5. *A et B étant deux sous-ensembles fermés et disjoints d'un espace métrique $\mathfrak{X}$, on a l'homéomorphie*

$$(2^{A+B})_L \underset{\text{top}}{=} (2^A)_L \times (2^B)_L.$$

Faisons correspondre à tout couple d'ensembles fermés X, Y, où $X \subset A$ et $Y \subset B$, leur somme $F(X, Y) = X + Y$. On constate aussitôt que la fonction F transforme de façon biunivoque l'espace $(2^A)_L \times (2^B)_L$ en $(2^{A+B})_L$.

La continuité de la fonction F est une conséquence directe de la formule VI, 3.

Reste à démontrer que la fonction F est bicontinue, c. à d. que $\mathrm{Lim}\,(X_n + Y_n) = X + Y$ entraîne $\mathrm{Lim}\, X_n = X$ et $\mathrm{Lim}\, Y_n = Y$.

D'après IV, 3 il vient

$$\mathrm{Ls}\, X_n + \mathrm{Ls}\, Y_n = \mathrm{Ls}\,(X_n + Y_n) = \mathrm{Lim}\,(X_n + Y_n) = X + Y,$$

d'où on conclut que $\mathrm{Ls}\, X_n = X$ et $\mathrm{Ls}\, Y_n = Y$, puisque

$$X \subset A,\ X_n \subset A, \text{ d'où } \mathrm{Ls}\, X_n \subset A; \quad Y \subset B,\ Y_n \subset B, \text{ d'où } \mathrm{Ls}\, Y_n \subset B$$

et $AB = 0$.

Comme $\mathrm{Ls}\, X_n \cdot \mathrm{Ls}\, Y_n = 0$, il vient d'après V, 4:

$$\mathrm{Li}\, X_n + \mathrm{Li}\, Y_n = \mathrm{Li}\,(X_n + Y_n) = \mathrm{Lim}\,(X_n + Y_n) = X + Y,$$

d'où, comme auparavant, $\mathrm{Li}\, X_n = X$ et $\mathrm{Li}\, Y_n = Y$.

On a donc $\mathrm{Lim}\, X_n = X$ et $\mathrm{Lim}\, Y_n = Y$.

E. Ensembles boreliens. Fonctions mesurables B (§§ 26—28).

L'espace considéré dans les §§ 26—28 est supposé métrique.

§ 26. Ensembles boreliens.

I. Equivalences. Nous avons défini au § 5, VI la famille des ensembles boreliens comme la plus petite famille $\boldsymbol{F}$ assujettie aux conditions:

1. *tout ensemble fermé appartient à* $\boldsymbol{F}$,
2. *si* $X \in \boldsymbol{F}$, *on a* $(1 - X) \in \boldsymbol{F}$,
3. *si* $X_n \in \boldsymbol{F}$, *on a* $(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots) \in \boldsymbol{F}$,

la condition 3 se laissant remplacer par la suivante:

3′. *si* $X_n \in \boldsymbol{F}$, *on a* $(X_1 + X_2 + \ldots) \in \boldsymbol{F}$.

Nous avons démontré, d'autre part, que dans chaque espace métrique tout ensemble fermé est un $\boldsymbol{G}_\delta$ et que, par conséquent, tout ensemble ouvert est un $\boldsymbol{F}_\sigma$ (§ 15, IV). En s'appuyant sur ces faits, nous établirons à présent le théorème suivant [1]):

La famille des ensembles boreliens est la plus petite famille assujettie aux conditions 1, 3 *et* 3′.

Désignons cette dernière famille par $\boldsymbol{F}^*$. Il s'agit de prouver que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^*$.

Comme nous venons d'observer, la famille $\boldsymbol{F}$ satisfait aux conditions 1, 3 et 3′, de sorte que $\boldsymbol{F}^* \subset \boldsymbol{F}$.

Afin d'établir l'inclusion inverse, désignons par $\boldsymbol{F}^0$ la famille des ensembles complémentaires aux ensembles appartenant à $\boldsymbol{F}^*$. La famille $\boldsymbol{F}^0$ satisfait à la condition 1, car le complémentaire d'un ensemble fermé est, en tant qu'ensemble ouvert, somme d'une suite d'ensembles fermés; il appartient donc à $\boldsymbol{F}^*$. En outre, en appliquant les formules de de Morgan, on voit aussitôt que $\boldsymbol{F}^0$ satisfait aussi aux conditions 3 et 3′. Donc $\boldsymbol{F}^* \subset \boldsymbol{F}^0$, ce qui veut dire que tout ensemble appartenant à $\boldsymbol{F}^*$ est le complémentaire d'un ensemble qui appartient aussi à $\boldsymbol{F}^*$. Il en résulte que la famille $\boldsymbol{F}^*$ satisfait à la condition 2. Donc $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{F}^*$.

II. Classification des ensembles boreliens. On prouve par un simple raisonnement de la Théorie des ensembles [2]) que la famille des ensembles boreliens (donc la plus petite famille $\boldsymbol{F}$ satisfaisant aux conditions 1, 3 et 3′) est la somme d'une suite transfinie (du type Ω) des familles:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_1 + \ldots + \boldsymbol{F}_\alpha + \ldots$$

telles que:

1° $\boldsymbol{F}_0$ est la famille des ensembles fermés,

2° les ensembles de la famille $\boldsymbol{F}_\alpha$ sont des produits ou des sommes de suites dénombrables d'ensembles appartenant à $\boldsymbol{F}_\xi$ avec $\xi < \alpha$, suivant que α est pair ou impair (les nombres limites étant considérés comme pairs).

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Sur les définitions axiomatiques des ensembles mesurables* (*B*), Bull. Acad. Cracovie 1918, p. 29. Pour une généralisation appartenant à la Théorie générale des ensembles, voir du même auteur *Les ensembles boreliens abstraits*, Ann. Soc. Polonaise de Math. **6** (1927), p. 51.

[2]) Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 85. Voir aussi W. H. Young, Proc. London Math. Soc. (2) **12** (1913), p. 260.

En remplaçant dans la condition I, 1 le terme „fermé" par „ouvert" (cf. § 5, VI), on parvient à la classification suivante:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}_0+\boldsymbol{G}_1+\ldots+\boldsymbol{G}_\alpha+\ldots$$

où

1° $\boldsymbol{G}_0$ est la famille des ensembles ouverts,

2° les ensembles de la famille $\boldsymbol{G}_\alpha$ sont des sommes ou des produits de suites dénombrables d'ensembles appartenant à $\boldsymbol{G}_\xi$ avec $\xi<\alpha$, suivant que α est pair ou impair.

III. Propriétés des classes $\boldsymbol{F}_\alpha$ et $\boldsymbol{G}_\alpha$. Les familles $\boldsymbol{F}_\alpha$ avec indice pair, ainsi que les familles $\boldsymbol{G}_\alpha$ avec indice impair, sont *multiplicatives* au sens dénombrable, c. à d. qu'étant donnée une suite d'ensembles appartenant à une telle famille, leur produit appartient encore à la même famille. Les ensembles appartenant à une famille de ce genre seront dits de *classe α multiplicative*. De façon analogue, les familles $\boldsymbol{F}_\alpha$ munies d'indice impair, ainsi que les familles $\boldsymbol{G}_\alpha$ munies d'indice pair, sont *additives* et constituent la *classe α additive*. On voit donc que la classe α multiplicative (additive) est constituée par les produits (sommes) d'ensembles des classes $<\alpha$[1]).

Les classes d'indices finis sont désignées comme suit:

$$\boldsymbol{F}_\sigma, \boldsymbol{F}_{\sigma\delta}, \boldsymbol{F}_{\sigma\delta\sigma}, \ldots, \quad \boldsymbol{G}_\delta, \boldsymbol{G}_{\delta\sigma}, \boldsymbol{G}_{\delta\sigma\delta}, \ldots$$

Les propriétés suivantes des ensembles $\boldsymbol{F}_\sigma$ et $\boldsymbol{G}_\delta$ (cf. § 5, V) s'étendent par induction aux classes d'indice arbitraire.

Le *complémentaire* d'un ensemble de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$ est de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$. La *somme* et le *produit d'un nombre fini* d'ensembles appartenant à une même classe appartient à cette classe. Tout ensemble de classe α additive est somme d'une suite *croissante* d'ensembles d'indices $\xi<\alpha$; tout ensemble de classe α multiplicative est produit d'une suite *décroissante* d'ensembles d'indices $\xi<\alpha$. Pour qu'un ensemble soit de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$ (de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$) *relativement* à un ensemble E, il faut et il suffit qu'il constitue la partie commune de E et d'un ensemble de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$ (de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$). Etant donnée une fonction continue f définie sur un espace $\mathscr{X}$, si Y est de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$ (de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$), *l'ensemble* $f^{-1}(Y)$ l'est également (cf. § 13, IV (3)—(5)).

[1]) Pour α fini, les ensembles de classe α multiplicative (additive) coïncident avec les ensembles $\boldsymbol{F}$ (ensembles $\boldsymbol{O}$) de classe α au sens de Lebesgue. Cf. aussi W. Sierpiński, *Sur les rapports entre les classifications des ensembles de MM. F. Hausdorff et Ch. de la Vallée Poussin*, Fund. Math. **19** (1932), p. 257.

Ajoutons que tout ensemble borelien de classe α est un ensemble de toute classe ($\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$) à *indice supérieur*. Cela résulte par induction du fait que chaque ensemble ouvert est un $\boldsymbol{F}_\sigma$ et que chaque ensemble fermé est un $\boldsymbol{G}_\delta$.

Le *produit cartésien* de deux ensembles de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$ (de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$) est de la même classe. Car il en est ainsi dans le cas des ensembles ouverts et des ensembles fermés et on a (§ 2, II, 1a et 2a):

$$\Big(\sum_n A_n\Big)\times\Big(\sum_m B_m\Big)=\sum_{nm}(A_n\times B_m) \quad \text{et} \quad \Big(\prod_n A_n\Big)\times\Big(\prod_m B_m\Big)=\prod_{nm}(A_n\times B_m).$$

En particulier, on n'altère pas la classe d'un ensemble en le *multipliant* (au sens cartésien) *par un axe*. De là, en vertu de la formule (§ 2, II, 6a):

$$\underset{t}{\boldsymbol{P}}A_t=\prod_t(\mathscr{X}_1\times\ldots\times\mathscr{X}_{t-1}\times A_t\times\mathscr{X}_{t+1}\times\ldots),$$

on conclut qu'un *produit cartésien dénombrable* d'ensembles de classe α multiplicative est encore de classe α multiplicative (cependant le théorème analogue concernant les classes additives ne serait pas vrai, même pour la classe des ensembles ouverts; cf. § 24a, III).

En général, le produit cartésien dénombrable d'ensembles boreliens est borelien.

Si l'ensemble Z situé dans le produit $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ est de classe $\boldsymbol{F}_\alpha$ (de classe $\boldsymbol{G}_\alpha$), les ensembles

$$(1) \qquad A_y=\underset{x}{E}[(x,y)\in Z] \quad \text{et} \quad \underset{x}{E}[(x,x)\in Z]$$

le sont également (la deuxième conclusion concerne le cas où $\mathscr{X}=\mathscr{Y}$).

Car, $Z\cdot\underset{xy}{E}(y=y_0)$ et $Z\cdot\underset{xy}{E}(x=y)$ étant de classe $\boldsymbol{F}_\alpha(\boldsymbol{G}_\alpha)$ relativement à $\underset{xy}{E}(y=y_0)$, respectivement à $\underset{xy}{E}(x=y)$, il en est de même des ensembles (1), d'après § 24, III et XII (en posant $\varphi(x,y)\equiv(x,y)\in Z$).

Dans un espace séparable, la famille des ensembles ouverts (ainsi que celle des ensembles fermés) est de *puissance* $\leqslant\mathfrak{c}$ (§ 19, I). Le même énoncé est donc vrai pour toute classe borelienne. La famille des ensembles boreliens étant partagée en $\aleph_1$ classes, on en conclut que cette famille est de puissance $\leqslant\mathfrak{c}\cdot\aleph_1=\mathfrak{c}$. Par conséquent, *dans tout espace séparable de puissance du continu, il existe des ensembles non boreliens*.

Le problème de nommer effectivement un ensemble non borelien dans l'espace des nombres réels sera traité au § 34, VI.

Celui de démontrer (sans l'hypothèse du continu) l'existence d'un ensemble non borelien dans tout espace séparable indénombrable — reste ouvert.

IV. Ensembles boreliens ambigus. Un ensemble est dit *ambigu de classe* α lorsqu'il est à la fois un $\boldsymbol{F}_\alpha$ et un $\boldsymbol{G}_\alpha$. Ainsi par exemple, un ensemble est ambigu de classe 0 lorsqu'il est à la fois fermé et ouvert; il est ambigu de classe 1 lorsqu'il est un $\boldsymbol{F}_\sigma$ et un $\boldsymbol{G}_\delta$.

Tout ensemble borelien de classe α est ambigu de classe $\alpha+1$.

Evidemment, le complémentaire d'un ensemble ambigu est ambigu (de la même classe). Il en résulte que les ensembles ambigus d'une classe α constituent un *corps*, c. à d. que la somme, le produit et la différence de deux ensembles ambigus de classe α est un ensemble ambigu de classe α.

V. Décomposition d'ensembles boreliens en ensembles disjoints.

1. *Tout ensemble de classe* $\alpha>0$ *additive est somme d'une série d'ensembles disjoints ambigus de classe* α.

En effet, étant donné $A=A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots$, il vient

$$A=A_1+[A_2-A_1]+\ldots+[A_n-(A_1+\ldots+A_{n-1})]+\ldots \tag{0}$$

et, tout A_n étant supposé de classe $<\alpha$ multiplicative, donc ambigu de classe α, les termes de la série (0) sont des ensembles disjoints ambigus de classe α.

2. *Tout ensemble de classe* $\alpha>1$ *additive est somme d'une série d'ensembles disjoints de classes* $<\alpha$ *multiplicatives* [1].

Considérons la décomposition (0). Tout ensemble A_n étant supposé de classe multiplicative $<\alpha$, il en est encore de même de la somme $A_1+\ldots+A_{n-1}$. Cela veut dire que l'ensemble $1-(A_1+\ldots+A_{n-1})$ est de classe additive $<\alpha$. Cet ensemble est donc en vertu de 1 de la forme $\sum\limits_{i=1}^{\infty}B_i^n$ où les B_i^n sont des ensembles disjoints ambigus de classes $<\alpha$ (car $\alpha>1$). La formule

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}A_n\cdot B_i^n$$

représente la décomposition demandée, puisque $A_n\cdot B_i^n$ est de classe $<\alpha$ multiplicative.

[1] Théorème de N. Lusin; voir W. Sierpiński, *Sur une classification des ensembles mesurables* (*B*), Fund. Math. **10** (1927), p. 324.

3. *La famille des ensembles boreliens est la plus petite famille qui contient:*

(i) *tous les ensembles ouverts,*
(ii) *les produits de ses éléments,*
(iii) *les sommes disjointes de ses éléments.*

Soit $\boldsymbol{H}$ une famille satisfaisant aux conditions (i)—(iii). Nous allons montrer par induction que tout ensemble borelien appartient à $\boldsymbol{H}$. Or en vertu de (i) et (ii) tout $\boldsymbol{G}_\delta$ et, d'après 2, tout $\boldsymbol{G}_{\delta\sigma}$ appartient à $\boldsymbol{H}$. Donc tout $\boldsymbol{F}_\sigma$ appartient à $\boldsymbol{H}$.

Soit à présent $\alpha>1$ et admettons que tout ensemble de classe $<\alpha$ appartienne à $\boldsymbol{H}$. Donc, conformément à (ii), les ensembles de classe α multiplicative appartiennent à $\boldsymbol{H}$ et, en raison de 2 et (iii), il en est encore de même de tout ensemble de classe α additive. Par conséquent, tous les ensembles boreliens de classe α appartiennent à $\boldsymbol{H}$, c. q. f. d.

Remarques. Si l'espace est séparable de dimension 0, l'énoncé 1 est vrai aussi pour $\alpha=0$, c. à d. qu'un ensemble ouvert est alors somme d'une série d'ensembles disjoints qui sont à la fois fermés et ouverts (§ 21, I, cor. 1). Il en résulte que l'énoncé 2 est valable pour $\alpha=1$, c. à d. que dans un espace 0-dimensionnel tout $\boldsymbol{F}_\sigma$ est somme d'une série d'ensembles fermés disjoints.

Le dernier énoncé n'est pas valable dans les espaces de dimension >0: par exemple, l'intervalle ouvert ne se laisse pas décomposer en une suite d'ensembles fermés et disjoints.

VI. Séries alternées d'ensembles boreliens. 1. Soit

$$A_1\supset A_2\supset\ldots\supset A_\xi\supset A_{\xi+1}\supset\ldots\supset A_\gamma$$

une suite transfinie dénombrable d'ensembles ambigus de classe α et telle que

$$A_\lambda=\prod_{\xi<\lambda}A_\xi \text{ si } \lambda \text{ est un nombre limite ou bien si } \lambda=\gamma.$$

Dans ces conditions, *l'ensemble*

$$S=A_1-A_2+A_3-A_4+\ldots+A_{\omega+1}-A_{\omega+2}+\ldots$$

est ambigu de classe α.

On a, en effet (§ 12, I (4)):

$$1-S=1-A_1+A_2-A_3+\ldots+A_\omega-A_{\omega+1}+\ldots+A_\gamma.$$

Or, toute différence $A_\xi - A_{\xi+1}$ étant un ensemble ambigu de classe α, donc de classe α additive, les ensembles S et $1-S$, en tant que sommes dénombrables d'ensembles de ce genre, sont également de classe α additive. Donc S est ambigu de classe α.

2. *Etant donnée une suite $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ d'ensembles ambigus de classe α tels que $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = 0$, l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty}(A_{2n-1} - A_{2n})$ est ambigu de classe α.*

C'est un cas particulier de l'énoncé 1.

3. *La somme d'une série alternée (dénombrable) d'ensembles boreliens décroissants de classe α multiplicative*

$$B = B_1 - B_2 + B_3 - B_4 + \ldots + B_{\omega+1} - B_{\omega+2} + \ldots$$

est un ensemble ambigu de classe $\alpha+1$[1].

Car en posant $B_\lambda = \prod_{\xi<\lambda} B_\xi$ pour λ limite et en tenant compte du fait que le produit dénombrable des B_ξ est de classe α multiplicative, donc ambigu de classe $\alpha+1$, on conclut de l'énoncé 1 que B est un ensemble ambigu de classe $\alpha+1$.

VII. Théorèmes de réduction et de séparation.

1. *Théorème de réduction. A toute suite (finie ou infinie) $G_1, G_2, \ldots$ d'ensembles de classe $\alpha > 0$ additive, correspond une suite $H_1, H_2, \ldots$ d'ensembles disjoints de classe $\alpha > 0$ additive et tels que*

$$H_i \subset G_i \quad \text{et} \quad H_1 + H_2 + \ldots = G_1 + G_2 + \ldots$$

Par conséquent, *si $1 = G_1 + G_2 + \ldots$, les ensembles H_i sont ambigus de classe α.*

Pour s'en convaincre, on n'a qu'à poser conformément à V, 1:

$$G_i = F_{i,1} + F_{i,2} + \ldots$$

où $F_{i,j}$ est ambigu de classe α, et de répéter la démonstration du théorème de réduction établi au § 21, II.

[1] Le théorème réciproque est vrai dans les espaces complets (voir § 33).

De façon analogue, on déduit du th. 1 les énoncés suivants:

2. *Théorème de séparation*[1]. *Etant donnée une suite d'ensembles $F_1, F_2, \ldots$ de classe $\alpha > 0$ multiplicative et tels que $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots = 0$, il existe une suite d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$ ambigus de classe α et tels que*

$$F_i \subset E_i \quad \text{et} \quad E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots = 0.$$

En particulier: *A et B étant disjoints et de classe $\alpha > 0$ multiplicative, il existe un ensemble E ambigu de classe α tel que*

$$A \subset E \quad \text{et} \quad EB = 0. \tag{1}$$

En d'autres termes: *étant donnés deux ensembles $A \subset C$ de classe $\alpha > 0$ dont le premier est de classe multiplicative et le deuxième de classe additive, il existe un ensemble E ambigu de classe α tel que*

$$A \subset E \subset C. \tag{2}$$

3. *Etant donnée une suite d'ensembles $F_1, F_2, \ldots$ de classe $\alpha > 0$ multiplicative, il existe une suite d'ensembles $B_1, B_2, \ldots$ de classe α additive tels que*

$$F_i - \prod_{m=1}^{\infty} F_m \subset B_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{\infty} B_i = 0.$$

4. *Etant donné un système fini $A_1, \ldots, A_k$ d'ensembles disjoints de classe $\alpha > 0$ multiplicative, il existe un système $F_1, \ldots, F_k$ d'ensembles ambigus de classe α, disjoints et tels que*

$$A_i \subset F_i \quad \text{et} \quad 1 = F_1 + \ldots + F_k.$$

VIII. Ensembles relativement ambigus. 1. *A étant un ensemble de classe $\alpha > 0$ multiplicative et B un ensemble ambigu de classe α relativement à A, l'ensemble B est de la forme $B = AC$ où C est ambigu de classe α (relativement à l'espace tout entier).*

En effet, l'hypothèse que B est ambigu de classe α par rapport à A veut dire que B et $A-B$ sont de classe α multiplicative par rapport à A. Or, A étant lui-même de classe α multiplicative, B et $A-B$ sont deux ensembles de classe α multiplicative (dans l'espace). D'après le théorème de séparation (VII, 2 (1)), il existe un ensemble C ambigu de classe α tel que

$$B \subset C \quad \text{et} \quad C \cdot (A - B) = 0,$$

[1] Voir W. Sierpiński, *Sur la séparabilité multiple des ensembles mesurables B*, Fund. Math. **23** (1934), p. 295. Pour le cas particulier, voir du même auteur *Sur une propriété des ensembles ambigus*, Fund. Math. **6** (1924), p. 1. On y trouve plusieurs applications à la Théorie générale des fonctions.

d'où

$$B = AB \subset AC \quad \text{et} \quad CA \subset B, \quad \text{donc} \quad B = AC.$$

En vue des applications ultérieures, nous allons démontrer que:

2. *Etant donnés un ensemble A et un système d'ensembles $\{B_{i_1...i_n}\}$ ambigus de classe α par rapport à A et tels que*

$$B_{i_1...i_n} \cdot B_{j_1...j_k} = 0 \quad \textit{dès que} \quad (i_1...i_k) \neq (j_1...j_k) \quad \textit{et} \quad k \leqslant n,$$

il existe un système d'ensembles $\{C_{i_1...i_n}\}$ ambigus de classe α par rapport à la somme

(0) $$A_n = \sum C_{i_1...i_n}$$

(où la sommation s'étend à tous les systèmes de n indices) et tels que:

(1) $$A_n \textit{ est ambigu de classe } \alpha + 1,$$

(2) $$AC_{i_1...i_n} = B_{i_1...i_n},$$ (3) $$C_{i_1...i_n} \cdot C_{j_1...j_k} = 0,$$

(4) $$C_{i_1...i_n} = 0 \quad \textit{si} \quad B_{i_1...i_n} = 0.$$

De plus, *si A est de classe $\alpha > 0$ multiplicative et si l'on a*

$$A = \sum B_{i_1...i_n} \quad \textit{pour tout } n,$$

A_n coïncide avec l'espace tout entier.

