### C. Problèmes de la dimension (§§ 20—23).

L'espace est supposé assujetti aux axiomes I—V. On peut donc admettre qu'une distance $|x-y|$ entre les points de cet espace est définie; autrement dit, qu'on est en présence d'un espace métrique séparable.

## § 20. Définitions. Propriétés générales.

**I. Définition de la dimension** [1]. On assigne à l'espace $\mathcal{X}$ un entier $n \geqslant -1$ ou $\infty$ que l'on appelle *dimension de* $\mathcal{X}$; en symbole: $\dim \mathcal{X}$. Le symbole $\dim_p \mathcal{X}$ désigne la *dimension de* $\mathcal{X}$ *au point* $p$. Les trois conditions suivantes définissent ces notions par induction:

1) $\dim \mathcal{X} = -1$ *veut dire que l'espace* $\mathcal{X}$ *est vide*,

2) *si* $\mathcal{X} \neq 0$, $\dim \mathcal{X} =$ *borne supérieure de* $\dim_p \mathcal{X}$ *pour* $p \in \mathcal{X}$.

3) $\dim_p \mathcal{X} \leqslant n+1$ *veut dire qu'il existe des entourages ouverts de* $p$ *aussi petits que l'on veut et dont la frontière est de dimension* $\leqslant n$.

Afin d'éviter l'emploi des notions métriques, on peut formuler la proposition 3) de la façon équivalente suivante:

3') $\dim_p \mathcal{X} \leqslant n+1$ *veut dire qu'il existe dans tout entourage de* $p$ *un entourage ouvert de* $p$ *dont la frontière est de dimension* $\leqslant n$.

La dimension de l'espace est ainsi définie de façon purement topologique; elle est donc *invariante relativement aux transformations homéomorphes de l'espace*.

*Exemples*. Par définition, un espace (non vide) est *de dimension* 0 lorsqu'il existe pour chaque point des entourages ouverts aussi petits que l'on veut dont la frontière est vide. Tel est par exemple l'espace des nombres rationnels, chaque intervalle aux extrémités irrationnelles ayant dans cet espace la frontière vide. Il en est de même de l'espace des nombres irrationnels et, en général, de chaque *ensemble frontière situé sur la ligne droite*.

L'espace des nombres réels est de dimension $\leqslant 1$, car la frontière d'un intervalle, comme composée de deux points, est de dimension 0. D'une façon analogue, le plan est de dimension $\leqslant 2$ (car la circonférence est de dimension $\leqslant 1$) et en général, *l'espace cartésien* $\mathcal{E}^n$ *est de dimension* $\leqslant n$. La démonstration que la dimension de cet espace est précisément égale à $n$ est moins élémentaire. Nous y reviendrons au § 23.

**II. Dimension des sous-ensembles.** Etant donnés un ensemble $E (\subset \mathcal{X})$ et un point $p$ de $E$, l'inégalité $\dim_p E \leqslant n+1$ signifie d'après 3) qu'il existe un entourage ouvert de $p$ *relatif à* $E$, aussi petit que l'on veut et dont la frontière relative à $E$ est de dimension $\leqslant n$; autrement dit, qu'il existe un ensemble ouvert $G$ aussi petit que l'on veut, contenant $p$ et tel que $\dim (E \cdot \overline{EG} - G) \leqslant n$. Car la frontière relative à $E$ de l'ensemble $EG$ est par définition

$$E \cdot \overline{EG} - EG = E \cdot \overline{EG} - G.$$

1. *La dimension d'un ensemble ne dépasse jamais la dimension de l'espace tout entier*; en symbole:

$$si\ p \in E, \text{ on a } \dim_p E \leqslant \dim_p \mathcal{X}.$$

En raisonnant par induction, on peut, en effet, admettre que cet énoncé soit vrai pour l'espace $n$-dimensionnel et que $\dim_p \mathcal{X} \leqslant n+1$. Soit donc $G$ un entourage ouvert de $p$ tel que $\dim [\mathrm{Fr}(G)] \leqslant n$. Il s'agit de prouver que la frontière relative à $E$ de l'ensemble $EG$ est de dimension $\leqslant n$. Or, cette frontière relative étant égale à

$$E \cdot \overline{EG} - G \subset \overline{G} - G = \mathrm{Fr}(G),$$

on a par hypothèse la double inégalité

$$\dim (E \cdot \overline{EG} - G) \leqslant \dim [\mathrm{Fr}(G)] \leqslant n.$$

2. *Pour que* $\dim_p E \leqslant n+1$, *il faut et il suffit qu'il existe un entourage ouvert* $G$ *de* $p$ *aussi petit que l'on veut et tel que*

$$\dim [E \cdot \mathrm{Fr}(G)] \leqslant n.$$

[1] L'idée de la définition de la dimension remonte à Henri Poincaré, Revue de métaph. et de mor. **20** (1912) et *Dernières pensées*, p. 65, Paris 1926 (édition posthume). La définition a été ensuite précisée par M. L. E. J. Brouwer, *Über den natürlichen Dimensionsbegriff*, Journ. f. Math. **142** (1913), p. 146 et Proc. Akad. Amsterdam, **26** (1923), p. 795. La théorie de la dimension, basée sur une définition bien proche de celle de Poincaré-Brouwer, a été créée et développée indépendamment par M. K. Menger et P. Urysohn dans plusieurs ouvrages à partir de l'année 1922. Voir surtout K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig-Berlin 1928 et P. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes*, Fund. Math. **7—8** (1925—26).

Pour un exposé plus moderne de la théorie de la dimension, voir W. Hurewicz et H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton 1941 (Princeton Math. Series N 4).

Pour une théorie de la dimension basée sur la notion d'homologie, voir P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. **106** (1932).

Supposons, en effet, que $\dim_p E \leqslant n+1$. Soit donc $H$ un ensemble ouvert dans $E$ et tel que $\dim(E\bar{H}-H) \leqslant n$. Les ensembles $H$ et $E-\bar{H}$ étant séparés (§ 16, V, 3), il existe (d'après § 16, V, 6) un ensemble ouvert $G$ tel que

$$H \subset G \quad \text{et} \quad \bar{G}\cdot E - \bar{H} = 0, \quad \text{d'où} \quad E\cdot\bar{G} - G \subset E\cdot\bar{H} - H,$$

et selon 1:

$$\dim(E\cdot\bar{G}-G) \leqslant \dim(E\cdot\bar{H}-H) \leqslant n.$$

Comme en outre, d'après § 16, V, 6, le diamètre de $G$ diffère aussi peu que l'on veut de celui de $H$, la nécessité de la condition se trouve établie.

Pour prouver que la condition est suffisante, considérons l'ensemble $G$ en question et posons $H = EG$. Il vient

$$E\cdot\bar{H}-H = E\cdot\overline{EG} - G \subset E\cdot\bar{G}-G = E\cdot\mathrm{Fr}(G),$$

d'où

$$\dim(E\cdot\bar{H}-H) \leqslant \dim[E\cdot\mathrm{Fr}(G)] \leqslant n, \text{ donc } \dim_p E \leqslant n+1.$$

Un cas particulier de l'énoncé 2 est le suivant:

$2_0$. *Pour que $\dim_p E = 0$, il faut et il suffit qu'il existe un entourage $G$ de $p$ aussi petit que l'on veut et tel que $E\cdot\mathrm{Fr}(G) = 0$.*

**III. L'ensemble** $E_{(n)}$. *Définition: $p$ appartient à l'ensemble $E_{(n)}$ lorsque* $\dim_p(E+p) \leqslant n$, c. à d. lorsqu'il existe un entourage $G$ de $p$ aussi petit que l'on veut et tel que $\dim[E\cdot\mathrm{Fr}(G)] \leqslant n-1$.

En particulier, si $E$ constitue l'espace $\mathfrak{X}$ tout entier, $E_{(n)}$ désigne l'ensemble des points où cet espace est de dimension $\leqslant n$.

L'inclusion $E \subset E_{(n)}$ équivaut à l'inégalité $\dim E \leqslant n$.

D'après II, 1, l'inclusion $A \subset B$ entraîne $B_{(n)} \subset A_{(n)}$.

1. $\dim(E\cdot E_{(n)}) \leqslant n$.

En effet, si $p \in E\cdot E_{(n)}$, on a par définition $\dim_p E \leqslant n$, donc, selon II, 1, $\dim_p(E\cdot E_{(n)}) \leqslant n$.

Il est, d'ailleurs, à remarquer que la dimension de $E_{(n)}$ peut être supérieure à $n$. Si par exemple $E$ se compose d'un seul point, $E_{(0)} = \mathfrak{X}$.

2. *L'ensemble $E_{(n)}$ est un $G_\delta$* [1]).

