D. Produits cartésiens. Suites d'ensembles (§§ 24—25).

Les espaces considérés dans les §§ 24—25 sont supposés métriques, mais pas nécessairement séparables. L'hypothèse de la séparabilité sera faite explicitement partout où il en est question.

§ 24. Produits cartésiens.

I. Règles de calcul. Le produit cartésien $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ des espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, que nous allons étudier de plus près dans ce §, a été défini comme l'ensemble de tous les couples (x,y) où $x\in\mathcal{X}$ et $y\in\mathcal{Y}$, la convergence de la suite $\mathfrak{z}_n=(x_n,y_n)$ vers le couple (x,y) étant équivalente à la réunion des conditions $\lim x_n=x$ et $\lim y_n=y$ (§ 14, IV)[1]. On a vu aussi (§ 15, VI) que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces métriques, la distance dans l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ peut être définie par la formule

$$\text{(i)}\qquad |\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1|=\sqrt{|x-x_1|^2+|y-y_1|^2}.$$

Nous allons établir à présent les règles de calcul suivantes:

$$\text{(1)}\qquad \overline{A\times B}=\bar{A}\times\bar{B}$$

$$\text{(2)}\qquad \mathrm{Int}\,(A\times B)=\mathrm{Int}\,(A)\times\mathrm{Int}\,(B)$$

$$\text{(3)}\qquad \mathrm{Fr}\,(A\times B)=\mathrm{Fr}\,(A)\times\bar{B}+\bar{A}\times\mathrm{Fr}\,(B)\ ^{2)}$$

$$\text{(4)}\qquad (A\times B)^{\backprime}=A^{\backprime}\times\bar{B}+\bar{A}\times B^{\backprime}$$

$$\text{(5)}\qquad \delta(A\times B)=\sqrt{[\delta(A)]^2+[\delta(B)]^2}.$$

ad (1) (*fermeture* du produit). La condition $(x,y)\in\overline{A\times B}$ équivaut à l'existence de deux suites $x_n\in A$ et $y_n\in B$ telles que $\lim x_n=x$ et $\lim y_n=y$. Cela revient à dire que $x\in\bar{A}$ et $y\in\bar{B}$.

ad (2) (*intérieur* du produit). D'après la définition de l'intérieur (§ 6, I), on a

$$\mathrm{Int}\,(A\times B)=\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-A\times B},$$

de sorte qu'en appliquant l'identité (§ 2, II, 5):

$$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-(A\times B)=(\mathcal{X}-A)\times\mathcal{Y}+\mathcal{X}\times(\mathcal{Y}-B),$$

[1]) On peut aussi considérer la notion de produit cartésien dans un espace *satisfaisant aux axiomes* I—III: on convient à ce but que, $\mathfrak{Z}$ étant un ensemble situé dans $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, on a $(x,y)\in\bar{\mathfrak{Z}}$ lorsque l'inégalité $(A\times B)\cdot\mathfrak{Z}\neq 0$ se présente pour chaque couple d'ensembles ouverts A et B contenant x et y respectivement. Plusieurs théorèmes du § 24 sont valables pour le produit cartésien ainsi conçu. Cf. *Enzyklopädie* III, 1, 10, p. 176.

[2]) Cf. K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 246.

il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}\,(A\times B)&=[\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-(\overline{\mathcal{X}-A)\times\mathcal{Y}}]\cdot[\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-\overline{\mathcal{X}\times(\mathcal{Y}-B)}]\\&=[\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-\overline{\mathcal{X}-A}\times\overline{\mathcal{Y}}]\cdot[\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-\overline{\mathcal{X}}\times\overline{\mathcal{Y}-B}]\\&=[(\mathcal{X}-\overline{\mathcal{X}-A})\times\mathcal{Y}]\cdot[\mathcal{X}\times(\mathcal{Y}-\overline{\mathcal{Y}-B})]\\&=[\mathrm{Int}\,(A)\times\mathcal{Y}]\cdot[\mathcal{X}\times\mathrm{Int}\,(B)]=\mathrm{Int}\,(A)\times\mathrm{Int}\,(B)\end{aligned}$$

en vertu de § 2, II, 6.

ad (3) (*frontière* du produit). On a d'une façon analogue: $\mathrm{Fr}\,(A\times B)=\overline{A\times B}\cdot\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-A\times B}=(\bar{A}\times\bar{B})\cdot[\overline{\mathcal{X}-A}\times\overline{\mathcal{Y}}+\overline{\mathcal{X}}\times\overline{\mathcal{Y}-B}]=$ $=\mathrm{Fr}\,(A)\times\bar{B}+\bar{A}\times\mathrm{Fr}\,(B)$.

ad (4) (*dérivé* du produit). On a les équivalences suivantes: $(a,b)\in(A\times B)^{\backprime}\equiv(a,b)\in\overline{A\times B-(a,b)}\equiv(a,b)\in\overline{(A-a)\times B+A\times(B-b)}\equiv$ $\equiv(a,b)\in[\overline{A-a}\times\bar{B}+\bar{A}\times\overline{B-b}]\equiv\{$soit $(a\in\overline{A-a}$ et $b\in\bar{B})$, soit $(a\in\bar{A}$ et $b\in\overline{B-b})\}\equiv\{$soit $(a,b)\in A^{\backprime}\times\bar{B}$, soit $(a,b)\in\bar{A}\times B^{\backprime}\}$.

ad (5) (*diamètre* du produit). On a en vertu de la formule (i): $[\delta(A\times B)]^2=[\max\sqrt{|x-x_1|^2+|y-y_1|^2}]^2=\max|x-x_1|^2+\max|y-y_1|^2=$ $=[\delta(A)]^2+[\delta(B)]^2$, où x et x_1 varient dans A et y et y_1 varient dans B.

II. Invariants de la multiplication cartésienne.

1. *Pour que le produit $A\times B$ (de deux ensembles non vides), soit respectivement fermé, ouvert, dense, il faut et il suffit que les deux ensembles A et B le soient également. Pour qu'un point (a,b) soit un point isolé de l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, il faut et il suffit que a soit un point isolé de $\mathcal{X}$ et b de $\mathcal{Y}$.*

Car on a d'après (1) et (2) les équivalences suivantes (cf. § 2, II, 4 a):

$$\{\overline{A\times B}=A\times B\}\equiv\{\bar{A}\times\bar{B}=A\times B\}\equiv\{\bar{A}=A\ \text{et}\ \bar{B}=B\}$$

$$\{\mathrm{Int}(A\times B)=A\times B\}\equiv\{\mathrm{Int}(A)\times\mathrm{Int}(B)=A\times B\}\equiv\{\mathrm{Int}(A)=A\ \text{et}\ \mathrm{Int}(B)=B\}$$

$$\{\overline{A\times B}=\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\}\equiv\{\bar{A}\times\bar{B}=\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\}\equiv\{\bar{A}=\mathcal{X}\ \text{et}\ \bar{B}=\mathcal{Y}\}.$$

La condition que le point (a,b) soit un point isolé de l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ signifie que l'ensemble composé de ce point est ouvert. Cela équivaut à dire (comme nous venons de montrer) que les points a et b constituent deux ensembles ouverts, c. à d. que a est isolé dans $\mathcal{X}$ et b dans $\mathcal{Y}$.

2. *Pour que le produit $A\times B$ soit respectivement un ensemble frontière, non-dense, dense en soi, il faut et il suffit qu'un de deux ensembles A ou B le soit également.*

Cela résulte des équivalences suivantes:

$$\{\mathrm{Int}(A\times B)=0\}\equiv\{\mathrm{Int}(A)\times\mathrm{Int}(B)=0\}\equiv\{\mathrm{Int}(A)=0 \text{ ou } \mathrm{Int}(B)=0\}$$
$$\{\mathrm{Int}(\overline{A\times B})=0\}\equiv\{\mathrm{Int}(\bar{A}\times\bar{B})=0\}\equiv\{\text{soit } \mathrm{Int}(\bar{A})=0, \text{ soit } \mathrm{Int}(\bar{B})=0\}.$$

Enfin, la dernière partie de 2 résulte de 1, car, pour que le produit $A\times B$ ne contienne aucun point isolé, il faut et il suffit que soit A, soit B n'en contienne aucun.

Il résulte des théorèmes précédents que les propriétés suivantes sont des *invariants* de la multiplication cartésienne: d'être *fermé*, *ouvert*, *dense*, *frontière*, *non-dense*, *dense en soi*. On conclut facilement (du § 2, II, 1a et 2a) qu'il en est de même des propriétés d'être un F_σ et d'être un G_δ. Il en est encore de même — comme nous allons voir — des notions d'ensemble *clairsemé*, *d'ensemble de I-e catégorie*, *de la propriété de Baire*.

III. Ensemble $\mathcal{Y}^x$. Désignons, pour abréger, par $\mathcal{Y}^x$ l'ensemble $(x)\times\mathcal{Y}$, c. à d. l'ensemble de tous les points du produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ à l'„abscisse" x. Dans le cas où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ désignent les axes rectangulaires du plan, $\mathcal{Y}^x$ est donc la droite d'abscisse x, parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$. De façon générale

$$\mathcal{Y}^{x_0}=\underset{xy}{E}(x=x_0).$$

L'ensemble $\mathcal{Y}^x$ est évidemment homéomorphe à $\mathcal{Y}$, la projection (voir § 2, III) de $\mathcal{Y}^x$ sur $\mathcal{Y}$ étant une homéomorphie (même plus: une isométrie). Par conséquent, *si un ensemble situé dans $\mathcal{Y}^x$ jouit d'une propriété topologique relativement à $\mathcal{Y}^x$, sa projection sur l'axe $\mathcal{Y}$ jouit de la même propriété relativement à $\mathcal{Y}$.*

Autrement dit, *$\varphi(x,y)$ étant une fonction propositionnelle de deux variables parcourant les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement, si l'ensemble $\underset{xy}{E}[\varphi(x,y)\,(x=x_0)]$ jouit d'une propriété topologique relativement à l'ensemble $\mathcal{Y}^{x_0}$, l'ensemble $\underset{y}{E}\,\varphi(x_0,y)$ jouit de la même propriété relativement à l'espace $\mathcal{Y}$.*

IV. Base de l'espace. 1. *$R_1,R_2,\ldots$ étant une base de l'espace $\mathcal{X}$ et $S_1,S_2,\ldots$ en étant une de l'espace $\mathcal{Y}$, la double suite des produits $R_m\times S_n$ ($m=1,2,\ldots,\ n=1,2,\ldots$) constitue une base de l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.*

Soient, en effet, G un ensemble ouvert situé dans $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ et $(a,b)\in G$. Il existe donc un $\varepsilon>0$ tel que la sphère de centre (a,b)

et de rayon ε est contenue dans G. D'après la définition de la base, il existe un R_m tel que $a\in R_m$ et $\delta(R_m)<\varepsilon/2$; de même, il existe un S_n tel que $b\in S_n$ et $\delta(S_n)<\varepsilon/2$. Selon I (5) on a donc $\delta(R_m\times S_n)<\varepsilon$, d'où $(a,b)\in(R_m\times S_n)\subset G$, c. q. f. d.

On voit ainsi que

2. *Tout ensemble ouvert situé dans le produit de deux espaces metriques séparables est somme dénombrable d'ensembles ouverts dont chacun est produit de deux ensembles ouverts.*

Dans le cas où les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ne possèdent pas de base, on ne peut qu'affirmer (en raisonnant comme auparavant) que

3. *Un sous-ensemble ouvert du produit est somme (dénombrable ou non) de produits d'ensembles ouverts.*

V. Ensembles clairsemés[1]. 1. *Soient Z un ensemble dense en soi situé dans le produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ et A la projection de Z sur l'axe $\mathcal{X}$. Si a est un point isolé de A, l'ensemble $Z\cdot\mathcal{Y}^a$ est dense en soi.*

Soit, en effet, (a,b) un point arbitraire de $Z\cdot\mathcal{Y}^a$. L'ensemble Z étant dense en soi, on a $(a,b)=\lim(a_n,b_n)$ et $(a,b)\neq(a_n,b_n)\in Z$. Il vient $a=\lim a_n$ et, a étant un point isolé de A, on a pour n suffisamment grand $a_n=a$, d'où $(a_n,b_n)\in Z\cdot\mathcal{Y}^a$. De plus $b_n\neq b$, car autrement on aurait $(a_n,b_n)=(a,b)$. Par conséquent (a,b) est un point d'accumulation de l'ensemble $Z\cdot\mathcal{Y}^a$, c. q. f. d.

Dans les mêmes hypothèses sur A et Z, si A n'est pas dense en soi, la projection de Z sur l'axe $\mathcal{Y}$ contient un ensemble dense en soi (non vide). Car elle contient un ensemble homéomorphe à $Z\cdot\mathcal{Y}^a$ où a est un point isolé de A.

Il en résulte que:

2. *Pour que le produit de deux espaces (non vides) soit clairsemé, il faut et il suffit que ces deux espaces soient clairsemés.*

Car, si $\mathcal{X}$ ou $\mathcal{Y}$ contient un sous-ensemble dense en soi (non vide), le produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ en contient également un (N° II, 2). Inversement, si $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ contient un sous-ensemble dense en soi (non vide) Z, la projection de Z soit sur $\mathcal{X}$, soit sur $\mathcal{Y}$, contient un ensemble dense en soi (non vide).

[1]) Voir la note de M. Ulam et de moi-même *Quelques propriétés topologiques du produit combinatoire*, Fund. Math. **19** (1932), p. 248.

