum_{\xi < \alpha} K_\xi$ non vide est un ensemble σ indénombrable.

Nous allons prouver d'abord que tout ensemble H contenu dans E et mesurable au sens de Lebesgue est dénombrable.

En effet, l'ensemble EK_α étant dénombrable quel que soit α , il n'existe aucun G_δ indénombrable de mesure nulle qui soit contenu dans E . L'ensemble E est donc de mesure intérieure nulle et par suite H est de mesure nulle. Il existe par conséquent un K_α tel que $H \subset K_\alpha$, d'où $H \subset EK_\alpha$. L'ensemble EK_α étant dénombrable, il en est de même de H .

Ceci établi, soit B un ensemble F_σ arbitraire contenu dans l'intervalle $\mathcal{J} = 01$. Il s'agit de prouver que BE est un G_δ relativement à E . Posons $\mathcal{J} - B = U + V$, où U est un F_σ et V est de mesure nulle. Il vient $E - B = UE + VE$. Comme ensemble de mesure nulle, VE est dénombrable, par conséquent $E - B$ est un F_σ dans E et BE y est un G_δ , c. q. f. d.

1. Dans un espace σ , tout ensemble borelien est un F_σ et G_δ .

Il s'agit de prouver que dans un espace σ , la somme et le produit d'une suite infinie d'ensembles ambigus de classe 1 sont ambigus de classe 1. Or, $X_1, X_2, \dots$ étant des F_σ et G_δ , la somme $X_1 + X_2 + \dots$ est un F_σ , donc — l'espace étant un espace σ — elle est un G_δ ; le produit est un G_δ , c. à d. un complémentaire d'un F_σ , donc d'un G_δ ; il est donc un F_σ .

2. Tout espace σ de dimension finie est 0-dimensionnel.

$\mathcal{X}$ étant supposé un espace σ de dimension $n > 0$, soit S un F_σ tel que (cf. § 22, I, 4):

$$\dim S \leq n-1 \quad \text{et} \quad \dim (\mathcal{X} - S) = 0.$$

En tant qu'un G_δ , l'ensemble $\mathcal{X} - S$ est d'après 1 un F_σ et par conséquent $\mathcal{X}$ se trouve décomposé en deux ensembles F_σ : S et $\mathcal{X} - S$ de dimensions $\leq n-1$. Il en résulte en vertu du § 22, I, 1, que $\dim \mathcal{X} \leq n-1$, d'où la contradiction demandée.

Rapproché du th. IV, 5, le théorème 2 implique que

3. Il existe des espaces raréfiés qui ne sont pas des espaces σ .

Evidemment, tout espace σ est raréfié.

Il résulte aussitôt de 1 que

4. Toute fonction mesurable B définie sur un espace σ est de I-e classe.

Remarque. L'ensemble E qui nous a servi pour démontrer l'existence des espaces σ indénombrables est évidemment non mesurable au sens de Lebesgue. Il existe donc des ensembles non mesurables qui jouissent de la propriété de Baire au sens restreint (puisque cette propriété appartient à chaque espace raréfié, donc à chaque espace σ).

De façon générale, tout ensemble dont chaque sous-ensemble mesurable au sens de Lebesgue est dénombrable, jouit de la propriété de Baire au sens restreint¹⁾.

Ajoutons que le problème inverse, à savoir, celui de l'existence d'un ensemble mesurable (de mesure 0) dépourvu de la propriété de Baire (même au sens large) se résout facilement sans l'hypothèse du continu.

VII. Espaces ν , espaces concentrés, propriété C.

Nous appelons espace ν tout espace dont chaque sous-ensemble non-dense est dénombrable²⁾.

L'existence des espaces ν indénombrables (contenus dans $\mathcal{N}$) résulte de l'hypothèse du continu. Nous allons établir d'abord l'existence d'un ensemble $E \subset \mathcal{N}$ jouissant de la propriété suivante (appelée propriété L):

Quel que soit le sous-ensemble non-dense N de l'intervalle $\mathcal{I}$, on a $\overline{NE} \leq s_0$.