Il existe par hypothèse un système d'ensembles $\{D_{i_1...i_n}\}$ de classe α additive (même ambigus de classe α, lorsque A est de classe $\alpha > 0$ multiplicative), tels que

$$AD_{i_1...i_n} = B_{i_1...i_n} \quad \text{et que} \quad D_{i_1...i_n} = 0 \quad \text{si} \quad B_{i_1...i_n} = 0.$$

Désignons par V_n la somme de tous les produits de la forme $D_{i_1...i_n} \cdot D_{j_1...j_k}$ et posons

$$C_{i_1...i_n} = D_{i_1...i_n} - V_n.$$

L'ensemble $A_n = \sum D_{i_1...i_n} - V_n$ est ambigu de classe $\alpha + 1$ comme différence de deux ensembles de classe α additive. L'égalité

$$A_n \cdot D_{i_1...i_n} = D_{i_1...i_n} - V_n = C_{i_1...i_n}$$

implique que $C_{i_1...i_n}$ est de classe α additive par rapport à A_n, d'où l'on conclut, en vertu de l'égalité

$$C_{i_1...i_n} \cdot C_{j_1...j_n} = D_{i_1...i_n} \cdot D_{j_1...j_n} - V_n = 0,$$

que $C_{i_1...i_n}$ est ambigu de classe α par rapport à A_n.

On a enfin

$$AC_{i_1...i_n} = AD_{i_1...i_n} - AV_n = B_{i_1...i_n},$$

car l'égalité

$$AD_{i_1...i_n} \cdot D_{j_1...j_k} = B_{i_1...i_n} \cdot B_{j_1...j_k} = 0$$

donne $AV_n = 0$.

Si l'on suppose que $A = \sum B_{i_1...i_n}$, il vient

$$B_{i_1...i_n} = \sum_k B_{i_1...i_n k} \subset \sum_k D_{i_1...i_n k}$$

et il existe (cf. VII, 2 (2)) un ensemble $E_{i_1...i_n}$ ambigu de classe α tel que

$$B_{i_1...i_n} \subset E_{i_1...i_n} \subset \sum_k D_{i_1...i_n k}.$$

On définit les ensembles $C_{i_1...i_n}$ (où $n \geqslant 0$) par induction, en convenant que

1) C est l'espace tout entier et $B = A$,

2) $i_1 \dots i_n$ étant un système donné et l étant le plus petit indice tel que $B_{i_1...i_n l} \neq 0$, on a

$$C_{i_1...i_n l} = C_{i_1...i_n} \cdot D_{i_1...i_n l} + C_{i_1...i_n} - E_{i_1...i_n},$$

3) pour $k > l$

$$C_{i_1...i_n k} = C_{i_1...i_n} \cdot D_{i_1...i_n k} - (C_{i_1...i_n l} + \dots + C_{i_1...i_n (k-1)}).$$

Remarque. Les énoncés 1 et 2 sont valables aussi pour $\alpha = 0$ dans *l'espace séparable de dimension* 0.

Le th. 1 se laisse préciser de la façon suivante [1]):

3. *Etant donnée une suite d'ensembles $B^1, B^2, \dots$ ambigus de classe α relativement à un ensemble A, il existe un ensemble Y de classe $\alpha + 1$ multiplicative et une suite $C^1, C^2, \dots$ d'ensembles ambigus de classe α relativement à Y, tels que $B^n = AC^n$ et que les suites*

(5) $$B^1, \; A - B^1, \; B^2, \; A - B^2, \dots$$

et

(6) $$C^1, \; Y - C^1, \; C^2, \; Y - C^2, \dots$$

soient semblables (*dans le sens du* § 16, II).

[1]) Voir la note de T. Posament et moi-même *Sur l'isomorphie algébro-logique et les ensembles relativement boreliens*, Fund. Math. **22** (1934), p. 285.

17*

De plus, *si A est de classe $\alpha>0$ multiplicative, Y coïncide avec l'espace tout entier.*

Faisons correspondre à tout système $i_1,\ldots,i_n$ composé de nombres 0 et 1, un ensemble $B_{i_1\ldots i_n}$ en convenant que

(7) $$B_{i_1\ldots i_n}=B^1_{i_1}\cdot\ldots\cdot B^n_{i_n} \quad \text{et} \quad B^n_0=B^n,\ B^n_1=A-B^n.$$

Les hypothèses du th. 2 étant réalisées [1]), envisageons les ensembles $C_{i_1\ldots i_n}$ et A_n de sa thèse et posons

(8) $$Y=A_1\cdot A_2\cdot\ldots,$$

(9) $$C^1=YC_0,\quad C^2=Y(C_{00}+C_{10}),\ldots,\quad C^n=Y\cdot\sum C_{i_1\ldots i_{n-1}0},\ldots$$

Il vient $A=B_0+B_1$ et — de façon générale — comme les ensembles $B_{i_1\ldots i_n}$ sont les constituants de A relatifs aux ensembles $B^1,\ldots,B^n$ (cf. § 23, VI, rem. 2⁰), leur somme est égale à A (pour n fixe); on a donc (cf. (0) et (2)):

(10) $$A=\sum B_{i_1\ldots i_n}\subset\sum C_{i_1\ldots i_n}=A_n,$$

d'où selon (8):

(11) $$A\subset A_1\cdot A_2\cdot\ldots=Y.$$

Donc d'après (9), (2) et (7):

$$AC^n=AY\cdot\sum C_{i_1\ldots i_{n-1}0}=\sum AC_{i_1\ldots i_{n-1}0}=$$
$$=\sum B_{i_1\ldots i_{n-1}0}=\sum B^1_{i_1}\cdot\ldots\cdot B^{n-1}_{i_{n-1}}\cdot B^n=B^n.$$

Les ensembles A_n étant de classe $\alpha+1$ multiplicative, leur produit Y l'est également. $C_{i_1\ldots i_n}$ étant ambigu de classe α par rapport à A_n, $YC_{i_1\ldots i_n}$ l'est par rapport à Y (puisque $Y\subset A_n$) et il en est de même de C^n.

Afin de démontrer la similitude des suites (5) et (6), remarquons d'abord que, les ensembles $B_{i_1\ldots i_n}$ étant (pour n fixe) les constituants de l'ensemble A, tout produit d'un nombre fini de termes de la suite (5) est somme d'un certain nombre de ces ensembles; à savoir, on a pour $l_1<\ldots<l_n$

(12) $$B^{l_1}_{i_{l_1}}\cdot\ldots\cdot B^{l_n}_{i_{l_n}}=\sum B_{j_1j_2\ldots j_{l_n}} \quad \text{où} \quad j_{l_1}=i_{l_1},\ \ldots,\ j_{l_n}=i_{l_n}.$$

[1]) On peut évidemment admettre dans le th. 2 que les indices $i_1,\ldots,i_n$ ne prennent que deux valeurs 0 et 1.

Une propriété analogue appartient à la suite (6). Les formules: (9), (10), (8) et (3) impliquent que

$$C^k=Y\cdot\sum C_{j_1\ldots j_{k-1}0}\cdot\sum C_{i_1\ldots i_n}=Y\cdot\sum C_{j_1\ldots j_n},$$

la dernière sommation étant étendue à tous les systèmes $j_1\ldots j_n$ tels que $j_k=0$. Car

$$YC_{j_1\ldots j_n}=YA_kC_{j_1\ldots j_n}=Y\sum C_{i_1\ldots i_k}\cdot C_{j_1\ldots j_k\ldots j_n}=YC_{j_1\ldots j_k}\cdot C_{j_1\ldots j_k\ldots j_n}.$$

Pareillement, d'après (9), (11) et (0):

$$Y-C^k=YA_k-\sum C_{j_1\ldots j_{k-1}0}=Y\sum C_{j_1\ldots j_{k-1}1},$$

d'où, comme auparavant, $Y-C^k=Y\sum C_{j_1\ldots j_n}$ où $j_k=1$.

On en conclut, en posant $C^k_0=C^k$ et $C^k_1=Y-C^k$, que

$$C^k_i=Y\sum C_{j_1\ldots j_n} \quad \text{où} \quad j_k=i$$

et que (cf. (4)) pour $l_1<\ldots<l_n$:

(13) $$C^{l_1}_{i_{l_1}}\cdot\ldots\cdot C^{l_n}_{i_{l_n}}=Y\sum C_{j_1j_2\ldots j_{l_n}} \quad \text{où} \quad j_{l_1}=i_{l_1},\ldots,j_{l_n}=i_{l_n}.$$

Les égalités $B_{i_1\ldots i_n}=0$ et $YC_{i_1\ldots i_n}=0$ sont équivalentes, car la première entraîne la deuxième d'après (4), et selon (2) et (11):

$$B_{i_1\ldots i_n}=AC_{i_1\ldots i_n}\subset YC_{i_1\ldots i_n}.$$

La similitude des suites (5) et (6) en découle immédiatement en vertu de (12) et (13).

Admettons à présent que A soit de classe $\alpha>0$ multiplicative. D'après la première égalité (10) et la deuxième partie du th. 2, l'ensemble A_n, donc (cf. (11)) Y, coïncide avec l'espace tout entier.

Le théorème établi, il est à remarquer que la correspondance entre les termes des suites (5) et (6) (que l'on obtient en attachant au n-ème terme de la suite (5) le n-ème terme de la suite (6)) se laisse étendre sur les plus petits corps contenant respectivement les ensembles des suites (5) et (6); à savoir, en attachant à la somme (produit, différence) de deux ensembles la somme (produit, différence) des ensembles correspondants. On définit ainsi une *isomorphie algébro-logique*[1]) entre les deux corps; de sorte que *toute relation exprimée en termes de l'Algèbre de la Logique qui a lieu entre ensembles du premier corps a lieu aussi dans le deuxième corps.*

IX. Ensemble limite d'ensembles ambigus. 1. *A étant un ensemble ambigu de classe $\alpha>1$, il existe une suite d'ensembles A_n ambigus de classes $<\alpha$ tels que*

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cdot A_{n+1}\cdot\ldots)=\prod_{n=0}^{\infty}(A_n+A_{n+1}+\ldots),$$

c. à d. que $A=\operatorname*{Limes}_{n=\infty}A_n$ au sens de la Théorie générale des ensembles (cf. § 13, VI, 8).

Dans les espaces 0-dimensionnels séparables, le théorème est valable aussi pour $\alpha=1$.

On a par hypothèse:

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}K_n,\quad 1-A=\sum_{n=0}^{\infty}L_n,$$

$$K_n\subset K_{n+1}\quad(\text{d'où } K_n=\prod_{i=0}^{\infty}K_{n+i}),$$

$$L_n\subset L_{n+1}\quad(\text{d'où } 1-L_i=\sum_{n=0}^{\infty}(1-L_{n+i})),$$

les ensembles K_n et L_n étant de classes $<\alpha$ multiplicatives.

D'après le théorème de séparation (VII, 2 (2)) il existe une suite d'ensembles A_n ambigus de classes $<\alpha$ et tels que

$$K_n\subset A_n\subset 1-L_n.$$

La double égalité à démontrer résulte de la formule (cf. § 2, IV):

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}K_n=\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{i=0}^{\infty}K_{n+i}\subset\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{i=0}^{\infty}A_{n+i}\subset\prod_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{n+i}\subset$$
$$\subset\prod_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(1-L_{n+i})=\prod_{i=0}^{\infty}(1-L_i)=1-\sum_{i=0}^{\infty}L_i=A.$$

Le th. 1 résulte aussi du lemme suivant, qui appartient à la Théorie des ensembles et qui permet de le préciser dans le cas où α est un nombre limite:

[1]) Pour cette notion, voir op. cit. p. 281.

Lemme[1]). *Les conditions*

$$(1)\quad A=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}B_{n,m},\qquad (2)\quad A=\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{n,m},$$

$$(3)\quad \sum_{n=1}^{\infty}C_{n,m+1}\subset\sum_{n=1}^{\infty}C_{n,m}$$

impliquent que

$$A=\operatorname*{Limes}_{n=\infty}A_n\quad\text{où}\quad A_n=\sum_{k=1}^{n}(B_{k,1}\cdot\ldots\cdot B_{k,n})\cdot(C_{1,k}+\ldots+C_{n,k}).$$

Il s'agit de démontrer que

$$1^0\quad A\subset\sum_n A_n\cdot A_{n+1}\cdot\ldots\qquad\text{et}\qquad 2^0\quad A'\subset\sum_m A'_m\cdot A'_{m+1}\cdot\ldots$$

La condition 1^0 signifie que, étant donné un $p\in A$, il existe un indice n_0 tel que, pour $n\geqslant n_0$, on a $p\in A_n$.

Or il existe d'après (1) un k tel que

$$p\in B_{k,1}\cdot B_{k,2}\cdot\ldots$$

D'après 2, il existe une suite d'indices $i_1,i_2,\ldots$ tels que

$$p\in C_{i_1,1}\cdot C_{i_2,2}\cdot\ldots$$

Désignons par n_0 le plus grand des nombres k et i_k. Il vient pour $n\geqslant n_0$:

$$C_{i_k,k}\subset C_{1,k}+\ldots+C_{n,k}.$$

Par conséquent

$$p\in(B_{k,1}\cdot\ldots\cdot B_{k,n})\cdot C_{i_k,k}\subset(B_{k,1}\cdot\ldots\cdot B_{k,n})\cdot(C_{1,k}+\ldots+C_{n,k})\subset A_n.$$

Soit, d'autre part, $p\in A'$. Il s'agit de prouver qu'il existe un m_0 tel que, pour $m\geqslant m_0$, on a $p\in A'_m$ où

$$A'_m=\prod_{l=1}^{m}(B'_{l,1}+\ldots+B'_{l,m}+C'_{1,l}\cdot\ldots\cdot C'_{m,l}).$$

Par hypothèse

$$(4)\quad A'=\prod_n\sum_m B'_{n,m},\quad A'=\sum_m\prod_n C'_{n,m},\quad \prod_n C'_{n,m}\subset\prod_n C'_{n,m+1}.$$

[1]) W. Sierpiński, *Sur les rapports entre les classifications des ensembles de MM. F. Hausdorff et Ch. de la Vallée Poussin*, Fund. Math. **19** (1932), p. 260.

La deuxième de ces formules implique qu'il existe un k tel que

$$p \in \prod_n C'_{n,k}, \quad \text{donc} \quad p \in \prod_n C'_{n,k+1}, \quad p \in \prod_n C'_{n,k+2}, \ldots$$

La première implique l'existence d'une suites d'indices $i_1, i_2, \ldots$ tels que

$$p \in B'_{1,i_1} \cdot B'_{2,i_2} \cdot \ldots$$

Soit m_0 le plus grand des nombres $i_1, \ldots, i_k$. Soit $m \geqslant m_0$. Il vient:

$$p \in B'_{l,i_l} \subset B'_{l,1} + \ldots + B'_{l,m} \quad \text{pour} \quad l \leqslant k,$$
$$p \in (C'_{1,l} \cdot \ldots \cdot C'_{m,l}) \quad \text{pour} \quad l \geqslant k.$$

On a donc pour tout $l (\leqslant m)$:

$$p \in (B'_{l,1} + \ldots + B'_{l,m} + C'_{1,l} \cdot \ldots \cdot C'_{m,l}), \quad \text{c. à d.} \quad p \in A'.$$

Le lemme implique aussitôt l'énoncé suivant qui complète le th. 1:

2. *A étant un ensemble ambigu de classe $\lambda+1$, où λ est un nombre limite, il existe une suite d'ensembles A_n ambigus de classes $<\lambda$ tels que* $A = \underset{n=\infty}{\mathrm{Limes}}\, A_n$.

X. Ensembles localement boreliens. Opération $\mathcal{M}$ de Montgomery. D'après la définition générale de la localisation des propriétés (§ 7, IV), un ensemble A est dit *de classe α au point p* lorsqu'il existe un entourage E de p tel que AE est un ensemble borelien de classe α. Le terme „entourage" peut être remplacé par „entourage ouvert", excepté dans le cas où il s'agit de la classe 0 multiplicative (cas d'ensemble localement fermé, voir § 12, IX), car AE étant de classe α et G étant l'intérieur de E, l'ensemble AG est encore de classe α (sauf dans le cas exceptionnel indiqué). On peut enfin remplacer dans le cas de l'espace séparable les entourages ouverts par les ensembles ouverts appartenant à la base $R_1, R_2, \ldots$ de l'espace.

1. *L'ensemble B des points de A où A est localement de classe α additive (ou bien de classe multiplicative >0) est encore de la même classe.*

En particulier: *si, dans un espace séparable $\mathcal{X}$, A est en chacun de ses points de classe α additive (ou bien de classe multiplicative >0), A est un ensemble de la même classe.*

Envisageons d'abord le cas de l'espace séparable [1]), où la démonstration est bien plus simple.

Soit $R_{n_1}, R_{n_2}, \ldots$ la suite de tous les ensembles (appartenant à la base) tels que AR_{n_k} est de classe α additive. L'ensemble

$$B = \sum_k AR_{n_k}$$

est donc de classe α additive.

Supposons à présent que AR_{n_k} soit de classe $\alpha>0$ multiplicative et posons en vertu de l'identité $XY = X-(X-Y)$:

$$B = \sum_k AR_{n_k} = A \cdot \sum_k R_{n_k} = \sum_k R_{n_k} - \Big[\sum_k R_{n_k} - A\Big] = \sum_k R_{n_k} - \sum_k [R_{n_k} - AR_{n_k}].$$

L'ensemble $R_{n_k} - AR_{n_k}$ étant de classe α additive, il en est de même de $\sum_k [R_{n_k} - AR_{n_k}]$, d'où la conclusion demandée.

Le th. 1 se trouve ainsi établi pour l'espace séparable.

Sa démonstration pour l'espace métrique arbitraire sera basée sur une méthode générale, que nous allons appliquer aussi à d'autres problèmes [2]).

Soit $G_0, G_1, \ldots, G_\xi, \ldots$ une famille bien ordonnée d'ensembles ouverts. Posons

$$(1) \qquad K_\xi = G_\xi - \sum_{\eta<\xi} G_\eta.$$

Faisons correspondre à toute suite transfinie $X_0, X_1, \ldots, X_\xi, \ldots$ la somme

$$(2) \qquad S = \sum_\xi X_\xi K_\xi,$$

nommée *résultat de l'opération $\mathcal{M}$ effectuée sur la suite $\{X_\xi\}$*.

2. *L'opération $\mathcal{M}$ est additive, multiplicative et, dans le cas où*

$$(\mathrm{i}) \qquad \mathcal{X} = K_1 + K_2 + \ldots + K_\xi + \ldots,$$

elle est soustractive.

---

[1]) Cf. K. Zarankiewicz, *O zbiorach lokalnie mierzalnych* (*B*), Wiadomości Matematyczne **30** (1928), p. 115.

[2]) Cette méthode et ses applications sont dues à M. D. Montgomery. Voir *Non-separable metric spaces*, Fund. Math. **25** (1935), p. 527. Cf. aussi ma note *Quelques problèmes concernant les espaces métriques non-séparables*, ibid. p. 535.

L'additivité de l'opération $\mathfrak{M}$ est immédiate: elle signifie que l'égalité $X_\xi = \sum_\iota X_\xi^\iota$ (où ι parcourt un ensemble arbitraire d'indices) entraîne

(3) $$\sum_\xi X_\xi K_\xi = \sum_\xi \Big(\sum_\iota X_\xi^\iota\Big) K_\xi = \sum_\iota \Big(\sum_\xi X_\xi^\iota\Big) K_\xi .$$

Pour démontrer que l'opération $\mathfrak{M}$ est multiplicative, posons $X_\xi = \prod_\iota X_\xi^\iota$ et remarquons qu'on a en vertu de (1):

(4) $$K_\xi \cdot K_\eta = 0 \quad \text{pour} \quad \xi \neq \eta .$$

De là on conclut que

(5) $$\sum_\xi X_\xi K_\xi = \sum_\xi \prod_\iota X_\xi^\iota K_\xi = \prod_\iota \sum_\xi X_\xi^\iota K_\xi ,$$

en tenant compte de la règle générale suivante: si quels que soient α, β et $\eta \neq \xi$, on a $A_{\xi\alpha} \cdot A_{\eta\beta} = 0$, alors $\sum_\xi \prod_\alpha A_{\xi\alpha} = \prod_\alpha \sum_\xi A_{\xi\alpha}$.