VI. Ensembles de I-e catégorie.

Théorème[1]. *Z étant un ensemble non-dense situé dans le produit des espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ (dont le deuxième est séparable)*[2], *il existe dans l'espace $\mathcal{X}$ un ensemble P de I-e catégorie tel que pour tout point x de $\mathcal{X}-P$ l'ensemble $Z\cdot\mathcal{Y}^x$ est non-dense dans $\mathcal{Y}^x$.*

Soit $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace séparable $\mathcal{Y}$. Soit E_n l'ensemble des x tels que $x\times R_n\subset\overline{Z\cdot\mathcal{Y}^x}$. Il vient $E_n\times R_n\subset\overline{Z\cdot\mathcal{Y}^x}$.

L'ensemble E_n est non-dense. Car on aurait, dans le cas contraire, en désignant par G un ensemble ouvert contenu dans $\overline{E}_n$:

$$0\neq G\times R_n\subset\overline{E}_n\times\overline{R}_n=\overline{E_n\times R_n}\subset\overline{Z\cdot\mathcal{Y}^x}\subset\overline{Z},$$

contrairement à l'hypothèse que Z est non-dense.

L'ensemble $P=E_1+E_2+\ldots$ est donc de I-e catégorie.

Supposons par impossible que $x\in\mathcal{X}-P$ et que $Z\cdot\mathcal{Y}^x$ ne soit pas non-dense dans $\mathcal{Y}^x$. L'ensemble $\overline{Z\cdot\mathcal{Y}^x}$ contiendrait alors un ensemble ouvert dans $\mathcal{Y}^x$, donc un ensemble $x\times R_n$ (puisque les ensembles $x\times R_n$, où $n=1,2,\ldots$, constituent une base de $\mathcal{Y}^x$). Or, l'inclusion $x\times R_n\subset\overline{Z\cdot\mathcal{Y}^x}$ implique d'après la définition de E_n que $x\in E_n\subset P$, contrairement à l'hypothèse.

Corollaire 1. *Z étant un ensemble de I-e catégorie situé dans le produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ (où $\mathcal{Y}$ est séparable), l'ensemble $Z\cdot\mathcal{Y}^x$ est de I-e catégorie dans $\mathcal{Y}^x$, abstraction faite d'un ensemble des x de I-e catégorie.*

Soit, en effet, $Z=Z_1+Z_2+\ldots$ où les ensembles Z_n sont non-denses. Soit (en vertu du théorème précédent) P_n un ensemble de I-e catégorie tel que pour $x\in\mathcal{X}-P_n$ l'ensemble $Z_n\cdot\mathcal{Y}^x$ soit non-dense dans $\mathcal{Y}^x$. Posons $P=P_1+P_2+\ldots$ Or, pour $x\in\mathcal{X}-P$, chacun des ensembles $Z_n\cdot\mathcal{Y}^x$ est non-dense dans $\mathcal{Y}^x$. Leur somme $Z\cdot\mathcal{Y}^x$ y est donc de I-e catégorie.

Corollaire 2. *Pour que le produit $Z=A\times B$ soit de I-e catégorie dans le produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ (où $\mathcal{Y}$ est séparable), il faut et il suffit qu'un des ensembles A ou B soit de I-e catégorie.*

---

[1]) Ibidem, théor. 1. En tenant compte de l'analogie avec les axes rectangulaires du plan, ce théorème peut être énoncé comme suit: un ensemble superficiellement non-dense est linéairement non-dense sur „presque toute" droite parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$.

[2]) Cette hypothèse est essentielle. Voir ibidem, p. 248, renvoi [2]).

En effet, si Z est de I-e catégorie tandis que A ne l'est pas, A contient en vertu du cor. 1 un point x tel que $Z\cdot\mathcal{Y}^x$ est de I-e catégorie dans $\mathcal{Y}^x$. Donc B est de I-e catégorie dans $\mathcal{Y}$, comme projection de $Z\cdot\mathcal{Y}^x$ sur l'axe $\mathcal{Y}$ (voir N⁰ III).

Ainsi la condition est nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, posons $A=N_1+N_2+\ldots$ où les N_n sont non-denses. Il vient

$$A\times B=(N_1\times B)+(N_2\times B)+\ldots$$

Les ensembles $N_n\times B$ étant non-denses (N⁰ II, 2), $A\times B$ est de I-e catégorie.

Le corollaire 2 peut être précisé comme suit:

Corollaire 3[1]. *L'un des espaces $\mathcal{X}$ ou $\mathcal{Y}$ étant supposé séparable, on a l'identité*

$$D(A\times B)=D(A)\times D(B). \tag{6}$$

En effet, l'hypothèse que le point (a,b) n'appartient pas à $D(A\times B)$, veut dire que l'ensemble $A\times B$ est de I-e catégorie en ce point; c. à d. qu'il existe un ensemble ouvert G contenant (a,b) et tel que l'ensemble $G\cdot(A\times B)$ est de I-e catégorie. En vertu de IV, 3 on peut supposer G de la forme $G=M\times N$ où $a\in M$, $b\in N$ et où M et N sont des ensembles ouverts. Comme

$$(M\times N)\,(A\times B)=(MA)\times(NB),$$

on parvient ainsi aux équivalences suivantes: la condition

$$(a,b)\ non\text{-}\in D(A\times B)$$

équivaut à l'existence de deux ensembles ouverts M et N contenant a et b respectivement et tels que $(MA)\times(NB)$ est de I-e catégorie; ce qui équivaut (selon le corollaire 2) à l'hypothèse que soit MA, soit NB est de I-e catégorie, donc que soit $a\ non\text{-}\in D(A)$, soit $b\ non\text{-}\in D(B)$; ou encore: que $(a,b)\ non\text{-}\in D(A)\times D(B)$.

VII. Propriété de Baire[2].

Théorème 1. Z étant un ensemble jouissant de la propriété de Baire relativement au produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ (où $\mathcal{Y}$ est séparable), l'ensemble $Z\cdot\mathcal{Y}^x$ jouit de la propriété de Baire relativement à $\mathcal{Y}^x$, abstraction faite d'un ensemble des x de I-e catégorie.

---

[1]) R. Sikorski, *On the cartesian products of metric spaces*, Fund. Math. **34** (1947), p. 289.

[2]) Op. cit. Fund. Math. **19**, p. 250.

En effet, en tant qu'ensemble à propriété de Baire, Z est de la forme $U+V$ où U est de I-e catégorie et V est un G_δ (§ 11, IV, 2). Soit, conformément au cor. 1, P un ensemble de I-e catégorie dans $\mathcal{X}$ et tel que pour $x \in \mathcal{X}-P$ l'ensemble $U\cdot\mathcal{Y}^x$ soit de I-e catégorie dans $\mathcal{Y}^x$. Or, $V\cdot\mathcal{Y}^x$ étant évidemment un G_δ relativement à $\mathcal{Y}^x$, l'identité $Z\cdot\mathcal{Y}^x = U\cdot\mathcal{Y}^x + V\cdot\mathcal{Y}^x$ prouve (§ 11, IV, 2) que $Z\cdot\mathcal{Y}^x$ jouit de la propriété de Baire relativement à $\mathcal{Y}^x$.

Théorème 2. L'un des espaces $\mathcal{X}$ ou $\mathcal{Y}$ étant supposé séparable, la condition nécessaire et suffisante pour que le produit $A\times B$ jouisse de la propriété de Baire sans être de I-e catégorie, est que chacun des ensembles A et B jouisse de la propriété de Baire et ne soit pas de I-e catégorie.

Rappelons d'abord que la propriété de Baire (d'un ensemble X situé dans l'espace 1) équivaut à la condition que l'ensemble $D(X)\cdot D(1-X)$ est non-dense (§ 11, IV, 4) et la propriété d'être de I-e catégorie équivaut à l'égalité $D(X)=0$ (§ 10, V, 7), qui — à son tour — équivaut à la condition que $D(X)$ est non-dense (§ 10, V, 11). Or, en tenant compte de l'identité (6), il vient

$$\begin{aligned}
&D(A\times B)\cdot D[\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-(A\times B)] = \\
&=[D(A)\times D(B)]\{D[(\mathcal{X}-A)\times\mathcal{Y}]+D[\mathcal{X}\times(\mathcal{Y}-B)]\} \\
&=[D(A)\times D(B)][D(\mathcal{X}-A)\times D(\mathcal{Y})]+[D(A)\times D(B)]\,[D(\mathcal{X})\times D(\mathcal{Y}-B)] \\
&=[D(A)\cdot D(\mathcal{X}-A)]\times D(B)+D(A)\times[D(B)\cdot D(\mathcal{Y}-B)].
\end{aligned}$$

En admettant que l'ensemble $A\times B$ jouit de la propriété de Baire, on en conclut que le dernier membre de cette triple égalité est non-dense. Il en est donc de même de ses deux sommandes. Il en résulte (selon II, 2) que, soit $D(A)\cdot D(\mathcal{X}-A)$, soit $D(B)$ est non-dense, ainsi que: soit $D(A)$, soit $D(B)\cdot D(\mathcal{Y}-B)$ est non-dense. En admettant de plus que $A\times B$ n'est pas de I-e catégorie, on a $D(A\times B)\neq 0$, d'où $D(A)\neq 0\neq D(B)$ (selon VI, 3) et par conséquent (§ 10, V, 11) ni $D(A)$, ni $D(B)$ n'est non-dense. Il en résulte que les ensembles

$$\text{(i)}\qquad D(A)\cdot D(\mathcal{X}-A) \quad\text{et}\quad D(B)\cdot D(\mathcal{Y}-B)$$

sont non-denses, donc que les ensembles A et B jouissent de la propriété de Baire. De plus ni A, ni B n'est de I-e catégorie puisque $D(A)\neq 0\neq D(B)$.

Notre condition est donc nécessaire. Elle est aussi suffisante, car elle implique, d'une part, que les ensembles (i) sont non-denses, donc que les ensembles

$$[D(A)\cdot D(\mathcal{X}-A)]\times D(B) \quad\text{et}\quad D(A)\times[D(B)\cdot D(\mathcal{Y}-B)]$$

(ainsi que leur somme) sont non-denses, et cela veut dire que l'ensemble $A\times B$ jouit de la propriété de Baire; d'autre part, aucun des ensembles A et B n'étant de I-e catégorie, leur produit $A\times B$ ne l'est non plus (selon VI, 2).

Remarque. L'analogie entre la propriété de Baire et la mesurabilité (dont il était déjà question au § 11, VII) concerne aussi les énoncés établis tout à l'heure. En effet, en remplaçant dans les théorèmes du N° VII et dans les corollaires 1 et 2 du N° VI la notion d'ensemble de I-e catégorie par celle d'ensemble de mesure nulle et la propriété de Baire par la mesurabilité, on parvient à des théorèmes connus de la théorie de la mesure [1]).

VIII. Multiplication par un axe. En tenant compte des résultats précédents, on vérifie facilement que, *si A est un ensemble respectivement: fermé, ouvert, dense, frontière, non-dense, dense en soi, de I-e catégorie, à propriété de Baire — l'ensemble $A\times\mathcal{Y}$ l'est également.* En d'autres termes: *étant donnée une fonction propositionnelle $\varphi(x)$, si l'ensemble $\underset{x}{E}\,\varphi(x)$ jouit de l'une des propriétés précitées, l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\varphi(x)$ en jouit également.*

Remarques. 1. Dans le cas où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ désignent les axes du plan et A est un ensemble situé sur l'axe $\mathcal{X}$, l'ensemble $A\times\mathcal{Y}$ s'obtient de A, en traçant une droite parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$ par tout point de A.

2. Comme nous allons voir au § 36, l'hypothèse du continu implique que le théorème précédent est en défaut pour *la propriété de Baire au sens restreint.* Il existe, en effet, dans l'espace $\mathcal{E}$ des nombres réels un ensemble A jouissant de cette propriété et tel que l'ensemble $A\times\mathcal{E}$ ne la possède pas.

IX. Dimension du produit [2]). *$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces métriques séparables, on a*

$$\dim(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})\leqslant\dim\mathcal{X}+\dim\mathcal{Y}. \tag{7}$$

En outre, *si* $\dim_a\mathcal{X}=0=\dim_b\mathcal{Y}$, *on a* $\dim_{(a,b)}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})=0$.

---

[1]) Cf. S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, Monogr. Mat. **2** (1932), p. 261, ou *Theory of the Integral*, Monogr. Mat. **7** (1937), p. 77 (théorème de Fubini).

[2]) K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 246.

Posons $\dim_a \mathcal{X}=m$ et $\dim_b \mathcal{Y}=n$. Il existe donc deux ensembles ouverts R et S tels que

$$a\in R,\quad \delta(R)<\varepsilon/2,\quad \dim[\mathrm{Fr}(R)]\leqslant m-1,$$
$$b\in S,\quad \delta(S)<\varepsilon/2,\quad \dim[\mathrm{Fr}(S)]\leqslant n-1.$$

D'après N° I (3) et (5), il vient:

$$\text{(i)}\qquad \mathrm{Fr}(R\times S)=\mathrm{Fr}(R)\times\bar{S}+\bar{R}\times\mathrm{Fr}(S)\quad\text{et}\quad \delta(R\times S)<\varepsilon.$$

En outre, dans le cas où $m=0=n$, on a

$$\dim[\mathrm{Fr}(R)]=-1=\dim[\mathrm{Fr}(S)],$$

d'où

$$\mathrm{Fr}(R)=0=\mathrm{Fr}(S),\quad\text{donc}\quad \mathrm{Fr}(R\times S)=0.$$

Ainsi, $R\times S$ étant un entourage du point (a,b) de diamètre arbitrairement petit et dont la frontière est vide, on a

$$\dim_{(a,b)}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})=0,$$

ce qui prouve la deuxième partie du théorème.