Dans ce but, imaginons les sous-ensembles fermés non-denses de $\mathcal{I}$ rangés en une suite transfinie du type Ω :

$$F_0, F_1, \dots, F_\omega, F_{\omega+1}, \dots$$

En tant qu'espace complet, l'intervalle $\mathcal{I}$ n'est pas de I-e catégorie. Il en résulte (comme dans la démonstration du N° VI) l'existence d'une infinité indénombrable de différences $F_\alpha - \sum_{\xi < \alpha} F_\xi$ non vides.

Soit E_0 un ensemble qui contient un seul point de chacune de ces différences. Posons $E = E_0 \cdot \mathcal{N}$. On a donc $\overline{E} > s_0$.

En outre, N étant un sous-ensemble non-dense de $\mathcal{I}$, il existe un indice α tel que $F_\alpha = \overline{N}$. Comme $\overline{E_0 F_\alpha} \leq s_0$ et $NE \subset E_0 F_\alpha$, on a $\overline{NE} \leq s_0$.

¹⁾ Voir S. Saks, *Sur un ensemble non mesurable jouissant de la propriété de Baire*, Fund. Math. **11** (1928), p. 277. Cf. N. Lusin, *Sur une question concernant la propriété de Baire*, Fund. Math. **9** (1927), p. 117.

²⁾ N. Lusin, C. R. Paris **158** (1914), p. 1259.

Ceci établi, on en déduit que E est un espace indénombrable à propriété ν , puisque la propriété ν résulte évidemment de la propriété L.

L'implication inverse n'a pas lieu (comme on le voit en considérant un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ à propriété ν). On prouve cependant¹⁾ que tout espace (métrique séparable) à propriété ν est homéomorphe à un ensemble à propriété L.

1. Tout espace ν est totalement imparfait.

C'est l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor contient un sous-ensemble parfait non-dense dans $\mathcal{C}$.

2. Tout sous-ensemble à propriété de Baire d'un espace ν est somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble dénombrable.

C'est il est somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble de I-e catégorie (§ 11, IV, 2) et celui-ci est dénombrable par hypothèse.

Il en résulte que

3. Toute fonction jouissant de la propriété de Baire et définie sur un espace ν est de deuxième classe²⁾.

Définition. Un espace $\mathcal{X}$ est dit concentré autour d'un ensemble A lorsque, quel que soit l'entourage G de A , l'ensemble $\mathcal{X} - G$ est dénombrable³⁾.

4. Pour que $\mathcal{X}$ soit un espace ν , il faut et il suffit qu'il soit concentré autour de chaque ensemble dense dans lui; ou encore: qu'il soit concentré autour de chaque ensemble dense dénombrable⁴⁾.

Soit, en effet, $\mathcal{X}$ un espace ν . Soient $\bar{A} = \mathcal{X}$ et E un entourage de A . Donc, G désignant l'intérieur de E , on a $A \subset G$, d'où $\bar{G} = \mathcal{X}$, ce qui prouve que $\mathcal{X} - G$ est non-dense, donc dénombrable. Comme $\mathcal{X} - E \subset \mathcal{X} - G$, l'ensemble $\mathcal{X} - E$ est dénombrable.

La condition est donc nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, admettons que N soit non-dense et que A soit un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{X} - \bar{N}$, dense dans $\mathcal{X} - \bar{N}$. Donc

¹⁾ Voir la note de M. Sierpiński et de moi-même *Sur les ensembles qui ne contiennent aucun sous-ensemble indénombrable non-dense*, Fund. Math. **26** (1936), p. 137.

²⁾ G. Poprougénko, *Sur un problème de M. Mazurkiewicz*, Fund. Math. **15** (1930), p. 285.