Enfin, en posant $X_\xi = \mathcal{X} - X_\xi'$, il vient

(6) $$\sum_\xi X_\xi K_\xi = \sum_\xi (K_\xi - X_\xi') = \sum_\xi K_\xi - \sum_\xi K_\xi X_\xi' ,$$

car, d'une part,

$$K_\xi = K_\xi X_\xi + K_\xi X_\xi', \quad \text{d'où} \quad \sum_\xi K_\xi = \sum_\xi K_\xi X_\xi + \sum_\xi K_\xi X_\xi' ,$$

et d'autre part, d'après (4):

$$(K_\xi X_\xi) \cdot (K_\eta X_\eta') = 0, \quad \text{d'où} \quad \Big(\sum_\xi K_\xi X_\xi\Big) \cdot \Big(\sum_\xi K_\xi X_\xi'\Big) = 0.$$

Les formules (i), (5) et (6) impliquent la soustractivité de l'opération $\mathfrak{M}$:

$$\sum_\xi (X_\xi - Y_\xi) K_\xi = \sum_\xi X_\xi K_\xi \cdot \sum_\xi Y_\xi' K_\xi = \sum_\xi X_\xi K_\xi - \sum_\xi Y_\xi K_\xi .$$

Remarque. Si l'on supprime l'hypothèse (i), on a, à la place de la soustractivité, la formule suivante

(7) $$\sum_\xi X_\xi K_\xi = \sum_\xi G_\xi - \sum_\xi K_\xi X_\xi' .$$

En effet, (7) résulte de (6) en vertu de l'identité évidente

$$\sum_\xi K_\xi = \sum_\xi G_\xi .$$

3. *Pour $\alpha > 0$, les classes $\boldsymbol{F}_\alpha$ et $\boldsymbol{G}_\alpha$ sont des invariants de l'opération $\mathfrak{M}$.*

Convenons que $\varrho(X, 0) = 1$ et posons

(8) $$X_\xi^n = X_\xi \cdot K_\xi \cdot \mathop{E}_x \Big[\varrho(x, \mathcal{X} - G_\xi) \geqslant \frac{1}{n}\Big].$$

L'ensemble G_ξ étant ouvert, il vient d'après (1):

$$X_\xi \cdot K_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} X_\xi^n, \quad \text{d'où} \quad S = \sum_\xi \sum_{n=1}^{\infty} X_\xi^n$$

d'après (2); donc, en posant

(9) $$S_n = \sum_\xi X_\xi^n ,$$

on a

(10) $$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n .$$

En outre

(11) $$\varrho(X_\eta^n, X_\xi^n) \geqslant \frac{1}{n} \quad \text{pour} \quad \eta \neq \xi .$$

Soit, en effet, $x_\eta \in X_\eta^n$, $x_\xi \in X_\xi^n$ et $\eta < \xi$. D'après (8) et (1):

$$\varrho(x_\eta, \mathcal{X} - G_\eta) \geqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x_\xi \in K_\xi \subset \mathcal{X} - G_\eta ,$$

donc $|x_\eta - x_\xi| \geqslant \frac{1}{n}$, d'où la formule (11).

L'inégalité (11) implique que les ensembles X_ξ^n sont fermés-ouverts dans S_n. Comme $\mathrm{Fr}(G_\xi) \cdot \mathop{E}_x \Big[\varrho(x, \mathcal{X} - G_\xi) \geqslant \frac{1}{n}\Big] = 0$, on a d'après (8) et (1):

$$X_\xi^n = X_\xi \cdot \Big[\overline{G}_\xi - \sum_{\eta<\xi} G_\eta\Big] \cdot \mathop{E}_x \Big[\varrho(x, \mathcal{X} - G_\xi) \geqslant \frac{1}{n}\Big],$$

ce qui prouve que, *si X_ξ est fermé, X_ξ^n l'est également.* Il en résulte que S_n *est fermé*, car en supposant que $p \in \overline{S}_n - S_n$, il existerait deux points $x_\eta \in X_\eta^n$ et $x_\xi \in X_\xi^n$ tels que $|x_\eta - p| < 1/2n$, $|x_\xi - p| < 1/2n$ et $\eta \neq \xi$. Mais on aurait alors $|x_\eta - x_\xi| < 1/n$, contrairement à (11).

Il est ainsi établi, en tenant compte de (10), que, *si X_ξ est fermé, S est un $\boldsymbol{F}_\sigma$.* Il en résulte, en raison de (3), que *si X_ξ est un $\boldsymbol{F}_\sigma$, S l'est également.* On déduit de là, en vertu de (7), que, *si X_ξ est un $\boldsymbol{G}_\delta$, S l'est également.*

En tenant compte des formules (3) et (5), on parvient à la conclusion demandée: *si X_ξ est un F_α (un G_α), S l'est également.*

Nous en déduirons à présent le théorème suivant, dont le th. 1 n'est qu'un cas particulier (en vertu de 3):

4. *Soit* **P** *une propriété invariante par rapport à l'opération $\mathcal{M}$. A étant un ensemble donné, désignons par S l'ensemble des points x de A pour lesquels il existe un ensemble ouvert G tel que $x \in G$ et que GA jouit de la propriété* **P**. *L'ensemble S jouit alors aussi de cette propriété.*

Rangeons, en effet, les ensembles ouverts G tels que GA possède la propriété **P** en une suite transfinie $G_0, G_1, \dots, G_\xi, \dots$ et posons $X_\xi = AG_\xi$. On a alors l'égalité (2), car

$$S = \sum_\xi AG_\xi = \sum_\xi AK_\xi = \sum_\xi X_\xi K_\xi.$$

L'ensemble X_ξ jouissant de la propriété **P**, l'invariance de cette propriété par rapport à l'opération $\mathcal{M}$ implique que l'ensemble S en jouit également.

Remarque[1]). En suivant la voie de la démonstration du th. 1 dans le cas d'espace séparable, on constate aussitôt que, si un ensemble situé dans un espace séparable est localement borelien en chacun des ses points, il est un ensemble borelien.

Cependant, on peut définir *un espace métrique non séparable contenant un ensemble non borelien qui est en chacun de ses points localement borelien* (de classe non bornée).

Considérons, en effet, l'espace formé de tous les points (x, α), où $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant \alpha < \Omega$, la distance des points (x, α) et (x', α') étant définie comme égale à $|x - x'|$ pour $\alpha = \alpha'$ et à 1 pour $\alpha \neq \alpha'$ (ainsi l'espace est le produit cartésien de l'intervalle et de l'ensemble des nombres transfinis $< \Omega$). Soit I_α „l'intervalle" (x, α) où $0 \leqslant x \leqslant 1$, et B_α un ensemble borelien $\subset I_\alpha$, qui n'est pas de classe α. L'ensemble $S = \sum_{\alpha < \Omega} B_\alpha$ est localement borelien, puisque les intervalles I_α sont ouverts dans l'espace, mais il n'est pas borelien, puisque s'il était de classe α, l'ensemble $S \cdot I_\alpha = B_\alpha$ le serait également.

[1]) Cette remarque est due à M. Szpilrajn-Marczewski, Fund. Math. **21** (1933), p. 112.

Le th. 1 permet d'établir dans les espaces métriques les plus généraux le th. suivant, que nous avons démontré pour les espaces séparables au § 19, III, 1:

5. *Tout ensemble développable est un F_σ et G_δ.*

Soit, en effet,

$$E = \sum_{\xi < \alpha} (F_\xi - H_\xi) \quad \text{où} \quad F_\xi \supset H_\xi \supset F_\zeta \quad \text{pour } \xi < \zeta$$

et où $F_\xi = \overline{F}_\xi$, $H_\xi = \overline{H}_\xi$. En admettant que le théorème est vrai pour chaque $\alpha' < \alpha$, il s'agit de le prouver pour α; ou encore — en raison du th. 1 — que E est localement un F_σ et G_δ en chaque point.

Or, soit $p \in E$. Il existe donc un $\alpha' < \alpha$ tel que $p \in F_{\alpha'} - H_{\alpha'}$. Posons $G = \mathcal{X} - H_{\alpha'}$. Donc $p \in G$, G est ouvert et on a pour $\zeta > \alpha'$

$$F_\zeta \subset H_{\alpha'}, \quad \text{d'où} \quad F_\zeta \cdot G = 0, \quad \text{donc} \quad G \cdot \sum_{\zeta > \alpha'} (F_\zeta - H_\zeta) = 0.$$

Il vient

$$GE = G \cdot \sum_{\xi < \alpha'} (F_\xi - H_\xi) + (GF_{\alpha'} - H_{\alpha'}).$$

L'ensemble $\sum_{\xi < \alpha'} (F_\xi - H_\xi)$ étant un F_σ et G_δ (par hypothèse), il en est de même de l'ensemble GE; E est donc localement un F_σ et G_δ au point p.

XI. Évaluation des classes à l'aide des symboles logiques[1]).

Nous dirons qu'*une fonction propositionnelle $\varphi(x)$ est de classe F_α* (de classe G_α) lorsque l'ensemble $\underset{x}{E}\, \varphi(x)$ est de classe F_α (de classe G_α). En tenant compte des formules établies dans l'Introduction (§ 1, IV et § 2, V—VI), on démontre les propositions suivantes:

1. *$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant deux fonctions propositionnelles de classe F_α (de classe G_α), les fonctions $\varphi(x) + \psi(x)$ et $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ le sont également.*

Car on a

$$\underset{x}{E}\, [\varphi(x) + \psi(x)] = \underset{x}{E}\, \varphi(x) + \underset{x}{E}\, \psi(x)$$

et

$$\underset{x}{E}\, [\varphi(x) \cdot \psi(x)] = \underset{x}{E}\, \varphi(x) \cdot \underset{x}{E}\, \psi(x)$$

et la classe borelienne est invariante relativement à la multiplication et à l'addition des ensembles.

[1]) Voir la note de M. Tarski et de moi-même *Les opérations logiques et les ensembles projectifs* et ma note *Evaluation de la classe borelienne ou projective à l'aide des symboles logiques*, Fund. Math. **17** (1931), pp. 240—272.

De façon plus générale:

1a. *Soit* $\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv \psi(x_{k_1}, \dots, x_{k_j}) + \chi(x_{l_1}, \dots, x_{l_m})$, *les indices* $k_1, \dots, k_j$ *et* $l_1, \dots, l_m$ *étant supposés* $\leqslant n$ *(par exemple* $\varphi(x,y,z) \equiv \psi(x,y) + \chi(y,z)$*). Si les fonctions* ψ *et* χ *sont de classe* F_α *(de classe* G_α*),* φ *l'est également (et il en est de même du produit* $\psi \cdot \chi$*).*

En effet

$$\underset{x_1 \dots x_n}{E} \varphi(x_1, \dots, x_n) = \underset{x_1 \dots x_n}{E} \psi(x_{k_1}, \dots, x_{k_j}) + \underset{x_1 \dots x_n}{E} \chi(x_{l_1}, \dots, x_{l_m})$$

et l'ensemble $\underset{x_{k_1} \dots x_{k_j}}{E} \psi(x_{k_1}, \dots, x_{k_j})$ étant de classe F_α, l'ensemble $\underset{x_1 \dots x_n}{E} \psi(x_{k_1}, \dots, x_{k_j})$ l'est également, car il s'en obtient en le multipliant par des axes (voir N^0 III).

On voit ainsi que: *en effectuant un nombre fini d'additions et de multiplications logiques avec des fonctions propositionnelles de classe* F_α *(de classe* G_α*), on parvient toujours à une fonction propositionnelle de classe* F_α *(de classe* G_α*).*

2. *Si la fonction propositionnelle* $\varphi(x)$ *est de classe* F_α*, sa négation est de classe* G_α*.*

Car l'ensemble $\underset{x}{E}\, \varphi'(x)$ est le complémentaire de $\underset{x}{E}\, \varphi(x)$.

3. *Si les fonctions propositionnelles* $\varphi_n(x)$*, où* $n = 1, 2, \dots$*, sont des classes* $< \alpha$*, la fonction* $\sum_n \varphi_n(x)$ *est de classe* α *additive et la fonction* $\prod_n \varphi_n(x)$ *est de classe* α *multiplicative.*

Car

$$\underset{x}{E} \sum_n \varphi_n(x) = \sum_n \underset{x}{E}\, \varphi_n(x) \quad \text{et} \quad \underset{x}{E} \prod_n \varphi_n(x) = \prod_n \underset{x}{E}\, \varphi_n(x),$$

les opérateurs Σ et Π étant entendus au sens logique dans les membres gauches et au sens mathématique dans les membres droits de ces égalités (cf. § 2, V, 1 et 2).

En particulier, si toutes les fonctions $\varphi_n(x)$ sont d'une classe F_α avec α pair, la fonction $\sum_n \varphi_n(x)$ est de la classe $F_{\alpha\sigma}$ et la fonction $\prod_n \varphi_n(x)$ est de la classe F_α. De façon analogue, si les fonctions $\varphi_{n,m}(x)$ sont d'une classe F_α, la fonction $\prod_m \sum_n \varphi_{n,m}(x)$ est de la classe $F_{\alpha\sigma\delta}$, etc.

On voit ainsi que *les règles* 1 — 3 *permettent d'évaluer la classe borelienne d'un ensemble si l'on sait définir cet ensemble à l'aide d'une fonction propositionnelle qui s'obtient à partir d'un système de fonctions propositionnelles dont les classes sont connues en effectuant les opérations logiques:* $+, \cdot, ', \sum_n, \prod_n$*, un nombre fini de fois.*

Les règles suivantes interviennent souvent dans les applications:

4. *Si* $\varphi(x)$ *est une fonction propositionnelle de classe* F_α *(de classe* G_α*) et si* $x = f(t)$ *est une fonction continue, la fonction propositionnelle* $\varphi[f(t)]$ *est aussi de classe* F_α *(de classe* G_α*).*

Posons, en effet, $A = \underset{x}{E}\, \varphi(x)$. Il vient (voir § 3, I):

$$\underset{t}{E}\, \varphi[f(t)] = \underset{t}{E} \{f(t) \in \underset{x}{E}\, \varphi(x)\} = \underset{t}{E} \{f(t) \in A\} = f^{-1}(A)$$

et, l'ensemble A étant de classe F_α (de classe G_α), il en est de même (voir N^0 III) de l'ensemble $f^{-1}(A)$.

5. $\psi(x,y)$ *étant de classe* F_α *(de classe* G_α*), il en est de même de la fonction* $\varphi(x) \equiv \psi(x, y_0)$ *pour* y_0 *fixe, ainsi que de la fonction* $\chi(x) \equiv \psi(x,x)$*.*

Pour s'en convaincre, on substituera dans N^0 III (1):

$$[(x,y) \in Z] \equiv \psi(x,y).$$

6. $\psi(x)$ *étant de classe* F_α *(de classe* G_α*), il en est de même de la fonction* $\varphi(x,y) \equiv \psi(x)$*.*

Car $\underset{xy}{E}\, \varphi(x,y) = \underset{x}{E}\, \psi(x) \times \mathcal{Y}$.

XII. Applications. 1. *Évaluation de la classe borelienne des ensembles* $S_\alpha = \underset{t}{E}(\bar{t} < \alpha)$*, où* $\alpha < \Omega$ (cf. § 1, VIII).

Faisons correspondre à chaque $t \in \mathcal{C}$ et chaque entier positif n, un $u \in \mathcal{C}$ défini comme suit: si $t^n = 0$, posons $u = 0$; si $t^n = 2$, on a $u^k = 2$ dans le cas où $t^k = 2$ et $r_n < r_k$; $u^k = 0$ dans le cas contraire. En désignant u par le symbole $t^{[n]}$, il vient:

(1) $$(u = t^{[n]}) \equiv \prod_k \{(u^k = 2) \equiv (t^k = 2 = t^n)(r_n < r_k)\}.$$

En notations du § 1, VIII, on a donc

$$R_{t^{[n]}} = R_t \cdot \underset{r}{E}(r_n < r) \quad \text{si } t^n = 2.$$

Il en résulte que, si $\bar{t}$ est un nombre ordinal, *la suite* $t^{\overline{[1]}}, t^{\overline{[2]}}, \dots$ *parcourt tous les nombres ordinaux* $<\bar{t}$.

Les ensembles $\underset{t}{E}(t^j=2)$, où $j=1,2,\dots$, étant fermés-ouverts dans $\mathcal{C}$, il en est de même de l'ensemble des couples u,t satisfaisant à la condition entre crochets { }. Par conséquent, l'ensemble $\underset{ut}{E}(u=t^{[n]})$, c. à d. l'image de la fonction $t^{[n]}$, est fermé. $\mathcal{C}$ étant compact, on en conclut que *la fonction* $t^{[n]}$ *est continue* (cf. § 24, XI, 4).

Théorème[1]. *Pour* $\alpha<\Omega$, *les ensembles* $S_\alpha=\underset{t}{E}(\bar{t}<\alpha)$ *et, par conséquent, les constituants* $L_\alpha=\underset{t}{E}(\bar{t}=\alpha)$, *sont boreliens.*

A savoir, S_α *est de classe* G_α.

Notons d'abord les deux équivalences évidentes:

$$(2)\qquad (\bar{t}<\alpha+1)\equiv\prod_n(t^{\overline{[n]}}<\alpha),\qquad\qquad (3)\qquad (\bar{t}<\lambda)\equiv\sum_{\xi<\lambda}(\bar{t}<\xi),$$

λ étant un nombre limite.

Procédons par induction. Les cas où $\alpha=0$ et où $\alpha=1$ étant évidents, admettons que la fonction propositionnelle $\bar{t}<\xi$ soit de classe G_ξ pour tout $\xi<\beta$. Par conséquent, si $\beta=\alpha+1$, la fonction propositionnelle $\bar{t}<\alpha$ est de classe G_α. La fonction $t^{[n]}$ étant continue, en en conclut (en vertu de XI, 4) que la fonction propositionnelle $\overline{t^{[n]}}<\alpha$ est aussi de classe G_α. De là on déduit, en raison de (2) et de XI, 3, que la fonction propositionnelle $\bar{t}<\alpha+1$, c. à d. $\bar{t}<\beta$, est de classe G_β.

D'autre part, si β est un nombre limite, on parvient à la même conclusion en tenant compte de (3) et de XI, 3.

Remarque. L'évaluation de la classe des ensembles S_α pourrait être rendue plus précise. Ainsi, on constate facilement que les ensembles S_n, pour n fini, sont fermés, S_ω est un F_σ, $S_{\omega\cdot 2}$ est un $F_{\sigma\delta\sigma}$ etc.

Il est cependant à remarquer (voir § 35, VIII) que les ensembles S_α sont de classes *non-bornées*, c. à d. qu'à tout $\beta<\Omega$ correspond un S_α qui n'est pas de classe β.

[1] Voir H. Lebesgue, op. cit. p. 213, N. Lusin et W. Sierpiński, C. R. Paris **175** (1922), p. 357.

2. Faisons correspondre à tout nombre irrationnel $\mathfrak{z}$ de l'intervalle 01 l'ensemble $Z_\mathfrak{z}$ composé des nombres $r_{\mathfrak{z}^1}, r_{\mathfrak{z}^2}, \dots$ ($\mathfrak{z}$ étant identifié avec la suite $\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots$, cf. § 14, V, 3). Désignons par $\bar{\mathfrak{z}}$ le type d'ordre de l'ensemble $Z_\mathfrak{z}$. Posons $T_\alpha=\underset{\mathfrak{z}}{E}(\bar{\mathfrak{z}}<\alpha)$.

Un raisonnement complètement analogue au précédent permet de prouver que T_α *est de classe* G_α.

3. Appelons un type d'ordre τ *type limite* lorsque l'ensemble ordonné T ayant le type d'ordre τ n'admet pas de dernier élément. Désignons par A l'ensemble des $t\in\mathcal{C}$ tels que $\bar{t}$ est un type limite.

En termes logiques (cf. les notations du § 1, VIII):

$$\begin{aligned}(t\in A)&\equiv\prod_n\sum_k[(r_n\in R_t)\rightarrow(r_k\in R_t)\,(r_k<r_n)]\\ &\equiv\prod_n\sum_k[(t^n=2)\rightarrow(t^k=2)\,(r_k<r_n)].\end{aligned}$$

L'ensemble $\underset{t}{E}(t^n=2)$ étant fermé-ouvert (dans $\mathcal{C}$), la fonction propositionnelle entre parenthèses [ ] est de classe G_0. *L'ensemble* A *est donc de classe* G_δ.

4. Convenons d'appeler un type d'ordre *pair* lorsqu'il est de la forme $\lambda+2n$ où λ est un type limite et n un entier $\geqslant 0$. De façon analogue, nous appellerons *impaires* les sommes $\lambda+2n+1$[1].

Désignons par P l'ensemble des t tels que $\bar{t}$ est un type pair. Il vient $P=P_0+P_2+\dots$, où P_{2n} désigne l'ensemble des t tels que $\bar{t}$ est de la forme $\lambda+2n$.

Ecrivons en symboles logiques la définition de P_2:

$$\begin{aligned}(t\in P_2)\equiv\sum_{ij}\{&(r_i,r_j\in R_t)\,(r_i<r_j)\cdot\\ &\cdot\prod_n\Big((i\neq n\neq j)\,(r_n\in R_t)\rightarrow[(r_j<r_n)\sum_k(r_j<r_k<r_n)\,(r_k\in R_t)]\Big)\},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(t\in P_2)\equiv\sum_{ij}\{&(t^i=2=t^j)\,(r_i<r_j)\cdot\\ &\cdot\prod_n\Big((i\neq n\neq j)\,(t^n=2)\rightarrow[(r_j<r_n)\sum_k(r_j<r_k<r_n)\,(t^k=2)]\Big)\}.\end{aligned}$$

On constate aussitôt que l'ensemble P_2 est un $G_{\delta\sigma}$. Une définition analogue de $P_4, P_6, \dots$ montre que tous ces ensembles sont des $G_{\delta\sigma}$. Par conséquent P *est un* $G_{\delta\sigma}$.

Pareillement, l'ensemble des t tels que $\bar{t}$ est *impair* est un $G_{\delta\sigma}$.

[1] D'habitude, on ne considère ces notions que pour les types du *bon* ordre. Sous cette restriction on parviendrait à des ensembles non boreliens.