La première partie en étant une conséquence dans le cas où $\dim\mathcal{X}=0=\dim\mathcal{Y}$, procédons par induction. Admettons que notre théorème soit vrai pour tout couple d'ensembles X et Y tels que

$$\dim X+\dim Y<\dim\mathcal{X}+\dim\mathcal{Y}=k.$$

Comme

$$\dim[\mathrm{Fr}(R)]+\dim\bar{S}\leqslant(m-1)+n\leqslant k-1,$$

on a par hypothèse

$$\dim[\mathrm{Fr}(R)\times\bar{S}]\leqslant k-1$$

et de façon analogue,

$$\dim[\bar{R}\times\mathrm{Fr}(S)]\leqslant k-1.$$

Il en résulte (§ 22, I, cor. 1) que

$$\dim[\mathrm{Fr}(R)\times\bar{S}+\bar{R}\times\mathrm{Fr}(S)]\leqslant k-1,$$

d'où, en vertu de (i), $\dim_{(a,b)}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})\leqslant k$. Donc $\dim(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})\leqslant k$.

Remarques. 1) Dans la formule (7), *l'inégalité* ne peut pas être remplacée par *l'égalité*.

Envisageons, en effet, l'espace composé de toutes les suites $r=(r_1,r_2,\dots)$ de nombres rationnels telles que $r_1^2+r_2^2+\dots<\infty$, la distance de deux suites r et r^* étant définie par la formule:

$$|r-r^*|^2=(r_1-r_1^*)^2+(r_2-r_2^*)^2+\dots$$

(c'est bien le sous-ensemble de l'espace de Hilbert formé des points dont toutes les coordonnées sont rationnelles).

Cet espace est de dimension 1 *de même que son carré*[1]:

Plus encore, M. L. Pontrjagin[2]) a défini deux espaces *compacts* de dimension 2 dont le produit est de dimension 3.

2) Dans le cas où $\mathcal{X}$ est compact et $\dim\mathcal{Y}=1$, l'inégalité peut être remplacée par l'égalité, c. à d. qu'on a alors

$$\dim(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})=\dim\mathcal{X}+1\ ^{3)}.$$

3) La deuxième partie du théorème ne se laisse pas généraliser sur $n>0$[4]). Considérons, en effet, le produit de l'ensemble des nombres réels par un ensemble formé du nombre 0 et d'une suite d'intervalles disjoints convergeant vers 0 du côté gauche. La dimension du dernier ensemble s'annule au point 0, tandis que le produit est à l'origine des axes de dimension 2.

X. Projection. En faisant correspondre à tout point (x,y) du produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ son „abscisse" x, on définit une fonction dite *projection parallèle à l'axe* $\mathcal{Y}$ (cf. § 2, III). Cette fonction est *continue;* en effet, si la suite (x_n,y_n) converge vers (x,y), la suite x_n converge vers x.

En outre, *la projection d'un ensemble ouvert est un ensemble ouvert*. Soit, en effet, Z un ensemble ouvert dans $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. On a

$$Z=Z\cdot\sum_y\mathcal{X}^y=\sum_y[Z\cdot\mathcal{X}^y]$$

(= somme des intersections avec les „verticales"). La projection de la somme étant la somme des projections (cf. § 3, II, 1 a), la projection de Z est la somme des projections des ensembles $Z\cdot\mathcal{X}^y$. Or, $Z\cdot\mathcal{X}^y$ étant ouvert dans $\mathcal{X}^y$, sa projection est ouverte dans $\mathcal{X}$ (voir N° III). La projection de Z est donc ouverte, en tant que somme d'ensembles ouverts.

---

[1]) Voir P. Erdös, *The dimension of rational points in Hilbert space*, Ann. of Math. **41** (1940), p. 734. Cf. aussi Hurewicz-Wallman, *Dimension Theory*, pp. 13 et 34.

[2]) *Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension*, C. R. Paris, **190** (1930), p. 1105.

[3]) Voir Hurewicz-Wallman, op. cit. p. 34. Cf. aussi W. Hurewicz, *Über den sogenannten Produktsatz der Dimensionstheorie*, Math. Ann. **102** (1929), p. 306.

[4]) Dans cet ordre d'idées, quelques énoncés ont été trouvés par M. Menger, *Bemerkungen über dimensionnelle Feinstruktur und Produktsatz*, Prace Mat.-Fiz. **37** (1930), p. 78.

Ceci peut s'énoncer aussi de la façon suivante (cf. § 2, V, 3):

1. *Etant donnée une fonction propositionnelle* $\varphi(x,y)$ *telle que l'ensemble* $\underset{xy}{E}\,\varphi(x,y)$ *est ouvert, l'ensemble* $\underset{x}{E}\sum_{y}\varphi(x,y)$ *est également ouvert.*

Dans le même ordre d'idées, on a le théorème suivant:

2. *Soit* $\mathcal{Y}$ *un espace compact. Si l'ensemble* $\underset{xy}{E}\,\varphi(x,y)$ *est fermé, respectivement un* $\boldsymbol{F}_\sigma$, *il en est de même de l'ensemble* $\underset{x}{E}\sum_{y}\varphi(x,y)$. *Si* $\underset{xy}{E}\,\varphi(x,y)$ *est ouvert, respectivement un* $\boldsymbol{G}_\delta$, $\underset{x}{E}\prod_{y}\varphi(x,y)$ *l'est également.*

Considérons d'abord le cas où l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\varphi(x,y)$ est fermé. Soit $x_1,x_2,\dots$ une suite de points appartenant à $\underset{x}{E}\sum_{y}\varphi(x,y)$ et tels que $\lim x_n=x_0$. Il s'agit de prouver que x_0 appartient aussi à cet ensemble. Il existe par hypothèse une suite $y_1,y_2,\dots$ telle que $\varphi(x_n,y_n)$ pour $n=1,2,\dots$ $\mathcal{Y}$ étant compact, il existe une suite d'entiers $k_1<k_2<\dots$ telle que la suite $y_{k_1},y_{k_2},\dots$ est convergente; soit $y_0=\lim y_{k_n}$. Cette égalité, rapprochée des conditions $\varphi(x_{k_n},y_{k_n})$, $\lim x_{k_n}=x_0$ et de l'hypothèse que l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\varphi(x,y)$ est fermé, implique que $\varphi(x_0,y_0)$, d'où $x_0\in\underset{x}{E}\sum_{y}\varphi(x,y)$.

$\underset{xy}{E}\,\varphi(x,y)$ étant supposé un $\boldsymbol{F}_\sigma$, on a $\varphi(x,y)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x,y)$ où l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\varphi_n(x,y)$ est fermé. Or (cf. § 3, V, 1),

$$\underset{x}{E}\sum_{y}\varphi(x,y)=\underset{x}{E}\sum_{y}\sum_{n}\varphi_n(x,y)=\sum_{n}\underset{x}{E}\sum_{y}\varphi_n(x,y),$$

ce qui prouve que l'ensemble $\underset{x}{E}\sum_{y}\varphi(x,y)$ est un $\boldsymbol{F}_\sigma$.

La deuxième partie du th. 2 résulte de la première en vertu de la règle de de Morgan (cf. § 1, III):

$$\underset{x}{E}\prod_{y}\varphi(x,y)=\mathcal{X}-\underset{x}{E}\sum_{y}\varphi'(x,y),\qquad \underset{xy}{E}\,\varphi(x,y)=\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-\underset{xy}{E}\,\varphi'(x,y).$$

XI. Image de l'équation $y=f(x)$. Soit f une fonction qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{Y}$. Considérons l'ensemble I des points (x,y) du produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ qui satisfont à l'équation $y=f(x)$. En symbole:

$$I=\underset{xy}{E}\,[y=f(x)].$$

1. *L'espace* $\mathcal{Y}$ *étant séparable et dense en soi, l'hypothèse que l'ensemble* $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-I$ *est de I-e catégorie au point* (x,y) *implique que soit* $\mathcal{X}$ *est de I-e catégorie au point* x, *soit* $\mathcal{Y}$ *l'est au point* y [1].

En symbole (cf. (6)):

$$D(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-I)=D(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}). \tag{8}$$

Conformément à l'hypothèse (et à IV, 3), il existe deux ensembles G et H ouverts dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement, tels que $x\in G$, $y\in H$ et que $(G\times H)-I$ est de I-e catégorie. Si l'on suppose que $\mathcal{X}$ n'est pas de I-e catégorie au point x, l'ensemble G n'est non plus de I-e catégorie; il existe donc, d'après le cor. 1 du N⁰ VI, un point a dans G tel que l'ensemble $\mathcal{Y}^a\cdot(G\times H)-I=(a\times H)-I$ est de I-e catégorie dans $\mathcal{Y}^a$. Or, cet ensemble ne diffère de $(a\times H)$ que par un point au plus: à savoir, par le point $[a,f(a)]$; ce point étant par hypothèse un point d'accumulation de $\mathcal{Y}^a$, donc un ensemble non-dense dans $\mathcal{Y}^a$, l'ensemble $(a\times H)$ y est de I-e catégorie. Par conséquent (N⁰ III), H est de I-e catégorie dans $\mathcal{Y}$. Cela prouve que $\mathcal{Y}$ est de I-e catégorie au point y.

1 a. *L'espace* $\mathcal{Y}$ *étant séparable et dense en soi, l'hypothèse que l'ensemble* I *jouit de la propriété de Baire implique que cet ensemble est de I-e catégorie* [2].

On a, en effet, en tenant compte de (8):

$$D(I)=D(I)\cdot D(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})=D(I)\cdot D(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}-I).$$

Ce dernier ensemble est non-dense, puisque I jouit de la propriété de Baire (cf. § 11, IV, 4). Or, l'ensemble $D(I)$ ne peut être non-dense qu'à condition qu'il soit vide (selon § 10, V, 11). L'égalité $D(I)=0$ veut dire que I est un ensemble de I-e catégorie (§ 10, V, 7).

Rappelons que d'après § 14, IV, 3:

2. *Si la fonction* f *est continue, l'ensemble* I *est homéomorphe à* $\mathcal{X}$ *et fermé dans* $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

---

[1]) Cf. ma note *Sur les fonctions représentables analytiquement et les ensembles de première catégorie*, Fund. Math. **5** (1924), p. 84 et la note citée de M. Ulam et de moi-même Fund. Math. **19**, p. 250.

[2]) Sans supposer que I jouisse de la propriété de Baire, I peut ne pas être de I-e catégorie; cf. Fund. Math. **5**, p. 85.

Plus précisément:

3. *Etant donnée une fonction f définie sur un sous-ensemble A de $\mathfrak{X}$, si f est continue au point x_0 et le point (x_0, y_0) appartient à $\bar{I}$, on a $y_0 = f(x_0)$.*

De façon plus générale:

$$\delta(\bar{I} \cdot \mathcal{Y}^x) \leqslant \omega(x),$$

(où $\omega(x)$ désigne l'oscillation de la fonction f au point x; donc, si $\omega(x)=0$, il existe *au plus un* y tel que $(x,y) \in \bar{I}$).

Soient, en effet, (x,y) et (x,y^*) deux points appartenant à $\bar{I} \cdot \mathcal{Y}^x$. Il vient

$$(x,y) = \lim_{n=\infty} [x_n, f(x_n)] \quad \text{et} \quad (x,y^*) = \lim_{n=\infty} [x_n^*, f(x_n^*)].$$

Il existe par conséquent dans tout entourage E de x un x_n et un x_n^*, d'où

$$f(x_n) \in f(E) \quad \text{et} \quad f(x_n^*) \in f(E).$$

On en conclut que

$$\delta[f(E)] \geqslant |f(x_n) - f(x_n^*)| \quad \text{et} \quad \omega(x) = \min \delta[f(E)] \geqslant |y - y^*|,$$

ce qui entraîne l'inégalité à démontrer.

La deuxième partie du th. 2 admet un théorème inverse dans le cas où l'espace $\mathcal{Y}$ est compact:

4. *Si $\mathcal{Y}$ est compact et I fermé, la fonction f est continue.*

Soit, en effet, $\lim x_n = x$. Extrayons de la suite $f(x_1), f(x_2), \ldots$ une suite convergente: $\lim f(x_{k_n}) = y$. L'ensemble I étant fermé, il vient $(x,y) \in I$, d'où $y = f(x)$.

5. *Si l'espace $\mathcal{Y}$ est dense en soi et la fonction f est ponctuellement discontinue, l'ensemble I est non-dense.*

En effet, si I n'est pas non-dense, $\bar{I}$ contient un ensemble ouvert non vide $G \times H$, où G est ouvert dans $\mathfrak{X}$ et H l'est dans $\mathcal{Y}$. Si $x \in G$, l'ensemble $x \times H$, comme ouvert dans $\bar{I} \cdot \mathcal{Y}^x$, ne se réduit pas à un seul point. La fonction f est donc selon 3 discontinue en chaque point de G.

XII. Diagonale. Lorsque les ensembles X et Y sont des sous-ensembles du même espace, nous appelons *diagonale du produit* $X \times Y$ l'ensemble des points ayant l'abscisse égale à l'ordonnée: $\underset{xy}{E}(x=y)$.

On voit aussitôt que *la diagonale du produit cartésien $X \times Y$ est homéomorphe à la partie commune $X \cdot Y$ des ensembles X et Y.*

En outre, *la diagonale est un ensemble fermé dans $X \times Y$.*

Dans le cas particulier, où $\mathfrak{X} = \mathcal{Y}$, la diagonale est homéomorphe à chacun des axes. Cette homéomorphie est réalisée par la projection.