En effet, on a $p \in E_{(n)}$ lorsqu'il existe, pour chaque $k$, un ensemble ouvert $G$ contenant $p$ et tel que

$$\dim[E\cdot\mathrm{Fr}(G)] \leqslant n-1 \quad \text{et} \quad \delta(G) < {}^1\!/_k.$$

[1]) Voir K. Menger, *Über die Dimension von Punktmengen, II Teil*, Mon. f. Math. u. Phys. **34** (1924), p. 141; P. Urysohn, Fund. Math. **8** (1926), p. 277 et L. Tumarkin, Fund. Math. **8**, p. 360.



Désignons par $H_k$ la somme de tous les ensembles $G$ de ce genre. On a donc $E_{(n)} = H_1\cdot H_2\cdot\ldots$

3. *Etant donnés un ensemble $E$ et un entier $n$, il existe une suite $D_1, D_2, \ldots$ d'ensembles ouverts tels que:*

$1^0$ $\dim[E\cdot\mathrm{Fr}(D_i)] \leqslant n-1$,

$2^0$ *les ensembles $E_{(n)}\cdot D_i$, $i=1,2,\ldots$, constituent une base pour l'ensemble $E_{(n)}$*; autrement dit, pour tout point $p \in E_{(n)}$, il existe parmi les ensembles $D_i$ un qui contient $p$ et qui est de diamètre aussi petit que l'on veut,

$3^0$ *en posant* $S = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fr}(D_i)$, *on a les formules:*

$$E_{(n)} \subset (E-S)_{(0)} \quad \text{et} \quad \dim[E_{(n)}-S] \leqslant 0.$$

En effet, pour $k$ fixe, faisons correspondre à tout point $p \in E_{(n)}$ un ensemble ouvert $G(p)$ contenant $p$ et tel que

$$\dim\{E\cdot\mathrm{Fr}[G(p)]\} \leqslant n-1 \quad \text{et} \quad \delta[G(p)] < {}^1\!/_k.$$

D'après le théorème de Lindelöf (§ 17, I), on peut trouver une suite dénombrable $D_{k,1}, D_{k,2}, \ldots$ d'ensembles $G(p)$ dont la somme soit égale à celle de tous les $G(p)$. En transformant la suite double $\{D_{k,m}\}$ en une suite simple, on obtient la suite $\{D_i\}$ demandée.

Car tout point $p$ de $E_{(n)}$ étant contenu dans un ensemble $G(p)$ arbitrairement petit, il existe un $D_i$ tel que $p \in D_i \subset G(p)$, d'où la condition $2^0$.

La condition $3^0$ en est une conséquence en vertu de la formule évidente: $(E-S)\cdot\mathrm{Fr}(D_i) = 0 = (E_{(n)}-S)\cdot\mathrm{Fr}(D_i)$.

On déduit comme cas particulier de l'énoncé 3 que:

4. *Tout espace $n$-dimensionnel contient une base dénombrable composée d'ensembles ouverts à frontières de dimension $\leqslant n-1$. En enlevant de l'espace ces frontières, on obtient un ensemble 0-dimensionnel (ou vide).*

5. *La condition $\dim X \leqslant n$ entraîne $E_{(0)} \subset (E+X)_{(n+1)}$.*

En effet, si $p \in E_{(0)}$, il existe un entourage $G$ de $p$ tel que $E\cdot\mathrm{Fr}(G) = 0$. Donc $(E+X)\cdot\mathrm{Fr}(G) = X\cdot\mathrm{Fr}(G) \subset X$, d'où $\dim[(E+X)\cdot\mathrm{Fr}(G)] \leqslant n$, ce qui prouve que $p \in (E+X)_{(n+1)}$.

## § 21. Espace de dimension 0 [1]).

**I. Base de l'espace.** Un espace est par définition de dimension 0 lorsque tout point est situé dans un entourage aussi petit que l'on veut et qui est à la fois fermé et ouvert (ce qui équivaut à l'hypothèse que la frontière de cet entourage est vide). On en déduit le théorème suivant, qui résulte d'ailleurs directement de § 20, III, 4:

*Théorème I. Tout espace 0-dimensionnel contient une base dénombrable composée d'ensembles à la fois fermés et ouverts.*

On peut supposer, en outre, que *le diamètre de ces ensembles ne dépasse pas un nombre positif donné d'avance.*

*Corollaires. Dans un espace 0-dimensionnel:* 1) *Tout ensemble ouvert (en particulier, l'espace tout entier) est somme d'une suite d'ensembles disjoints, à la fois fermés et ouverts (et de diamètre aussi petit que l'on veut);* 2) *Tout ensemble fermé est produit d'une suite d'ensembles à la fois fermés et ouverts.*

Pour prouver le cor. 1, posons conformément au théor. I:

$$G = F_1 + F_2 + \dots = F_1 + (F_2 - F_1) + (F_3 - F_1 - F_2) + \dots$$

où $G$ est l'ensemble ouvert donné et $F_1, F_2, \dots$ sont des ensembles à la fois fermés et ouverts. Le dernier membre de la formule représente la décomposition demandée.

Le cor. 2 est une conséquence immédiate du cor. 1.

*Théorème I'* [2]). *Dans un espace 0-dimensionnel, tout ensemble $G_\delta$ qui est à la fois dense et frontière est le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur un système régulier d'ensembles $\{A_{k_1 \dots k_n}\}$ non vides, fermés, ouverts et tels que:* 1° $\delta(A_{k_1 \dots k_n}) < 1/n$, 2° *deux ensembles $A_{k_1 \dots k_n}$ et $A_{l_1 \dots l_n}$ pourvus des différents systèmes de $n$ indices sont toujours disjoints.*

Soit $Q$ l'ensemble $G_\delta$ en question: $Q = G_1 \cdot G_2 \cdot \dots$, où $G_n$ est ouvert et $G_n \supset G_{n+1}$. L'ensemble $Q$ n'étant pas fermé, il existe un indice $j_1$ tel que $G_{j_1}$ n'est pas fermé. On peut donc poser en vertu du corollaire 1:

$$G_{j_1} = A_1 + A_2 + \dots, \quad \delta(A_i) < 1,$$

les ensembles $A_i$ étant fermés, ouverts, disjoints et non vides.

[1]) La plupart des théorèmes de ce § seront généralisés par induction dans le § suivant, où l'on trouvera aussi les renvois bibliographiques.

[2]) Ce théorème interviendra dans l'étude des espaces complets (§ 32).



Procédons par induction. Les ensembles $A_{k_1 \dots k_n}$ supposés définis et assujettis à l'inclusion

$$\text{(i)} \qquad A_{k_1 \dots k_n} \subset G_n$$

pour un entier $n \geqslant 1$, les ensembles $A_{k_1 \dots k_n k_{n+1}}$ seront définis comme il suit:

L'ensemble $A_{k_1 \dots k_n}$ étant ouvert, il existe un indice $j_{n+1} \geqslant n+1$ tel que l'ensemble $A_{k_1 \dots k_n} \cdot G_{j_{n+1}}$ n'est pas fermé; car autrement l'ensemble $Q \cdot A_{k_1 \dots k_n}$ serait fermé, contrairement à l'hypothèse qu'il est dense et frontière dans $A_{k_1 \dots k_n}$. On peut donc poser comme auparavant:

$$A_{k_1 \dots k_n} \cdot G_{j_{n+1}} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{k_1 \dots k_n i}, \quad \delta(A_{k_1 \dots k_n i}) < 1/_{n+1},$$

les ensembles $A_{k_1 \dots k_n i}$ étant fermés, ouverts, disjoints et non vides. En outre, on peut remplacer dans (i) $n$ par $n+1$ en vertu de l'inégalité $j_{n+1} \geqslant n+1$, qui implique que $G_{j_{n+1}} \subset G_{n+1}$.

Les ensembles $A_{k_1 \dots k_n}$ étant ainsi définis pour tout $n$, nous allons démontrer que $Q$ coïncide avec le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur ces ensembles.

Soit, d'une part, $p \in Q$. Donc $p \in G_{j_1}$. Il existe par conséquent un indice $k_1$ tel que $p \in A_{k_1}$. Supposons que $p \in A_{k_1 \dots k_n}$. Comme en outre $p \in G_{j_{n+1}}$, il existe un $k_{n+1}$ tel que $p \in A_{k_1 \dots k_n k_{n+1}}$. On parvient ainsi à la formule

$$p \in A_{k_1} \cdot A_{k_1 k_2} \cdot A_{k_1 k_2 k_3} \cdot \dots$$

D'autre part, si cette dernière formule est vérifiée, l'inclusion (i) implique que $p \in G_1 \cdot G_2 \cdot \dots = Q$.

**II. Théorèmes de réduction et de séparation.** Dans les espaces 0-dimensionnels (séparables), le th. 3 du § 16, II se laisse préciser: les ensembles $F_\iota$ de la formule (2) peuvent être supposés *fermés-ouverts*. On a, en effet, l'énoncé suivant (cf. aussi le th. de Lindelöf):

*Théorème II (de réduction)* [1]). *L'espace 1 étant supposé de dimension 0, à toute suite (finie ou infinie) d'ensembles ouverts $G_0, G_1, \dots$, correspond une suite d'ensembles ouverts disjoints $H_0, H_1, \dots$ tels que*

$$\text{(0)} \qquad H_\iota \subset G_\iota \quad \text{et} \quad H_0 + H_1 + \dots = G_0 + G_1 + \dots$$

[1]) Voir ma note *Sur les théorèmes de séparation dans la Théorie des ensembles*, Fund. Math. **26** (1936), p. 184.