5. Considérons *la famille Φ de toutes les suites extraites d'un espace métrique $\mathcal{X}$ qui satisfont à la condition de convergence de Cauchy* (on dit qu'une suite $\xi^1, \xi^2, \ldots$ satisfait à la condition de Cauchy, si à tout $\varepsilon > 0$ correspond un indice m tel que $|\xi^{m+1} - \xi^m| \leqslant \varepsilon$, quel que soit i). Nous allons prouver que *la famille Φ constitue un $F_{\sigma\delta}$ dans l'espace $\mathcal{X}^{\aleph_0}$.*

On a par définition:

$$\{\xi \in \Phi\} \equiv \prod_k \sum_m \prod_i |\xi^{m+i} - \xi^m| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Or, la fonction propositionnelle

$$\varphi_{k,m,i}(\xi) \equiv \left\{ |\xi^{m+i} - \xi^m| \leqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est de classe F_0 (pour k, m et i fixes). En effet, la distance $|x-y|$ étant une fonction continue de deux variables et ξ^n étant une fonction continue de ξ (cf. § 24a, I), l'ensemble

$$\underset{\xi}{E} \left\{ |\xi^{m+i} - \xi^m| \leqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est fermé.

En appliquant la règle 3, on en conclut que la fonction $\prod_i \varphi_{k,m,i}(\xi)$ est également de classe F_0, que $\sum_m \prod_i \varphi_{k,m,i}(\xi)$ est de classe F_σ et finalement que $\prod_k \sum_m \prod_i \varphi_{k,m,i}(\xi)$ est de classe $F_{\sigma\delta}$. Cela veut dire que l'ensemble Φ est un $F_{\sigma\delta}$, c. q. f. d.

Il en résulte en vertu de la règle 4 que:

$\{f_n\}$ étant une suite de fonctions continues (définies sur un espace T), l'ensemble C des points t pour lesquels la condition de Cauchy est réalisée est un $F_{\sigma\delta}$ [1].

Car, en désignant par $\xi(t)$ la suite $[f_1(t), f_2(t), \ldots]$, on obtient

$$\{t \in C\} \equiv \prod_k \sum_m \prod_i \varphi_{k,m,i}[\xi(t)].$$

[1]) Cf. § 2, VI, 2. Si $\mathcal{X}$ est complet, C est l'ensemble des points de convergence de la suite $\{f_n\}$.

6. *La famille ϑ des suites denses en soi constitue un G_δ dans l'espace $\mathcal{X}^{\aleph_0}$.*

Car la suite $\xi = [\xi^1, \xi^2, \ldots]$ est dite dense en soi, lorsqu'il existe pour tout n un $\xi^m \neq \xi^n$ aussi près que l'on veut de ξ^n; en symbole:

$$[\xi \in \vartheta] \equiv \prod_{nk} \sum_m \left\{ 0 < |\xi^n - \xi^m| < \frac{1}{k} \right\}.$$

La fonction propositionnelle entre crochets { } étant évidemment de classe G_0 (pour n, m et k fixes), on n'altère pas sa classe en ajoutant l'opérateur $\sum_m$. La fonction $[\xi \in \vartheta]$ est donc de classe G_δ.

XIII. Fonctions universelles [1]). Etant donnée une famille F d'ensembles, on appelle *fonction universelle relativement à F* toute fonction $F(t)$ qui fait correspondre au paramètre t (parcourant un espace T) un ensemble de la famille F de façon que chaque ensemble-élément de F corresponde au moins à une valeur de t.

En symbole:

$$\{X \in F\} \equiv \sum_t [X = F(t)].$$

Dans la suite, nous allons supposer que l'espace $\mathcal{X}$ (dont les éléments de F sont des sous-ensembles) est métrique séparable. Posons $T = \mathcal{N}$ (l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle 01)[2]). Si F est de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$, il existe évidemment une fonction universelle relative à F (puisque l'ensemble $\mathcal{N}$ est de puissance $\mathfrak{c}$). On peut donc substituer à F la classe borelienne F_α ou G_α. Or, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème. A tout α correspond une fonction $G_\alpha(\mathfrak{z})$ universelle relativement à la classe G_α et telle que l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}}{E}[x \in G_\alpha(\mathfrak{z})]$, situé dans le produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$, est un G_α [3]).

[1]) Notion étudiée surtout par M. Lusin. Voir W. Sierpiński, Fund. Math. **14** (1929), p. 82.

[2]) Au lieu d'admettre que le paramètre t parcourt l'intervalle 01 *tout entier* (comme on l'admet souvent), nous en avons restreint les valeurs aux nombres irrationnels pour éviter certains inconvénients liés à la discontinuité de la fonction „n-ème chiffre du développement dyadique de x"; si l'on considère le nombre irrationnel $\mathfrak{z}$ comme une suite de nombres naturels, le n-ème terme de cette suite est une fonction continue de $\mathfrak{z}$ (cf. § 24a, I).

On pourrait se servir aussi bien de l'ensemble non-dense C de Cantor, qui est également une $\aleph_0$-ème puissance d'un ensemble.

[3]) Le raisonnement qui va suivre est dû au fond à Lebesgue, op. cit., p. 209.

Nous nous servirons des notations suivantes. Comme d'habitude, nous allons considérer le nombre irrationnel $\mathfrak{z}$ comme une suite de nombres naturels $\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \ldots$ (donnée par ex. par le développement de $\mathfrak{z}$ en fraction continue). L'espace $\mathcal{N}$ étant homéomorphe à $\mathcal{N}^{\aleph_0}$ (§ 24a, V, rem.), on peut faire correspondre à tout $\mathfrak{z}$ une suite de nombres irrationnels $\mathfrak{z}_{(1)}, \mathfrak{z}_{(2)}, \ldots$ de façon que, pour n fixe, $\mathfrak{z}_{(n)}$ soit une fonction continue de $\mathfrak{z}$ et qu'en outre chaque suite de nombres irrationnels corresponde à une valeur de $\mathfrak{z}$; on peut poser, par ex.

$$\mathfrak{z}_{(n)} = [\mathfrak{z}^{(2^{n-1})}, \ldots, \mathfrak{z}^{(2^{n-1}+k\cdot 2^n)}, \ldots].$$

Faisons correspondre à tout nombre transfini limite $\lambda < \Omega$ une suite $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ convergente vers λ (l'existence d'une telle suite résulte de l'axiome du choix).

Désignons enfin par $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace (contenant l'ensemble vide).

Fonction $G_\alpha(\mathfrak{z})$. Nous posons:

1) $G_0(\mathfrak{z}) = \sum\limits_n R_{\mathfrak{z}^n}$,

2) $G_{\alpha+1}(\mathfrak{z}) = \prod\limits_n G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)})$ ou $\sum\limits_n G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)})$, suivant que α est pair ou impair,

3) $G_\lambda(\mathfrak{z}) = \sum\limits_n G_{\lambda_n}(\mathfrak{z}_{(n)})$, si λ est un nombre limite.

Il s'agit de montrer que:

(i) l'ensemble $G_\alpha(\mathfrak{z})$ est de classe $\mathbf{G}_\alpha$,

(ii) si X est de classe $\mathbf{G}_\alpha$, il existe un $\mathfrak{z} \in \mathcal{N}$ tel que $X = G_\alpha(\mathfrak{z})$.

(iii) l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}}{E}[x \in G_\alpha(\mathfrak{z})]$ est de classe $\mathbf{G}_\alpha$.

ad (i). La propriété (i) est une conséquence directe de (iii) (cf. N⁰ III (1)).

ad (ii). Soit d'abord X un ensemble de classe $\mathbf{G}_0$, c. à d. un ensemble ouvert. D'après la définition de la base, X est de la forme $X = \sum\limits_n R_{k_n}$. Soit $\mathfrak{z}$ un nombre irrationnel tel que $\mathfrak{z}^1 = k_1$, $\mathfrak{z}^2 = k_2, \ldots$ Il vient

$$G_0(\mathfrak{z}) = \sum_n R_{\mathfrak{z}^n} = \sum_n R_{k_n} = X.$$

La condition (ii) est donc réalisée pour $\alpha = 0$.

En supposant qu'elle soit réalisée pour α, nous l'établirons pour $\alpha+1$. Soit donc X un ensemble de classe $\mathbf{G}_{\alpha+1}$. On a

$$X = \prod_n X_n \quad \text{ou} \quad X = \sum_n X_n$$

(suivant que α est pair ou impair), où X_n est de classe $\mathbf{G}_\alpha$. Par hypothèse, il existe une suite de nombres irrationnels $\{\mathfrak{z}_n\}$ tels que $X_n = G_\alpha(\mathfrak{z}_n)$. D'après la définition de la fonction $\mathfrak{z}_{(n)}$, il existe une valeur de $\mathfrak{z}$ telle que $\mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}_{(n)}$, quel que soit n. Il vient, suivant que α est pair ou impair,

$$G_{\alpha+1}(\mathfrak{z}) = \prod_n G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)}) = X \quad \text{ou bien} \quad G_{\alpha+1}(\mathfrak{z}) = \sum_n G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)}) = X.$$

Supposons enfin que $\lambda = \lim \lambda_n$ et que pour tout λ_n la proposition (ii) soit vraie. X étant un ensemble de classe $\mathbf{G}_\lambda$, on a $X = \sum\limits_n X_n$ où X_n est d'une classe $\mathbf{G}_{\alpha_n}$ avec $\alpha_n < \lambda$. La suite $\{\lambda_n\}$ étant convergente vers λ, il existe pour tout n un k_n tel que $\alpha_n \leqslant \lambda_{k_n}$. Par conséquent X_n est de classe $\mathbf{G}_{\lambda_{k_n}}$. Il existe donc un nombre irrationnel $\mathfrak{z}_{k_n}$ tel que $X_n = G_{\lambda_{k_n}}(\mathfrak{z}_{k_n})$. Si i est un indice différent de tous les k_n, soit $\mathfrak{z}_i$ un nombre irrationnel tel que $G_{\lambda_i}(\mathfrak{z}_i) = 0$. Ainsi $X = \sum\limits_n G_{\lambda_n}(\mathfrak{z}_n)$. Soit, comme auparavant, $\mathfrak{z}$ un nombre irrationnel tel que $\mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}_{(n)}$. Il vient

$$X = \sum_n G_{\lambda_n}(\mathfrak{z}_{(n)}) = G_\lambda(\mathfrak{z}).$$

ad (iii). Remarquons d'abord que l'ensemble $\underset{x,n}{E}(x \in R_n)$ est ouvert dans le produit cartésien de $\mathfrak{X}$ et de l'ensemble des nombres naturels. Autrement dit, la fonction propositionnelle (de deux variables) $x \in R_n$ est de classe $\mathbf{G}_0$. La fonction $\mathfrak{z}^n$ étant continue pour n fixe, on en conclut en vertu de N⁰ XI, 4, que la fonction propositionnelle $x \in R_{\mathfrak{z}^n}$ est aussi de classe $\mathbf{G}_0$. Il en est encore de même de la fonction propositionnelle $\sum\limits_n (x \in R_{\mathfrak{z}^n})$, qui équivaut à $x \in \sum\limits_n R_{\mathfrak{z}^n}$ (voir § 1, V). La fonction propositionnelle $x \in G_0(\mathfrak{z})$ est par conséquent de classe $\mathbf{G}_0$ et l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}}{E}[x \in G_0(\mathfrak{z})]$ est ouvert. De façon analogue, si la fonction propositionnelle $x \in G_\alpha(\mathfrak{z})$ est de classe α, il en est de même de $x \in G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)})$ pour n fixe, puisque $\mathfrak{z}_{(n)}$ est une fonction continue de $\mathfrak{z}$. La fonction propositionnelle $\prod\limits_n [x \in G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)})]$ est donc (pour α pair) de classe $\mathbf{G}_{\alpha+1}$, et comme

$$\prod_n [x \in G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)})] \equiv \{x \in \prod_n G_\alpha(\mathfrak{z}_{(n)})\} \equiv \{x \in G_{\alpha+1}(\mathfrak{z})\},$$

on en conclut que la condition (iii) est vérifiée pour $\alpha+1$. Enfin, si pour tout n la fonction propositionnelle $x \in G_{\lambda_n}(\mathfrak{z})$ est de classe G_{λ_n}, la fonction $\sum_n [x \in G_{\lambda_n}(\mathfrak{z}_{(n)})]$ est de classe G_λ. On en conclut comme auparavant que $\underset{x\mathfrak{z}}{E}[x \in G_\lambda(\mathfrak{z})]$ est de classe G_λ.

Remarque. Un théorème analogue concerne les classes F_α: il existe pour tout α une fonction universelle $F_\alpha(\mathfrak{z})$ telle que l'ensemble $\underset{x\mathfrak{z}}{E}[x \in F_\alpha(\mathfrak{z})]$ est de classe F_α. A savoir: $F_\alpha(\mathfrak{z}) = \mathcal{X} - G_\alpha(\mathfrak{z})$.

XIV. Existence d'ensembles de classe G_α qui ne sont pas de classe F_α. Nous en établirons l'existence dans l'espace $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels de l'intervalle 01 [1]). Posons $\mathcal{X} = \mathcal{N}$ et considérons l'ensemble

$$Z_\alpha = \underset{\mathfrak{z}}{E}[\mathfrak{z} \in G_\alpha(\mathfrak{z})],$$

qui est la projection sur l'axe $\mathcal{N}$ de la partie de l'ensemble $\underset{\mathfrak{z}\mathfrak{z}'}{E}[\mathfrak{z} \in G_\alpha(\mathfrak{z}')]$ située sur la *diagonale* de l'espace $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$, c. à d. sur l'ensemble $\underset{\mathfrak{z}\mathfrak{z}'}{E}(\mathfrak{z}=\mathfrak{z}')$ (cf. § 24, XII). L'ensemble $\underset{\mathfrak{z}\mathfrak{z}'}{E}[\mathfrak{z} \in G_\alpha(\mathfrak{z}')]$ étant de classe G_α, l'ensemble Z_α l'est également (cf. N⁰ III (1)).

Reste à prouver que Z_α n'est pas de classe F_α. Si l'on suppose le contraire, l'ensemble $\mathcal{N}-Z_\alpha$ est un G_α, de sorte que, la fonction $G_\alpha(\mathfrak{z})$ étant universelle, il existerait un $\mathfrak{z}_0$ tel que $\mathcal{N}-Z_\alpha = G_\alpha(\mathfrak{z}_0)$. Mais cela implique une contradiction, car on a d'après la définition de Z_α l'équivalence

$$\{\mathfrak{z}_0 \in G_\alpha(\mathfrak{z}_0)\} \equiv \{\mathfrak{z}_0 \in Z_\alpha\},$$

tandis qu'on a d'après la définition de $\mathfrak{z}_0$:

$$\{\mathfrak{z}_0 \in G_\alpha(\mathfrak{z}_0)\} \equiv \{\mathfrak{z}_0 \in (\mathcal{N}-Z_\alpha)\}.$$

Remarque. La deuxième partie de ce raisonnement est, en réalité, une démonstration du théorème suivant de la Théorie générale des ensembles:

Théorème de la diagonale [2]). Etant donnée une fonction $F(t)$ qui fait correspondre à tout élément d'un ensemble T un sous-ensemble de T, l'ensemble $\underset{t}{E}[t \in T - F(t)]$ n'est pas une valeur de cette fonction.

[1]) Pour $\alpha \leqslant 3$ on peut l'établir d'une façon plus directe: voir R. Baire, *Sur la représentation des fonctions discontinues*, Acta Math. **30** (1905) et **32** (1909), ainsi que N. Lusin *Ensembles analytiques*, Paris 1930, p. 97, exemple dû à M-lle Keldych.

[2]) Ce théorème remonte à G. Cantor; cf. sa démonstration de l'inégalité $2^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$.

XV. Problème d'effectivité [1]). La démonstration que nous avons donnée au N⁰ XIV de l'existence d'un ensemble de classe G_α qui n'est pas de classe F_α *n'est pas effective*, c. à d. que nous n'avons pas *défini* de fonction qui fasse correspondre à tout α un ensemble jouissant de la propriété en question. En analysant le raisonnement du N⁰ XIII, on voit que l'absence de l'effectivité provient du fait que nous n'avons pas défini de fonction qui fasse correspondre à tout nombre limite λ une suite convergente de nombres $<\lambda$; nous n'en avons, en effet, qu'affirmé *l'existence*, sans déterminer aucune suite individuelle de ce genre. Une telle définition n'est pas d'ailleurs connue.

On voit ainsi que pour résoudre effectivement le problème de l'existence d'ensembles qui sont des G_α sans être des F_α, on aura à modifier la condition 3) de la définition de $G_\alpha(\mathfrak{z})$. Nous nous servirons à ce but de la fonction $\bar{\mathfrak{z}}$, définie au N⁰ XII, 2.

Posons $\tau(\mathfrak{z}) = \bar{\mathfrak{z}}$ si $\bar{\mathfrak{z}} < \Omega$ et $\tau(\mathfrak{z}) = -1$ dans le cas contraire; la fonction $\tau(\mathfrak{z})$ jouit de deux propriétés importantes:

1⁰ elle fait correspondre à tout nombre $\mathfrak{z}$ un nombre transfini (ou -1) de façon à épuiser tous les nombres $\alpha < \Omega$,

2⁰ la fonction propositionnelle $\varphi_\alpha(\mathfrak{z}) \equiv \{0 < \tau(\mathfrak{z}) < \alpha\}$ est de classe G_α.

Or, admettons que la fonction $G_\alpha(\mathfrak{z})$ soit définie par les conditions 1), 2) et la suivante, qui remplacera la condition 3):

$$3') \qquad \{x \in G_\lambda(\mathfrak{z})\} \equiv \sum_n \sum_{\xi<\lambda} [0 < \tau(\mathfrak{z}_{(2n)}) = \xi] \cdot [x \in G_\xi(\mathfrak{z}_{(2n+1)})].$$

Il s'agit d'établir les conditions (ii)—(iii) du N⁰ XIII pour $\alpha=\lambda$, ces conditions étant supposées vérifiées pour $\xi<\lambda$ (la condition (i) est une conséquence de (iii)).

ad (ii). Tout ensemble X de classe G_λ est de la forme $X = \sum_n X_n$, où X_n est de classe G_{ξ_n} et $0 < \xi_n < \lambda$. A tout ξ_n correspond un nombre irrationnel $\mathfrak{y}_n$ tel que $\tau(\mathfrak{y}_n) = \xi_n$. En outre, la fonction $G_{\xi_n}(\mathfrak{z})$ étant universelle, il existe un $\mathfrak{w}_n$ tel que $X_n = G_{\xi_n}(\mathfrak{w}_n)$. Or, il existe d'après la définition de la fonction $\mathfrak{z}_{(n)}$ une valeur de $\mathfrak{z}$ telle que

$$\mathfrak{z}_{(2n)} = \mathfrak{y}_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{z}_{(2n+1)} = \mathfrak{w}_n, \quad \text{quel que soit } n.$$

[1]) Voir ma note *Sur l'existence effective des fonctions représentables analytiquement de toute classe de Baire*, C. R. Paris **176** (1923), p. 229. Cf. aussi W. Sierpiński, *Un exemple effectif d'un ensemble mesurable (B) de classe α*, Fund. Math. **6** (1924), p. 39.

Il vient ainsi

$$X_n = G_{\xi_n}(\mathfrak{z}_{(2n+1)}) \quad \text{et} \quad 0 < \tau(\mathfrak{z}_{(2n)}) = \xi_n', \quad \text{d'où} \quad X = G_\lambda(\mathfrak{z}).$$

ad (iii). Il s'agit de prouver que la fonction propositionnelle de deux variables $x \in G_\lambda(\mathfrak{z})$ est de classe G_λ. L'équivalence

$$[0 < \tau(\mathfrak{z}) = \xi] \equiv \varphi_\xi'(\mathfrak{z}) \cdot \varphi_{\xi+1}(\mathfrak{z})$$

montre que la fonction propositionnelle $[0 < \tau(\mathfrak{z}) = \xi]$ est de classe $G_{\xi+1}$; il en est de même de $[0 < \tau(\mathfrak{z}_{(2n)}) = \xi]$ puisque $\mathfrak{z}_{(2n)}$ est une fonction continue de $\mathfrak{z}$ (cf. la règle 4 du N⁰ XI). La fonction propositionnelle $x \in G_\xi(\mathfrak{z}_{(2n+1)})$ est pour la même raison de classe G_ξ si $\xi < \lambda$; par conséquent, le produit logique de ces deux fonctions, c. à d. la fonction

$$[0 < \tau(\mathfrak{z}_{(2n)}) = \xi] \cdot [x \in G_\xi(\mathfrak{z}_{(2n+1)})],$$

est de classe $G_{\xi+1}$. La fonction $x \in G_\lambda(\mathfrak{z})$, s'obtenant de celle-là par l'addition dénombrable $\sum_n \sum_{\xi<\lambda}$, est donc de classe G_λ.

Ainsi le problème de l'existence, pour chaque α, d'une fonction universelle relativement à la classe G_α se trouve résolu d'une façon effective. La définition de l'ensemble Z_α, telle qu'elle a été énoncée au N⁰ XIV, donne donc une solution effective du problème de l'existence dans l'espace des nombres irrationnels d'un ensemble qui est un G_α sans être un F_α.

§ 27. Fonctions mesurables B.

I. Classification. Une fonction f qui transforme un espace métrique $\mathcal{X}$ en sous-ensemble d'un espace métrique $\mathcal{Y}$ est dite *fonction mesurable B de classe* α (ou, simplement, fonction de classe α), lorsque, quel que soit l'ensemble fermé $F \subset \mathcal{Y}$, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est borelien de classe α multiplicative [1]).

Les ensembles fermés étant de classe 0 multiplicative, les fonctions continues coïncident, conformément à cette définition, avec les fonctions de classe 0.

Une transformation biunivoque $y = f(x)$ est dite *homéomorphie (généralisée) de classe* α, β, lorsque la fonction $f(x)$ est de classe α et la fonction inverse $x = f^{-1}(y)$ est de classe β [2]).

[1]) Voir H. Lebesgue, op. cit., Journ. de math. 1905, p. 166.

[2]) Voir ma note *Sur le prolongement de l'homéomorphie*, C. R. Paris **197** (1933), p. 1090. Cf. aussi W. Sierpiński, Fund. Math. **21** (1933), p. 66.