On en conclut que (comme dans le cas de l'ensemble $\mathcal{Y}^x$): *si un sous-ensemble de la diagonale jouit d'une propriété topologique relativement à la diagonale, sa projection sur l'axe $\mathfrak{X}$ jouit de la même propriété relativement à cet axe.*

Autrement dit: *étant donnée une fonction propositionnelle $\varphi(x,y)$, si l'ensemble $\underset{xy}{E}\,\varphi(x,y)\,(x=y)$ jouit d'une propriété topologique relativement à la diagonale $\underset{xy}{E}(x=y)$, l'ensemble $\underset{x}{E}\,\varphi(x,x)$ jouit de la même propriété relativement à l'espace $\mathfrak{X}$.*

§ 24 a. Produits cartésiens dénombrables.

I. Généralités. Rappelons[1]) que le produit

$$\underset{i=1}{\overset{\infty}{P}} \mathfrak{X}_i = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \ldots \times \mathfrak{X}_i \times \ldots$$

est par définition l'ensemble des suites $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots, \mathfrak{z}^i, \ldots]$ où $\mathfrak{z}^i \in \mathfrak{X}_i$.

Le diamètre de tout espace $\mathfrak{X}_i$ étant supposé inférieur à 1 (ce qui ne restreint point la généralité, puisque tout espace est homéomorphe à un espace borné, cf. § 15, V), la distance dans le produit est définie par la formule

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |\mathfrak{z}^i - \mathfrak{y}^i|.$$

On en conclut que la suite $\{\mathfrak{z}_n\}$, où $\mathfrak{z}_n = [\mathfrak{z}_n^1, \mathfrak{z}_n^2, \ldots, \mathfrak{z}_n^i, \ldots]$, converge vers $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots, \mathfrak{z}^i, \ldots]$, lorsqu'il y a convergence „par colonnes", c. à d. que la i-ème coordonnée du point variable tend vers la i-ème coordonnée du point limite. En symbole:

$$\{\mathfrak{z} = \lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n\} \equiv \prod_i \{\mathfrak{z}^i = \lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n^i\}.$$

[1]) Voir § 2, § 14, IV et § 15, VI.

Il en résulte aussitôt que (voir d'ailleurs § 14, IV, 2), pour tout i fixe, *le terme* $\mathfrak{z}^i$, *considéré comme fonction de* $\mathfrak{z}$, *en est une fonction continue.*

Une autre conséquence immédiate est *l'homéomorphie des produits* (loi „associative"):

$$\mathop{P}_{i=1}^{\infty}\mathfrak{X}_i \underset{\text{top}}{=} (\mathfrak{X}_1\times\ldots\times\mathfrak{X}_n)\times \mathop{P}_{i=n+1}^{\infty}\mathfrak{X}_i.$$

II. Règles de calcul.

(i) $\overline{\mathop{P}_{i=1}^{\infty}A_i}=\mathop{P}_{i=1}^{\infty}(\bar{A}_i)$ (ii) $\delta(\mathop{P}_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta(A_i)}{2^i}$

(iii) $\mathfrak{z}$ *est un point intérieur du produit* $\mathop{P}_{i=1}^{\infty}A_i$ *lorsque, pour chaque* i, $\mathfrak{z}^i$ *est un point intérieur de* A_i *et lorsqu'on a, en outre,* $A_k=\mathfrak{X}_k$ *pour* k *suffisamment grand.*

ad (i). On a les équivalences suivantes $\{\mathfrak{z}\in \mathop{P}_i(\bar{A}_i)\}\equiv\{\prod_i \mathfrak{z}^i\in\bar{A}_i\}\equiv$ {il existe une suite $\mathfrak{z}_n$ telle que $\prod_i[\mathfrak{z}^i=\lim_{n=\infty}\mathfrak{z}_n^i]$ et $\prod_{ni}[\mathfrak{z}_n^i\in A_i]$, c. à d. telle que $\mathfrak{z}=\lim_{n=\infty}\mathfrak{z}_n$ et $\prod_n[\mathfrak{z}_n\in \mathop{P}_i A_i]\}\equiv\{\mathfrak{z}\in\overline{\mathop{P}_i(A_i)}\}$.

ad (ii). On a, pour $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{y}$ extraits de $\mathop{P}_i(A_i)$:

$$|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\delta(A_i),$$

d'où

$$\delta(\mathop{P}_{i=1}^{\infty}A_i)=\sup|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\delta(A_i).$$

D'autre part, il existe pour tout $\varepsilon>0$ deux suites $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{y}$ telles que $|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|>\delta(A_i)-\varepsilon$, d'où

$$\delta(\mathop{P}_{i=1}^{\infty}A_i)\geqslant|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}[\delta(A_i)-\varepsilon]=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\delta(A_i)-\varepsilon.$$

ad (iii). Si $\mathfrak{z}\in\mathrm{Int}(\mathop{P}_i A_i)$, il existe un $\varepsilon>0$ tel que, pour $|\mathfrak{y}-\mathfrak{z}|<\varepsilon$, on a $\mathfrak{y}\in\mathop{P}_i A_i$. Cette inégalité est satisfaite s'il existe un n tel que

$$|\mathfrak{y}^i-\mathfrak{z}^i|<\varepsilon/2 \text{ pour } i\leqslant n \text{ et } 2^{-n}<\varepsilon/2$$

(pour $i>n$ on ne fait aucune hypothèse sur $\mathfrak{y}^i$).

Cela veut dire que toute sphère de centre $\mathfrak{z}^i$ et de rayon $<\varepsilon/2$ est contenue dans A_i si $i=1,\ldots,n$, et que $A_k=\mathfrak{X}_k$ si $k>n$.

Inversement, si l'on suppose que l'on a

$$A_k=\mathfrak{X}_k \text{ pour } k>n \quad\text{et}\quad \mathfrak{z}^i\in\mathrm{Int}(A_i) \text{ pour } i\leqslant n,$$

il existe un $\varepsilon>0$ tel que la condition $|\mathfrak{y}^i-\mathfrak{z}^i|<\varepsilon$ entraîne $\mathfrak{y}^i\in A_i$ pour $i\leqslant n$. Toute sphère de centre $\mathfrak{z}$ et de rayon $<\varepsilon/2^n$ est contenue alors dans $\mathop{P}_i A_i$, d'où $\mathfrak{z}\in\mathrm{Int}(\mathop{P}_i A_i)$.

III. Invariants. 1[1]. *Pour qu'un produit* $\mathop{P}_i A_i$ *d'ensembles non vides soit respectivement fermé ou dense, il faut et il suffit que tous les facteurs* A_i *le soient également. Pour que ce produit soit ouvert, il faut et il suffit que tous les facteurs le soient et que l'on ait* $A_i=\mathfrak{X}_i$ *pour* i *suffisamment grand.*

On a, en effet, d'après (i) et § 2, II, 4 b:

$$\{\overline{\mathop{P}_i A_i}=\mathop{P}_i A_i\}\equiv\{\mathop{P}_i\bar{A}_i=\mathop{P}_i A_i\}\equiv\prod_i\{\bar{A}_i=A_i\},$$

$$\{\overline{\mathop{P}_i A_i}=\mathop{P}_i \mathfrak{X}_i\}\equiv\{\mathop{P}_i\bar{A}_i=\mathop{P}_i \mathfrak{X}_i\}\equiv\prod_i\{\bar{A}_i=\mathfrak{X}_i\}$$

et la deuxième partie de l'énoncé 1 résulte de (iii).

2. *Le produit* $\mathop{P}_i\mathfrak{X}_i$ *est toujours dense en soi et d'une puissance* $\geqslant\mathfrak{c}$ (sauf le cas où, pour i suffisamment grand, $\mathfrak{X}_i$ se réduit à un seul point).

Car tout point $\mathfrak{z}$ est limite de la suite $\{\mathfrak{z}_n\}$ où les coordonnées de $\mathfrak{z}_n$ ne diffèrent de celles de $\mathfrak{z}$ que par la n-ième (si $\mathfrak{X}_n$ se réduit au point $\mathfrak{z}^n$, on posera $\mathfrak{z}_n^n=\mathfrak{z}^n$).

3. *Pour que le produit* $\mathop{P}_i A_i$ *soit un ensemble frontière, il faut et il suffit que: ou bien un des facteurs soit un ensemble frontière, ou bien qu'on ait* $A_i\neq\mathfrak{X}_i$ *pour une infinité de valeurs de* i.

C'est une conséquence directe de (iii).

La condition que $\mathop{P}_i A_i$ soit *non-dense* équivaut à celle que l'ensemble $\overline{\mathop{P}_i A_i}=\mathop{P}_i\bar{A}_i$ soit un ensemble frontière, donc que, ou bien un des ensembles A_i soit non-dense, ou bien qu'une infinité des A_i ne soient pas denses dans $\mathfrak{X}_i$.

[1] Cf. la Thèse citée de M. Kunugui (ch. II, „composition" des espaces).

Si un des ensembles A_i est de *I-e catégorie*, le produit $\underset{i}{P} A_i$ l'est également. Si tous les ensembles A_i jouissent de la *propriété de Baire*, leur produit en jouit également.

Car, en supposant que $A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} N_n$, où N_n est non-dense, on a

$$\underset{i}{P} A_i = \sum_{n=1}^{\infty} (N_n \times A_2 \times A_3 \times \ldots),$$

où chaque sommande est non-dense.

Pour prouver la deuxième proposition, on pose (cf. § 2, II, 6a):

$$\underset{i}{P} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{X}_1 \times \ldots \times \mathfrak{X}_{i-1} \times A_i \times \mathfrak{X}_{i+1} \times \ldots)$$

et on tient compte de l'invariance de la propriété de Baire par rapport à l'opération $\prod_{i=1}^{\infty}$ et à la multiplication cartésienne par un axe (voir § 11, III, 3, § 24, VII et la remarque finale du N° I).

Remarque. Le produit dénombrable peut être non-dense (donc de I-e catégorie et à propriété de Baire) sans qu'aucun des facteurs jouisse de la propriété de Baire (ce qui serait impossible pour le produit fini; voir § 24, VI et VII): par exemple, $\mathfrak{X}_i =$ l'intervalle 01 et $A_i =$ un ensemble dépourvu de la propriété de Baire, situé dans l'intervalle $0, {}^1/_2$.

IV. Base de l'espace. En établissant la proposition II (iii), nous avons montré que tout point intérieur $\mathfrak{z}$ d'un ensemble $\mathfrak{Z}$ situé dans $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \ldots$ appartient à un sous-ensemble ouvert de $\mathfrak{Z}$ de la forme $G_1 \times \ldots \times G_n \times \mathfrak{X}_{n+1} \times \mathfrak{X}_{n+2} \times \ldots$ où G_i est ouvert (à savoir, si la sphère de centre $\mathfrak{z}$ et de rayon ε est contenue dans $\mathfrak{Z}$ et si l'on assujettit n à la condition $2^{-n} < \varepsilon/2$, on peut prendre pour G_i une sphère ouverte de centre $\mathfrak{z}^i$ et de rayon $\varepsilon/2$).

Donc, si $\mathfrak{X}_i$ a pour base la suite $R_1^i, R_2^i \ldots$, les ensembles de la forme

$$R_{k_1}^1 \times R_{k_2}^2 \times \ldots \times R_{k_n}^n \times \mathfrak{X}_{n+1} \times \mathfrak{X}_{n+2} \times \ldots$$

(avec n variable) constituent une base dénombrable de l'espace $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \ldots$

Une autre conséquence en est que la projection d'un ensemble ouvert sur un axe est un ensemble ouvert qui, sauf pour un nombre fini d'axes, est identique à cet axe.

V. Espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$. *On a les homéomorphies suivantes:*

$$\mathfrak{X}^{\aleph_0} \underset{\text{top}}{=} \mathfrak{X}^n \times \mathfrak{X}^{\aleph_0} \underset{\text{top}}{=} \mathfrak{X}^{\aleph_0} \times \mathfrak{X}^{\aleph_0} \underset{\text{top}}{=} (\mathfrak{X}^{\aleph_0})^{\aleph_0}.$$

L'homéomorphie de $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$ et de $\mathfrak{X}^n \times \mathfrak{X}^{\aleph_0}$ étant évidente (voir N° I), considérons d'abord le cas où le point $\mathfrak{w} = (\mathfrak{z}, \mathfrak{y})$ varie dans l'espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0} \times \mathfrak{X}^{\aleph_0}$. On a les équivalences suivantes: $\{\lim_{n=\infty} \mathfrak{w}_n = \mathfrak{w}\} \equiv$ $\equiv \{\lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}$ et $\lim_{n=\infty} \mathfrak{y}_n = \mathfrak{y}\} \equiv \{\prod_i (\lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n^i = \mathfrak{z}^i)$ et $\prod_i (\lim_{n=\infty} \mathfrak{y}_n^i = \mathfrak{y}^i)\}$.

Faisons correspondre à l'élément $\mathfrak{w}$ de l'espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0} \times \mathfrak{X}^{\aleph_0}$ l'élément $f(\mathfrak{w}) = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{y}^1, \mathfrak{z}^2, \mathfrak{y}^2, \ldots, \mathfrak{z}^i, \mathfrak{y}^i, \ldots]$ de l'espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$.

Tout point de l'espace $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$ est évidemment une des valeurs de cette fonction. En outre, d'après les équivalences qui précèdent, l'égalité $\lim_{n=\infty} \mathfrak{w}_n = \mathfrak{w}$ équivaut à $\lim_{n=\infty} f(\mathfrak{w}_n) = f(\mathfrak{w})$, ce qui veut dire que les espaces $\mathfrak{X}^{\aleph_0} \times \mathfrak{X}^{\aleph_0}$ et $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$ sont homéomorphes.