³⁾ D'après M. S. Besicovitch (Acta Math. **62** (1934), p. 289), un sous-ensemble E d'un espace $\mathcal{X}$ est concentré par rapport à un ensemble $A \subset \mathcal{X}$ lorsque, quel que soit l'entourage G de A , l'ensemble $E - G$ est dénombrable. On montre facilement que, si E est concentré par rapport à A , $E + A$ l'est également.

⁴⁾ R. Szpilrajn-Marczewski, Fund. Math. **31** (1938), p. 218.

$\bar{A} = \overline{\mathcal{X} - \bar{N}} = \mathcal{X}$. L'ensemble $\mathcal{X} - \bar{N}$ étant un entourage de A , son complémentaire, c. à d. l'ensemble $\bar{N}$, est dénombrable par hypothèse. Donc N est dénombrable.

5. Tout espace $\mathcal{X}$ concentré autour d'un ensemble dénombrable A , donc tout espace ν , jouit de la propriété suivante, nommée propriété C'' :

Si à tout $x \in \mathcal{X}$ correspond une suite d'ensembles ouverts $G_{x,n}$, où $n=1, 2, \dots$, et où $x \in G_{x,n}$, il existe une suite infinie $x_1, x_2, \dots$ telle que

$$(1) \quad \mathcal{X} = G_{x_1,1} + G_{x_2,2} + \dots^1).$$

Posons, en effet, $A = [x_1, x_3, x_5, \dots]$. L'ensemble $G_{x_1,1} + G_{x_3,3} + \dots$ étant un entourage de A et l'espace $\mathcal{X}$ étant concentré autour de A , l'ensemble $\mathcal{X} - (G_{x_1,1} + G_{x_3,3} + \dots)$ est dénombrable. Rangeons-le en une suite $x_2, x_4, x_6, \dots$ (il est légitime d'admettre que cet ensemble, ainsi que l'ensemble A , est non vide). La suite $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ est la suite demandée.

6. La propriété C'' est invariante par rapport aux transformations continues.

Soient, en effet, $\mathcal{X}$ un espace à propriété C'' , f une transformation continue de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ et $H_{y,n}$ un système d'ensembles ouverts dans $\mathcal{Y}$ tel que $y \in H_{y,n}$. Il s'agit de définir une suite de points $y_1, y_2, \dots$ telle que

$$\mathcal{Y} = H_{y_1,1} + H_{y_2,2} + \dots$$

Or, la fonction f étant continue, les ensembles $f^{-1}(H_{y,n})$ sont ouverts. Posons $G_{x,n} = f^{-1}(H_{f(x),n})$. Comme $f(x) \in H_{f(x),n}$, on a $x \in G_{x,n}$. Il existe donc une suite $x_1, x_2, \dots$ vérifiant l'égalité (1); d'où

$$\mathcal{Y} = H_{f(x_1),1} + H_{f(x_2),2} + \dots$$

7. La propriété C'' implique la propriété C suivante²):

¹) F. Rothberger, *Eine Verschärfung der Eigenschaft C*, Fund. Math. **30** (1938), p. 50.

²) Le problème de l'existence d'ensembles indénombrables à propriété C provient de M. Borel. Ces ensembles coïncident avec ceux que M. Borel appelle „ensembles qui ont une mesure asymptotique inférieure à toute série donnée à l'avance“ (*Sur la classification des ensembles de mesure nulle*, Bull. Soc. Math. de France **47**, 1919, p. 123). On ne sait pas établir l'existence d'ensembles (indénombrables) à propriété C sans l'hypothèse du continu. On trouvera de nombreux renvois bibliographiques concernant la propriété C dans la note de M. Sierpiński, *Sur le rapport de la propriété (C) à la théorie générale des ensembles*, Fund. Math. **29** (1937), p. 91.