Evidemment les homéomorphies de classe 0, 0 coïncident avec les homéomorphies au sens habituel du môt.

1. *Pour que la fonction caractéristique d'un ensemble A soit de classe α, il faut et il suffit que A soit un ensemble ambigu de classe α.*

En effet, la fonction caractéristique n'admettant que deux valeurs *0* et *1*, considérons comme l'espace $\mathcal{Y}$ l'ensemble composé de ces deux éléments. Chacun d'eux forme un ensemble fermé. Si l'on suppose que la fonction caractéristique f soit de classe α, les ensembles $A = f^{-1}(1)$ et $\mathcal{X} - A = f^{-1}(0)$ sont de classe α multiplicative; A est donc un ensemble ambigu de classe α.

Inversement, l'ensemble A étant ambigu de classe α, on vérifie facilement que l'ensemble $f^{-1}(F)$ est de classe α multiplicative, quel que soit l'ensemble fermé F (l'espace $\mathcal{Y}$ ne contient en effet que 4 ensembles fermés).

On en conclut en vertu de § 26, XIV et III, que:

2. *Il existe, dans toute classe α, des fonctions réelles de variable réelle qui n'appartiennent pas aux classes inférieures.*

3. *Il existe des fonctions non mesurables B.*

La dernière conclusion résulte aussi de l'énoncé suivant:

4. *$\mathcal{Y}$ étant séparable, la famille des fonctions mesurables B est de puissance* $\leqslant \mathfrak{c}$.

En effet, la suite $R_1, R_2, \ldots$ étant la base de l'espace $\mathcal{Y}$, toute fonction f qui transforme $\mathcal{X}$ en un sous-ensemble de $\mathcal{Y}$ est complètement caractérisée par la suite des ensembles $f^{-1}(R_1), f^{-1}(R_2), \ldots$ Car, tout point y de $\mathcal{Y}$ étant de la forme $y = R_{k_1} \cdot R_{k_2} \cdot \ldots$, on a

$$\{y = f(x)\} \equiv \{x \in f^{-1}(y)\} \equiv \{x \in \prod_n f^{-1}(R_{k_n})\}.$$

Or la fonction f étant supposée mesurable B, les ensembles $f^{-1}(R_n)$ sont boreliens et, la famille de ces derniers étant de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$, la puissance de la famille des fonctions mesurables B est $\leqslant \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

5. *A tout couple de nombres α, β (inférieurs à Ω) correspond une transformation f de l'ensemble $\mathcal{N}$ en lui-même: $\mathcal{N} = f(\mathcal{N})$, qui est une homéomorphie précisément de classe α, β (c. à d. que ni la fonction f n'est de classe $< \alpha$, ni la fonction f^{-1} n'est de classe $< \beta$)* [1]).

[1]) Pour la démonstration, voir ma note *Sur une généralisation de la notion d'homéomorphie*, Fund. Math. **22** (1934), p. 219.

II. Equivalences. En tenant compte de l'identité (cf. § 3, II, 8) $f^{-1}(\mathcal{Y}-Y)=\mathcal{X}-f^{-1}(Y)$, on peut définir les fonctions de classe α comme fonctions pour lesquelles l'ensemble $f^{-1}(G)$ est de classe α additive, quel que soit l'ensemble *ouvert* G. De plus:

1. *Si l'espace $\mathcal{Y}$ est séparable et si la suite $R_1, R_2, \ldots$ forme sa base, il suffit pour que la fonction f soit de classe α, que chacun des ensembles $f^{-1}(R_n)$ soit de classe α additive.*

Car $G=R_{k_1}+R_{k_2}+\ldots$, d'où

$$f^{-1}(G)=f^{-1}(R_{k_1})+f^{-1}(R_{k_2})+\ldots .$$

Il en résulte aussi que *si les ensembles $f^{-1}(R_n)$, $n=1,2,\ldots$, sont boreliens, la fonction f est mesurable B*; à savoir de classe α, où $\alpha>\alpha_n$ et où $f^{-1}(R_n)$ est de classe α_n.

Dans le cas particulier où $\mathcal{Y}$ est l'ensemble des *nombres réels*, les fonctions de classe α peuvent être définies par la condition que les ensembles $\underset{x}{E}\{a<f(x)<b\}$ soient de classe α additive, quels que soient a et b (d'ailleurs on peut les supposer rationnels).

2. *Si l'espace $\mathcal{Y}$ est isolé et la fonction f est de classe α, l'ensemble $f^{-1}(Y)$ est ambigu de classe α, quel que soit $Y\subset\mathcal{Y}$.*

Car tout Y est fermé-ouvert dans $\mathcal{Y}$.

3 [1]). *L'espace $\mathcal{Y}$ étant séparable, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit de classe α est qu'il existe pour tout $\varepsilon>0$ une suite d'ensembles $Z_1, Z_2, \ldots$ de classe α additive tels que*

$$\mathcal{X}=Z_1+Z_2+\ldots \quad \textit{et} \quad \delta[f(Z_n)]<\varepsilon \quad \textit{pour} \quad n=1,2,\ldots$$

En effet, l'espace $\mathcal{Y}$ étant séparable, il existe (voir § 17, II) une suite $S_1, S_2, \ldots$ de sphères ouvertes telles que

$$\mathcal{Y}=S_1+S_2+\ldots \quad \text{et} \quad \delta(S_n)<\varepsilon.$$

Il suffit donc de poser $Z_n=f^{-1}(S_n)$.

[1]) Voir H. Lebesgue, op. cit., p. 172 (domaine réel). Pour le cas général, voir B. Gagaeff, *Sur les suites convergentes de fonctions mesurables B*, Fund. Math. **18** (1932), p. 183; cf. aussi P. Veress, *Ueber kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen*, Fund. Math. **7** (1925), p. 244, où l'on trouve plusieurs applications du théorème considéré.

Supposons d'autre part que la condition du théorème soit vérifiée. Il vient

$$\mathcal{X}=Z_1^k+Z_2^k+\ldots \quad \text{et} \quad \delta[f(Z_n^k)]<{}^1/_k$$

où Z_n^k est de classe α additive. Il s'agit de prouver que, G étant un ensemble ouvert (dans $\mathcal{Y}$), $f^{-1}(G)$ est de classe α additive. Nous allons démontrer, en effet, que $f^{-1}(G)$ est la somme des ensembles Z_n^k tels que $f(Z_n^k)\subset G$.

Or, d'une part, les conditions $x\in Z_n^k$ et $f(Z_n^k)\subset G$ entraînent $f(x)\in G$, d'où $x\in f^{-1}(G)$. D'autre part, la condition $f(x)\in G$, qui équivaut à $x\in f^{-1}(G)$, implique que, pour k suffisamment grand, l'inégalité $|y-f(x)|<{}^1/_k$ entraîne $y\in G$ (puisque G est ouvert). Soit n un indice tel que $x\in Z_n^k$. Il résulte donc de l'inégalité $\delta[f(Z_n^k)]<{}^1/_k$ que $f(Z_n^k)\subset G$.

III. Superposition des fonctions. 1. *f étant une fonction de classe α et Y étant un ensemble de classe β, l'ensemble $f^{-1}(Y)$ est de classe $\alpha+\beta$ (multiplicative ou additive suivant la classe de Y).*

Cela résulte par l'induction transfinie (par rapport à β) des identités:

$$f^{-1}(\sum_n Y_n)=\sum_n f^{-1}(Y_n), \quad f^{-1}(\prod_n Y_n)=\prod_n f^{-1}(Y_n)$$

et de l'implication: $\beta_n<\beta$ entraîne $\alpha+\beta_n<\alpha+\beta$.

En particulier, si f est une fonction *continue*, l'ensemble $f^{-1}(Y)$ est de classe β.

2. *Si la fonction $y=f(x)$ est de classe α et la fonction $z=g(y)$ est de classe β, la fonction $h(x)=gf(x)$ est de classe $\alpha+\beta$.*

On a en effet:

$$\{h(x)\in F\}\equiv\{g[f(x)]\in F\}\equiv\{f(x)\in g^{-1}(F)\},$$

d'où

$$h^{-1}(F)=\underset{x}{E}[f(x)\in g^{-1}(F)]=f^{-1}[g^{-1}(F)].$$

L'ensemble F étant fermé, $g^{-1}(F)$ est de classe β multiplicative, de sorte que $f^{-1}[g^{-1}(F)]$ est de classe $\alpha+\beta$ d'après 1.

En particulier, si la fonction g est *continue*, les fonctions $gf(x)$ et $fg(x)$ sont de classe α.

IV. Fonctions partielles. 1. *Etant donnée une suite d'ensembles $\{E_n\}$ de classe α additive tels que $\mathcal{X}=E_1+E_2+\dots$ et que, f_n désignant la fonction partielle $f|E_n$, f_n est de classe α sur E_n, la fonction f est de classe α (sur l'espace tout entier).*

Soit, en effet, G un ensemble ouvert $\subset\mathcal{Y}$. Il vient (§ 3, II, 15): $f^{-1}(G)=f_1^{-1}(G)+f_2^{-1}(G)+\dots$ et, chacun des ensembles $f_n^{-1}(G)$ étant par hypothèse de classe α additive relativement à l'ensemble E_n, qui est lui-même de classe α additive, l'ensemble $f^{-1}(G)$ est encore de classe α additive en tant que somme d'ensembles de cette classe.

2. *M et N étant deux ensembles de classe α multiplicative tels que $\mathcal{X}=M+N$ et que les fonctions partielles $f|M$ et $f|N$ sont de classe α, la fonction f est encore de classe α.*

La démonstration est tout à fait analogue à la précédente: on n'a qu'à remplacer l'ensemble ouvert G par un ensemble fermé F et la somme infinie par une somme de deux termes.

3. *f étant de classe α, $f|E$ l'est également, quel que soit E.*

C'est une conséquence immédiate de § 3, II, 14.

4. *A tout système fini $F_1,\dots,F_k$ d'ensembles disjoints de classe $\alpha>0$ multiplicative et à tout système de valeurs $y_1,\dots,y_k$, correspond une fonction f de classe α, définie sur l'espace $\mathcal{X}$ tout entier, qui n'admet que les valeurs $y_1,\dots,y_k$ et que $f(x)=y_i$ pour $x\in F_i$.*

En effet, d'après le th. 4 du § 26, VII, il existe un système d'ensembles disjoints, ambigus de classe α: $A_1,\dots,A_k$ tels que

$$\mathcal{X}=A_1+\dots+A_k,\quad F_i\subset A_i.$$

Posons $f(x)=y_i$ pour $x\in A_i$, où $i=1,\dots,k$. D'après 1, la fonction f est de classe α.

V. Fonctions de plusieurs variables. Dans le cas où la variable indépendante parcourt le *produit cartésien* de deux espaces $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, la fonction $f(x,y)$ est dite fonction de deux variables.

Evidemment toute fonction $f(x)$ d'une seule variable peut être toujours considérée comme une fonction $g(x,y)$ de deux variables, en posant $g(x,y)=f(x)$.

1. *Si $f(x)$ est de classe α et $g(x,y)=f(x)$, $g(x,y)$ est de classe α par rapport à la variable (x,y).*

En effet, x considéré comme fonction (l'abscisse) du point (x,y), en est une fonction continue (cf. § 14, V). D'après le théorème sur la superposition des fonctions (N° III, 2), $f(x)$ en est une fonction de classe α.

2. *Si la fonction $f(x,y)$ est continue relativement à la variable x et de classe α relativement à la variable y, elle est de classe $\alpha+1$ relativement à la variable (x,y)* [1].

En particulier, *si la fonction $f(x,y)$ est continue par rapport à chacune des variables séparément, elle est une fonction de I-e classe.*

Par conséquent, *toute fonction de n variables qui est continue par rapport à chacune d'elles est de classe $n-1$.*

La démonstration du théorème 2 dans le cas où $\mathcal{X}$ est séparable étant plus simple, envisageons d'abord ce cas particulier.

Nous allons montrer au préalable que:

$r_1,r_2,\dots$ étant une suite de points dense dans $\mathcal{X}$ et g étant une fonction continue, la condition nécessaire et suffisante pour que le point $g(x)$ appartienne à l'ensemble fermé F, est qu'à tout n corresponde un k tel que $|x-r_k|<1/n$ et $g(r_k)\in S_n$, où S_n est la sphère ouverte généralisée de centre F et de rayon $1/n$.

En symbole:

$$\{g(x)\in F\}\equiv\prod_n\sum_k[|x-r_k|<1/n]\cdot[g(r_k)\in S_n]. \tag{i}$$

En effet, $r_{k_1},r_{k_2},\dots$ étant une suite convergente vers x, on a $\lim_{m=\infty}g(r_{k_m})=g(x)$, donc pour m suffisamment grand: $|r_{k_m}-x|<1/n$ et $|g(r_{k_m})-g(x)|<1/n$. Or, si l'on suppose que $g(x)\in F$, il en résulte que $g(r_{k_m})\in S_n$ et le membre droit de l'équivalence (i) est réalisé. Réciproquement, si l'on suppose qu'à tout n correspond un k_n tel que $|x-r_{k_n}|<1/n$ et que $g(r_{k_n})\in S_n$, d'où $\varrho[g(r_{k_n}),F]<1/n$, il vient $\lim_{n=\infty}r_{k_n}=x$, d'où $\lim_{n=\infty}g(r_{k_n})=g(x)$, et comme $\lim_{n=\infty}\varrho[g(r_{k_n}),F]=0$, il en résulte que $\varrho[g(x),F]=0$, c. à d. que $g(x)\in F$.

[1]) Cf. H. Lebesgue, l. c., p. 201 et ma note *Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques*, Fund. Math. **17** (1931), p. 278. Des exemples élémentaires montrent qu'une fonction de deux variables peut être *discontinue*, bien qu'elle soit continue relativement à chacune des deux variables prises séparément.

Ceci établi, substituons dans la formule (i) la fonction $f(x,y)$ à $g(x)$. Il en ressort:

$$\{f(x,y)\in F\}\equiv\prod_n\sum_k[|x-r_k|<1/n]\cdot[f(r_k,y)\in S_n],$$

d'où

(ii) $$f^{-1}(F)=\prod_n\sum_k\{[(\underset{x}{E}|x-r_k|<1/n)\times\mathcal{Y}]\cdot[\mathcal{X}\times\underset{y}{E}f(r_k,y)\in S_n]\}.$$

Or, la fonction $f(r_k,y)$ étant de classe α par rapport à la variable y, l'ensemble $\underset{y}{E}[f(r_k,y)\in S_n]$ est de classe α additive (pour k et n fixes). L'ensemble $\underset{x}{E}[|x-r_k|<1/n]$ est évidemment une sphère ouverte. Il en résulte, par la méthode d'évaluation de la classe d'une fonction propositionnelle (§ 26, XI), que la fonction propositionnelle de deux variables $\{f(x,y)\in F\}$ et l'ensemble $f^{-1}(F)$ sont de classe $\alpha+1$ multiplicative.

Le th. 2 établi dans le cas d'espace séparable, passons au cas général [1]).

Si $\alpha=0$, on peut se servir de l'équivalence suivante au lieu de (i):

(iii) $$\{g(x)\in F\}\equiv\prod_n\sum_{x'}[|x-x'|<1/n]\cdot[g(x')\in S_n],$$

que l'on déduit d'une façon tout à fait analogue.

On a alors à remplacer dans la formule (ii): $\sum\limits_k$ par $\sum\limits_{x'}$ et r_k par x'. Or, l'ensemble entre crochets { } étant ouvert (puisque $\alpha=0$ par hypothèse), la sommation (indénombrable) $\sum\limits_{x'}$ conduit encore à un ensemble ouvert et, finalement, $f^{-1}(F)$ est un G_δ.

Le th. 2 se trouve ainsi établi pour $\alpha=0$. Admettons à présent que $\alpha>0$.

Considérons au préalable un ensemble fermé F et une suite de points tels que $\lim y_n=y$. Soit S_n la sphère ouverte de centre F et de rayon $1/n$ (voir § 15, IV). Nous allons démontrer que *pour que $y\in F$, il faut et il suffit qu'à tout n corresponde un k tel qu'on ait* $y_{n+k}\in S_n$; en symboles logiques:

(iv) $$\{y\in F\}\equiv\prod_n\sum_k(y_{n+k}\in S_n).$$

[1]) Cf. D. Montgomery, op. cit., Fund. Math. **25**, ainsi que ma note du même volume.

En effet, d'une part, si $y\in F$, tous les points y_m à indice suffisamment grand satisfont à l'inégalité $|y_m-y|<1/n$, donc à la formule $y_m\in S_n$; on peut par conséquent admettre comme k un indice arbitraire suffisamment grand. D'autre part, si y *non*-$\in F$, il existe en vertu de la formule $F=\prod\limits_n\overline{S}_n$ un m tel que y *non*-$\in\overline{S}_m$. L'égalité $y=\lim y_n$ implique alors qu'à partir d'un indice $n>m$ tous les points y_{n+k} sont situés en dehors de $\overline{S}_m$, donc en dehors de S_n, ce qui prouve que le membre droit de (iv) n'est pas vérifié.

La formule (iv) établie, nous allons démontrer un théorème auxiliaire sur l'opération $\mathcal{M}$ (voir § 26, X, dont nous empruntons les notations).

Théorème auxiliaire. Soit **P** *une propriété d'ensembles invariante par rapport à l'opération* $\mathcal{M}$, *ainsi qu'à la multiplication cartésienne par* $\mathcal{X}$. *Soit* $\mathcal{X}=p_0,p_1,\dots,p_\zeta,\dots$ *(un bon ordre de l'espace* $\mathcal{X}$*). Soit* $G_0,G_1,\dots,G_\xi,\dots$ *une suite transfinie d'ensembles ouverts telle que* $\mathcal{X}=\sum\limits_\xi G_\xi$. *En désignant par* $\xi(x)$ *l'indice minimum tel que* $x\in G_{\xi(x)}$, *posons* $w(x)=p_{\xi(x)}$. *Soit* $\varphi(x,y)$ *une fonction propositionnelle de deux variables parcourant l'espace* $\mathcal{X}$ *et telle que l'ensemble* $\underset{y}{E}\varphi(x,y)$ *jouit de la propriété* **P**, *quel que soit* x.

Dans ces hypothèses, l'ensemble $\underset{xy}{E}\varphi[w(x),y]$ *jouit également de la propriété* **P**.

D'après la définition de $w(x)$ on a l'équivalence

(1) $$\{p_\xi=w(x)\}\equiv\{x\in G_\xi-\sum_{\eta<\xi}G_\eta\}.$$

Par conséquent

$$\varphi[w(x),y]\equiv\sum_\xi\varphi(p_\xi,y)\,[p_\xi=w(x)]\equiv\sum_\xi\varphi(p_\xi,y)\,[x\in(G_\xi-\sum_{\eta<\xi}G_\eta)].$$

On a donc

$$\begin{aligned}\underset{xy}{E}\varphi[w(x),y]&=\underset{xy}{E}\sum_\xi\varphi(p_\xi,y)\,[x\in(G_\xi-\sum_{\eta<\xi}G_\eta)]\\&=\sum_\xi\{\underset{xy}{E}\varphi(p_\xi,y)\cdot\underset{xy}{E}\,x\in(G_\xi-\sum_{\eta<\xi}G_\eta)\}\\&=\sum_\xi\{\underset{xy}{E}\varphi(p_\xi,y)\cdot\underset{xy}{E}\,(x\in G_\xi)-\sum_{\eta<\xi}\underset{xy}{E}\,(x\in G_\eta)\}.\end{aligned}$$

Posons $\underset{xy}{E}\varphi(p_\xi,y)=X_\xi$ et $\underset{xy}{E}\,(x\in G_\xi)=G_\xi^*$. Il vient

(2) $$\underset{xy}{E}\varphi[w(x),y]=\sum_\xi(X_\xi G_\xi^*-\sum_{\eta<\xi}G_\eta^*),$$

ce qui prouve que l'ensemble $\underset{xy}{E}\varphi[w(x),y]$ dérive des ensembles $\{X_\xi\}$ par l'application de l'opération $\mathcal{M}$.

Comme $X_\xi = \mathcal{X} \times \underset{y}{E}\, \varphi(p_\xi, y)$, X_ξ jouit de la propriété **P**. Comme $G_\xi^* = G_\xi \times \mathcal{X}$, G_ξ^* est un ensemble ouvert. La propriété **P** étant invariante par rapport à l'opération $\mathcal{M}$, on déduit de (2) la conclusion demandée.

Le th. auxiliaire établi, soit $f(x,y)$ une fonction continue par rapport à x et de classe $\alpha>0$ par rapport à y. Il s'agit de prouver que l'ensemble $\underset{xy}{E}[f(x,y)\,\epsilon\, F]$ est de classe $\alpha+1$ multiplicative, quel que soit $F=\overline{F}$.

Pour n fixe, substituons à G_ξ la sphère (ouverte) de centre p_ξ et de rayon $1/n$. Désignons par $w_n(x)$ la fonction $w(x)$ définie par l'équivalence (1). Comme $x\,\epsilon\, G_{\xi(x)}$ et $w_n(x)=p_{\xi(x)}\,\epsilon\, G_{\xi(x)}$, on a

$$|w_n(x)-x|<1/n, \quad \text{d'où} \quad \lim_{n=\infty} w_n(x)=x. \tag{3}$$

En vertu de la continuité de la fonction f par rapport à x, l'égalité (3) donne

$$\lim_{n=\infty} f[w_n(x),y] = f\{[\lim_{n=\infty} w_n(x)],y\} = f(x,y),$$

d'où en raison de (iv):

$$\{f(x,y)\,\epsilon\, F\} \equiv \prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\{f[w_{n+k}(x),y]\,\epsilon\, S_n\}. \tag{4}$$

Substituons, dans le th. auxiliaire, la propriété d'être de classe α additive à **P** et posons:

$$\varphi_n(x,y) \equiv \{f(x,y)\,\epsilon\, S_n\}.$$

La classe additive $\alpha>0$ étant un invariant de l'opération $\mathcal{M}$ (cf. § 26, X, 3) et de la multiplication cartésienne par $\mathcal{X}$ (cf. § 26, III), on en conclut que l'ensemble

$$\underset{xy}{E}\,\varphi_n[w_m(x),y] = \underset{xy}{E}\{f[w_m(x),y]\,\epsilon\, S_n\}$$

est de classe α additive, quels que soient m et n. Donc F est de classe $\alpha+1$ multiplicative d'après (4).