Nous allons établir à présent l'homéomorphie des espaces $(\mathfrak{X}^{\aleph_0})^{\aleph_0}$ et $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$. Soit π un point variable de l'espace $(\mathfrak{X}^{\aleph_0})^{\aleph_0}$. Donc $\pi = [\pi^1, \pi^2, \ldots, \pi^i, \ldots]$ où $\pi^i \in \mathfrak{X}^{\aleph_0}$. Par conséquent $\pi^i = [\pi^{i,1}, \pi^{i,2}, \ldots, \pi^{i,j}, \ldots]$ où $\pi^{i,j} \in \mathfrak{X}$.

Rangeons la suite double $\{i, j\}$ en une suite simple, suivant la grandeur de $i + j$, par exemple:

$$(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (1,3), \ldots$$

La fonction

$$f(\pi) = [\pi^{1,1}, \pi^{1,2}, \pi^{2,1}, \pi^{1,3}, \ldots]$$

établit l'homéomorphie demandée, car

$$\{\lim_{n=\infty} \pi_n = \pi\} \equiv \prod_i \{\lim_{n=\infty} \pi_n^i = \pi^i\} \equiv \prod_{ij} \{\lim_{n=\infty} \pi_n^{i,j} = \pi^{i,j}\} \equiv \{\lim_{n=\infty} f(\pi_n) = f(\pi)\}.$$

Remarques. Nous avons vu (au § 14, V) que chacun des trois espaces: l'ensemble parfait non-dense $\mathcal{C}$ de Cantor, l'ensemble $\mathfrak{N}$ des nombres irrationnels et le cube fondamental $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ de Hilbert, sont de la forme $\mathfrak{X}^{\aleph_0}$. On n'altère donc pas leur type topologique, en les élevant à la puissance n ou $\aleph_0$.

Tout espace 0-dimensionnel (séparable) étant contenu topologiquement dans l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor (§ 21, IV) et l'ensemble $\mathcal{C}^{\aleph_0}$ étant de dimension 0, *le produit dénombrable d'ensembles* 0-*dimensionnels est* 0-*dimensionnel.*

VI. Fonctions continues. Nous avons déjà vu (§ 14, IV) que pour qu'un point d'un produit dénombrable varie d'une façon continue, il faut et il suffit que ses coordonnées varient de même. On en conclut que:

1. *Etant donnée une suite (finie ou infinie) de fonctions continues f_i qui transforment $\mathcal{X}_i$ en $\mathcal{Y}_i$, le produit $\underset{i}{P}\mathcal{X}_i$ se trouve transformé d'une façon continue en $\underset{i}{P}\mathcal{Y}_i$ si on fait correspondre au point $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}^1,\mathfrak{z}^2,...]$ de $\underset{i}{P}\mathcal{X}_i$ le point $f(\mathfrak{z})=[f_1(\mathfrak{z}^1),f_2(\mathfrak{z}^2),...]$ de $\underset{i}{P}\mathcal{Y}_i$.*

Car la condition $\lim\limits_{n=\infty}\mathfrak{z}_n=\mathfrak{z}$ entraîne $\lim\limits_{n=\infty}\mathfrak{z}_n^i=\mathfrak{z}^i$ pour tout i; d'où $\lim\limits_{n=\infty}f_i(\mathfrak{z}_n^i)=f_i(\mathfrak{z}^i)$, de sorte que la i-ème coordonnée du point $f(\mathfrak{z}_n)$ tend vers la i-ème coordonnée du point $f(\mathfrak{z})$.

Il en résulte en particulier que:

2. *Si l'espace $\mathcal{Y}$ est une image continue de l'espace $\mathcal{X}$, l'espace $\mathcal{Y}^n$ est une image continue de $\mathcal{X}^n$ et $\mathcal{Y}^{\aleph_0}$ l'est de $\mathcal{X}^{\aleph_0}$.*

VI a. Applications. Rapproché du N° V, l'énoncé VI, 2 conduit au théorème fondamental suivant:

Théorème[1]. *Le cube n-dimensionnel $\mathcal{J}^n$, ainsi que le cube $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ de Hilbert, sont des images continues de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor.*

Soit d'abord $n=1$. On a, x étant un point de l'ensemble $\mathcal{C}$,

$$x=\frac{c_1}{3^1}+\frac{c_2}{3^2}+...+\frac{c_m}{3^m}+... \qquad (c_m=0 \text{ ou } 2).$$

En posant

$$f(x)=\frac{c_1}{2^2}+\frac{c_2}{2^3}+...+\frac{c_m}{2^{m+1}}+...,$$

on vérifie facilement que la fonction f est continue et que $f(\mathcal{C})=\mathcal{J}$.

Ceci étant, on conclut du th. VI, 2 que les ensembles $\mathcal{J}^n$ et $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ sont des images continues respectivement des ensembles $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^{\aleph_0}$, homéomorphes à $\mathcal{C}$ (d'après la remarque du N° V).

[1]) Cf. G. Cantor, Acta Math. **7** (1885) et H. Lebesgue, Journ. de Math. (6) **1** (1905), p. 210.

Corollaire 1. Tout espace assujetti aux axiomes I—V (donc tout espace métrique séparable) est une image biunivoque et continue d'un espace 0-dimensionnel, donc d'un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor (ainsi que d'un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels).

Car d'après le théorème d'Urysohn (§ 17, IV), tout espace de ce genre est homéomorphe à un sous-ensemble de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$.

Corollaire 2[1]) *(théorème de Peano généralisé). Les cubes $\mathcal{J}^n$ et $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ sont des images continues de l'intervalle $\mathcal{J}$.*

Soit, en effet, $\mathfrak{z}=f(x)$ une fonction continue qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{J}^n$ ou en $\mathcal{J}^{\aleph_0}$. La i-ème coordonnée de $\mathfrak{z}$ est donc une fonction continue de x: $\mathfrak{z}^i=f_i(x)$, dont les arguments appartiennent à $\mathcal{C}$ et les valeurs à $\mathcal{J}$. En la définissant linéairement dans les intervalles contigus à $\mathcal{C}$, la fonction $\mathfrak{z}=f(x)=[f_1(x),f_2(x),...]$ se trouve définie pour tout $x\in\mathcal{J}$. Sa continuité résulte de celle des f_i.

Remarques. Le corollaire 1 admet les généralisations suivantes:

1 a [2]). *Φ étant une famille de puissance $\mathfrak{c}$ d'ensembles, il existe un ensemble $Z\subset\mathcal{N}$ dont tout ensemble $E\in\Phi$ est une image continue.*

Assignons d'abord à tout $E\in\Phi$ un nombre irrationnel $\mathfrak{z}$ comme l'indice. Soit $N_\mathfrak{z}$ l'ensemble des nombres irrationnels $\mathfrak{y}$ tels que

$$\mathfrak{y}^{(1)}=\mathfrak{z}^{(1)}, \quad \mathfrak{y}^{(3)}=\mathfrak{z}^{(2)}, \quad \mathfrak{y}^{(5)}=\mathfrak{z}^{(3)}, \quad ...,$$

Comme homéomorphe à $\mathcal{N}$, l'ensemble $N_\mathfrak{z}$ contient, d'après le cor. 1, un ensemble $A_\mathfrak{z}$ dont $E_\mathfrak{z}$ est une image continue. Posons

$$Z=\sum_{\mathfrak{z}\in\mathcal{N}}A_\mathfrak{z}.$$

Les ensembles $N_\mathfrak{z}$ étant disjoints et fermés dans $\mathcal{N}$, $A_\mathfrak{z}$ est fermé dans Z et en est par conséquent (cf. § 21, II, cor. 2) une image continue. $E_\mathfrak{z}$ est donc une image continue de Z.

1 b [3]). *Tout espace métrique séparable $\mathcal{X}$ de puissance $\mathfrak{c}$ est image biunivoque et continue d'un espace métrique séparable de dimension n quel que soit $n\geqslant 0$, fini ou infini.*

Envisageons d'abord le cas où $\dim\mathcal{X}=0$.

[1]) G. Peano, Math. Ann. **36** (1890), p. 157 et H. Lebesgue, l. cit.

[2]) W. Sierpiński, Fund. Math. **14** (1929), p. 234.

[3]) Voir A. Hilgers, *Bemerkung zur Dimensionstheorie*, Fund. Math. **28** (1937), p. 303.

Soit $\mathcal{Y}$ un espace de dimension n (p. ex. $\mathcal{Y}=\mathcal{J}^n$, $n\leqslant\aleph_0$). La famille $\boldsymbol{G}$ de tous les sous-ensembles G_δ du produit cartésien $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ étant de puissance $\leqslant\mathfrak{c}$, assignons à chaque ensemble-élément G de $\boldsymbol{G}$ un indice $x\,\epsilon\,\mathcal{X}$ de manière que G_x parcourt la famille $\boldsymbol{G}$ lorsque x varie dans $\mathcal{X}$ (c. à d. que G_x soit une fonction u n i v e r s e l l e par rapport à la famille des ensembles G_δ, cf. § 26, XIII).

Soit f une transformation de $\mathcal{X}$ en sous-ensemble de $\mathcal{Y}$ telle que

(1) la condition $[x,f(x)]\,\epsilon\, G_x$ entraîne $(x\times\mathcal{Y})\subset G_x$.

A savoir, si $(x\times\mathcal{Y})\subset G_x$, désignons par $f(x)$ un élément arbitraire de $\mathcal{Y}$; dans le cas contraire, soit $f(x)$ un élément de $\mathcal{Y}$ tel que $[x,f(x)]$ *non-*$\epsilon\, G_x$.

L'espace $\mathcal{X}$ étant une image biunivoque et continue de l'ensemble $I=\underset{xy}{E}[y=f(x)]$, il reste à montrer que $\dim I=n$.

Soit, conformément au th. 5 du § 22, IV, Z un ensemble G_δ tel que

(2) $$I\subset Z\subset\mathcal{X}\times\mathcal{Y} \quad\text{et}\quad \dim Z=\dim I.$$

Il existe donc un x_0 tel que $Z=G_{x_0}$. Il vient

$$[x_0,f(x_0)]\,\epsilon\, G_{x_0},\quad\text{puisque}\quad [x_0,f(x_0)]\,\epsilon\, I\subset Z.$$

Il en résulte d'après (1) que

$$(x_0\times\mathcal{Y})\subset G_{x_0},\quad\text{d'où}\quad \dim\mathcal{Y}\leqslant\dim G_{x_0}\leqslant\dim(\mathcal{X}\times\mathcal{Y});$$

et comme (cf. § 24, IX)

$$\dim(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})\leqslant\dim\mathcal{X}+\dim\mathcal{Y}=0+n,$$

il vient $\dim G_{x_0}=n$, c. à d. $\dim Z=n$. Finalement, $\dim I=n$ d'après l'égalité (2).

Passons au cas général où $\mathcal{X}$ est de dimension arbitraire. Soient, conformément au cor. 1, T un espace de dimension 0 et f une transformation biunivoque et continue de T en $\mathcal{X}$. Comme nous venons de prouver, il existe un espace I de dimension n et une transformation biunivoque et continue g de I en T. La fonction superposée fg transforme donc I en $\mathcal{X}$ de façon biunivoque et continue.

VII. Diagonale. Etant donnée une suite d'ensembles $X_1,X_2,\dots$ qui sont des sous-ensembles du même espace, *la diagonale du produit* $X_1\times X_2\times\dots$ *est*, par définition, *l'ensemble des points ayant toutes les coordonnées identiques* (c. à d. l'ensemble des suites de la forme $x,x,\dots,x,\dots$).

On vérifie facilement que:

1. *La diagonale de l'ensemble* $\overset{\infty}{\underset{i=1}{P}}X_i$ *est fermée dans* $\overset{\infty}{\underset{i=1}{P}}X_i$ *et homéomorphe à* $\prod_{i=1}^{\infty}X_i$.

2. *Si* f_i, *où* $i=1,2,\dots$, *est une transformation continue de l'espace* $\mathfrak{X}_i$ *en sous-ensemble de l'espace* $\mathcal{Y}$, *l'ensemble*

$$\mathfrak{Z}=\underset{\mathfrak{z}}{E}\,[f_1(\mathfrak{z}^1)=f_2(\mathfrak{z}^2)=\dots]\quad\textit{où } \mathfrak{z} \textit{ parcourt } \overset{\infty}{\underset{i=1}{P}}\mathfrak{X}_i,$$

est fermé dans le produit $\overset{\infty}{\underset{i=1}{P}}\mathfrak{X}_i$.

De plus, *la fonction* f^* *définie par la condition*

$$f^*(\mathfrak{z})=f_1(\mathfrak{z}^1)\quad\textit{pour}\quad \mathfrak{z}\,\epsilon\,\mathfrak{Z},$$

est une transformation continue de $\mathfrak{Z}$ *en* $f^*(\mathfrak{Z})=f_1(\mathfrak{X}_1)\cdot f_2(\mathfrak{X}_2)\cdot\dots$

En effet, en désignant (comme dans VI, 1) par $f(\mathfrak{z})$ le point $[f_1(\mathfrak{z}^1),f_2(\mathfrak{z}^2),\dots]$ de l'espace $\mathcal{Y}^{\aleph_0}$ et par Δ la diagonale de cet espace, on a $\mathfrak{Z}=f^{-1}(\Delta)$. La fonction f étant continue et l'ensemble Δ fermé, $\mathfrak{Z}$ est fermé.