A toute suite $\{\lambda_n\}$ de nombres positifs correspond une suite d'ensembles $\{A_n\}$ telle que

$$(2) \quad \mathcal{X} = A_1 + A_2 + \dots \quad \text{et} \quad \delta(A_n) < \lambda_n.$$

En conséquence, tout ensemble à propriété C'' situé sur la ligne droite est de mesure lebesguienne nulle; il en est donc de même de toute image continue ($\subset \mathcal{E}$) d'un ensemble à propriété ν (d'après 5 et 6)¹).

Soit, en effet, $G_{x,n}$ une sphère ouverte de centre x et de diamètre $< \lambda_n$. Il existe par hypothèse une suite $x_1, x_2, \dots$ vérifiant l'égalité (1). En posant $A_n = G_{x_n,n}$, on a $\delta(A_n) < \lambda_n$, d'où la conclusion demandée.

Remarque. La dernière partie du th. 7 reste valable en remplaçant les transformations continues par les transformations à propriété de Baire.

Car f étant une fonction à propriété de Baire, il existe un ensemble A tel que $\mathcal{X} - A$ est de I-e catégorie, donc dénombrable, et que la fonction partielle $f|_A$ est continue; de sorte que, A jouissant de la propriété ν , $f(A)$ est de mesure nulle. Donc $f(\mathcal{X})$ l'est également.

Cet énoncé se déduit facilement aussi par l'application du th. V du § 28.

8. Tout espace $\mathcal{X}$ à propriété C , donc toute image continue d'un espace ν , est de dimension 0²).

Soit x_0 un point fixe de $\mathcal{X}$. Posons $f(x) = |x - x_0|$. Nous allons démontrer d'abord que l'ensemble $f(\mathcal{X})$ jouit de la propriété C . Soit, en effet, $\{\lambda_n\}$ une suite donnée et soit $\{A_n\}$ une suite vérifiant les conditions (2). Il vient

$$f(\mathcal{X}) = f(A_1) + f(A_2) + \dots \quad \text{et} \quad \delta[f(A_n)] \leq \delta(A_n),$$

car

$$|f(x) - f(x')| = ||x - x_0| - |x' - x_0|| \leq |x - x'|.$$

¹) Cf. W. Sierpiński, *Sur un ensemble non dénombrable dont toute image continue est de mesure nulle*, Fund. Math. **11** (1928), p. 304. Des extensions de ce théorème aux mesures abstraites sont dues à MM. Poprougénko et Szpilrajn-Marczewski. Voir, du dernier auteur *Remarques sur les fonctions complètement additives*, Fund. Math. **22** (1934), p. 311. Voir aussi le N° IX.

²) E. Szpilrajn-Marczewski, *La dimension et la mesure*, Fund. Math. **28** (1937), p. 82.

Comme ensemble à propriété C , $f(\mathcal{X})$ est un ensemble frontière dans $\mathcal{E}$ (même de mesure 0). Il existe donc un nombre $\eta > 0$ aussi petit que l'on veut et qui n'est pas une valeur de la fonction f ; c. à d. qu'il n'existe aucun x tel qu'on ait $|x - x_0| = \eta$. L'ensemble $E[x - x_0] < \eta$ est donc fermé-ouvert, contient x_0 et est de diamètre $\leq 2\eta$. Cela prouve que $\dim_{x_0} \mathcal{X} = 0$.

9. Tout espace $\mathcal{X}$ à propriété C , donc toute image continue d'un espace ν , est totalement imparfait¹⁾.

Supposons, en effet, que l'espace $\mathcal{X}$ contienne un ensemble P homéomorphe à l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor. Soit f une transformation continue de P en un ensemble de mesure positive, en l'intervalle $\mathcal{I}$ par exemple (cf. § 24a, VIa, théorème). On peut donc admettre que

$$(3) \quad \text{mes}[f(P)] = 1.$$

La fonction f étant uniformément continue, à tout n correspond un $\lambda_n > 0$ tel que la condition $|x - x'| < \lambda_n$ entraîne l'inégalité $|f(x) - f(x')| < 1/2^{n+1}$. L'ensemble P jouissant de la propriété C (comme sous-ensemble de $\mathcal{X}$), on a

$$P = A_1 + A_2 + \dots, \quad A_n = \bar{A}_n, \quad \delta(A_n) < \lambda_n,$$

d'où

$$f(P) = f(A_1) + f(A_2) + \dots, \quad \text{mes}[f(A_n)] \leq \delta[f(A_n)] \leq 1/2^{n+1},$$

et il vient

$$\text{mes}[f(P)] \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{2},$$

contrairement à (3).