Remarque. Une fonction $f(x,y)$ de I-e classe relativement à chacune des variables peut être non mesurable B (même non mesurable au sens de Lebesgue) [1].

[1] W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement,* Fund. Math. **1** (1920), p. 114 et *Funkcje przedstawialne analityczne,* Lwów 1925, p. 68.

Soit, en effet, sur le plan euclidien $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, A un ensemble non borelien situé sur une circonférence (ou encore: un ensemble non mesurable superficiellement au sens de Lebesgue qui n'a que tout au plus deux points communs avec toute droite parallèle à l'un des axes). La fonction caractéristique de A est non mesurable B (voir N° I), tandis que par rapport à chacune des variables elle est de I-e classe; elle s'annule en effet partout, sauf en deux points (au plus).

VI. Fonctions complexes. Tout couple de fonctions $x=f(t)$, $y=g(t)$ définit une fonction „complexe" $z=h(t)$, où z désigne le point (x,y) du produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ et t parcourt un espace T.

1. *Les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant séparables* [1]*, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $z=h(t)$ soit de classe α est que les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ (les „coordonnées" du point z) soient de classe α.*

La condition est nécessaire. G étant un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{X}$, $G\times\mathcal{Y}$ est ouvert et, la fonction h étant de classe α, l'ensemble $\underset{t}{E}[h(t)\,\epsilon\, G\times\mathcal{Y}]$ est de classe α additive; comme il coïncide avec $f^{-1}(G)$ en vertu de l'équivalence $\{f(t)\,\epsilon\, G\}\equiv\{h(t)\,\epsilon\, G\times\mathcal{Y}\}$, la fonction f est de classe α.

La condition est suffisante. Soient $R_1, R_2, \dots$ la base de $\mathcal{X}$ et $S_1, S_2, \dots$ celle de $\mathcal{Y}$. La double suite $R_m\times S_n$ constitue alors la base de $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ (cf. § 24, IV). Il suffit donc (cf. N° II, 1) de montrer que l'ensemble $h^{-1}(R_m\times S_n)$ est de classe α additive. Or, l'équivalence évidente

$$\{h(t)\,\epsilon\, R_m\times S_n\} \equiv \{f(t)\,\epsilon\, R_m\}\cdot\{g(t)\,\epsilon\, S_n\}$$

implique que

$$h^{-1}(R_m\times S_n) = \underset{t}{E}\{f(t)\,\epsilon\, R_m\}\cdot\{g(t)\,\epsilon\, S_n\} =$$
$$= \underset{t}{E}\{f(t)\,\epsilon\, R_m\}\cdot\underset{t}{E}\{g(t)\,\epsilon\, S_n\} = f^{-1}(R_m)\cdot g^{-1}(S_n)$$

et, les fonctions f et g étant par hypothèse de classe α, les ensembles $f^{-1}(R_m)$ et $g^{-1}(S_n)$ sont de classe α additive; leur partie commune $h^{-1}(R_m\times S_n)$ l'est donc également.

[1] Il serait intéressant de savoir si l'hypothèse de la séparabilité de l'espace peut être supprimée.

Les considérations précédentes s'étendent au *produit dénombrable*:

1'. *Soient $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$ une suite d'espaces séparables et $\mathfrak{z}(t)$ une fonction dont les valeurs appartiennent au produit dénombrable $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$, c. à d. que la fonction $\mathfrak{z}(t)$ représente une suite de fonctions $\mathfrak{z}_1(t), \mathfrak{z}_2(t), \dots$ Pour que la fonction $\mathfrak{z}(t)$ soit de classe α, il faut et il suffit que chacune des fonctions $\mathfrak{z}_i(t)$ le soit.*

On démontre comme auparavant que cette condition est nécessaire, car on a l'équivalence

$$\{\mathfrak{z}_1(t) \in G\} \equiv \{\mathfrak{z}(t) \in (G \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \dots)\}.$$

Pour prouver qu'elle est suffisante, désignons par R_m^i, où $m = 1, 2, \dots$, la base de l'espace $\mathcal{X}_i$. Les ensembles de la forme $R_{k_1}^1 \times R_{k_2}^2 \times \dots \times R_{k_n}^n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \mathcal{X}_{n+2} \times \dots$ constituent alors la base de l'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$ (§ 24a, IV). Il vient: $\mathfrak{z}^{-1}(R_{k_1}^1 \times \dots \times R_{k_n}^n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \mathcal{X}_{n+2} \times \dots) = \underset{t}{E}\{[\mathfrak{z}_1(t) \in R_{k_1}^1] \cdot \ldots \cdot [\mathfrak{z}_n(t) \in R_{k_n}^n] \cdot [\mathfrak{z}_{n+1}(t) \in \mathcal{X}_{n+1}] \cdot [\mathfrak{z}_{n+2}(t) \in \mathcal{X}_{n+2}] \cdot \dots\} = \mathfrak{z}_1^{-1}(R_{k_1}^1) \cdot \ldots \cdot \mathfrak{z}_n^{-1}(R_{k_n}^n) \cdot T \cdot T \cdot \dots$

Les n premiers facteurs du dernier produit étant des ensembles de classe α additive, l'ensemble total l'est aussi, c. q. f. d.

En rapprochant les théorèmes précédents du théorème sur la superposition des fonctions (N° III, 2), on parvient à l'énoncé suivant sur les fonctions composées:

2. *Si chacune des fonctions $y_i = f_i(x_i)$ est de classe α et la fonction $z = g(y_1, y_2, \dots)$ est de classe β, la fonction $g[f_1(x_1), f_2(x_2), \dots]$ est de classe $\alpha + \beta$* (les espaces $\mathcal{Y}_i$ étant supposés séparables).

Si l'espace séparable $\mathcal{Y}_i$ s'obtient de l'espace $\mathcal{X}_i$ par une transformation de classe α, l'espace $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \dots$ s'obtient de $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$ également par une transformation de classe α.

A savoir, si $f_i(x)$ est la fonction de classe α transformant $\mathcal{X}_i$ en $\mathcal{Y}_i$ et $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots]$ est un point variable de $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$, la fonction $\mathfrak{y}(\mathfrak{z}) = [f_1(\mathfrak{z}^1), f_2(\mathfrak{z}^2), \dots]$ est la fonction demandée.

Car les fonctions $\mathfrak{z}^i$ étant continues, les coordonnées $f_i(\mathfrak{z}^i)$ du point variable $\mathfrak{y}(\mathfrak{z})$ sont des fonctions de $\mathfrak{z}$ de classe α et, d'après 1, la fonction $\mathfrak{y}(\mathfrak{z})$ l'est aussi. En outre, $g[\mathfrak{y}(\mathfrak{z})]$ est de classe $\alpha + \beta$.

3. *Si f_i, $i = 1, 2, \dots$, est une transformation de classe α de l'espace $\mathcal{X}_i$ en sous-ensemble de l'espace séparable $\mathcal{Y}_i$, l'ensemble*

$$\mathfrak{Z} = \underset{\mathfrak{z}}{E}[f_1(\mathfrak{z}^1) = f_2(\mathfrak{z}^2) = \dots], \quad \text{où} \quad \mathfrak{z} \in (\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots),$$

est de classe α multiplicative dans $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots$

De plus, la fonction f^* définie par la condition

$$f^*(\mathfrak{z}) = f_1(\mathfrak{z}^1) \quad \text{pour} \quad \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$$

est une transformation de classe α de $\mathfrak{Z}$ en $f^*(\mathfrak{Z}) = f_1(\mathcal{X}_1) \cdot f_2(\mathcal{X}_2) \cdot \dots$

Enfin, si les fonctions f_i sont des homéomorphies de classe α, β, la fonction f^* l'est également.

La démonstration est complètement analogue à celle des th. 2 et 3 du § 24a, VII.

4. *Pour que la fonction caractéristique de la suite d'ensembles $A_1, A_2, \dots$ soit de classe α, il faut et il suffit que chacun de ces ensembles soit ambigu de classe α.*

C'est une conséquence directe de 1' et I, 1.

Exemples. 1° $\mathcal{Y}$ étant séparable et les fonctions $f_1(x_1)$ et $f_2(x_2)$ étant de classe α, la fonction $h(x_1, x_2) = |f_1(x_1) - f_2(x_2)|$ est de classe α.

On n'a qu'à poser dans 2: $g(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|$, la distance étant une fonction continue.

2° $f_1(x_1)$ et $f_2(x_2)$ étant des fonctions de classe α à valeurs réelles, les fonctions $f_1(x_1) \pm f_2(x_2)$, $f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$, $f_1(x_1) : f_2(x_2)$, le sont également.

VII. Image de l'équation $y = f(x)$. Soit $I = \underset{xy}{E}[y = f(x)]$.

1. *Si f est de classe α, I est de classe α multiplicative.*

Dans le cas où $\mathcal{Y}$ est séparable, le théorème est un cas particulier du th. VI, 3 où $\mathcal{X}_1 = \mathcal{Y}$, $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}$, $f_1 =$ l'identité, $f_2 = f$ $(i = 1, 2)$.

Pour une démonstration plus directe et basée sur une idée différente, considérons la fonction $h(x, y) = |y - f(x)|$. On a évidemment

$$I = \underset{xy}{E}[h(x, y) = 0] = h^{-1}(0)$$

(où 0 désigne le nombre zéro). La fonction h étant de classe α (cf. VI, ex. 1°), l'ensemble $h^{-1}(0)$ est de classe α multiplicative [1]).

[1]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 269. Pour le cas d'une fonction réelle, voir W. Sierpiński, *Sur les images des fonctions représentables analytiquement*, Fund. Math. **2** (1921), p. 78. Pour le cas général, j'ai donné (dans ma note citée de Fund. Math. **17**, p. 277) une autre démonstration basée sur la formule suivante „de la séparation des variables"

$$(y \neq y') \equiv \sum_n (y \in \mathcal{Y} - R_n)\ (y' \in R_n),$$

où $R_1, R_2, \dots$ est la base de l'espace.

Dans le cas où $\mathcal{Y}$ est un espace métrique arbitraire, nous basons la démonstration sur le th. auxiliaire du N⁰ V[1]). Substituons dans ce théorème à G_ξ la sphère ouverte de centre p_ξ et de rayon $\frac{1}{n}$ (pour n fixe). Désignons — comme dans la démonstration du th. V, 2 (p. 288) — par $w_n(x)$ la fonction $w(x)$ définie par l'équivalence V (1). L'inégalité V (3) entraîne l'équivalence

$$[a=b] \equiv \prod_n |w_n(a)-b| \leqslant \frac{1}{n},$$

d'où

$$[y=f(x)] \equiv \prod_n |w_n(y)-f(x)| \leqslant \frac{1}{n}$$

et par conséquent,

$$(1) \qquad I=\underset{xy}{E}[y=f(x)]=\prod_{n=1}^{\infty}\underset{xy}{E}\left[|w_n(y)-f(x)| \leqslant \frac{1}{n}\right].$$

Posons dans le th. auxiliaire

$$(2) \qquad \varphi(x,y) \equiv \left[|y-f(x)| \leqslant \frac{1}{n}\right].$$

L'ensemble $\underset{x}{E}\,\varphi(x,y)$ étant, pour tout y, de classe α multiplicative (puisque f est de classe α) et la classe multiplicative $\alpha>0$ étant un invariant de l'opération $\mathcal{M}$ (d'après § 26, X, 3) et de la multiplication cartésienne par $\mathcal{X}$, on en conclut que l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\varphi[x,w_n(y)]$ est de classe α multiplicative. Il en est de même de I d'après (1) et (2).

Bien entendu, si $\alpha=0$, c. à d. si la fonction est continue, I est fermé (d'après § 24, XI, 2). Si $\alpha=1$, I est un G_δ. Cependant les énoncés réciproques sont en défaut.

2. *Si f est de classe α et A de classe β dans $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, la projection P de IA sur l'axe $\mathcal{X}$ est de classe $\alpha+\beta$, multiplicative ou additive suivant la classe de A ($\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant supposés séparables).*

En effet, la fonction $h(x)=[x,f(x)]$ étant de classe α (d'après VI, 1), l'ensemble $P=h^{-1}(A)$ est de classe $\alpha+\beta$ (d'après III, 1).

[1]) Voir D. Montgomery, op. cit. p. 532.

VIII. Limite de fonctions[1]). 1. *La limite d'une suite convergente de fonctions de classe α est de classe $\alpha+1$.*

Posons $f(x)=\lim_{n=\infty} f_n(x)$. Il vient d'après V (iv):

$$\{f(x) \in F\} \equiv \prod_n \sum_k \{f_{n+k}(x) \in S_n\},$$

d'où

$$f^{-1}(F)=\underset{x}{E}[f(x) \in F]=\prod_n \sum_k \underset{x}{E}[f_{n+k}(x) \in S_n]=\prod_n \sum_k f_{n+k}^{-1}(S_n).$$

Or, les fonctions $f_n(x)$ étant supposées de classe α, l'ensemble $f_{n+k}^{-1}(S_n)$ est de classe α additive et, par conséquent, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est de classe $\alpha+1$ multiplicative, c. q. f. d.

Ainsi, en particulier, la limite d'une suite de fonctions continues est de I-e classe. La limite d'une suite de fonctions de classes finies est de classe $\omega+1$.

2. *La limite d'une suite* uniformément *convergente de fonctions de classe α est de classe α.*

En effet, la convergence étant uniforme, il existe une suite d'entiers (croissants) m_n telle que l'on a $|f(x)-f_{m_n+k}(x)|<{}^1/_n$ pour tout x et tout $k\geqslant 0$. Nous en déduirons l'équivalence

$$\{f(x) \in F\} \equiv \prod_n \prod_k \{f_{m_n+k}(x) \in \bar{S}_n\}.$$

Posons, pour abréger, $y=f(x)$ et $y_n=f_n(x)$. Or, si l'on suppose que $y \in F$, on a $y_{m_n+k} \in \bar{S}_n$ pour tout n et k, puisque $|y-y_{m_n+k}|<{}^1/_n$. Inversement, si l'on suppose que le membre droit de l'équivalence soit satisfait, on a $y_{m_n} \in \bar{S}_n$ pour tout n, d'où $\varrho(y_{m_n},F)\leqslant{}^1/_n$ et, $\varrho(y,F)$ étant une fonction continue de l'argument y (§ 15, IV, (5)), l'égalité $y=\lim_{n=\infty} y_{m_n}$ implique que $\varrho(y,F)=0$, donc que $y \in F$.

Ceci établi, il vient

$$f^{-1}(F)=\prod_n \prod_k f_{m_n+k}^{-1}(\bar{S}_n)$$

et, l'ensemble $f_{m_n+k}^{-1}(\bar{S}_n)$ étant de classe α multiplicative, il en est de même de l'ensemble $f^{-1}(F)$. La fonction f est donc de classe α.

En particulier, la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues est continue (cf. § 15, VIII, 2). La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classes finies (croissantes) est de classe ω.

[1]) Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 267.

Remarque. La convergence uniforme n'est nullement une condition nécessaire pour que la fonction $f(x)=\lim_{n=\infty} f_n(x)$ soit de classe α. En voici une condition nécessaire et suffisante (l'espace $\mathcal{Y}$ étant supposé séparable): *pour tout $\varepsilon>0$, il existe un indice n aussi grand qu'on le veut et tel que l'ensemble* $\underset{x}{E}\{|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon\}$ *est de classe α additive* [1]).

Cette condition est nécessaire, car la fonction

$$\varphi_n(x)=|f(x)-f_n(x)|$$

est de classe α d'après VI, exemple 1⁰.

Elle est aussi suffisante. En effet, elle implique (pour ε fixe) l'existence d'une suite d'entiers croissants $k_1<k_2<...$ tels que les ensembles $E_n=\underset{x}{E}\{|f(x)-f_{k_n}(x)|<\varepsilon\}$ sont de classe α additive. Or, la suite $\{f_n(x)\}$ étant convergente, il vient $\mathcal{X}=E_1+E_2+...$ et, chacune des fonctions f_{k_n} étant de classe α, il existe d'après II, 3, une double suite d'ensembles Z_i^n de classe α additive tels que:

$$\mathcal{X}=\sum_{i=1}^{\infty} Z_i^n=\sum_{n,i=1}^{\infty} E_n\cdot Z_i^n \quad \text{et} \quad \delta[f_{k_n}(Z_i^n)]<\varepsilon.$$

Les ensembles $E_n\cdot Z_i^n$ étant de classe α additive, il suffit (en vertu du même théorème 3 du N⁰ II) de montrer que $\delta[f(E_n\cdot Z_i^n)]\leqslant 3\varepsilon$.

Soient donc x_1 et x_2 deux points de $E_n\cdot Z_i^n$. Il vient

$$|f(x_1)-f_{k_n}(x_1)|<\varepsilon, \quad |f(x_2)-f_{k_n}(x_2)|<\varepsilon \quad \text{et} \quad |f_{k_n}(x_1)-f_{k_n}(x_2)|<\varepsilon,$$

d'où $|f(x_1)-f(x_2)|<3\varepsilon$, c. q. f. d.

3. *$\mathcal{Y}$ étant séparable, toute fonction f de classe $\alpha>0$ est limite d'une suite uniformément convergente de fonctions f_n de classe α telles que tous les ensembles $f_n(\mathcal{X})$ sont isolés* [2]).

[1]) Cette condition est due à M. Szpilrajn-Marczewski (cf. B. Gagaeff, l. cit., p. 187). Pour d'autres conditions nécessaires et suffisantes, voir ibid. et H. Hahn, *Reelle Funktionen*, p. 309.

[2]) Pour le cas des fonctions réelles, cf. Ch. de la Vallée-Poussin, *Intégrale de Lebesgue...*, p. 118, S. Kempisty, Fund. Math. **2** (1921), p. 135, W. Sierpiński, Fund. Math. **6** (1924), p. 4 et pour le cas général, S. Banach, *Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen*, Fund. Math. **17** (1931), p. 287.

De plus, *les ensembles $f_n(\mathcal{X})$ peuvent être supposés finis si $\mathcal{Y}$ est totalement borné.*

L'espace $\mathcal{Y}$ étant séparable (respectivement totalement borné), il existe pour tout $\varepsilon>0$ un ensemble isolé (respectivement fini) I tel que tout point de cet espace est situé à une distance $<\varepsilon$ d'un point de I (voir § 15, IX, 1 et remarque 1⁰). Rangeons I en une suite (finie ou infinie) d'éléments distincts: $y_1, y_2, ...$ Posons

$$A_k=\underset{x}{E}\{|f(x)-y_k|\leqslant\varepsilon\}, \quad B_k=\underset{x}{E}\{|f(x)-y_k|\geqslant 2\varepsilon\}.$$

Les ensembles A_k et B_k étant disjoints et de classe α multiplicative, il existe d'après le théorème de séparation (§ 26, VII, 2) un ensemble F_k ambigu de classe α et tel que $A_k\subset F_k$ et $F_k\cdot B_k=0$. D'après la définition de I, on a

$$\mathcal{X}=A_1+A_2+..., \quad \text{d'où} \quad \mathcal{X}=F_1+F_2+...$$

La fonction g définie par les conditions suivantes est de classe α:

$$g(x)=\begin{cases} y_1 \text{ pour } x\in F_1, \\ y_k \text{ pour } x\in F_k-(F_1+...+F_{k-1}). \end{cases}$$

Car l'ensemble $g^{-1}(y_k)$, comme identique à $F_k-(F_1+...+F_{k-1})$, est de classe α additive (il est même ambigu de classe α) et, les valeurs de la fonction g formant un ensemble dénombrable, l'ensemble $g^{-1}(G)$ est de classe α additive, quel que soit G.

De plus, on a $|f(x)-g(x)|<2\varepsilon$ pour tout x, car l'égalité $g(x)=y_k$ entraîne $x\in F_k\subset\mathcal{X}-B_k$.

Ceci établi, on définit la fonction f_n comme égale à g, le nombre ε étant supposé égal à $1/n$.

Les deux lemmes qui suivent nous serviront pour établir le th. 6 (dont le premier lemme est un cas particulier) [1]).

4. *Toute fonction f de classe $\alpha>1$ qui n'admet qu'un nombre fini de valeurs est limite d'une suite de fonctions f_n de classes $<\alpha$ qui n'admettent que les valeurs de la fonction f.*

De plus, *si $\alpha=\lambda+1$ où λ est un nombre limite, les fonctions f_n sont de classes $<\lambda$.*

[1]) Pour les énoncés du N⁰ VIII qui suivent, cf. S. Banach, op. cit., p. 283.

Soient, en effet, $y_1,\dots,y_k$ les valeurs de la fonction f. L'ensemble $A_i=f^{-1}(y_i)$ est donc ambigu de classe α. D'après § 26, IX, 1 et 2:

$$(1)\qquad A_i=\operatorname*{Limes}_{n=\infty} A_{in}$$

où A_{in} est ambigu de classe $<\alpha$, respectivement de classe $<\lambda$. Posons

$$F_{1n}=A_{1n},\quad F_{2n}=A_{2n}-A_{1n},\quad \dots,\quad F_{kn}=A_{kn}-(A_{1n}+\dots+A_{k-1,n}).$$

Ces ensembles étant, pour n fixe, disjoints et de classes multiplicatives $<\alpha$ (resp. $<\lambda$), il existe, selon IV, 4, une fonction f_n, définie sur $\mathcal{X}$, de classe $<\alpha$ (resp. $<\lambda$), qui n'admet que les valeurs $y_1,\dots,y_k$ et telle que $f_n(x)=y_i$ pour $x\in F_{in}$.