De plus, la fonction f^* est continue sur $\mathfrak{Z}$, en tant que superposition de deux fonctions continues ($\mathfrak{z}^1$ étant une fonction continue de $\mathfrak{z}$). Enfin, la condition $y\,\epsilon\, f^*(\mathfrak{Z})$ signifie qu'il existe un $\mathfrak{z}\,\epsilon\,\mathfrak{Z}$ tel que $y=f^*(\mathfrak{z})$, c. à d. tel que $y=f_i(\mathfrak{z}^i)$ quel que soit i, donc tel que

$$y\,\epsilon\, f_1(\mathfrak{X}_1)\cdot f_2(\mathfrak{X}_2)\cdot\dots$$

3. *Si — avec les mêmes notations — les fonctions* f_i *sont biunivoques, resp. des homéomorphies, la fonction* f^* *l'est également.*

f^* est biunivoque, car la condition $f^*(\mathfrak{z})=f^*(\mathfrak{y})$ entraîne $f_i(\mathfrak{z}^i)=f_i(\mathfrak{y}^i)$, d'où — f_i étant biunivoque — on a $\mathfrak{z}^i=\mathfrak{y}^i$, quel que soit i, c. à d. que $\mathfrak{z}=\mathfrak{y}$.

D'autre part, la fonction $\mathfrak{z}=f^{*-1}(y)$, inverse à f^*, est définie sur $f^*(\mathfrak{Z})$ et satisfait à l'identité

$$f^{*-1}(y)=[f_1^{-1}(y),f_2^{-1}(y),\dots].$$

Les fonctions f_i^{-1} étant supposées continues, f^{*-1} l'est également (d'après VI).

VIII. Convergence uniforme. Par définition (cf. § 15, VIII), une suite de fonctions $\{f_n\}$ est dite *uniformément convergente vers la fonction* f, lorsqu'à chaque $\varepsilon>0$ correspond un n_ε tel que l'on a $|f(t)-f_n(t)|<\varepsilon$ pour $n>n_\varepsilon$, quel que soit t.

Supposons que les valeurs de la fonction f_n appartiennent à $\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2\times\dots$:

$$f_n(t)=[f_n^1(t),f_n^2(t),\dots] \quad \text{où} \quad f_n^i(t)\in\mathscr{X}_i.$$

Pour que la suite des fonctions f_n *converge uniformément vers la fonction* f, *il faut et il suffit que, quel que soit* i, *la suite* $f_1^i,f_2^i,\dots$ *converge uniformément vers* f^i.

La condition est nécessaire, car l'inégalité $|f(t)-f_n(t)|<\varepsilon$ entraîne $2^{-i}|f^i(t)-f_n^i(t)|\leqslant|f(t)-f_n(t)|<\varepsilon$.

Elle est aussi suffisante. Soit, pour un $\varepsilon>0$ donné d'avance, m un indice tel que $2^{-m}<\varepsilon$. En vertu de la convergence uniforme des suites $\{f_n^1\},\dots,\{f_n^m\}$, il existe un indice n' tel que l'on a pour tout $n>n'$: $|f^i(t)-f_n^i(t)|<\varepsilon$, quel que soit t et quel que soit $i\leqslant m$. Il vient donc

$$|f(t)-f_n(t)|=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}|f^i(t)-f_n^i(t)|+\sum_{i=m+1}^{\infty}2^{-i}|f^i(t)-f_n^i(t)|<\varepsilon+2^{-m}<2\varepsilon,$$

ce qui exprime la convergence uniforme de la suite $\{f_n\}$.

IX. Un théorème sur les ensembles G_δ. Désignons, comme d'habitude, par $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ l'espace de toutes les suites de nombres réels.

Théorème. Q *étant un ensemble* G_δ *situé dans un espace métrique* $\mathscr{X}$, *il existe une fonction continue* $y=f(x)$ *définie sur cet ensemble, dont les valeurs appartiennent à* $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ *et dont l'image* $I=\underset{xy}{E}[y=f(x)]$ *est fermée (dans le produit* $\mathscr{X}\times\mathcal{E}^{\aleph_0}$*).*

Par hypothèse, $Q=G_1\cdot G_2\cdot\dots$ (partie commune d'ensembles ouverts). Posons

$$F_i=\mathscr{X}-G_i,\quad f_i(x)=\frac{1}{\varrho(x,F_i)}\quad \text{pour}\quad x\in G_i,$$

et faisons correspondre à tout $x\in Q$ la suite $f_1(x),f_2(x),\dots$, considérée comme le point $f(x)$ de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$.

La fonction $\varrho(x,F_i)$ étant continue (§ 15, IV (5)) et positive pour $x\in G_i$, la fonction f_i, et par conséquent (§ 14, IV) la fonction f, est continue en chaque point de Q.

Afin de prouver que l'ensemble I est fermé, supposons par impossible que $\lim\limits_{n=\infty}x_n=x$, que $\lim\limits_{n=\infty}f(x_n)=y$ et que le point (x,y) n'appartienne pas à I. Il en résulte que x n'appartient pas à Q, car l'égalité $\lim\limits_{n=\infty}x_n=x$ implique pour $x\in Q$ que $\lim\limits_{n=\infty}f(x_n)=f(x)$, d'où $y=f(x)$ et $(x,y)\in I$.

La formule $x\in\mathscr{X}-Q$ établie, il existe un indice i tel que $x\in F_i$, donc que $\varrho(x,F_i)=0$. La continuité de la fonction $\varrho(x,F_i)$ entraîne $\lim\limits_{n=\infty}\varrho(x_n,F_i)=\varrho(x,F_i)=0$, de sorte que $\lim\limits_{n=\infty}f_i(x_n)=\infty$, contrairement à l'hypothèse que $\lim\limits_{n=\infty}f(x_n)=y$, qui implique que $\lim\limits_{n=\infty}f_i(x_n)$ est un nombre fini, comme „coordonnée" de y.

Corollaire[1]. *Tout ensemble* G_δ *situé dans un espace métrique* $\mathscr{X}$ *est homéomorphe à un ensemble fermé situé dans* $\mathscr{X}\times\mathcal{E}^{\aleph_0}$.

Car Q est homéomorphe à I d'après § 24, XI, 2.

Remarque. Dans le cas particulier où l'ensemble Q *est différence de deux ensembles fermés*, $Q=A-B$, on peut remplacer dans le théorème et dans le corollaire l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ par *l'espace* $\mathcal{E}$ *des nombres réels*[2]. Car on pose dans ce cas

$$f(x)=\frac{1}{\varrho(x,B)}.$$

§ 25. Limites inférieure et supérieure.

I. Limite inférieure[3]. *Définition. Le point* p *appartient à la limite inférieure de la suite d'ensembles* $A_1,A_2,\dots$, en symbole: $p\in\underset{n=\infty}{\mathrm{Li}}A_n$, *lorsque tout entourage de* p *admet des points communs avec tous les* A_n *à partir d'un* n *suffisamment grand.*

Bien entendu, le terme „entourage" peut être remplacé par „entourage ouvert", ainsi que par „sphère de centre p".

[1]) On trouvera une application importante de ce corollaire dans la théorie des espaces complets (§ 29).

[2]) Cf. la note de M. Sierpiński et de moi-même *Sur les différences de deux ensembles fermés*, Tôhoku Math. Journ. **20** (1921), p. 23.

[3]) Les notions de limite inférieure et supérieure sont dues à P. Painlevé (Cf. C. R. Paris **148** (1909), p. 1156 et les indications à ce sujet chez L. Zoretti, Journ. de Math. (5), **1** (1905), p. 8). F. Hausdorff les appelle „unterer (oberer) abgeschlossener Limes". Il ne faut pas les confondre avec les „ensembles limites restreint et complet" au sens de la Théorie générale des ensembles:

$$\sum_n(A_n\cdot A_{n+1}\cdot A_{n+2}\cdot\dots)\quad \text{et}\quad \prod_n(A_n+A_{n+1}+A_{n+2}+\dots).$$

La formule $p \in \operatorname{Li}_{n=\infty} A_n$ *équivaut à l'existence d'une suite de points* $\{p_n\}$ *telle que*

$$p = \lim_{n=\infty} p_n \quad \text{et} \quad p_n \in A_n,$$

ou encore: *à l'égalité*

$$\lim_{n=\infty} \varrho(p, A_n) = 0.$$

Ajoutons que la suite $\{p_n\}$ est définie à partir d'un indice non nécessairement identique à 1 (dans le cas où il y a des A_n qui s'annulent).

En effet, si $p \in \operatorname{Li} A_n$ et si S_m désigne la sphère de centre p et de rayon $1/m$, il existe un indice k_m tel que l'on a $S_m \cdot A_n \neq 0$ pour $n \geqslant k_m$. De plus, on peut supposer que $k_m > k_{m-1}$. La suite $\{p_n\}$, où $p_n \in S_m \cdot A_n$ pour $k_m \leqslant n < k_{m+1}$, converge vers p, car $|p_n - p| < 1/m$.

Exemples. Si A_n se réduit à un seul point p_n, on a

$$\operatorname{Li}_{n=\infty} A_n = \lim_{n=\infty} p_n$$

quand cette dernière limite existe, et $\operatorname{Li} A_n = 0$ dans le cas contraire; car on a ici $\varrho(p, A_n) = |p - p_n|$.

Une suite de rectangles ayant une base commune et les hauteurs diminuant indéfiniment a cette base pour limite inférieure.

II. Calcul. On a les règles suivantes:

1. $\overline{\operatorname{Li} A_n} = \operatorname{Li} A_n = \operatorname{Li} \bar{A}_n$. 2. $A_n \subset B_n$ *entraîne* $\operatorname{Li} A_n \subset \operatorname{Li} B_n$.

3. $\operatorname{Li} A_n + \operatorname{Li} B_n \subset \operatorname{Li} (A_n + B_n)$. 3a. $\sum_t \operatorname{Li} A_n(t) \subset \operatorname{Li} \left(\sum_t A_n(t)\right)$.

4. $\operatorname{Li} (A_n \cdot B_n) \subset (\operatorname{Li} A_n) \cdot (\operatorname{Li} B_n)$. 4a. $\operatorname{Li} \left(\prod_t A_n(t)\right) \subset \prod_t \operatorname{Li} A_n(t)$.

5. *Si* $k_1 < k_2 < \ldots$, *on a* $\operatorname{Li} A_n \subset \operatorname{Li} A_{k_n}$.

6. *Si* $A_n = A$, *on a* $\operatorname{Li} A_n = \bar{A}$.

7. *On n'altère pas* $\operatorname{Li} A_n$, *en altérant un nombre fini des* A_n.

8. $$\prod_n A_n \subset \sum_n (A_n \cdot A_{n+1} \cdot A_{n+2} \cdot \ldots) \subset \operatorname{Li} A_n.$$

9. $$\operatorname{Li} (A_n \times B_n) = \operatorname{Li} A_n \times \operatorname{Li} B_n.$$

En effet, si $q \in \overline{\operatorname{Li} A_n}$ et G est un entourage ouvert de q, il existe un point $p \in G \cdot \operatorname{Li} A_n$. Donc, à partir d'un certain n, on a $G \cdot A_n \neq 0$, d'où $q \in \operatorname{Li} A_n$. En outre, H étant ouvert, l'inégalité $H \cdot A_n \neq 0$ équivaut à $H \cdot \bar{A}_n \neq 0$; par suite $\operatorname{Li} A_n = \operatorname{Li} \bar{A}_n$, d'où la formule 1.

Les formules 2, 5—7, 9 résultent directement de la définition, tandis que 3—4a sont des conséquences de 2 (cf. § 4, III). Enfin, $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \subset \operatorname{Li}_{n=\infty} A_n$, donc, d'après 7, $\prod_{n=m}^{\infty} A_n \subset \operatorname{Li}_{n=\infty} A_n$, ce qui entraîne 8.

III. Limite supérieure. *Définition. Le point* p *appartient à la limite supérieure de la suite d'ensembles* $A_1, A_2, \ldots$, en symbole: $p \in \operatorname{Ls}_{n=\infty} A_n$, *lorsque tout entourage de* p *admet des points communs avec une infinité d'ensembles* A_n.

On montre par un raisonnement analogue à celui du N⁰ I que cette condition équivaut à *l'existence d'une suite de points* $\{p_{k_n}\}$ *telle que*

$$k_1 < k_2 < \ldots, \quad p = \lim_{n=\infty} p_{k_n} \quad \text{et} \quad p_{k_n} \in A_{k_n},$$

ou, ce qui revient au même, *à l'égalité*

$$\liminf \varrho(p, A_n) = 0.$$

Exemples. Soient $\{r_n\}$ la suite de tous les points rationnels et A_n l'ensemble composé du point r_n seul; $\operatorname{Ls} A_n$ est l'ensemble de tous les nombres réels. Dans l'exemple des rectangles considéré au N⁰ I on a $\operatorname{Ls} A_n = \operatorname{Li} A_n$.

IV. Calcul. On a les règles suivantes:

1. $\overline{\operatorname{Ls} A_n} = \operatorname{Ls} A_n = \operatorname{Ls} \bar{A}_n$. 2. $A_n \subset B_n$ *entraîne* $\operatorname{Ls} A_n \subset \operatorname{Ls} B_n$.

3. $\operatorname{Ls} (A_n + B_n) = \operatorname{Ls} A_n + \operatorname{Ls} B_n$. 3a. $\sum_t \operatorname{Ls} A_n(t) \subset \operatorname{Ls} \left(\sum_t A_n(t)\right)$.

4. $\operatorname{Ls} (A_n \cdot B_n) \subset (\operatorname{Ls} A_n) \cdot (\operatorname{Ls} B_n)$. 4a. $\operatorname{Ls} \left(\prod_t A_n(t)\right) \subset \prod_t \operatorname{Ls} A_n(t)$.

5. *Si* $k_1 < k_2 < \ldots$, *on a* $\operatorname{Ls} A_{k_n} \subset \operatorname{Ls} A_n$.

6. *Si* $A_n = A$, *on a* $\operatorname{Ls} A_n = \bar{A}$.