VIII. Rapports à la propriété de Baire au sens restreint.

1. Un ensemble E à propriété ν , situé dans un espace complet séparable, ne jouit de la propriété de Baire au sens restreint que s'il est dénombrable.

En effet, en supposant que E jouisse de la propriété de Baire relativement à $\bar{E}$, E est somme d'un G_δ et d'un ensemble de I-e catégorie dans $\bar{E}$ (§ 11, IV, 2), donc dans E (§ 10, IV, 2), donc d'un ensemble dénombrable. L'ensemble E étant, d'après VII, 1, totalement imparfait, l'ensemble G_δ est dénombrable. Comme somme de deux ensembles dénombrables, l'ensemble E est donc dénombrable.

¹⁾ E. Szpilrajn-Marczewski, Sur une hypothèse de M. Borel, Fund. Math. **15** (1930), p. 126.

2. Il existe une fonction biunivoque et continue $y = f(x)$, où $x, y \in \mathcal{N}$, qui transforme tout ensemble à propriété L en un ensemble toujours de I-e catégorie¹⁾.

Soit, conformément à § 32, I (i) et (j), f une fonction biunivoque et continue définie sur $\mathcal{N}$, à valeurs appartenant à $\mathcal{N}$ et transformant tout ensemble ouvert (dans $\mathcal{N}$) en un ensemble de I-e catégorie sur soi-même. Soient E un sous-ensemble à propriété L de $\mathcal{N}$ et P un sous-ensemble parfait de $\mathcal{N}$. Conformément à II (ii), il s'agit de prouver que l'ensemble $P \cdot f(E)$ est de I-e catégorie sur P .

Posons $f^{-1}(P) = Q$. Il vient (cf. § 3, II, 13)

$$P \cdot f(E) = f[E \cdot f^{-1}(P)] = f(EQ).$$

Soit $\text{Int}(Q) = G$. La fonction f étant continue, Q est fermé et par conséquent $Q - G$ est non-dense, donc

$$\overline{EQ - G} \leq s_0, \quad \text{d'où} \quad \overline{f(EQ - G)} \leq s_0;$$

l'ensemble $f(EQ - G)$ est donc de I-e catégorie sur P . Il en est de même de $f(G)$, car G étant ouvert, $f(G)$ est de I-e catégorie sur lui-même, donc sur P , qui en est un sur-ensemble en vertu de la formule $f(G) \subset f(Q) = P$. On en conclut que $f(EQ)$ est de I-e catégorie sur P et il en est encore de même de l'ensemble

$$P \cdot f(E) = f(EQ) = f(EG) + f(EQ - G).$$

Le théorème 2 entraîne les corollaires remarquables suivants²⁾ (en vertu de l'hypothèse du continu, qui implique l'existence d'ensembles indénombrables à propriété L):

3. La propriété de Baire au sens restreint n'est pas invariante par rapport à la multiplication cartésienne par un axe.

A savoir: E étant un ensemble indénombrable à propriété L et f la fonction considérée au th. 2, l'ensemble $\mathcal{N} \times f(E)$ ne jouit pas de la propriété de Baire au sens restreint.

¹⁾ Voir N. Lusin, Sur les ensembles toujours de première catégorie, Fund. Math. **21** (1933), p. 114.

²⁾ W. Sierpiński, Sur un problème de M. Kuratowski concernant la propriété de Baire des ensembles, Fund. Math. **22** (1934), p. 54. Cf. la remarque, § 28, IV.