On a $f(x)=\lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$. Soit, en effet, x_0 un point fixe. Comme $\mathcal{X}=A_1+\dots+A_k$, posons $x_0\in A_i$, c. à d. $f(x_0)=y_i$. Comme x_0 *non-*$\in A_l$ pour $l\neq i$, on conclut de (1) que, pour n suffisamment grand, on a

$$x_0\in A_{in}\quad \text{et}\quad x_0 \textit{ non-}\in A_{ln},$$

donc

$$x_0\in F_{in},\quad \text{d'où}\quad f_n(x_0)=y_i=f(x_0).$$

5. *Etant données deux suites de fonctions $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ de classes $<\alpha$, chacune n'admettant qu'un nombre fini de valeurs et telles que*

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty} f_n(x)=f(x)\quad \textit{et}\quad \lim_{n=\infty} g_n(x)=g(x),$$

il existe une suite de fonctions $\{h_n\}$ de classes $<\alpha$, chacune n'admettant qu'un nombre fini de valeurs et telles que

$$(3)\qquad \lim_{n=\infty} h_n(x)=g(x)\quad \textit{et}\quad |h_n(x)-f_n(x)|\leqslant c,$$

c vérifiant l'inégalité $|f(x)-g(x)|<c$ quel que soit x.

La fonction $|g_n(x)-f_n(x)|$ étant de classe $<\alpha$ (N⁰ VI, ex. 1⁰) et n'admettant, pour n fixe, qu'un nombre fini de valeurs, l'ensemble A_n des x tels que $|g_n(x)-f_n(x)|\leqslant c$ est ambigu de classe $<\alpha$ (cf. II, 2). Posons

$$h_n(x)=\begin{cases} g_n(x) & \text{pour } x\in A_n\\ f_n(x) & \text{pour } x\in \mathcal{X}-A_n.\end{cases}$$

La fonction h_n est donc de classe $<\alpha$ (d'après IV, 1).

D'après la définition de h_n, l'inégalité (3) est satisfaite.

L'égalité (3) l'est aussi. Soit, en effet, x_0 un point fixe. D'après (2), on a pour n suffisamment grand

$$|g_n(x_0)-f_n(x_0)|\leqslant c,\quad \text{d'où}\quad x_0\in A_n\quad \text{et}\quad h_n(x_0)=g_n(x_0).$$

Donc $\lim\limits_{n=\infty} h_n(x_0)=\lim\limits_{n=\infty} g_n(x_0)=g(x_0)$.

6. *$\mathcal{Y}$ étant séparable, toute fonction f de classe $\alpha>1$ est limite d'une suite de fonctions de classes $<\alpha$.*

De plus, *si $\alpha=\lambda+1$ où λ est un nombre limite, ces fonctions sont de classes $<\lambda$.*

$\mathcal{Y}$ étant métrique séparable, il est légitime d'admettre que $\mathcal{Y}$ est totalement borné (cf. § 15, XII, corollaire).

On a donc, d'après 3

$$f(x)=\lim_{m=\infty} f_m(x),$$

les fonctions $f_1,f_2,\dots$ étant de classe α et n'admettant qu'un nombre fini de valeurs et la convergence étant uniforme. Il est légitime d'admettre que

$$(4)\qquad |f_{m+1}(x)-f_m(x)|<1/2^m,$$

en remplaçant au besoin la suite $\{f_m\}$ par une suite partielle.

On a d'après 4,

$$f_m(x)=\lim_{n=\infty} f_{mn}(x),$$

où f_{mn} est de classe $<\alpha$ (resp. $<\lambda$) et ne possède qu'un nombre fini de valeurs. Nous allons définir par induction (relativement à m) une double suite de fonctions h_{mn} de classes $<\alpha$ (resp. $<\lambda$), dont chacune n'admet qu'un nombre fini de valeurs et telles que

$$(5)\qquad \lim_{n=\infty} h_{mn}(x)=f_m(x)\quad \text{et}\quad |h_{m+1,n}(x)-h_{mn}(x)|\leqslant 1/2^m.$$

Posons $h_{1n}(x)=f_{1n}(x)$. La suite $h_{m1},h_{m2},\dots$ supposée définie, l'existence d'une suite $h_{m+1,1},h_{m+1,2},\dots$ satisfaisant aux conditions demandées résulte du lemme 5 en y remplaçant f par f_m, f_n par h_{mn}, g par f_{m+1}, g_n par $f_{m+1,n}$ et c par $1/2^m$.

Nous allons montrer que

$$(6)\qquad \lim_{n=\infty} h_{nn}(x)=f(x),$$

ce qui achevera la démonstration du th. 6.

Soient x_0 un point donné et $\varepsilon>0$. Soit m un entier tel que $1/2^{m-1}<\varepsilon$ et que

$$(7)\qquad |f_m(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Soit enfin $n_0>m$ un entier tel que l'on ait pour $n>n_0$

$$(8)\qquad |h_{mn}(x_0)-f_m(x_0)|<\varepsilon.$$

Il vient, pour $n > n_0$,

$$|h_{nn}(x_0)-f(x_0)| \leqslant \{|h_{nn}(x_0)-h_{n-1,n}(x_0)|+\ldots+|h_{m+1,n}(x_0)-h_{mn}(x_0)|\}+$$
$$+|h_{mn}(x_0)-f_m(x_0)|+|f_m(x_0)-f(x_0)| < \left(\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)+\varepsilon+\varepsilon < 3\varepsilon,$$

d'après (5), (8) et (7); d'où l'égalité (6).

Remarque. Le th. 6 n'est pas en général vrai pour $\alpha=1$. Ainsi, par exemple, $\mathcal{Y}$ désignant l'espace composé de deux éléments 0 et 1, la fonction caractéristique d'un seul point de l'espace $\mathcal{X}$ des nombres réels est de classe 1, bien qu'aucune suite de fonctions continues (dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{Y}$) ne converge vers elle.

Cependant, le même théorème reste valable pour $\alpha=1$ dans deux cas particuliers importants:

1⁰ lorsque l'espace (séparable) $\mathcal{X}$ est de dimension 0,

2⁰ lorsque $\mathcal{Y}=\mathcal{J}$ ou $\mathcal{E}$, ou plus généralement, $\mathcal{Y}=\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m}\leqslant\aleph_0$).

En effet, dans le cas où $\dim\mathcal{X}=0$, l'énoncé 3 est vrai pour $\alpha=0$ et l'énoncé 4 l'est pour $\alpha=1$. En ce qui concerne le cas 2⁰, on a le théorème suivant:

7. *Si $\mathcal{Y}=$ l'intervalle 01 (ou plus généralement $\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m}\leqslant\aleph_0$), toute fonction de I-e classe est limite d'une suite de fonctions continues.*

Il suffit (en vertu de § 14, IV, 1) de se borner au cas où $\mathcal{Y}$ est un intervalle. Dans cette hypothèse, considérons d'abord le cas où la fonction f n'admet qu'un nombre *fini* de valeurs: $y_1,\ldots,y_k$. L'ensemble $f^{-1}(y_i)$ étant un $\boldsymbol{F}_\sigma$, posons:

$$(9)\qquad A_i=f^{-1}(y_i)=F_{i1}+F_{i2}+\ldots,\quad F_{in}\subset F_{i,n+1},\quad F_{in}=\overline{F}_{in}.$$

D'après le th. de Tietze (§ 15, XI, 3), il existe, pour chaque n, une fonction continue f_n définie sur $\mathcal{X}$ et telle que $f_n(x)=y_i$ pour $x\in F_{in}$, où $1\leqslant i\leqslant k$, et qu'en outre, les valeurs des fonctions f_n ne débordent pas les bornes inférieure et supérieure de la fonction f.

On a $f(x)=\lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$. Soit, en effet, x_0 un point fixe. Comme $\mathcal{X}=A_1+\ldots+A_k$, posons $x_0\in A_i$. D'après (9), on a, pour n suffisamment grand, $x_0\in F_{in}$, d'où $f_n(x_0)=y_i$, c. à d. $f_n(x_0)=f(x_0)$.

Ceci établi, passons au cas général. Soit, conformément à 3, $\{f_m\}$ une suite uniformément convergente vers f de fonctions de classe 1 et dont chacune n'admet qu'un nombre fini de valeurs. Il est légitime d'admettre que l'inégalité (4) soit réalisée et que $f_0(x)=0$.

La différence $f_m(x)-f_{m-1}(x)$ étant une fonction de classe 1 (cf. VI, ex. 2⁰), il existe, comme nous venons de prouver, une double suite de fonctions continues g_{mn} telles que

$$\lim_{n=\infty} g_{mn}(x)=f_m(x)-f_{m-1}(x)\quad\text{et}\quad |g_{mn}(x)|\leqslant {}^1/_{2^{m-1}}.$$

Posons $h_{mn}(x)=g_{1,n}(x)+\ldots+g_{m,n}(x)$.

Les formules (5) étant vérifiées, on démontre l'égalité (6) comme dans le cas du th. 6.

IX. Représentation analytique. La famille des *fonctions représentables analytiquement* est, par définition [1]), la plus petite famille de fonctions qui contient:

1) toutes les fonctions continues,

2) les limites des suites convergentes des fonctions qui lui appartiennent.

Ces fonctions sont rangées en classes Φ_α, où $\alpha<\Omega$, de la façon suivante:

1⁰: la classe Φ_0 se compose des fonctions continues,

2⁰: la classe Φ_α ($\alpha>0$) se compose des fonctions-limites des suites convergentes des fonctions de classes Φ_ξ avec $\xi<\alpha$.

Théorème de Lebesgue-Hausdorff [2]). *$\mathcal{Y}$ désignant l'intervalle $\mathcal{J}$ (ou plus généralement, $\mathcal{J}^{\mathfrak{m}}$ où $\mathfrak{m}\leqslant\aleph_0$), la classe Φ_α coïncide avec la famille des fonctions mesurables B de classe α, respectivement de classe $\alpha+1$, suivant que α est fini ou infini* [3]).

Procédons par induction. La thèse du théorème étant évidente pour $\alpha=0$, admettons qu'elle soit vraie pour tout $\xi<\alpha$.

D'après VIII, 7 et 1, Φ_1 coïncide avec la famille des fonctions de I-e classe. D'après VIII, 6 et 1, la famille des fonctions de classe $n+1$ (finie) coïncide avec la famille des limites des suites convergentes des fonctions de classe n, donc (en posant $\alpha=n+1$) de classe Φ_n; cette famille coïncide donc avec Φ_{n+1} (selon 2⁰).

Le théorème étant établi pour $\alpha<\omega$, admettons que $\alpha=\lambda+n$ où λ est un nombre limite et n un entier $\geqslant 0$.

Toute fonction $f\in\Phi_\lambda$ est de la forme

$$f(x)=\lim_{m=\infty} f_m(x)\quad\text{où}\quad f_m\in\Phi_{\xi_m}\quad\text{et}\quad \xi_m<\lambda.$$

[1]) Voir R. Baire, Thèse, Ann. di Mat. (3) **3** (1899), p. 68.

[2]) H. Lebesgue, op. cit. p. 168 et F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Chap. 9.

[3]) Inversement, la classe α des fonctions mesurables B coïncide avec $\Phi_{\alpha-1}$ lorsque α est infini et n'est pas un nombre limite. Pour le cas où α est un nombre limite, cf. F. Hausdorff, l. cit.

Par hypothèse, f_m est donc mesurable B de classe ξ_m+1, donc de classe λ, d'où en vertu du th. VIII, 1, f est de classe $\lambda+1$.

Réciproquement, si f est de classe $\lambda+1$, on a d'après VIII, 6,

$$f(x)=\lim_{m=\infty} f_m(x) \quad \text{où} \quad f_m \text{ est de classe } \xi_m<\lambda,$$

donc $f_m \in \Phi_{\xi_m}$, ce qui entraîne $f \in \Phi_\lambda$.

L'identité de la classe Φ_λ et de la famille des fonctions mesurables B de classe $\lambda+1$ est ainsi établie. Par l'induction finie, on en déduit, comme auparavant, l'identité de la classe $\Phi_{\lambda+n}$ avec la famille des fonctions mesurables B de classe $\lambda+n+1$.

Dans les espaces (métriques séparables) $\mathcal{Y}$ arbitraires, il est préférable de prendre comme point de départ pour la définition des fonctions représentables analytiquement les fonctions *de première classe* au lieu des fonctions continues. On parvient ainsi à une suite transfinie $\Phi_1^*, \Phi_2^*, \ldots, \Phi_\alpha^*, \ldots$ $(\alpha<\Omega)$, où Φ_1^* est la famille des fonctions mesurables B de classe 1 et où Φ_α^* pour $\alpha>1$ est défini, comme auparavant, par la condition 2°.

Une démonstration tout à fait analogue à celle du théorème précédent permet d'établir le

Théorème de Banach [1]. *Pour tout espace $\mathcal{Y}$ séparable, la classe Φ_α^*, où $1\leqslant\alpha<\Omega$, coïncide avec la famille des fonctions mesurables B de classe α, respectivement de classe $\alpha+1$, suivant que α est fini ou infini.*

X. Théorèmes de Baire sur les fonctions de I-e classe [2].

Rappelons d'abord que $y=f(x)$ étant une fonction arbitraire, l'ensemble D de ses points de discontinuité vérifie la formule

$$D=\sum_G \{f^{-1}(G)-\mathrm{Int}\,[f^{-1}(G)]\}=\sum_F \{\overline{f^{-1}(F)}-f^{-1}(F)\} \tag{1}$$

où G parcourt la famille des ensembles ouverts et F celle des ensembles fermés de l'espace $\mathcal{Y}$ (cf. § 13, III (3)).

Si l'espace $\mathcal{Y}$ est *séparable*, la formule (1) peut être remplacée par une formule qui ne comporte que la sommation dénombrable:

$$D=\sum_n \{f^{-1}(R_n)-\mathrm{Int}\,[f^{-1}(R_n)]\}=\sum_n \{\overline{f^{-1}(S_n)}-f^{-1}(S_n)\} \tag{2}$$

où $S_n=\mathcal{Y}-R_n$ et la suite $R_1, R_2, \ldots$ forme la base de l'espace $\mathcal{Y}$.

[1] S. Banach, op. cit., p. 285.

[2] Voir la Thèse de R. Baire. Les fonctions de I-e classe jouent un grand rôle dans les applications; telles sont p. ex. les fonctions semi-continues, monotones (plus généralement: à variation bornée), les fonctions dérivées. Elles seront appliquées aussi dans l'étude des espaces compacts.

Soit, en effet,

$$G=\sum_n R_{k_n} \quad \text{et} \quad x \in f^{-1}(G)-\mathrm{Int}\,[f^{-1}(G)].$$

Donc $f(x) \in G$, d'où $f(x) \in R_{k_n} \subset G$, pour un certain indice n. Cela implique que

$$f^{-1}(R_{k_n}) \subset f^{-1}(G), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{Int}\,[f^{-1}(R_{k_n})] \subset \mathrm{Int}\,[f^{-1}(G)].$$

Ainsi $x \in f^{-1}(R_{k_n})-\mathrm{Int}\,[f^{-1}(R_{k_n})]$. De là résulte la première partie de la formule (2). La deuxième s'en déduit en vertu des égalités:

$$f^{-1}(R_n)=\mathcal{X}-f^{-1}(S_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Int}\,(\mathcal{X}-Z)=\mathcal{X}-\overline{Z},$$

qui impliquent que $\mathrm{Int}\,[f^{-1}(R_n)]=\mathcal{X}-\overline{f^{-1}(S_n)}$.

Ceci établi, passons à la démonstration des théorèmes.

Théorème 1. L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction mesurable B de I-e classe est de I-e catégorie (l'espace $\mathcal{Y}$ étant supposé séparable).

En effet, l'ensemble S_n de la formule (2) étant fermé, l'ensemble $f^{-1}(S_n)$ est par hypothèse un $\boldsymbol{G}_\delta$. Par conséquent, l'ensemble $\overline{f^{-1}(S_n)}-f^{-1}(S_n)$ est un $\boldsymbol{F}_\sigma$; comme ensemble de la forme $\overline{X}-X$, il est un ensemble frontière (§ 8, IV), donc un ensemble de I-e catégorie (§ 10, II). En tant que somme d'une série d'ensembles de I-e catégorie, l'ensemble D est encore de I-e catégorie.

Corollaire. f étant une fonction de I-e classe et A étant un sous-ensemble arbitraire de l'espace $\mathcal{X}$, l'ensemble des points de discontinuité de la fonction partielle $f|A$ est de I-e catégorie relativement à A (l'espace $\mathcal{Y}$ étant supposé séparable).

Théorème 2. Une fonction ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé est mesurable B de I-e classe.

Soit, en effet, F un sous-ensemble arbitraire fermé de l'espace $\mathcal{Y}$. Il s'agit de prouver que l'ensemble $f^{-1}(F)$ est un $\boldsymbol{G}_\delta$.

Posons

$$\mathcal{Y}-F=F_1+F_2+\ldots \quad \text{où} \quad \overline{F}_n=F_n.$$

Nous allons appliquer au couple d'ensembles $f^{-1}(F)$ et $f^{-1}(F_n)$ (pour n fixe) le théorème § 12, III, 1°, d'après lequel, E et H étant deux ensembles tels que l'équation $X=\overline{XE}\cdot\overline{XH}$ ne possède que la racine $X=0$, il existe un ensemble D développable, donc (d'après le th. 5 du § 26, X) un $\boldsymbol{G}_\delta$, assujetti aux conditions $E\subset D$ et $HD=0$.

Admettons à ce but que $X=\overline{X\cdot f^{-1}(F)}\cdot\overline{X\cdot f^{-1}(F_n)}$. Supposons, par impossible, que $X\neq 0$. L'ensemble X étant fermé, il existe par hypothèse un point de continuité p de la fonction partielle $g=f|X$. On a (cf. § 3, II, 14):

$$p\in X\subset\overline{X\cdot f^{-1}(F)}=\overline{g^{-1}(F)},\quad \text{d'où}\quad g(p)\in\overline{gg^{-1}(F)}$$

en vertu de la continuité de la fonction g.

Donc $f(p)\in F$ puisque

$$g(p)=f(p)\quad \text{et}\quad \overline{gg^{-1}(F)}\subset\overline{F}=F.$$

De façon analogue, l'inclusion $X\subset\overline{X\cdot f^{-1}(F_n)}$ implique que $f(p)\in F_n$. Mais cela est impossible, car $F\cdot F_n=0$.

Ainsi $X=0$. Il existe donc pour tout n un ensemble D_n qui est un G_δ tel que

$$f^{-1}(F)\subset D_n\subset\mathcal{X}-f^{-1}(F_n).$$

Il vient

$$f^{-1}(F)\subset\prod_n D_n\subset\prod_n[\mathcal{X}-f^{-1}(F_n)]=\mathcal{X}-\sum_n f^{-1}(F_n)=$$
$$=\mathcal{X}-f^{-1}(\sum_n F_n)=\mathcal{X}-f^{-1}(\mathcal{Y}-F)=\mathcal{X}-[\mathcal{X}-f^{-1}(F)]=f^{-1}(F),$$

d'où $f^{-1}(F)=\prod_n D_n$ et, chacun des ensembles D_n étant un G_δ, l'ensemble $f^{-1}(F)$ l'est également.

Remarques. 1) La discontinuité ponctuelle de la fonction f sur tout ensemble fermé équivaut *à l'existence d'un point de continuité de la fonction partielle $f|A$ sur tout ensemble A fermé et non vide.*

Ce n'est en effet que la dernière condition qui intervient dans la démonstration du théorème 2.

2) Le terme *fermé* peut être remplacé dans le th. 2 par *parfait*.

Car chaque point isolé est un point de continuité.

Il en résulte aussitôt (cf. § 9, VI, 5) que si l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction est *clairsemé* (donc, en particulier, s'il est *fini*), la fonction est de I-e classe.

3) Pour les espaces complets (cf. § 30, VII), la thèse du corollaire du théor. 1 *équivaut* à l'hypothèse du théor. 2, de sorte que chacune d'elles *caractérise* les fonctions de I-e classe. Cependant dans les espaces non complets la première n'est pas suffisante (si l'on admet l'hypothèse du continu: $\aleph_1=\mathfrak{c}$) et la deuxième n'est pas nécessaire pour qu'une fonction soit de I-e classe.

En effet, il existe d'une part (voir § 36, IV) un espace séparable E de puissance $\aleph_1$ tel que chaque fonction définie sur E satisfait à la thèse du corollaire. Or, la famille des fonctions réelles définies sur E étant de puissance $\mathfrak{c}^{\aleph_1}$ et la famille des fonctions mesurables B étant de puissance $\mathfrak{c}$ (cf. N° I), l'inégalité $\mathfrak{c}<\mathfrak{c}^{\aleph_1}$ (qui résulte de l'hypothèse du continu) entraîne l'existence des fonctions mesurables B qui satisfont à la thèse du corollaire.

D'autre part, la fonction caractéristique d'un ensemble qui est un F_σ et un G_δ mais qui n'est pas développable en une série alternée d'ensembles fermés décroissants (tel est p. ex. un ensemble dense et frontière dans l'espace des nombres rationnels, cf. § 19, III, remarque 2°) est une fonction de I-e classe (N° I) mais ne satisfait pas à l'hypothèse du théorème 2 (cf. § 13, VI).

4) Toute fonction f de I-e classe est *effectivement* de I-e classe (dans le sens admis au § 18, VIII). La démonstration du théorème 2 permet, en effet, de *définir* pour tout ensemble fermé $F\subset\mathcal{Y}$ une suite d'ensembles ouverts $G_n\subset\mathcal{X}$ de façon que $f^{-1}(F)=G_1\cdot G_2\cdot\ldots$ (car tout ensemble développable D est un G_δ *effectif*, voir § 19, III, rem. 1°). Cela permet aussi, dans le cas où les valeurs de f sont réelles, de *définir* une suite de fonctions continues qui converge vers f (de sorte que f est *effectivement* une fonction représentable analytiquement de I-e classe) [1].

5) *Dans le th. 1, le terme „fonction mesurable B" peut être remplacé par „fonction représentable analytiquement"; on peut alors omettre l'hypothèse que l'espace $\mathcal{Y}$ soit séparable* [2].