Par conséquent, *si* $1=G_0+G_1+\dots$, *les ensembles* $H_i$ *sont fermés-ouverts.*

Posons, en effet, $G_i=F_{i,0}+F_{i,1}+\dots$ où $F_{i,j}$ est fermé-ouvert (cf. I; cor. 1). Rangeons la double suite $\{i,j\}$ en une suite simple. Soit $n=\varphi(i,j)$ l'entier qui vient correspondre ainsi au couple $i,j$. Soit $F^*_{i,j}=F_{i,j}-\sum F_{k,l}$, la sommation (finie) étant étendue aux couples $k,l$ tels que $\varphi(k,l)<\varphi(i,j)$. Evidemment

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} F^*_{i,j}=\sum_{i,j=0}^{\infty} F_{i,j}=\sum_{i=0}^{\infty} G_i.$$

Posons $H_i=\sum_{j=0}^{\infty} F^*_{i,j}$. Il vient $\sum_{i=0}^{\infty} H_i=\sum_{i=0}^{\infty} G_i$ et

$$H_i\subset F_{i,0}+F_{i,1}+\dots=G_i.$$

Les ensembles $F^*_{i,j}$ étant disjoints deux à deux, les $H_i$ le sont également.

Le théorème de réduction implique le théorème suivant:

*Théorème III (de séparation). Etant donnée dans un espace 0-dimensionnel une suite (finie ou infinie) d'ensembles fermés* $F_0, F_1, \dots$ *tels que* $F_0\cdot F_1\cdot\ldots=0$, *il existe une suite d'ensembles fermés-ouverts* $E_1, E_2, \dots$ *tels que*

$$F_i\subset E_i \quad \text{et} \quad E_1\cdot E_2\cdot\ldots=0.$$

En particulier: $A$ *et* $B$ *étant deux ensembles fermés et disjoints, il existe un ensemble fermé et ouvert* $E$ *tel que* $A\subset E$ *et* $EB=0$ [1].

Appliquons, en effet, le théorème de réduction en posant

$$G_i=1-F_i \quad \text{et} \quad E_i=1-H_i.$$

Par hypothèse et selon (0)

$$\sum_{i=0}^{\infty} G_i=1-\prod_{i=0}^{\infty} F_i=1=\sum_{i=0}^{\infty} H_i.$$

Donc $H_i$, ainsi que $E_i$, est fermé-ouvert. De plus, la dernière égalité implique que $E_0\cdot E_1\cdot\ldots=0$ et l'inclusion $H_i\subset G_i$ donne $F_i\subset E_i$.

[1]) On voit ainsi que, dans les espaces 0-dimensionnels, l'axiome de séparation se laisse énoncer sous une forme plus avantageuse.



La deuxième partie du th. III admet la généralisation suivante:

*Théorème III a. Etant donné un système fini* $A_0,\dots,A_k$ *de sous-ensembles fermés et disjoints d'un espace de dimension* 0, *il existe un système* $F_0,\dots,F_k$ *d'ensembles fermés, ouverts, disjoints et tels que*

$$1=F_0+\dots+F_k \quad \text{et} \quad A_i\subset F_i.$$

Procédons par induction. Le théorème étant vrai pour $k=1$, admettons qu'il l'est encore pour $k-1$ et que $k\geqslant 2$. Il existe donc un système d'ensembles fermés-ouverts et disjoints $F_0,\dots,F_{k-2},F^*$ tels que

$$1=F_0+\dots+F_{k-2}+F^*,\quad A_0\subset F_0,\quad \dots,\quad A_{k-2}\subset F_{k-2},\quad A_{k-1}+A_k\subset F^*.$$

En appliquant le th. II au couple d'ensembles $A_{k-1}$, $A_k$ et à l'ensemble $F^*$, considéré comme l'espace, il vient

$$F^*=F_{k-1}+F_k,\quad A_{k-1}\subset F_{k-1},\quad A_k\subset F_k,\quad F_{k-1}\cdot F_k=0,$$

les ensembles $F_{k-1}$ et $F_k$ étant fermés-ouverts dans $F^*$, donc dans 1.

*Corollaires.* 1. *Tout sous-ensemble ouvert* $G$ *d'un espace 0-dimensionnel et totalement borné est de la forme*

$$(1) \qquad G=F_0+F_1+\dots,\quad F_iF_j=0 \quad \text{pour } i\neq j,\quad \lim_{n=\infty}\delta(F_n)=0,$$

*les ensembles* $F_i$ *étant fermés et ouverts.*

2. $F$ *étant un sous-ensemble fermé et non vide d'un espace 0-dimensionnel, l'espace se laisse transformer en* $F$ *par une fonction continue qui est une identité sur* $F$ [1]).

Autrement dit, $F$ *est un retracte de l'espace.*

En conséquence (§ 13, V, 4):

3. *Toute fonction continue* $f$ *définie sur un sous-ensemble fermé* $F$ *d'un espace 0-dimensionnel se laisse étendre sur l'espace tout entier de façon que ses valeurs ne débordent pas l'ensemble* $f(F)$.

Afin d'établir 1, envisageons conformément au cor. 1 du N° I, une suite d'ensembles fermés, ouverts et bornés $F^*_0, F^*_1, \dots$ qui satisfont aux deux premières égalités (1). En tant que totalement borné, $F^*_n$ est de la forme

$$F^*_n=H_{n0}+\dots+H_{nk_n} \quad \text{où} \quad \delta(H_{ni})<1/n.$$

[1]) Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. **11** (1928), p. 118.

Soit $G_{ni}$ un ensemble ouvert tel que $H_{ni} \subset G_{ni} \subset F_n^*$ et que $\delta(G_{ni}) < 1/n$. Donc $F_n^* = G_{n0} + \ldots + G_{nk_n}$. En appliquant le th. II à l'ensemble $F_n^*$ considéré comme l'espace, il vient

$$F_n^* = F_{n0} + \ldots + F_{nk_n}, \quad F_{ni} \cdot F_{nj} = 0 \text{ pour } i \neq j, \quad F_{ni} \subset G_{ni},$$

les ensembles $F_{n0}, \ldots, F_{nk_n}$ étant fermés-ouverts dans $F_n^*$, donc dans l'espace.

Comme $F_{ni} \subset G_{ni}$, on a $\delta(F_{ni}) < 1/n$. On en conclut aussitôt que la suite $F_{00}, \ldots, F_{0k_0}, F_{10}, \ldots, F_{1k_1}, \ldots$ est la suite demandée.

Le cor. 1 établi, nous en déduirons le cor. 2.

Il est légitime d'admettre que l'espace est totalement borné, puisque chaque espace métrique séparable est homéomorphe à un espace totalement borné (§ 15, XII, corollaire).

Posons $G = 1 - F$. Conformément au cor. 1, envisageons une suite d'ensembles fermés-ouverts non vides $F_1, F_2, \ldots$ assujettie à (1). Soit $p_n$ un point de $F$ tel que

$$\text{(i)} \qquad \varrho(p_n, F_n) < \varrho(F, F_n) + 1/n.$$

Posons

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in F \\ p_n & \text{pour } x \in F_n. \end{cases}$$

Les ensembles $F_n$ étant ouverts et disjoints, la fonction $f$ est continue sur $G$. Pour prouver qu'elle est continue sur $F$, posons

$$\text{(ii)} \qquad x_0 \in F, \quad x_0 = \lim_{n=\infty} x_n, \quad x_n \in G, \quad \text{donc} \quad x_n \in F_{k_n}.$$

Comme fermé et disjoint de $F$, l'ensemble $F_n$ ne peut contenir qu'un nombre fini de termes de la suite $x_1, x_2, \ldots$ On a donc (cf. (1)) $\lim_{n=\infty} \delta(F_{k_n}) = 0$. D'autre part, les conditions (ii) impliquent $\lim_{n=\infty} \varrho(F, F_{k_n}) = 0$ et il vient (d'après (i)): $\lim_{n=\infty} \delta(F_{k_n} + p_{k_n}) = 0$, d'où

$$\lim_{n=\infty} |x_n - p_{k_n}| = 0, \quad \text{c. à d.} \quad \lim_{n=\infty} |x_n - f(x_n)| = 0,$$

donc

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = \lim_{n=\infty} x_n = x_0 = f(x_0),$$

ce qui prouve que la fonction $f$ est continue au point $x_0$.