En effet, d'après 1, l'ensemble E ne jouit pas de la propriété de Baire au sens restreint. Il en est donc de même (cf. § 31, IV, 2) de l'ensemble

$$Z = \bigcup_{xy} [(y = f(x)) \mid (x \in E)],$$

qui lui est homéomorphe (cf. § 24, XI, 2). Or l'équivalence

$$\{[y = f(x)] \mid [y \in f(E)]\} = \{[y = f(x)] \mid (x \in E)\}$$

implique que

$$Z = \bigcup_{xy} [y = f(x)] \cdot [\mathcal{N} \times f(E)].$$

L'ensemble $\bigcup_{xy} [y = f(x)]$ étant fermé et Z ne jouissant pas de la propriété de Baire au sens restreint, l'ensemble $\mathcal{N} \times f(E)$ n'en jouit non plus.

4. Il existe une fonction définie sur $\mathcal{N}$, à propriété de Baire au sens restreint et dont l'image ne jouit pas de cette propriété.

En notations précédentes, posons $K = f(E)$ et

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{pour } y \in K \\ -1 & \text{pour } y \in \mathcal{N} - K. \end{cases}$$

L'ensemble K étant de première catégorie sur tout ensemble parfait, la fonction g est continue sur tout ensemble parfait lorsqu'on néglige les ensembles de première catégorie sur cet ensemble c. à d. que g jouit de la propriété de Baire au sens restreint.

On a d'autre part

$$Z = \bigcup_{xy} [x = g(y)] - W \quad \text{où} \quad W = \bigcup_{xy} [(x = -1) \mid (y \in \mathcal{N} - K)].$$

L'ensemble W jouit de la propriété de Baire au sens restreint, en tant qu'homéomorphe à $\mathcal{N} - K$ (puisque K , donc $\mathcal{N} - K$ la possède). Comme Z ne la possède pas, $\bigcup_{xy} [x = g(y)]$ ne la possède non plus.

5. Il existe une fonction $h(y)$, d'une variable, jouissant de la propriété de Baire au sens restreint et telle qu'en posant $g(x, y) = h(y)$, la fonction $g(x, y)$, considérée comme fonction de deux variables, ne jouit pas de cette propriété.

Car h désignant la fonction caractéristique de l'ensemble K , g est la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathcal{N} \times K$.

6. Il existe un ensemble toujours de première catégorie qui n'est pas raréfié.

Tel est l'ensemble K . Car en supposant qu'il soit raréfié, E le serait aussi (en vertu de IV, 1). Mais alors E jouirait simultanément de la propriété ν et de la propriété d'être raréfié, donc de la propriété de Baire au sens restreint (d'après III, 1), ce qui est incompatible avec le théorème 1.

IX. Rapports des espaces à propriété ν à la Théorie générale des Ensembles. 1. Soient $\mathcal{X}$ un espace à propriété ν et $m(X)$ une fonction (une „mesure”) qui fait correspondre à tout ensemble borelien $X \subset \mathcal{X}$ un nombre $m(X) \geq 0$ de façon que

(i) $m(X) = 0$ si X se compose d'un seul élément,

(ii) $m(X_1 + X_2 + \dots) = m(X_1) + m(X_2) + \dots$ si $X_i \cdot X_j = 0$ pour $i \neq j$ (additivité dénombrable).

Dans ces conditions, on a $m(\mathcal{X}) = 0^1$.