Le th. 1 ainsi modifié est plus général que celui du texte, puisque, pour les espaces $\mathcal{Y}$ séparables, toute fonction mesurable B de I-e classe devient représentable analytiquement de I-e classe en plongeant $\mathcal{Y}$ dans l'espace de Hilbert.

Pour démontrer le th. 1 ainsi modifié, posons

$$f(x)=\lim_{n=\infty}f_n(x) \tag{3}$$

[1] en se servant par ex. du procédé décrit par F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Chap. 9, Cf. Ch. de la Vallée-Poussin, *Intégrales de Lebesgue*..., p. 107 („Problème de Baire") et ma note de Fund. Math. **3** (1922), p. 100, où je donne, à l'aide de la méthode générale de l'élimination des nombres transfinis, une solution de ce problème sans l'emploi des nombres transfinis.

[2] Voir ma note *Sur les fonctions représentables analytiquement et les ensembles de première catégorie*, Fund. Math. **5** (1923), p. 75.

où f_n est continue. Désignons par D l'ensemble des points de discontinuité de la fonction f et par $\omega(x)$ l'oscillation de f au point x. Soit $E(\varepsilon)$ l'ensemble des x tels que $\omega(x)\geqslant\varepsilon$. Comme

$$D=E(1)+E(^1/_2)+E(^1/_3)+\dots,$$

il suffit de montrer que $E(\varepsilon)$ est de I-e catégorie pour tout $\varepsilon>0$.

ε étant fixe, posons $E=E(\varepsilon)$. Soit A_k l'ensemble des x tels que

(4) $$|f_m(x)-f_k(x)|\leqslant\varepsilon/4 \quad \text{pour tout} \quad m>k.$$

Les fonctions $f_1,f_2,\dots,$ étant continues, on a $A_k=\overline{A}_k$. L'ensemble $\mathrm{Fr}\,(A_k^-)$ est donc non-dense.

D'autre part, la suite $f_1,f_2,\dots$ étant convergente, on a

$$\mathcal{X}=A_1+A_2+\dots, \quad \text{d'où} \quad E=EA_1+EA_2+\dots$$

Reste donc à montrer que

$$EA_k\subset\mathrm{Fr}\,(A_k), \quad \text{c. à d. que} \quad E\cdot\mathrm{Int}\,(A_k)=0.$$

Soit $x\,\epsilon\,\mathrm{Int}\,(A_k)$. La fonction f_k étant continue, il existe un ensemble ouvert G tel que

(5) $$x\,\epsilon\,G\subset A_k \quad \text{et} \quad \delta[f_k(G)]<\varepsilon/4.$$

Soient $x',x''\,\epsilon\,G$. Il vient d'après (3)—(5):

$$|f(x')-f_k(x')|\leqslant\varepsilon/4, \quad |f(x'')-f_k(x'')|\leqslant\varepsilon/4, \quad |f_k(x')-f_k(x'')|\leqslant\varepsilon/4,$$

d'où $|f(x')-f(x'')|\leqslant 3\varepsilon/4$, donc $\delta[f(G)]<\varepsilon$, d'où $\omega(x)<\varepsilon$, donc x *non-*ε E.

6) *$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces assujettis aux ax. I—III, f une fonction ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé*[1]) *et F un ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{Y}$, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est développable.*

Conformément à § 12, V, 1⁰, il s'agit de prouver que, pour tout X fermé, l'égalité $X=\overline{X\cdot f^{-1}(F)}\cdot\overline{X-f^{-1}(F)}$ entraîne $X=0$. La démonstration est tout à fait analogue à celle du th. 2 en ce qui concerne l'égalité $X=0$ (en remplaçant F_n par $\mathcal{Y}-F$).

[1]) Pour $\mathcal{X}$ complet, ces transformations coïncident avec les transformations de I-e classe (voir § 30, VII).

7) *La séparabilité de l'espace est invariante par rapport aux transformations f ponctuellement discontinues sur tout ensemble G_δ.*

Supposons, en effet, que l'espace $\mathcal{Y}=f(\mathcal{X})$ ne soit pas séparable. Il contient alors (d'après § 15, IX, remarque 1⁰) un ensemble de puissance $\aleph_1$ fermé et isolé:

$$\mathcal{Y}^*=(y_1,y_2,\dots,y_\xi,\dots) \quad \text{où} \quad \xi<\Omega.$$

Posons $\mathcal{X}^*=f^{-1}(Y^*)$ et $F_\xi=(y_1,y_2,\dots,y_\xi)$.

La fonction f étant, d'après le th. 2, de I-e classe, l'ensemble $\mathcal{X}^*$ est un G_δ. Par hypothèse, la fonction partielle $g=f|\mathcal{X}^*$ est ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé (même sur tout ensemble G_δ) dans $\mathcal{X}^*$. L'ensemble F_ξ étant fermé-ouvert dans $\mathcal{Y}^*$, on conclut de la remarque 6 que l'ensemble $A_\xi=g^{-1}(F_\xi)$ est développable en ensembles fermés dans $\mathcal{X}^*$. En faisant varier l'indice ξ, on parvient ainsi à une famille bien ordonnée indénombrable d'ensembles A_ξ, $\xi<\Omega$, développables et croissants. Conformément au th. 2 du § 19, III, $\mathcal{X}^*$ est donc non-séparable et il en est de même de $\mathcal{X}$.

8) En admettant l'hypothèse du continu, on a le théorème plus général suivant:

La séparabilité de l'espace est invariante par rapport aux transformations mesurables B.

En supposant, en effet, que l'espace $\mathcal{Y}=f(\mathcal{X})$ soit non-séparable, considérons l'ensemble isolé $\mathcal{Y}^*$ de la démonstration précédente et faisons correspondre à tout ξ un x_ξ tel que $f(x_\xi)=y_\xi$. L'ensemble $A=(x_1,x_2,\dots,x_\xi,\dots)$ étant indénombrable, sa puissance est donc $\mathfrak{c}$ en vertu de l'hypothèse du continu. $\mathcal{X}$ étant supposé séparable, on en conclut que A contient un ensemble E non-borelien dans A (voir § 26, III). Posons

$$E=(x_{\xi_1},x_{\xi_2},\dots,x_{\xi_\gamma},\dots) \quad \text{et} \quad F=(y_{\xi_1},y_{\xi_2},\dots,y_{\xi_\gamma},\dots).$$

La fonction $g=f|A$ étant mesurable B et l'ensemble F étant fermé dans $\mathcal{Y}^*$ (puisque ce dernier est isolé), l'ensemble $E=g^{-1}(F)$ est borelien. On parvient ainsi à la contradiction demandée.

9) *Toute fonction définie sur un espace dénombrable est de I-e classe.*

Car tout sous-ensemble de cet espace est un F_σ.

§ 28. Fonctions jouissant de la propriété de Baire.

I. Définition. Soit f une fonction qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en sous-ensemble de l'espace $\mathcal{Y}$. *La fonction f jouit de la propriété de Baire, lorsque, quel que soit l'ensemble fermé F (contenu dans $\mathcal{Y}$), l'ensemble $f^{-1}(F)$ jouit de la propriété de Baire.*

En tenant compte du fait que le complémentaire d'un ensemble à propriété de Baire jouit également de cette propriété, on peut remplacer dans cette définition le terme *fermé* par *ouvert*.

D'autre part, la somme et le produit d'une suite infinie d'ensembles à propriété de Baire étant des ensembles ayant aussi cette propriété (§ 11, III), on en conclut que *si f est une fonction à propriété de Baire et si X est un ensemble borelien, $f^{-1}(X)$ est un ensemble à propriété de Baire.*

Tout ensemble borelien jouissant de la propriété de Baire, on déduit directement de la définition que *toute fonction mesurable B jouit de la propriété de Baire.* C'est une des propriétés les plus importantes, communes à toutes les fonctions mesurables B, donc à toutes les fonctions représentables analytiquement (voir aussi N° II).

Remarque. L'ensemble $f^{-1}(X)$ *où X jouit de la propriété de Baire* peut être dépourvu de la propriété de Baire, même lorsque la fonction f est continue et X est non-dense. Tel est l'exemple suivant: $\mathcal{X}=\mathcal{C}$, $\mathcal{Y}=\mathcal{J}$, $f(x)=x$ et X est un ensemble situé dans $\mathcal{X}$ et dépourvu de la propriété de Baire par rapport à $\mathcal{X}$.

II. Equivalences [1]). *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f jouisse de la propriété de Baire est l'existence d'un ensemble P de I-e catégorie (dans $\mathcal{X}$) tel que la fonction partielle $f|(\mathcal{X}-P)$ soit continue* (on dit alors que la fonction f est continue *en négligeant les ensembles de I-e catégorie*). L'espace $\mathcal{Y}$ est supposé séparable.

La condition est nécessaire. Il s'agit de définir un ensemble P de I-e catégorie tel que la fonction $g=f|(\mathcal{X}-P)$ soit continue, c. à d. que, H étant un ensemble ouvert arbitraire (dans $\mathcal{Y}$), l'ensemble $g^{-1}(H)$ soit ouvert relativement à $\mathcal{X}-P$.

[1]) Voir ma note *La propriété de Baire dans les espaces métriques*, Fund. Math. **16** (1930), p. 391. Cf. O. Nikodym, *Sur la condition de Baire*, Bull. Acad. Pol. 1929, p. 595.

Soit $S_1, S_2, \dots$ la base de l'espace $\mathcal{Y}$. On a donc $H=S_{k_1}+S_{k_2}+\dots$ Par hypothèse, $f^{-1}(S_n)$ est un ensemble à propriété de Baire; il vient, d'après la définition de cette propriété (§ 11, I):

$$f^{-1}(S_n)=G_n-P_n+R_n$$

où G_n est ouvert et P_n et R_n sont de I-e catégorie. Posons

$$P=(P_1+R_1)+(P_2+R_2)+\dots$$

La formule $g^{-1}(H)=f^{-1}(H)-P$ (§ 3, II, 14) donne

$$g^{-1}(H)=\sum_n [f^{-1}(S_{k_n})]-P=\sum_n [(G_{k_n}-P_{k_n}+R_{k_n})-P]$$

et comme $P_{k_n}+R_{k_n}\subset P$, on a

$$(G_{k_n}-P_{k_n}+R_{k_n})-P=G_{k_n}-P.$$

Donc $g^{-1}(H)=(\sum\limits_n G_{k_n})-P$ et, $\sum\limits_n G_{k_n}$ étant ouvert, $g^{-1}(H)$ est ouvert dans $\mathcal{X}-P$.

La condition est suffisante. Soit P un ensemble de I-e catégorie tel que la fonction $g=f|(\mathcal{X}-P)$ soit continue. H étant un ensemble ouvert arbitraire, la continuité de g signifie (§ 13, IV (3)) que l'ensemble $g^{-1}(H)=f^{-1}(H)-P$ est ouvert dans $\mathcal{X}-P$, c. à d. qu'il est de la forme $G-P$ où G est ouvert (dans $\mathcal{X}$). Il vient

$$(1) \qquad f^{-1}(H)=f^{-1}(H)-P+f^{-1}(H)\cdot P=G-P+f^{-1}(H)\cdot P.$$

Or, l'ensemble P et par conséquent $f^{-1}(H)\cdot P$, étant de I-e catégorie, la décomposition (1) montre que l'ensemble $f^{-1}(H)$ jouit de la propriété de Baire, c. q. f. d.

En rapprochant ce théorème des conclusions du N° I, on voit que *toute fonction mesurable B* et, à plus forte raison, *toute fonction représentable analytiquement est continue lorsqu'on néglige les ensembles de I-e catégorie* [1]).

Il en résulte aussi que, étant donné un ensemble arbitraire, *la propriété de Baire de cet ensemble et de sa fonction caractéristique sont équivalentes* [2]).

[1]) Cet énoncé provient de R. Baire, C. R. Paris **129** (1899), p. 1010. Cf. ma note *Sur les fonctions représentables analytiquement et les ensembles de première catégorie*, Fund. Math. **5** (1924), p. 82.

[2]) Cet énoncé est dû à M. Lusin.

III. Opérations sur les fonctions jouissant de la propriété de Baire.

1. *Superposition des fonctions. Si la fonction $y=f(x)$ jouit de la propriété de Baire et la fonction $z=g(y)$ est mesurable B, la fonction $h(x)=gf(x)$ jouit de la propriété de Baire.*

Car $h^{-1}(F)=f^{-1}[g^{-1}(F)]$ et $g^{-1}(F)$ étant mesurable B, l'ensemble $f^{-1}[g^{-1}(F)]$ possède la propriété de Baire.

Remarque. Dans le cas *inverse*, où f est mesurable B, tandis que g possède la propriété de Baire, la fonction gf peut être dépourvue de cette propriété. Considérons en effet l'exemple du N⁰ I et désignons par g la fonction caractéristique de X (regardé comme un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{Y}$).

2. *La limite d'une suite convergente de fonctions à propriété de Baire jouit encore de cette propriété.*

C'est une conséquence directe de la formule (cf. § 27, VIII, 1):

$$f^{-1}(F)=\prod_n \sum_k [f_{n+k}^{-1}(S_n)],$$

où S_n désigne la sphère de rayon $^1/_n$ ayant pour centre l'ensemble fermé F. En effet, $f_{n+k}^{-1}(S_n)$ ayant la propriété de Baire, il en est de même de tout ensemble qui s'en obtient par des additions et des multiplications dénombrables.

Remarque. $\mathcal{Y}$ étant séparable, on peut démontrer comme suit que la limite d'une suite de fonctions „continues en négligeant les ensembles de I-e catégorie" est une fonction du même genre. Soit P_n un ensemble de I-e catégorie tel que la fonction partielle $f_n|(\mathcal{X}-P_n)$ est continue. Posons $P=P_1+P_2+\ldots$ Donc $f_n|(\mathcal{X}-P)$ est continue, quel que soit n; f étant la limite de f_n, on en conclut que $f|(\mathcal{X}-P)$ est de I-e classe (sur $\mathcal{X}-P$). Or, les points de discontinuité d'une fonction de I-e classe formant un ensemble de I-e catégorie (§ 27, X, corollaire), l'ensemble R des points de discontinuité de la fonction $f|(\mathcal{X}-P)$ est de I-e catégorie dans $\mathcal{X}-P$, donc dans l'espace $\mathcal{X}$ tout entier. Ainsi, la fonction $f|(\mathcal{X}-P-R)$ est continue et l'ensemble $P+R$ est de I-e catégorie.

3. *Fonctions de plusieurs variables. Si la fonction $f(x)$ jouit de la propriété de Baire et si l'on pose $g(x,y)=f(x)$, la fonction $g(x,y)$ jouit de la propriété de Baire relativement au produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.*

Car $g^{-1}(G)=f^{-1}(G)\times\mathcal{Y}$ et la propriété de Baire est invariante par rapport à la multiplication par un axe (§ 24, VIII).

En tenant compte de cette invariance, on déduit de la formule (ii) du § 27, V, dans le cas où $\mathcal{X}$ est séparable, que:

Si la fonction $f(x,y)$ est continue relativement à la variable x et jouit de la propriété de Baire relativement à la variable y, elle jouit de cette propriété relativement à la variable (x,y).

Sans l'hypothèse de la séparabilité, on parvient à la même conclusion en s'appuyant — comme dans le § 27, V — sur l'invariance de la propriété de Baire par rapport à l'opération $\mathcal{M}$ (définie au § 26, X).

Pour établir cette invariance, nous allons démontrer d'abord celle de la notion d'ensemble de première catégorie.

En notation du § 26, X, admettons que les ensembles X_ξ sont de première catégorie et considérons les ensembles X_ξ^n définis par la formule § 26, X (8). X_ξ^n étant ouvert dans la somme $S_n=\sum_\xi X_\xi^n$ (ib. (11)), S_n est de première catégorie (d'après § 10, III). Il en est donc de même de $S=S_1+S_2+\ldots$, ce qui signifie l'invariance de la notion de première catégorie par rapport à l'opération $\mathcal{M}$.

Cette invariance, rapprochée de l'invariance de la propriété d'être un G_δ (§ 26, X, 3) et de l'additivité de l'opération $\mathcal{M}$ (§ 26, X, 2), implique aussitôt l'invariance de la propriété de Baire (puisque cette propriété signifie que l'ensemble considéré est somme d'un G_δ et d'un ensemble de I-e catégorie).

4. Le cas des *fonctions complexes* peut être traité d'une façon tout à fait analogue à celle du § 27, VI. On parvient à la conclusion que

$f(t)$ étant une fonction dont les valeurs appartiennent à un produit (fini ou infini) $\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\times\ldots$ d'espaces séparables, la condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction jouisse de la propriété de Baire est que chacune des coordonnées du point $f(t)$ en jouisse.

5. *Fonctions composées.* En combinant les énoncés 1, 3 et 4, on en conclut que

Si chacune des fonctions $y_i=f_i(x_i)$ jouit de la propriété de Baire et la fonction $z=g(y_1,y_2,\ldots)$ est mesurable B, la fonction composée $z=g[f_1(x_1),f_2(x_2),\ldots]$ en jouit également. Les espaces $\mathcal{Y}_i$ sont supposés séparables.

6. *Image de l'équation $y=f(x)$.* En suivant l'idée du raisonnement du § 27, VII, on montre que:

L'ensemble $I=\underset{xy}{E}[|y-f(x)|=0]$ jouit de la propriété de Baire.

Remarques. 1) Le théorème inverse n'est pas vrai: l'image de l'équation $y=f(x)$ peut jouir de la propriété de Baire, sans que la fonction f en jouisse. Nous reviendrons sur cette question au § 36, IV.

2) D'après § 24, XI, 1a, *si $\mathcal{Y}$ est séparable et dense en soi, l'ensemble I est de I-e catégorie.*

IV. Fonctions à propriété de Baire au sens restreint. On appelle ainsi toute fonction f, lorsque, quel que soit l'ensemble fermé F, *l'ensemble $f^{-1}(F)$ jouit de la propriété de Baire au sens restreint.*

Cela revient à dire que, *quel que soit l'ensemble E, la fonction partielle $f|E$ jouit de la propriété de Baire relativement à E*, ou encore (en raison du théor. du N° II) *que cette fonction partielle est continue lorsqu'on néglige les ensembles de I-e catégorie relativement à E.* L'espace $\mathcal{Y}$ est supposé séparable.

En effet, la condition considérée est nécessaire, car en posant $g=f|E$, il vient (§ 3, II, 14): $g^{-1}(F)=E\cdot f^{-1}(F)$ et, comme par hypothèse l'ensemble $f^{-1}(F)$ jouit de la propriété de Baire au sens restreint, l'ensemble $g^{-1}(F)$ jouit de la propriété de Baire relativement à E; cela veut dire que la fonction g jouit de la propriété de Baire (relativement à E). Inversement, si l'on suppose que, quel que soit E, l'ensemble $g^{-1}(F)$ jouit de la propriété de Baire relativement à E, l'ensemble $f^{-1}(F)$ possède la propriété de Baire au sens restreint; donc, l'ensemble fermé F étant arbitraire, f la possède également.

Le domaine de variabilité de l'ensemble E peut être réduit, bien entendu, aux ensembles *parfaits* ou aux ensembles *fermés* (cf. § 11, VI).

Tout ensemble borelien jouissant de la propriété de Baire au sens restreint (§ 11, VI), *toute fonction mesurable B en jouit également.* Cependant il existe des fonctions à propriété de Baire au sens restreint qui ne sont pas mesurables B (voir § 35, II).

Les énoncés 1, 2 et 4 du N° III se laissent démontrer d'une façon tout à fait analogue pour la propriété de Baire au sens restreint.

Ajoutons que la propriété de Baire au sens restreint d'un ensemble et celle de sa *fonction caractéristique* sont équivalentes.

Remarque. L'hypothèse du continu implique que les énoncés 3, 5 et 6, appliqués à la propriété de Baire au sens restreint, *sont en défaut* (voir § 36, VIII).

V. Rapports à la mesure lebesguienne[1]. *f étant une fonction à valeurs réelles, définie sur un espace séparable $\mathcal{X}$ et jouissant de la propriété de Baire, il existe un ensemble Z tel que $\mathcal{X}-Z$ est de I-e catégorie et que $f(Z)$ est de mesure nulle:* $mf(Z)=0$.

Considérons d'abord le cas où f est une fonction continue.

Soit $R=r_1,r_2,\ldots$ un ensemble dénombrable dense dans $\mathcal{X}$. f étant continue, il existe, pour chaque k et n, une sphère $S_{k,n}$ telle que

$$r_k\in S_{k,n}\quad\text{et}\quad \delta[f(S_{k,n})]<\frac{1}{2^k n},\quad\text{d'où}\quad m_e f(S_{k,n})<\frac{1}{2^k n},$$

m_e désignant la mesure extérieure.

Posons

$$Z=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,n}.$$

On a donc pour tout n:

$$Z\subset\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,n},\quad\text{d'où}\quad f(Z)\subset\sum_{k=1}^{\infty}f(S_{k,n})$$

et par suite

$$m_e f(Z)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m_e f(S_{k,n})\leqslant\frac{1}{n},\quad\text{d'où}\quad mf(Z)=0.$$

D'autre part,

$$\mathcal{X}-Z=\sum_{n=1}^{\infty}\{\mathcal{X}-\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,n}\}\quad\text{et}\quad R\subset\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,n},$$

ce qui prouve que, pour n fixe, $\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,n}$ est un ensemble dense et ouvert. $\mathcal{X}-\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,n}$ est donc non-dense et $\mathcal{X}-Z$ est par conséquent de I-e catégorie.

Le cas où f est une fonction jouissant de la propriété de Baire se réduit au précédent. Car d'après le th. du N° II on a $\mathcal{X}=P+(\mathcal{X}-P)$, la fonction étant continue sur $\mathcal{X}-P$ et P étant de I-e catégorie. Or, comme nous venons de montrer, il existe un Z tel que $mf(Z)=0$ et que $\mathcal{X}-P-Z$ est de I-e catégorie. L'ensemble $\mathcal{X}-Z\subset(\mathcal{X}-P-Z)+P$ est donc de I-e catégorie.

[1]) Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. **11** (1928), p. 302. On trouvera une application de ce théorème dans le Chap. III, § 36.