*Corollaire.* 4. *Etant donnée une suite (finie ou infinie) d'ensembles fermés $F_0, F_1, \ldots$, il existe une suite d'ensembles ouverts $B_0, B_1, \ldots$ tels que*

$$\text{(2)} \qquad F_i - \prod_{m=0}^{\infty} F_m \subset B_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=0}^{\infty} B_i = 0.$$

Posons, en effet, dans le th. II:

$$\text{(3)} \qquad G_i = 1 - F_i \quad \text{et} \quad B_i = \sum_{j \neq i} H_j.$$

Posons, en outre,

$$\text{(4)} \qquad S = \sum_{i=0}^{\infty} H_i, \quad \text{d'où} \quad S = \sum_{i=0}^{\infty} G_i.$$

Il vient selon (3) et (1):

$$F_i - \prod_{m=0}^{\infty} F_m = \sum_{m=0}^{\infty} G_m - G_i = S - G_i = (B_i + H_i) - G_i$$
$$= (B_i - G_i) + (H_i - G_i) = B_i - G_i \subset B_i.$$

D'autre part, comme $B_i = S - H_i$, on a d'après (4):

$$\prod_{i=0}^{\infty} B_i = \prod_{i=0}^{\infty} (S - H_i) = S - \sum_{i=0}^{\infty} H_i = 0.$$

### III. Addition des ensembles 0-dimensionnels.

*Théorème IV. Si un espace se laisse décomposer en une série (finie ou infinie) d'ensembles fermés: $1 = A_1 + A_2 + \ldots$ dont tous, sauf peut-être le premier, sont de dimension 0, tandis que le premier est de dimension 0 dans un point donné $p$, l'espace tout entier est de dimension 0 au point $p$.*

Soit $S$ une sphère ouverte de centre $p$. Il s'agit de construire un ensemble fermé et ouvert $G$ tel que $p \in G \subset S$.

L'ensemble $G$ sera défini comme somme d'une série d'ensembles ouverts croissants $G_n$. Ces derniers seront définis par induction simultanément avec des ensembles ouverts croissants $H_n$, de façon que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

$$\text{(i)} \quad \overline{G}_n \cdot \overline{H}_n = 0, \qquad \text{(ii)} \quad A_n \subset G_n + H_n.$$

L'ensemble $A_1$ étant de dimension 0 au point $p$, il existe un ensemble $F_1$ qui contient ce point et qui est fermé-ouvert relativement à $A_1$. L'ensemble $A_1$ étant fermé, les ensembles $F_1$

et $A_1-F_1$ sont donc fermés. On peut supposer de plus que $F_1$ soit contenu dans la sphère $S$, de sorte que les ensembles $F_1$ et $(A_1-F_1)+(1-S)$ soient fermés et disjoints. En appliquant l'axiome de séparation (voir d'ailleurs § 16, II), on en déduit l'existence de deux ensembles ouverts $G_1$ et $H_1$ tels que

$$F_1 \subset G_1, \quad A_1-F_1+1-S \subset H_1 \quad \text{et} \quad \bar{G}_1 \cdot \bar{H}_1 = 0.$$

Les conditions (i) et (ii) sont donc satisfaites pour $n=1$. Supposons qu'elles le soient pour $n$; nous allons les établir pour $n+1$.

Les ensembles $A_{n+1} \cdot \bar{G}_n$ et $A_{n+1} \cdot \bar{H}_n$ étant fermés et disjoints et $A_{n+1}$ étant de dimension 0, il existe d'après le théorème III un ensemble $F_{n+1}$ fermé-ouvert dans $A_{n+1}$ et tel que: $A_{n+1} \cdot \bar{G}_n \subset F_{n+1}$, $F_{n+1} \cdot \bar{H}_n = 0$. Les ensembles $F_{n+1}$ et $A_{n+1}-F_{n+1}$ étant fermés (puisque $A_{n+1}-F_{n+1}$ est fermé relativement à l'ensemble $A_{n+1}$, qui est lui-même fermé), les ensembles $(\bar{G}_n+F_{n+1})$ et $\bar{H}_n+(A_{n+1}-F_{n+1})$ sont fermés et disjoints. En vertu de l'axiome de séparation, il existe deux ensembles ouverts $G_{n+1}$ et $H_{n+1}$ tels que:

$$\bar{G}_n+F_{n+1} \subset G_{n+1}, \quad \bar{H}_n+A_{n+1}-F_{n+1} \subset H_{n+1} \quad \text{et} \quad \bar{G}_{n+1} \cdot \bar{H}_{n+1} = 0.$$

Les conditions (i) et (ii) se trouvent donc satisfaites pour $n+1$.

En outre, les ensembles $G_n$ et $H_n$ étant croissants, la condition $G_n \cdot H_n = 0$, qui résulte de (i), entraîne $G_n \cdot H_m = 0$, quels que soient $n$ et $m$ (puisque $G_n \cdot H_{n+k} \subset G_{n+k} \cdot H_{n+k} = 0$). Par conséquent, si l'on pose

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \quad \text{et} \quad H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n,$$

il vient $GH=0$. D'autre part, selon (ii),

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} (G_n+H_n) = G+H$$

et on en conclut que $H=1-G$. Les ensembles $G$ et $H$ étant ouverts, l'ensemble $G$ est donc à la fois fermé et ouvert.

Reste à prouver que $p \in G \subset S$. Or la définition de $G_1$ donne $p \in F_1 \subset G_1 \subset G$. D'autre part, la définition de $H_1$ donne $1-S \subset H_1$, d'où $1-H_1 \subset S$ et, les ensembles $G$ et $H_1$ étant disjoints, il vient $G \subset 1-H_1 \subset S$.

*Corollaires.* 1. *La somme d'une suite dénombrable d'ensembles 0-dimensionnels fermés* (ou, plus généralement, d'ensembles $F_\sigma$ 0-dimensionnels) *est un ensemble 0-dimensionnel.*



2. *La somme de deux ensembles 0-dimensionnels dont l'un est à la fois un $F_\sigma$ et un $G_\delta$ est 0-dimensionnelle.*

3. *En ajoutant à un ensemble 0-dimensionnel un seul point, on n'altère pas sa dimension*; en symbole: *si* $\dim A=0$, *on a* $A_{(0)}=1$.

4. *$G$ étant un ensemble ouvert, la condition* $\dim(EG) \leqslant 0$ *entraîne* $E_{(0)}=(E-G)_{(0)}$.

Pour prouver le corollaire 1, on n'a qu'à considérer la somme des ensembles en question comme l'espace. Le corollaire 2 en résulte, car les deux ensembles envisagés sont des ensembles $F_\sigma$ relativement à leur somme. Le corollaire 3 est un cas particulier du corollaire 2. Enfin, pour établir le corollaire 4, posons $p \in (E-G)_{(0)}$, c. à d. $\dim_p(p+E-G)=0$. L'ensemble $p+E$ étant considéré comme l'espace et l'ensemble $EG$ étant, dans cet espace, une somme dénombrable d'ensembles fermés de dimension 0, on conclut du théorème IV que l'ensemble $(p+E-G)+EG=p+E$ est de dimension 0 au point $p$, c. à d. que $p \in E_{(0)}$, d'où le cor. 4.

*Remarques.* Le théorème IV serait en défaut, si l'on supposait seulement que $\dim_p A_n=0$. Divisons, en effet, l'intervalle $\mathcal{J}=01$ en une suite d'intervalles convergeant vers 0. Soit $A_1$ l'ensemble composé du point 0 et des intervalles pairs; soit $A_2$ l'ensemble composé de 0 et des intervalles impairs. Evidemment $\dim_p A_1=0=\dim_p A_2$, tandis que $\dim_p(A_1+A_2)=1$.

On ne peut remplacer non plus l'hypothèse que $A_1$ est fermé par celle que $A_1$ est un $F_\sigma$, comme le prouve l'exemple suivant: $A_2$ est une suite de points convergeant vers le point 0 ($=p$) et $A_1=\mathcal{J}-A_2$.

## IV. Prolongement des ensembles 0-dimensionnels.

*Théorème V. Tout ensemble 0-dimensionnel est contenu dans un $G_\delta$ 0-dimensionnel.*

En effet, d'après § 20, III, 3, à chaque ensemble $E$ correspond un ensemble $S$ qui est un $F_\sigma$ tel que $ES=0$ et $\dim[E_{(0)}-S] \leqslant 0$. Or, si l'on suppose que $\dim E=0$, on a selon N° III, cor. 3, $E_{(0)}=1$. $1-S$ est donc un $G_\delta$ 0-dimensionnel qui contient l'ensemble $E$[1]).

*Théorème VI*[2]). *Tout espace 0-dimensionnel est topologiquement contenu dans l'ensemble parfait non-dense $\mathcal{C}$ de Cantor.*

[1]) Pour une démonstration basée sur une idée différente, voir § 31, II, 2.

[2]) P. Urysohn, Fund. Math. **7** (1925), p. 77.

L'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor est par définition (§ 1, VIII et § 14, V, 2) l'ensemble des suites $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}^1,\mathfrak{z}^2,\ldots]$ où $\mathfrak{z}^i$ admet l'une des deux valeurs: 0 ou 2. Il s'agit de définir une fonction bicontinue $\mathfrak{z}(x)$ dont l'argument parcourt l'espace 0-dimensionnel considéré.