Nous allons démontrer d'abord (sans faire intervenir la propriété ν) qu'à tout point correspond un entourage ouvert de mesure aussi petite que l'on veut. Soient, en effet, $x_0 \in \mathcal{X}$ et $\varepsilon > 0$; désignons par S_n une sphère ouverte de centre x_0 et de rayon $1/n$; soit $S_0 = \mathcal{X}$. Posons $D_n = S_n - S_{n+1}$. Il vient

$$S_n = x_0 + D_n + D_{n+1} + \dots, \quad D_n \cdot D_m = 0 \text{ pour } n \neq m.$$

Donc $m(S_n) = m(D_n) + m(D_{n+1}) + \dots$. En particulier

$$m(\mathcal{X}) = m(D_0) + m(D_1) + \dots,$$

d'où l'on conclut qu'il existe un n tel que

$$m(D_n) + m(D_{n+1}) + \dots < \varepsilon, \quad \text{c. à d. que } m(S_n) < \varepsilon.$$

Ceci établi, soit $p_1, p_2, \dots$ une suite dense dans $\mathcal{X}$. Soit A_k un entourage ouvert de p_k tel que $m(A_k) < \varepsilon/2^k$. Soit

$$A = A_1 + A_2 + \dots = A_1 + (A_2 - A_1) + [A_3 - (A_1 + A_2)] + \dots,$$

d'où

$$\begin{aligned} m(A) &= m(A_1) + m(A_2 - A_1) + m[A_3 - (A_1 + A_2)] + \dots \\ &\leq m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) + \dots \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{X} - A$ étant non dense, donc dénombrable, on a

$$m(\mathcal{X} - A) = 0, \quad \text{d'où } m(\mathcal{X}) = m(A), \quad \text{donc } m(\mathcal{X}) < \varepsilon.$$

Le nombre ε étant arbitraire, il vient finalement $m(\mathcal{X}) = 0$.

¹⁾ Voir E. Szpilrajn-Marczewski, l. c. Fund. Math. 22, p. 307. L'hypothèse, que $m(X) \geq 0$, n'est pas essentielle.

Le théorème précédent, rapproché du théorème de l'existence d'espaces ν de puissance du continu, entraîne la *solution négative du problème généralisé de la mesure*, à savoir, qu'il n'existe, en dehors de la fonction identiquement nulle, aucune fonction non-négative qui satisfasse aux conditions (i) et (ii) et qui soit définie pour chaque sous-ensemble de l'intervalle $\mathcal{I}^1$.

Car, d'une part, ce dernier énoncé, comme théorème de la Théorie générale des ensembles, est réalisé sur chaque espace de puissance du continu dès qu'il est réalisé sur un seul; d'autre part, il existe des espaces de puissance c sur lesquels il est réalisé (à savoir, des espaces ν).

Il est essentiel de remarquer que le raisonnement qui précède permet de déduire du fait topologique (existence d'un espace ν de puissance c) un théorème de la Théorie générale des ensembles. Inversement, on démontre (sans l'emploi de l'hypothèse du continu) que l'existence des espaces ν de puissance c équivaut à un théorème de la Théorie générale des ensembles²⁾.

Dans un ordre d'idées analogue, on déduit de l'existence d'ensembles indénombrables à propriété ν les deux théorèmes remarquables suivants³⁾:

Il existe une fonction continue f définie sur un ensemble de puissance c , qui n'est uniformément continue sur aucun ensemble indénombrable.

Il existe une suite convergente de fonctions $f_1, f_2, \dots$ définies sur $\mathcal{E}$ qui n'est uniformément convergente sur aucun ensemble indénombrable.

¹⁾ Théorème de S. Banach et de moi-même, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fund. Math. **14** (1930), p. 127. Le fait, que l'existence des espaces ν indénombrables implique la solution du problème généralisé de la mesure a été observé par M. Szpilrajn-Marzewski dans sa note citée de Fund. Math. **22**, p. 304.

²⁾ Voir ma note *Sur le rapport des ensembles de M. Lusin à la Théorie générale des Ensembles*, Fund. Math. **22** (1934), p. 315.

³⁾ Voir W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, p. 52. Ces deux théorèmes ne se laissent établir qu'en appliquant l'hypothèse du continu; ils sont d'ailleurs équivalents. Ajoutons que le deuxième a été suggéré par le théorème de Egoroff, d'après lequel toute suite convergente de fonctions mesurables est uniformément convergente en négligeant un ensemble de mesure (extérieure) aussi petite qu'on le veut.