7. *On n'altère pas* $\operatorname{Ls} A_n$, *en altérant un nombre fini des* A_n.

8 [1]). $$\operatorname{Ls} A_n = \prod_n \overline{A_n + A_{n+1} + \ldots} \subset \overline{\sum_n A_n} = \sum_n \bar{A}_n + \operatorname{Ls} A_n.$$

9. $$\operatorname{Ls} (A_n \times B_n) \subset \operatorname{Ls} A_n \times \operatorname{Ls} B_n.$$

[1]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 237 (4). On ne connaît pas de formule analogue pour $\operatorname{Li} A_n$.

La formule 1 se démontre comme II, 1. Pour prouver la formule 3, posons $p=\lim p_{k_n}$ et $p_{k_n}\in(A_{k_n}+B_{k_n})$. On a donc pour une infinité d'indices k_n soit constamment $p_{k_n}\in A_{k_n}$, soit constamment $p_{k_n}\in B_{k_n}$. Dans le premier cas $p\in \mathrm{Ls}\,A_n$ et dans le deuxième $p\in \mathrm{Ls}\,B_n$.

Les formules 2—4a sont des conséquences directes de 3. Les formules 5—7, 9 résultent facilement de la définition.

Passons à la formule 8. Soit $p\in \mathrm{Ls}\,A_n$. Donc $p=\lim p_{k_n}$ et $p_{k_n}\in A_{k_n}$. Comme $k_n\geqslant n$, il vient $p_{k_n}\in(A_i+A_{i+1}+\dots)$ pour $n>i$. Par conséquent $p\in \overline{A_i+A_{i+1}+\dots}$, quel que soit i.

Inversement, si p n'appartient pas à $\mathrm{Ls}\,A_n$, il existe un entourage G de p et un indice m tel que l'on a $GA_n=0$ pour $n\geqslant m$. Par conséquent p n'appartient pas à $\overline{A_m+A_{m+1}+\dots}$

La dernière partie de la formule 8 résulte directement de § 4, III, 10.

V. Relations entre Li **et** Ls. On a la formule

1. $$\mathrm{Li}\,A_n=\prod \mathrm{Ls}\,A_{k_n}\subset \sum \mathrm{Li}\,A_{k_n}=\mathrm{Ls}\,A_n,$$

où Π et Σ s'étendent à toutes les suites $\{k_n\}$ croissantes.

Car, d'une part, d'après II, 5 et IV, 5:

$$\mathrm{Li}\,A_n\subset \prod \mathrm{Li}\,A_{k_n}\subset \prod \mathrm{Ls}\,A_{k_n} \quad \text{et} \quad \sum \mathrm{Li}\,A_{k_n}\subset \sum \mathrm{Ls}\,A_{k_n}\subset \mathrm{Ls}\,A_n$$

et d'autre part:

1° si p *non-*$\in \mathrm{Li}\,A_n$, il existe un entourage G de p et une suite $k_1<k_2<\dots$ tels que l'on a $GA_{k_n}=0$ pour chaque n; par conséquent p *non-*$\in \mathrm{Ls}\,A_{k_n}$;

2° si $p\in \mathrm{Ls}\,A_n$, il existe une suite $\{p_{k_n}\}$ telle que $p_{k_n}\in A_{k_n}$ et $p=\lim p_{k_n}$; par conséquent $p\in \mathrm{Li}\,A_{k_n}$.

2. $$\mathrm{Li}\,A_n-\mathrm{Ls}\,B_n\subset \mathrm{Li}\,(A_n-B_n).$$

En effet, soit $p\in(\mathrm{Li}\,A_n-\mathrm{Ls}\,B_n)$. Donc $p=\lim p_n$, $p_n\in A_n$ et, comme p *non-*$\in \mathrm{Ls}\,B_n$, on a p_n *non-*$\in B_n$ à partir d'un n suffisamment grand. Donc $p_n\in(A_n-B_n)$ et par suite $p\in \mathrm{Li}\,(A_n-B_n)$.

On rapprochera les formules II, 3 et IV, 3 des suivantes:

3. $$\mathrm{Li}\,(A_n+B_n)\subset \mathrm{Li}\,A_n+\mathrm{Li}\,B_n+\mathrm{Ls}\,A_n\cdot \mathrm{Ls}\,B_n,$$

d'où en particulier (d'après II, 3):

4. *Si* $\mathrm{Ls}\,A_n\cdot \mathrm{Ls}\,B_n=0$, *on a* $\mathrm{Li}\,(A_n+B_n)=\mathrm{Li}\,A_n+\mathrm{Li}\,B_n$.

Soit, en effet, $p\in[\mathrm{Li}\,(A_n+B_n)-\mathrm{Ls}\,A_n\cdot \mathrm{Ls}\,B_n]$. Il s'agit de montrer que $p\in(\mathrm{Li}\,A_n+\mathrm{Li}\,B_n)$.

Il est légitime d'admettre que p *non-*$\in \mathrm{Ls}\,B_n$. En posant $p=\lim p_n$ et $p_n\in(A_n+B_n)$, on a donc p_n *non-*$\in B_n$, pour n suffisamment grand; par conséquent $p_n\in A_n$ et finalement $p\in \mathrm{Li}\,A_n$.

VI. Limite. *La suite d'ensembles* $\{A_n\}$ *est dite convergente vers* A, en symbole: $A=\underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\,A_n$ [1]), *lorsque* $\underset{n=\infty}{\mathrm{Li}}\,A_n=A=\underset{n=\infty}{\mathrm{Ls}}\,A_n$.

Dans le cas particulier où l'ensemble A_n se réduit à un seul point p_n, la suite $\{A_n\}$ est convergente, soit lorsque $\lim p_n$ existe (et alors l'ensemble $\mathrm{Lim}\,A_n$ se compose du point $\lim p_n$ seul), soit que la suite $\{p_n\}$ ne contient aucune sous-suite convergente (et alors $\mathrm{Lim}\,A_n=0$).

On a les règles de calcul suivantes (dans 1—5 et 9 les suites $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$ sont supposées convergentes):

1. $\overline{\mathrm{Lim}\,A_n}=\mathrm{Lim}\,A_n=\mathrm{Lim}\,\overline{A}_n$.

2. $A_n\subset B_n$ *entraîne* $\mathrm{Lim}\,A_n\subset \mathrm{Lim}\,B_n$.

2a. *Les conditions* $p_n\in A_n$ *et* $p=\lim p_n$ *entraînent* $p\in \mathrm{Lim}\,A_n$.

3. $\mathrm{Lim}\,(A_n+B_n)=\mathrm{Lim}\,A_n+\mathrm{Lim}\,B_n$.

4. *Si* $k_1<k_2<\dots$, *on a* $\mathrm{Lim}\,A_{k_n}=\mathrm{Lim}\,A_n$.

5. *Si* $A_n=A$, *on a* $\mathrm{Lim}\,A_n=\overline{A}$.

6. *On n'altère pas la limite (ni la convergence) d'une suite, en altérant un nombre fini de ses termes.*

7. *Si* $A_1\subset A_2\subset\dots$, *on a* $\mathrm{Lim}\,A_n=\overline{\sum_n A_n}$.

8. *Si* $A_1\supset A_2\supset\dots$, *on a* $\mathrm{Lim}\,A_n=\prod_n \overline{A}_n$.

9. $\mathrm{Lim}\,(A_n\times B_n)=\mathrm{Lim}\,A_n\times \mathrm{Lim}\,B_n$.

[1]) qu'il ne faut pas confondre avec $\underset{n=\infty}{\mathrm{Limes}}\,A_n$ au sens de la Théorie générale des ensembles, voir § 13, VI, 8 et N° I, renvoi [3]).

Les règles 1, 2, 5, 6 et 9 résultent directement des règles correspondantes des NN° II et IV. La règle 2a se déduit de 2. Les règles 3 et 4 résultent des formules:

$$\mathrm{Ls}\,(A_n+B_n)=\mathrm{Ls}\,A_n+\mathrm{Ls}\,B_n=\mathrm{Li}\,A_n+\mathrm{Li}\,B_n\subset\mathrm{Li}\,(A_n+B_n)\subset\mathrm{Ls}\,(A_n+B_n),$$
$$\mathrm{Lim}\,A_n=\mathrm{Li}\,A_n\subset\mathrm{Li}\,A_{k_n}\subset\mathrm{Ls}\,A_{k_n}\subset\mathrm{Ls}\,A_n=\mathrm{Lim}\,A_n.$$

L'hypothèse de la proposition 7 implique que

$$A_n=A_n\cdot A_{n+1}\cdot\ldots,\quad\text{d'où}\quad\sum_n A_n=\sum_n(A_n\cdot A_{n+1}\cdot\ldots)$$

et selon II, 8 et IV, 8

$$\overline{\sum_n A_n}\subset\mathrm{Li}\,A_n\subset\mathrm{Ls}\,A_n\subset\overline{\sum_n A_n}.$$

De façon analogue, l'hypothèse de la proposition 8 implique que $A_n=A_n+A_{n+1}+\ldots$, et il vient

$$\prod_n\bar A_n\subset\mathrm{Li}\,\bar A_n=\mathrm{Li}\,A_n\subset\mathrm{Ls}\,A_n=\prod_n\bar A_n.$$

VII. Relativisation. E étant un ensemble donné, la limite inférieure relative à E d'une suite de sous-ensembles A_n de E est l'ensemble de tous les points p de E tels que, G désignant un ensemble ouvert quelconque contenant p, on a l'inégalité $GEA_n\neq0$ pour tous les n suffisamment grands. On en conclut aussitôt que la limite inférieure relative à E coïncide avec l'ensemble $E\cdot\mathrm{Li}\,A_n$.

De façon analogue, la limite supérieure relative à E coïncide avec $E\cdot\mathrm{Ls}\,A_n$ et la limite relative à E avec $E\cdot\mathrm{Lim}\,A_n$.

VIII. Théorème de Bolzano-Weierstrass généralisé. *Toute suite de sous-ensembles d'un espace séparable contient une sous-suite convergente (dont la limite est vide ou non)* [1].

Soient $R_1,R_2,\ldots$ la base de l'espace et $A_1,A_2,\ldots$ la suite d'ensembles donnée. Définissons les ensembles A_i^n de la façon suivante:

1) $A_i^1=A_i$, quel que soit i,

2) s'il existe pour un $n>1$ une suite $k_1<k_2<\ldots$ telle que $R_n\cdot\mathop{\mathrm{Ls}}\limits_{i=\infty}A_{k_i}^{n-1}=0$, posons $A_i^n=A_{k_i}^{n-1}$ (le choix de la suite $\{k_i\}$ étant arbitraire),

3) si aucune suite de ce genre n'existe, soit $A_i^n=A_i^{n-1}$.

Nous allons montrer que la suite $D_n=A_n^n$ est convergente.

[1]) Voir F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 148, C. Zarankiewicz, Fund. Math. **9** (1927), p. 124, P. Urysohn, Verhandl. Akad. Amsterdam **13** (1927), p. 29. Cf. aussi T. Ważewski, Ann. Soc. Pol. Math. **2** (1923), p. 72 et Fund. Math. **4** (1923), p. 229; R. G. Lubben, Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1928), p. 668.

Supposons, par contre, que $\mathrm{Ls}\,D_n\neq\mathrm{Li}\,D_n$. D'après V, 1, il existe alors une sous-suite $\{D_{j_n}\}$ telle que $\mathrm{Ls}\,D_{j_n}\neq\mathrm{Ls}\,D_n$. Les deux derniers ensembles étant fermés, il existe un R_m tel que

$$\text{(i)}\quad R_m\cdot\mathrm{Ls}\,D_{j_n}=0,\qquad\text{(ii)}\quad R_m\cdot\mathrm{Ls}\,D_n\neq0.$$

La suite $\{D_{j_n}\}$ est une sous-suite de la suite $\{D_n\}$ et celle-ci est, à partir du $(m-1)$-ème terme, une sous-suite de la suite $\{A_i^{m-1}\}$, où $i=1,2,\ldots$ On en conclut en vertu de (i) que le cas 2) de la définition est réalisé lorsqu'on y remplace n par m. Par conséquent $R_m\cdot\mathop{\mathrm{Ls}}\limits_{i=\infty}A_i^m=0$. La suite $\{D_n\}$ étant (abstraction faite de ses m premiers termes) une sous-suite de $\{A_i^m\}$, $i=1,2,\ldots$, il en résulte que $R_m\cdot\mathrm{Ls}\,D_n=0$, contrairement à (ii).

Corollaire. On a, dans tout espace séparable,

$$\mathrm{Li}\,A_n=\prod{}'\,\mathrm{Lim}\,A_{k_n}\quad\textit{et}\quad\mathrm{Ls}\,A_n=\sum{}'\,\mathrm{Lim}\,A_{k_n},$$

où Π' et Σ' s'étendent à toutes les sous-suites $\{A_{k_n}\}$ convergentes.

Pour établir la première égalité, il suffit en vertu de V, 1 de démontrer que, si p *non-*ϵ $\mathrm{Li}\,A_n$, il existe une suite convergente $\{A_{k_n}\}$ telle que p *non-*ϵ $\mathrm{Lim}\,A_{k_n}$. Or il existe par hypothèse un entourage G du point p et une suite $\{A_{j_n}\}$ tels que $A_{j_n}\cdot G=0$. $\{A_{k_n}\}$ désigne une sous-suite convergente de $\{A_{j_n}\}$.