Or, $R_1,R_2,\ldots,R_i,\ldots$ étant la base de l'espace composée d'ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés (th. 1), désignons par $\mathfrak{z}(x)$ sa fonction caractéristique, c. à d. que $\mathfrak{z}^i(x)=2$ lorsque $x\in R_i$ et $\mathfrak{z}^i(x)=0$ dans le cas contraire. Comme fonction caractéristique d'une suite d'ensembles fermés-ouverts, la fonction $\mathfrak{z}(x)$ est continue (§ 14, IV, 4). Pour prouver qu'elle est bicontinue, reste à démontrer (§ 13, VIII (3a)) que la condition $p\in 1-\overline{X}$ entraîne $\mathfrak{z}(p)\in \mathcal{C}-\overline{\mathfrak{z}(X)}$.

Or, d'après la définition de la base, il existe un indice $i$ tel que $p\in R_i\subset 1-\overline{X}\subset 1-X$. Donc $\mathfrak{z}^i(p)=2$, tandis que pour $x\in X$ on a $\mathfrak{z}^i(x)=0$; par conséquent $|\mathfrak{z}(p)-\mathfrak{z}(x)|\geqslant 1/3^i$ (nous identifions ici la suite $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}^1,\mathfrak{z}^2,\ldots,\mathfrak{z}^i,\ldots]$ au nombre $\dfrac{\mathfrak{z}^1}{3}+\dfrac{\mathfrak{z}^2}{3^2}+\ldots+\dfrac{\mathfrak{z}^i}{3^i}+\ldots$). Le nombre $\mathfrak{z}(p)$ ne peut donc appartenir à la fermeture de l'ensemble des nombres $\mathfrak{z}(x)$, c. à d. que $\mathfrak{z}(p)\in\mathcal{C}-\overline{\mathfrak{z}(X)}$.

*Corollaire. L'ensemble parfait non-dense $\mathcal{C}$ de Cantor a le rang topologique le plus élevé parmi tous les espaces 0-dimensionnels.*

Car l'ensemble $\mathcal{C}$ est lui-même 0-dimensionnel, comme sous-ensemble frontière de la ligne droite (voir § 20, I, exemples).

*Remarque.* La même propriété appartient aussi à *l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels* (de l'intervalle 01). Car l'ensemble $\mathcal{N}$, comme l'espace de toutes les suites infinies formées de nombres naturels, contient l'ensemble des suites formées de deux nombres 1 et 2, qui est homéomorphe à $\mathcal{C}$. Inversement $\mathcal{N}$, comme ensemble frontière dans un intervalle, est 0-dimensionnel; il est donc contenu topologiquement dans $\mathcal{C}$.

On pourrait dire aussi: l'ensemble $\mathcal{C}$, ainsi que $\mathcal{N}$, ont le rang topologique le plus élevé parmi les ensembles frontières de l'espace des nombres réels.

**V. Espaces dénombrables.** *Tout espace de puissance inférieure à celle du continu est 0-dimensionnel.*

De façon plus générale, *si l'espace est d'ordre inférieur à $\mathfrak{c}$ au point $p$* (voir § 18, VII), *l'espace est 0-dimensionnel en ce point.*

En effet, parmi les sphères de rayon $<\varepsilon$, décrites du point $p$, il y en a qui ont la frontière (la „surface") vide (puisque les frontières de deux sphères différentes sont disjointes). Une sphère de ce genre est donc à la fois fermée et ouverte.



*Tout espace dénombrable est topologiquement contenu dans l'ensemble $\mathcal{R}_0$ des nombres rationnels.*

Soit, en effet, $A$ un espace dénombrable. $A$ étant topologiquement contenu dans $\mathcal{C}$, on peut l'imaginer comme sous-ensemble de l'espace des nombres réels.

D'après un théorème classique de la théorie des ensembles ordonnés, les ensembles $A+\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_0$ ont le même type d'ordre, c. à d. qu'il existe une fonction croissante $f(x)$ qui transforme $A+\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{R}_0$. Cette fonction est continue, car, étant donnée une suite $x_1<x_2<\ldots$ qui converge vers $x$ (les points $x_n$ et $x$ étant supposés des points de $A+\mathcal{R}_0$), $x$ est dans l'ensemble $A+\mathcal{R}_0$ le premier point qui succède à tous les points $x_n$ et, en vertu de la similitude des ensembles $A+\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_0$, le point $f(x)$ a dans l'ensemble $\mathcal{R}_0$ la même propriété par rapport à la suite $f(x_1), f(x_2),\ldots$ Or, si l'on supposait que $f(x)\neq\lim\limits_{n=\infty} f(x_n)$, il existerait un nombre rationnel à la fois supérieur à tous les $f(x_n)$ et inférieur à $f(x)$, ce qui est évidemment impossible.

Il est ainsi établi que la fonction $f$ est continue. Pour les mêmes raisons la fonction inverse $x=f^{-1}(y)$ est continue; $f$ est donc une homéomorphie qui transforme $A$ en une partie de $\mathcal{R}_0$.

Ajoutons qu'une méthode analogue permet de prouver facilement que *tous les espaces dénombrables denses en soi constituent un seul type topologique* (c. à d. qu'ils sont homéomorphes) [1].

## § 22. Espace de dimension $n$.

### I. Addition des ensembles.

(+) *La somme d'un ensemble $n$-dimensionnel et d'un ensemble 0-dimensionnel est de dimension $\leqslant n+1$.*

Autrement dit, les formules $\dim(1-Q)=n$ et $\dim Q=0$ entraînent $\dim 1\leqslant n+1$.

L'ensemble $Q+p$ étant 0-dimensionnel quel que soit $p$ (§ 21, III, 3), il existe un entourage $G$ de $p$ aussi petit que l'on veut et tel que $Q\cdot\mathrm{Fr}(G)=0$ (d'après § 20, II, $2_0$), c. à d. que $\mathrm{Fr}(G)\subset 1-Q$, d'où $\dim\mathrm{Fr}(G)\leqslant n$. Donc $\dim 1\leqslant n+1$.

[1] W. Sierpiński, Fund. Math. 1 (1920), p. 11 et Wektor 1915.

*Théorème 1*[1]). *Si un espace se laisse décomposer en une série (finie ou infinie) d'ensembles fermés n-dimensionnels:* $1=A_1+A_2+\ldots$, *il est lui-même de dimension n.*

Le théorème étant vrai pour $n=0$ (§ 21, III, théor. IV), supposons qu'il soit vrai pour $n-1$. Posons

$$B_1=A_1 \text{ et, en général, } B_k=A_k-(B_1+\ldots+B_{k-1}).$$

Les ensembles $B_k$ sont donc des $F_\sigma$ disjoints et l'on a:

$$1=B_1+B_2+\ldots,\quad \dim B_k\leqslant n.$$

D'après § 20, III, 3 (en y posant $B_k=E\subset E_{(n)}$ et $S_k=E\cdot S$), il existe un ensemble $S_k$, somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de dimension $\leqslant n-1$ fermés dans $B_k$, et tel que $\dim(B_k-S_k)\leqslant 0$. Les ensembles fermés dans $B_k$ étant des $F_\sigma$, puisque $B_k$ est un $F_\sigma$, et la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles $F_\sigma$ de dimension $n-1$ étant par hypothèse $(n-1)$-dimensionnelle, on a $\dim S_k\leqslant n-1$, d'où pour la même raison

$$\dim(S_1+S_2+\ldots)\leqslant n-1.$$

Les ensembles $B_k$ étant disjoints, il vient:

$$B_i\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(B_i\cdot B_k-S_k)=B_i-S_i.$$

On voit ainsi que l'ensemble $B_i-S_i$, en tant que produit d'un $F_\sigma$ et de $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)$, est un $F_\sigma$ dans ce dernier. Donc l'ensemble $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)$, considéré comme l'espace, est somme d'une série d'ensembles $F_\sigma$ de dimension $\leqslant 0$. Par conséquent $\dim\sum\limits_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)\leqslant 0$.

L'identité $1=\sum\limits_{k=1}^{\infty}B_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}S_k+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(B_k-S_k)$ représente donc l'espace comme somme d'un ensemble de dimension $\leqslant n-1$ et d'un ensemble de dimension $\leqslant 0$. D'après (+), l'espace est de dimension $\leqslant n$.

[1]) Voir W. Hurewicz, *Normalbereiche und Dimensionstheorie*, Math. Ann. **96** (1927), p. 760 et L. Tumarkin, *Über die Dimension nicht abgeschlossener Mengen*, Math. Ann. (1928), p. 641. Pour l'espace compact, voir K. Menger, Monatsh. **34** (1924), p. 147 et P. Urysohn, Fund. Math. **8** (1926), p. 316.



*Corollaires.* 1. *La somme d'une suite dénombrable d'ensembles $F_\sigma$ n-dimensionnels est n-dimensionnelle.*

2. *La somme de deux ensembles n-dimensionnels dont un est à la fois un $F_\sigma$ et un $G_\delta$ est n-dimensionnelle.*

3. *En ajoutant à un ensemble (non vide) un seul point, on n'altère pas sa dimension.*

4. *Etant donnés un ensemble E et un entier n, il existe un ensemble S qui est un $F_\sigma$ tel que*

$$\dim ES\leqslant n-1,\quad E_{(n)}\subset(E-S)_{(0)}\quad \textit{et}\quad \dim[E_{(n)}-S]\leqslant 0.$$

En particulier, *tout espace n-dimensionnel se compose d'un $F_\sigma$ $(n-1)$-dimensionnel et d'un $G_\delta$ 0-dimensionnel.*

5. *G étant un ensemble ouvert, la condition* $\dim(EG)\leqslant n$ *entraîne* $E_{(n)}=(E-G)_{(n)}$.

6. *Les conditions*: $1=A_1+A_2+\ldots$, $A_k=\bar{A}_k$, $\dim_p A_1\leqslant n$ *et* $\dim A_k\leqslant n$ *pour* $k>1$, *impliquent que* $\dim_p 1\leqslant n$.

Les cor. 1—3 sont des conséquences faciles du théor. 1 (cf. d'ailleurs la démonstration des corollaires du Nº III, § 21). En envisageant l'ensemble $S$ du § 20, III, 3 et en considérant l'ensemble $ES$ comme l'espace, on déduit du cor. 1 que $\dim ES\leqslant n-1$.

En particulier, si $E$ désigne l'espace $n$-dimensionnel tout entier, il vient $E_{(n)}=1$ et $1=(1-S)_{(0)}$, d'où $\dim(1-S)=0$.

Le cor. 4 se trouve ainsi établi. En y substituant respectivement $E-G$ et $EG$ à $E$, on en déduit l'existence de deux ensembles $F_\sigma$: $S$ et $W$ tels que:

$$\dim(SE-G)\leqslant n-1,\quad (E-G)_{(n)}\subset(E-G-S)_{(0)},$$
$$\dim(WEG)\leqslant n-1\quad \text{et}\quad \dim(EG-W)\leqslant 0,$$

puisque par hypothèse $EG\subset(EG)_{(n)}$. Or, l'ensemble $E-G-S$ s'obtenant de $(E-G-S+EG-W)$ par soustraction de l'ensemble ouvert $G$, dont le produit avec ce dernier est 0-dimensionnel, on conclut de § 21, III, cor. 4 que

$$(E-G-S+EG-W)_{(0)}=(E-G-S)_{(0)}.$$

Les ensembles $SE-G$ et $WEG$ étant de dimension $\leqslant n-1$ et, en outre, des $F_\sigma$ relativement à $E$, il résulte du corollaire 1 que leur somme est aussi de dimension $\leqslant n-1$. Par conséquent (§ 20, III, 5):

$$(E-G-S+EG-W)_{(0)}\subset(E-G-S+EG-W+SE-G+WEG)_{(n)}=E_{(n)},$$

donc $(E-G)_{(n)}\subset(E-G-S)_{(0)}\subset E_{(n)}$, d'où le cor. 5.

Pour prouver le cor. 6, posons $E=1$ et $G=1-A_1$. D'après le cor. 1, on a $\dim(A_2+A_3+\ldots)\leqslant n$, donc $\dim G\leqslant n$. L'hypothèse $p\in(1-G)_{(n)}$ implique donc en vertu du cor. 5 que $\dim_p 1\leqslant n$.

*Théorème 2*[1]. *Pour qu'un espace (non vide) soit de dimension $\leqslant n$, il faut et il suffit qu'il soit somme de $n+1$ ensembles 0-dimensionnels.*

Le théorème étant évident pour $n=0$, supposons qu'il soit vrai pour $n-1$. D'après le cor. 4, un espace $n$-dimensionnel se compose d'un ensemble 0-dimensionnel et d'un ensemble $(n-1)$-dimensionnel. En décomposant ce dernier en $n$ ensembles 0-dimensionnels, on obtient une décomposition de l'espace en $n+1$ ensembles 0-dimensionnels.

Le fait que la somme de $n+1$ ensembles 0-dimensionnels est de dimension $\leqslant n$ est une conséquence immédiate de (+).

*Corollaire*[2]. *Si* $\dim A=n$ *et* $\dim B=m$, *on a* $\dim(A+B)\leqslant$ $\leqslant n+m+1$.

**II. Séparation des ensembles fermés.**

*Théorème 3 (cf. le th. III). $A$ et $B$ étant deux ensembles fermés et disjoints, situés dans un espace $n$-dimensionnel, il existe un ensemble ouvert $G$ tel que*

$$A\subset G,\quad \overline{G}\cdot B=0\quad \textit{et}\quad \dim[\mathrm{Fr}(G)]\leqslant n-1\ ^{3)}.$$

De façon plus générale: *$A$ et $B$ étant deux ensembles fermés et disjoints et $E$ un ensemble de dimension $n\geqslant 0$ (situés dans un espace $1$ de dimension arbitraire), il existe deux ensembles fermés $M$ et $N$ tels que*

$$1=M+N,\quad AN=0=BM\quad \textit{et}\quad \dim EMN\leqslant n-1.$$

Il existe, en effet (§ 17, V, 2), une transformation continue $f$ de l'espace $1$ en un espace métrique séparable $1^*$ contenant deux points $a$ et $b$ tels que $f^{-1}(a)=A$, $f^{-1}(b)=B$ et que $f$ est une homéomorphie sur $1-(A+B)$. On a donc

$$\dim f[E-(A+B)]=\dim[E-(A+B)]\leqslant n$$

[1]) W. Hurewicz, l. c. p. 761 et L. Tumarkin, l. c. p. 641.

[2]) Ce corollaire peut d'ailleurs être déduit par l'induction complète directement de la définition de la dimension (plus précisément de § 20, II (2)). Voir K. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 114.

[3]) W. Hurewicz, l. c. p. 763 et L. Tumarkin, l. c. p. 653. Comp. P. Urysohn, l. c. p. 316.



et comme

$$f(E)+a+b=f[E-(A+B)]+a+b,$$

on a selon I, 3:

$$\dim[f(E)+a+b]\leqslant n.$$

Il existe donc d'après § 20, II, 2, un ensemble ouvert $G$ tel que

$$a\in G,\quad b\in 1^*-\overline{G}\quad \text{et}\quad \dim[f(E)\cdot\overline{G}-G]\leqslant n-1.$$

Posons $M=f^{-1}(\overline{G})$ et $N=f^{-1}(1^*-G)=1-f^{-1}(G)$.

La fonction $f$ étant continue, les ensembles $M$ et $N$ sont fermés. Comme $1^*=\overline{G}+(1^*-G)$, il vient $1=M+N$. La condition $a\in G$ entraîne $(a)\cdot(1^*-G)=0$, d'où

$$AN=f^{-1}(a)\cdot f^{-1}(1^*-G)=f^{-1}[(a)\cdot(1^*-G)]=f^{-1}(0)=0,$$

et la condition $b\in 1^*-\overline{G}$ entraîne $BM=0$.

Enfin, les ensembles $EMN$ et $f(E)\cdot\overline{G}-G$ étant homéomorphes (puisque $MN\subset 1-(A+B)$), il vient $\dim EMN\leqslant n-1$.

Pour en déduire la première partie du th. 3, on pose

$$E=1\quad \text{et}\quad G=1-N.$$

En rapprochant le th. 3 de l'axiome de séparation, on voit que ce théorème présente — dans le cas de l'espace $n$-dimensionnel — une condition plus avantageuse que cet axiome. On a vu que l'axiome de séparation pouvait être formulé aussi comme il suit: tout couple d'ensembles fermés et disjoints peut être séparé par un ensemble fermé. A cet énoncé correspond le

*Corollaire 1. Tout couple d'ensembles fermés et disjoints situés dans un espace $n$-dimensionnel peut être séparé par un ensemble fermé de dimension $\leqslant n-1$.*

En effet, la frontière de l'ensemble $G$ du th. 3 est un ensemble de dimension $\leqslant n-1$ qui sépare les ensembles $A$ et $B$.

*Corollaire 2. La condition énoncée dans le th. 3 est nécessaire et suffisante pour que l'espace soit $\leqslant n$-dimensionnel.*

La condition est nécessaire en vertu du th. 3. Inversement, en identifiant $A$ avec un point donné $p$ et $B$ avec le complémentaire d'un entourage ouvert de ce point, la condition considérée implique que $\dim_p 1\leqslant n$.

Le th. 3 admet la généralisation suivante:

*Corollaire 3*[1]. *Etant donnés dans un espace n-dimensionnel deux systèmes d'ensembles fermés:* $A_0,...,A_n$ *et* $B_0,...,B_n$ *tels que* $A_iB_i=0$ *pour* $0\leqslant i\leqslant n$, *il existe deux systèmes d'ensembles fermés* $M_0,...,M_n$ *et* $N_0,...,N_n$ *tels qu'on a pour tout* $i\leqslant n$:

(1) $1=M_i+N_i,\ A_iN_i=0=B_iM_i$ et $\dim(M_0\cdot...\cdot M_i\cdot N_0\cdot...\cdot N_i)\leqslant n-i-1$.