Passons à la deuxième égalité. D'après V, 1, on a l'inclusion $\sum'\mathrm{Lim}\,A_{k_n}\subset\mathrm{Ls}\,A_n$. D'autre part, si $p\,\epsilon\,\mathrm{Ls}\,A_n$, il existe une sous-suite $\{A_{k_n}\}$ telle que $p\,\epsilon\,\mathrm{Li}\,A_{k_n}$, donc, comme nous venons de voir, une suite convergente $\{A_{k_{j_n}}\}$ telle que $p\,\epsilon\,\mathrm{Lim}\,A_{k_{j_n}}\subset\sum'\mathrm{Lim}\,A_{k_n}$.

IX. Espace $(2^{\mathfrak{X}})_L$. Nous désignons par ce symbole, pour tout espace métrique $\mathfrak{X}$, *l'espace ayant pour éléments tous les sous-ensembles fermés de $\mathfrak{X}$, le passage à la limite étant conçu dans le sens de la définition VI.*

1. $(2^{\mathfrak{X}})_L$ *est un espace $\mathcal{L}^*$.*

En effet, les conditions 1° et 2° du § 14, I, sont vérifiées d'après VI, 4 et 5. Afin d'établir la condition 3°, admettons qu'à toute suite $k_1<k_2<\ldots$ corresponde une suite $m_1<m_2<\ldots$ telle que

$$(1)\qquad\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{n=\infty}A_{k_{m_n}}=A.$$

Il s'agit de montrer que $A=\mathrm{Lim}\,A_n$, c. à d. que $\mathrm{Ls}\,A_n\subset A\subset\mathrm{Li}\,A_n$.

Soit $p \in \mathrm{Ls}\, A_n$. Il existe donc, d'après V, 1, une suite $k_1 < k_2 < \dots$ telle que $p \in \mathrm{Li}\, A_{k_n}$. Soit $m_1 < m_2 < \dots$ une suite satisfaisant à (1). Il vient, en tenant compte de II, 5:

$$p \in \mathrm{Li}\, A_{k_n} \subset \mathrm{Li}\, A_{k_{m_n}} = A; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{Ls}\, A_n \subset A.$$

Soit, d'autre part, $p \in A$. Soient $k_1 < k_2 < \dots$ une suite arbitraire et $m_1 < m_2 < \dots$ une suite correspondante assujettie à la condition (1). Il vient (cf. IV, 5):

$$p \in A = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} A_{k_{m_n}} = \mathrm{Ls}\, A_{k_{m_n}} \subset \mathrm{Ls}\, A_{k_n}$$

et par conséquent (d'après V, 1): $p \in \mathrm{Li}\, A_n$. Donc $A \subset \mathrm{Li}\, A_n$.

Remarques. 1) Dans l'espace $(2^{\mathscr{X}})_L$ l'axiome III peut être en défaut.

Considérons, en effet, l'exemple suivant: l'espace $\mathscr{X}$ se compose: 1) du nombre 0, 2) des nombres $\frac{1}{n} + \frac{1}{k}$ où $n = 2, 3, \dots, k = 1, 2, \dots$ et $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{n-1}$, 3) du nombre 1, 4) des nombres $1 + \frac{1}{n}$.

Soit $\boldsymbol{A}$ la famille de tous les couples $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k},\ 1 + \frac{1}{n}\right)$. Tout nombre de la forme $1 + \frac{1}{n}$ constitue alors un ensemble-élément de $\overline{\boldsymbol{A}}$. Par conséquent, l'ensemble composé du nombre 1 appartient à $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$, tandis qu'il n'appartient pas à $\overline{\boldsymbol{A}}$. Ainsi $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} \neq \overline{\boldsymbol{A}}$.

2) Il importe de remarquer que l'espace $(2^{\mathscr{X}})_L$ est entièrement différent de l'espace $2^{\mathscr{X}}$, métrisé par la „distance" des ensembles (voir § 15, VII); le deuxième est toujours métrique, tandis que le premier peut ne pas être métrisable (comme le montre l'exemple précédent); le premier est — comme nous le verrons — séparable si $\mathscr{X}$ est séparable, tandis que le deuxième peut être non séparable (voir § 15, IX, remarque 2).

2. *Si* $A_n \in 2^{\mathscr{X}}$ *et* $A \in 2^{\mathscr{X}}$, *la condition* $\lim_{n=\infty} \mathrm{dist}(A_n, A) = 0$ *entraîne* $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} A_n = A$. Donc *l'espace* $(2^{\mathscr{X}})_L$ *privé de l'élément vide est une image biunivoque et continue de* $2^{\mathscr{X}}$ *(l'espace* $\mathscr{X}$ *étant supposé borné)* [1]).

[1]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 149.

Soit, en effet, $\lim_{n=\infty} \mathrm{dist}(A_n, A) = 0$. A tout $\varepsilon > 0$ correspond donc un $n(\varepsilon)$ tel que $\mathrm{dist}(A_n, A) < \varepsilon$ pour tout $n > n(\varepsilon)$; en d'autres termes:

(1) pour tout $x \in A$, on a $\varrho(A_n, x) < \varepsilon$, quel que soit $n > n(\varepsilon)$,

(2) il existe une suite ε_n tendant vers 0 telle que $\varrho(y, A) < \varepsilon_n$, quel que soit $y \in A_n$.

Il s'agit de prouver que $\mathrm{Lim}\, A_n = A$, c. à d. que 1⁰ $A \subset \mathrm{Li}\, A_n$ et 2⁰ $\mathrm{Ls}\, A_n \subset A$.

1⁰. Soient $x \in A$ et G un entourage de x. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit il vient d'après (1): $G \cdot A_n \neq 0$, quel que soit $n > n(\varepsilon)$. Donc $x \in \mathrm{Li}\, A_n$.

2⁰. Soit, d'autre part, $x \in \mathrm{Ls}\, A_n$. Donc $x = \lim_{n=\infty} y_{k_n}$ où $y_{k_n} \in A_{k_n}$. D'après (2), il existe un point $a_{k_n} \in A$ tel que $|y_{k_n} - a_{k_n}| < \varepsilon_n$. Comme $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, il vient $x = \lim_{n=\infty} a_{k_n}$, d'où $x \in A$.

3. *Si* $\mathscr{X}$ *est métrique séparable, l'espace* $(2^{\mathscr{X}})_L$, *de même que tout sous-ensemble de cet espace, est séparable.*

Soit, en effet, $\mathscr{X}_1$ un espace totalement borné homéomorphe à $\mathscr{X}$ (cf. § 15, XII, corollaire). Comme espace défini de façon topologique, $(2^{\mathscr{X}})_L$ est homéomorphe à $(2^{\mathscr{X}_1})_L$. Or, $\mathscr{X}_1$ étant totalement borné, $2^{\mathscr{X}_1}$ est séparable (§ 15, IX, 2). L'espace $(2^{\mathscr{X}_1})_L - (0)$, donc aussi $(2^{\mathscr{X}})_L - (0)$, étant image continue de $2^{\mathscr{X}_1}$, tout sous-ensemble de $(2^{\mathscr{X}})_L$ est séparable, en tant qu'image continue d'un ensemble séparable (voir § 14, VI).

Remarques. La notion de point d'accumulation, ainsi que celle de point de condensation, étant des invariants des transformations biunivoques et continues (effectuées sur des espaces $\mathcal{L}^*$), le théorème 2 implique que $\boldsymbol{A}$ *étant un sous-ensemble indénombrable de* $(2^{\mathscr{X}})_L$, *tout élément de* $\boldsymbol{A}$, *sauf une infinité dénombrable, en est un élément de condensation* [1]) et, en outre, que $\boldsymbol{A}$ *contient un ensemble dense en soi.* Par conséquent, *tout ensemble* $\boldsymbol{A}$ *clairsemé est dénombrable* (voir § 18, III et V).

4. *Si* $\mathscr{X}$ *est métrique séparable,* $(2^{\mathscr{X}})_L$ *est compact.*

C'est une conséquence directe du th. VIII (rapproché de VI, 1).

[1]) Cf. C. Zarankiewicz, Fund. Math. **11** (1928), p. 129.

5. *A et B étant deux sous-ensembles fermés et disjoints d'un espace métrique $\mathfrak{X}$, on a l'homéomorphie*

$$(2^{A+B})_L \underset{\text{top}}{=} (2^A)_L \times (2^B)_L .$$

Faisons correspondre à tout couple d'ensembles fermés X, Y, où $X \subset A$ et $Y \subset B$, leur somme $F(X, Y) = X + Y$. On constate aussitôt que la fonction F transforme de façon biunivoque l'espace $(2^A)_L \times (2^B)_L$ en $(2^{A+B})_L$.

La continuité de la fonction F est une conséquence directe de la formule VI, 3.

Reste à démontrer que la fonction F est bicontinue, c. à d. que $\mathrm{Lim}\,(X_n + Y_n) = X + Y$ entraîne $\mathrm{Lim}\, X_n = X$ et $\mathrm{Lim}\, Y_n = Y$.

D'après IV, 3 il vient

$$\mathrm{Ls}\, X_n + \mathrm{Ls}\, Y_n = \mathrm{Ls}\,(X_n + Y_n) = \mathrm{Lim}\,(X_n + Y_n) = X + Y,$$

d'où on conclut que $\mathrm{Ls}\, X_n = X$ et $\mathrm{Ls}\, Y_n = Y$, puisque

$$X \subset A,\ X_n \subset A,\ \text{d'où } \mathrm{Ls}\, X_n \subset A; \quad Y \subset B,\ Y_n \subset B,\ \text{d'où } \mathrm{Ls}\, Y_n \subset B$$

et $AB = 0$.

Comme $\mathrm{Ls}\, X_n \cdot \mathrm{Ls}\, Y_n = 0$, il vient d'après V, 4:

$$\mathrm{Li}\, X_n + \mathrm{Li}\, Y_n = \mathrm{Li}\,(X_n + Y_n) = \mathrm{Lim}\,(X_n + Y_n) = X + Y,$$

d'où, comme auparavant, $\mathrm{Li}\, X_n = X$ et $\mathrm{Li}\, Y_n = Y$.

On a donc $\mathrm{Lim}\, X_n = X$ et $\mathrm{Lim}\, Y_n = Y$.

E. Ensembles boreliens. Fonctions mesurables B (§§ 26—28).

L'espace considéré dans les §§ 26—28 est supposé métrique.

§ 26. Ensembles boreliens.

I. Equivalences. Nous avons défini au § 5, VI la famille des ensembles boreliens comme la plus petite famille $\boldsymbol{F}$ assujettie aux conditions:

1. *tout ensemble fermé appartient à* $\boldsymbol{F}$,
2. *si* $X \in \boldsymbol{F}$, *on a* $(1 - X) \in \boldsymbol{F}$,
3. *si* $X_n \in \boldsymbol{F}$, *on a* $(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots) \in \boldsymbol{F}$,

la condition 3 se laissant remplacer par la suivante:

3'. *si* $X_n \in \boldsymbol{F}$, *on a* $(X_1 + X_2 + \ldots) \in \boldsymbol{F}$.

Nous avons démontré, d'autre part, que dans chaque espace métrique tout ensemble fermé est un $\boldsymbol{G}_\delta$ et que, par conséquent, tout ensemble ouvert est un $\boldsymbol{F}_\sigma$ (§ 15, IV). En s'appuyant sur ces faits, nous établirons à présent le théorème suivant[1]):

La famille des ensembles boreliens est la plus petite famille assujettie aux conditions 1, 3 *et* 3'.

Désignons cette dernière famille par $\boldsymbol{F}^*$. Il s'agit de prouver que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^*$.

Comme nous venons d'observer, la famille $\boldsymbol{F}$ satisfait aux conditions 1, 3 et 3', de sorte que $\boldsymbol{F}^* \subset \boldsymbol{F}$.

Afin d'établir l'inclusion inverse, désignons par $\boldsymbol{F}^0$ la famille des ensembles complémentaires aux ensembles appartenant à $\boldsymbol{F}^*$. La famille $\boldsymbol{F}^0$ satisfait à la condition 1, car le complémentaire d'un ensemble fermé est, en tant qu'ensemble ouvert, somme d'une suite d'ensembles fermés; il appartient donc à $\boldsymbol{F}^*$. En outre, en appliquant les formules de de Morgan, on voit aussitôt que $\boldsymbol{F}^0$ satisfait aussi aux conditions 3 et 3'. Donc $\boldsymbol{F}^* \subset \boldsymbol{F}^0$, ce qui veut dire que tout ensemble appartenant à $\boldsymbol{F}^*$ est le complémentaire d'un ensemble qui appartient aussi à $\boldsymbol{F}^*$. Il en résulte que la famille $\boldsymbol{F}^*$ satisfait à la condition 2. Donc $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{F}^*$.

II. Classification des ensembles boreliens. On prouve par un simple raisonnement de la Théorie des ensembles[2]) que la famille des ensembles boreliens (donc la plus petite famille $\boldsymbol{F}$ satisfaisant aux conditions 1, 3 et 3') est la somme d'une suite transfinie (du type Ω) des familles:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_1 + \ldots + \boldsymbol{F}_\alpha + \ldots$$

telles que:

1° $\boldsymbol{F}_0$ est la famille des ensembles fermés,

2° les ensembles de la famille $\boldsymbol{F}_\alpha$ sont des produits ou des sommes de suites dénombrables d'ensembles appartenant à $\boldsymbol{F}_\xi$ avec $\xi < \alpha$, suivant que α est pair ou impair (les nombres limites étant considérés comme pairs).

---

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Sur les définitions axiomatiques des ensembles mesurables (B)*, Bull. Acad. Cracovie 1918, p. 29. Pour une généralisation appartenant à la Théorie générale des ensembles, voir du même auteur *Les ensembles boreliens abstraits*, Ann. Soc. Polonaise de Math. **6** (1927), p. 51.

[2]) Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 85. Voir aussi W. H. Young, Proc. London Math. Soc. (2) **12** (1913), p. 260.