Nous définirons par induction (pour $n$ fixe) les ensembles $M_0,...,M_i$ et $N_0,...,N_i$ satisfaisant à (1).

Leur existence pour $i=0$ résulte du th. 3. Admettons qu'il soient définis pour un entier $i$ tel que $0\leqslant i<n$. Substituons dans le th. 3:

$$A=A_{i+1},\quad B=B_{i+1}\quad \text{et}\quad E=M_0\cdot...\cdot M_i\cdot N_0\cdot...\cdot N_i.$$

On en déduit l'existence de deux ensembles fermés $M_{i+1}$ et $N_{i+1}$ tels que

$$1=M_{i+1}+N_{i+1},\ A_{i+1}N_{i+1}=0=B_{i+1}M_{i+1},\ \dim(EM_{i+1}\cdot N_{i+1})\leqslant n-i-2,$$

d'où la conclusion demandée.

Le corollaire précédent étend aux espaces $n$-dimensionnels la propriété suivante du cube $n$-dimensionnel $\mathcal{I}^n$ (composé des points $(x_1,...,x_n)$ avec $0\leqslant x_i\leqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant n$). Désignons par $A_i$ et $B_i$ les deux faces du cube perpendiculaires à l'axe $\mathcal{X}_i$ et par $M_i$ et $N_i$ les deux moitiés du cube déterminées par le „plan" $x_i=\frac{1}{2}$. La thèse du corollaire se trouve réalisée.

Le corollaire suivant concerne le „prolongement d'ensembles fermés":

*Corollaire 4*[2]. *Etant donnés deux ensembles fermés A et B tels que* $\dim[1-(A+B)]\leqslant n$, *il existe deux ensembles fermés P et Q satisfaisant aux conditions*:

(2) $1=P+Q,\ P(A+B)=A,\ Q(A+B)=B,\ \dim(PQ-AB)\leqslant n-1$.

Appliquons, en effet, le th. 3 à l'espace $1^*=1-AB$, en substituant $A-B$ à $A$, $B-A$ à $B$ et $1-(A+B)$ à $E$. Il vient:

(3) $$1-AB=M+N,\quad AN-B=0=BM-A,$$

(4) $$\dim[MN-(A+B)]\leqslant n-1,$$

[1]) Voir S. Eilenberg et E. Otto, *Quelques propriétés caractéristiques de la dimension*, Fund. Math. **31** (1938), p. 151.

[2]) Voir W. Hurewicz, Fund. Math. **24** (1935), p. 146.



d'où $\dim MN\leqslant n-1$, car on a $MN(A+B)=0$ en vertu des égalités

$$MN(A-B)=0=MN(B-A)\quad \text{et}\quad MN\cdot AB=0,$$

qui résultent de la formule (3).

Posons $P=M+AB$ et $Q=N+AB$. D'après (3): $1=P+Q$.

Il vient $P(A+B)=(M+AB)(A+B)=MA+MB+AB$.

Or d'après (3)

$$MB=(MB-A)+MAB\subset A,\quad \text{donc}\quad P(A+B)\subset A;$$

comme

$$A-B=A-AB\subset M+N\quad \text{et}\quad (A-B)N=0,$$

on a

$$A=(A-B)+AB\subset M+AB=P.$$

Il vient ainsi $P(A+B)=A$.

Par raison de symétrie: $Q(A+B)=B$.

Ensuite $PQ-AB=(MN+AB)-AB\subset MN$, d'où

$$\dim(PQ-AB)\leqslant\dim MN\leqslant n-1.$$

Enfin, les ensembles $M$ et $N$ étant fermés dans $1-AB$, les ensembles $P$ et $Q$ sont fermés (dans 1).

*Remarque*. Quant à l'extension du corollaire 3 du § 21, II aux espaces à $n$ dimensions, citons le théorème suivant: *toute fonction continue f, définie sur un sous-ensemble fermé F d'un espace métrique séparable à n dimensions, se laisse prolonger sur l'espace tout entier de façon que l'ensemble de ses points de discontinuité soit de dimension* $<n$ *et que ses valeurs ne débordent pas l'ensemble* $f(F)$[1]).

### III. Décomposition d'un espace $n$-dimensionnel. Condition $D_n$.

*Théorème 4*[2]) *(généralisation du th. II). Etant donnée une décomposition d'un espace n-dimensionnel en une suite (finie ou infinie) d'ensembles ouverts*:

$$1=G_0+G_1+...,$$

*il existe une suite d'ensembles ouverts* $H_0,H_1,...$ *telle que l'on a*

(1) $$1=H_0+H_1+...,\quad H_i\subset G_i\quad \text{et}\quad H_{i_0}\cdot...\cdot H_{i_{n+1}}=0$$

*pour tout système de* $n+2$ *indices différents* $i_0,...,i_{n+1}$.

[1]) Voir G. Poprougenko, *Sur la dimension de l'espace et l'extension des fonctions continues*, Mon. f. Math. u. Phys. **33** (1931), p. 129. D'après une remarque de M. Otto, on peut se débarrasser de l'hypothèse, que les valeurs de $f$ soient réelles.

[2]) Le th. 4 pour le cas de suite finie est dû à M. Menger, *Dimensionstheorie*, p. 158. Cf. P. Urysohn, l. c. p. 292.

Conformément au th. 2 l'espace se compose, en effet, de $n+1$ ensembles 0-dimensionnels:

$$1 = Q_0 + \ldots + Q_n.$$

D'après le th. II du § 21 ($Q_j$ étant considéré comme l'espace), $Q_j$ se laisse décomposer en ensembles disjoints, contenus respectivement dans les ensembles $G_i$ et relativement ouverts dans $Q_j$. En formule:

$$Q_j = H_{j0} + H_{j1} + \ldots \quad \text{et} \quad H_{ji} \subset G_i.$$

En tant que disjoints et relativement ouverts dans $Q_j$, les ensembles $H_{j0}, H_{j1}, \ldots$ sont deux à deux séparés. Il existe donc, d'après § 15, XIII, 2, un système d'ensembles ouverts et disjoints $V_{j0}, V_{j1}, \ldots$ tels que $H_{ji} \subset V_{ji}$. Posons

$$H_i = (V_{0i} + \ldots + V_{ni})\, G_i.$$

Il vient

$$1 = \sum_{j=0}^{n} Q_j = \sum_{j=0}^{n} \sum_i H_{ji} = \sum_{j=0}^{n} \sum_i H_{ji} \cdot G_i \subset \sum_i \sum_{j=0}^{n} V_{ji} \cdot G_i = \sum_i H_i.$$

Enfin, si l'on avait $p \in H_{i_0} \cdot \ldots \cdot H_{i_{n+1}}$, il existerait nécessairement un indice $j \leqslant n$ et deux indices différents $i$ et $i'$ tels que $p \in V_{ji} \cdot V_{ji'}$. Mais cela contredit l'hypothèse que les ensembles $V_{j0}, V_{j1}, \ldots$ sont disjoints.

*Corollaire. En supposant que* $\dim G = n$, *on peut assujettir la suite* $G_0, G_1, \ldots$ *du th.* 5 *du* § 15, IX *à la condition supplémentaire*:

(n) $\qquad G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_{n+1}} = 0$ *quels que soient* $i_0 < i_1 < \ldots < i_{n+1}$.

Car la suite $\{G_i\}$ satisfaisant aux conditions du th. 5 du § 15, IX, la suite $\{H_i\}$ du th. 4 (où l'on pose $1 = G$) leur satisfait aussi. Elle remplit en outre la condition (n) (en y remplaçant $G$ par $H$).

Définition. L'espace *satisfait à la condition* $D_n$ lorsque la thèse du th. 4 est vérifiée pour chaque décomposition *finie* en ensembles ouverts.

D'après le th. 4, *tout espace de dimension* $\leqslant n$ *satisfait à la condition* $D_n$. Comme on verra plus tard (vol. II), le théorème inverse est vrai aussi. En vue d'applications, nous allons établir à présent quelques propriétés des espaces satisfaisant à la condition $D_n$; elles appartiennent donc (selon le th. 4) à chaque espace de dimension $\leqslant n$.



1. *Etant donnée une décomposition d'un espace satisfaisant à la condition* $D_n$ *en un système fini d'ensembles ouverts*:

$$1 = G_0 + \ldots + G_m,$$

*il existe un système d'ensembles ouverts* $H_0, \ldots, H_m$ *tel que*

(2) $$1 = H_0 + \ldots + H_m, \quad \overline{H}_i \subset G_i \quad \text{et} \quad \overline{H}_{i_0} \cdot \ldots \cdot \overline{H}_{i_{n+1}} = 0$$

*quels que soient les indices* $i_0 < i_1 < \ldots < i_{n+1} \leqslant m$.

Car en vertu de § 16, II, 2, aux ensembles $H_0, \ldots, H_m$ de la formule (1) correspondent des ensembles ouverts $H_0^*, \ldots, H_m^*$ tels que

$$1 = H_0^* + \ldots + H_m^* \quad \text{et} \quad \overline{H_i^*} \subset H_i.$$

Ces ensembles satisfont donc à (2) (en les substituant à $H_0, \ldots, H_m$).

En tenant compte du fait que $\overline{H}_i$ est un domaine fermé, on déduit de 1 l'énoncé suivant:

2. *Etant donnée une décomposition d'un espace satisfaisant à* $D_n$ *en un système fini d'ensembles fermés*: $1 = F_0 + \ldots + F_k$, *il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *un système de domaines fermés* $H_0, \ldots, H_k$ *assujettis aux conditions* (1), *où* $G_i$ *désigne la sphère généralisée ouverte de centre* $F_i$ *et de rayon* $\varepsilon$.

3. *Si l'espace satisfaisant à* $D_n$ *est dense-en-soi et si les ensembles ouverts* $G_i$ *de la décomposition* $1 = G_0 + \ldots + G_m$ *sont non vides, on peut assujettir les ensembles* $H_i$ *de la formule* (2) *à la condition supplémentaire*: $H_i \neq 0$ *pour* $i = 0, \ldots, m$.

L'espace étant dense-en-soi, les ensembles $G_i$ sont infinis. On peut donc extraire de chacun d'eux un point $p_i$ de façon que les points $p_0, \ldots, p_m$ soient distincts deux à deux. En posant

$$G_i^* = G_i - (p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_m),$$

on a $1 = G_0^* + \ldots + G_m^*$.

En vertu de la condition $D_n$, il existe donc un système d'ensembles ouverts $H_0, \ldots, H_m$ tels que

(3) $$1 = H_0 + \ldots + H_m, \quad \overline{H}_i \subset G_i^* \subset G_i, \quad \overline{H}_{i_0} \cdot \ldots \cdot \overline{H}_{i_{n+1}} = 0.$$

Comme $p_i$ *non-*$\in G_j^*$ pour $j \neq i$, on a $p_i$ *non-*$\in H_j$, d'où en vertu de la première égalité (3): $p_i \in H_i$.

En relativisant $D_n$, on est conduit à l'énoncé suivant:

4. *Etant donné dans un espace (de dimension arbitraire) un ensemble $E$ satisfaisant à $D_n$ et un système d'ensembles ouverts $G_0,\dots,G_m$ tel que $E\subset G_0+\dots+G_m$, il existe un système d'ensembles ouverts $H_0,\dots,H_m$ vérifiant les conditions:*

$$E\subset H_0+\dots+H_m,\quad H_i\subset G_i \quad \text{et} \quad H_{i_0}\cdot\ldots\cdot H_{i_{n+1}}=0, \tag{4}$$

*quels que soient les indices $i_0<i_1<\dots<i_{n+1}\leqslant m$.*

*Si, de plus, $E$ est fermé et $G_0+\dots+G_m=1$, il existe un système d'ensembles ouverts $Q_0,\dots,Q_m$ tel que*

$$1=Q_0+\dots+Q_m,\quad \bar{Q}_i\subset G_i \quad \text{et} \quad E\cdot\bar{Q}_{i_0}\cdot\ldots\cdot\bar{Q}_{i_{n+1}}=0. \tag{5}$$

*Enfin, si $E$ est parfait et si $G_i\neq 0$ pour $i=0,\dots,m$, on peut admettre que $Q_i\neq 0$ pour $i=0,\dots,m$.*

En effet, les ensembles $EG_i$ étant ouverts dans $E$ et vérifiant l'égalité $E=EG_0+\dots+EG_m$, la propriété $D_n$ de $E$ implique l'existence d'un système d'ensembles $A_0,\dots,A_m$ ouverts dans $E$ et tel que

$$E=A_0+\dots+A_m,\quad A_i\subset EG_i\subset G_i \quad \text{et} \quad A_{i_0}\cdot\ldots\cdot A_{i_{n+1}}=0. \tag{6}$$

D'après le théorème 2 du § 15, XIII, il existe un système d'ensembles $V_0,\dots,V_m$ ouverts tel que

$$A_i=EV_i \quad \text{et} \quad V_{i_0}\cdot\ldots\cdot V_{i_{n+1}}=0.$$

Les ensembles $H_i=V_i\cdot G_i$, où $i=0,\dots,m$, sont les ensembles demandés.

Dans le cas où $E$ est fermé, posons $R_i=H_i+(G_i-E)$. En vertu de (4), il vient:

$$\sum_i R_i=\sum_i H_i+(\sum_i G_i-E)\supset\sum_i H_i+(\sum_i G_i-\sum_i H_i)=\sum_i G_i=1, \tag{7}$$

$$E\cdot R_{i_0}\cdot\ldots\cdot R_{i_{n+1}}=E\cdot H_{i_0}\cdot\ldots\cdot H_{i_{n+1}}=0 \quad \text{et} \quad R_i\subset G_i. \tag{8}$$

D'après (7) et le cor. 2 du § 16, II, il existe un système d'ensembles ouverts $Q_0,\dots,Q_m$ tel que

$$1=Q_0+\dots+Q_m \quad \text{et} \quad \bar{Q}_i\subset R_i.$$

Les formules (8) donnent aussitôt (5).



Enfin, dans le cas où $E$ est parfait, complétons la formule (6) (conformément à 3) par l'inégalité $A_i\neq 0$. Comme $A_i\subset H_i\subset R_i$, il vient $R_i\neq 0$. Il est donc légitime d'admettre que $Q_i\neq 0$, car on peut — sans nuire aux conditions (5) — ajouter à $Q_i$ un ensemble ouvert arbitraire (non vide) dont la fermeture est contenue dans $R_i$.

En vue d'applications nous établirons l'énoncé suivant:

5. *Soient $K_0,\dots,K_s$ un système d'ensembles ouverts tel que $1=K_0+\dots+K_s$ et $A_0,\dots,A_l$ un système d'ensembles fermés dont le produit $A_0\cdot\ldots\cdot A_l$ satisfait à la condition $D_n$. Il existe alors un système d'ensembles ouverts $G_0,\dots,G_m$ tel que $1=G_0+\dots+G_m$, qu'à tout $i\leqslant m$ correspond un $i'\leqslant s$ pour lequel $G_i\subset K_{i'}$ et qu'à chaque système $i_0<i_1<\dots<i_{n+1}\leqslant m$ correspond un $j\leqslant l$ pour lequel on a*

$$A_j\cdot G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_{n+1}}=0.$$

Posons $E=A_0\cdot\ldots\cdot A_l$. D'après 4 il existe deux systèmes d'ensembles ouverts: $Q_0,\dots,Q_s$ et $H_0,\dots,H_s$ tels que

$$1=Q_0+\dots+Q_s,\quad Q_i\subset K_i,\quad E\cdot Q_{i_0}\cdot\ldots\cdot Q_{i_{n+1}}=0,$$
$$E\subset H_0+\dots+H_s,\quad H_i\subset Q_i,\quad H_{i_0}\cdot\ldots\cdot H_{i_{n+1}}=0.$$

Il vient

$$1=Q_0+\dots+Q_s=\sum_{ij}(Q_i-A_j)+\prod_j A_j,$$

et comme

$$\prod_j A_j=E\subset\sum_i H_i,$$

on a

$$1=\sum_{ij}(Q_i-A_j)+\sum_i H_i.$$

Désignons par $G_0,\dots,G_m$ les $(s+1)(l+2)$ sommandes de cette décomposition.

Soit $i_0<\dots<i_{n+1}\leqslant m$. Supposons, par impossible, que, quel que soit $j\leqslant l$, on ait $A_j\cdot G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_{n+1}}\neq 0$. Aucun des ensembles $G_{i_0},\dots,G_{i_{n+1}}$ n'appartient donc au système des ensembles $(Q_i-A_j)$ où $i\leqslant s$ et $j\leqslant l$. Ils appartiennent par conséquent tous au système $H_0,\dots,H_s$. Mais ceci contredit l'égalité $H_{i_0}\cdot\ldots\cdot H_{i_{n+1}}=0$.

**IV. Prolongement des ensembles $n$-dimensionnels.**

*Théorème 5 (généralisation du th. V)*[1]. *Tout ensemble $n$-dimensionnel est contenu dans un $G_\delta$ $n$-dimensionnel.*

En effet, $E$ étant un ensemble $n$-dimensionnel, on a $E=Q_0+\ldots+Q_n$ où les ensembles $Q_i$ sont 0-dimensionnels (th. 2). D'après le th. V (§ 21, IV), l'ensemble $Q_i$ est contenu dans un $G_\delta$ 0-dimensionnel: $Q_i \subset Q_i^*$. On a donc $E \subset Q_0^*+\ldots+Q_n^*$ et cette somme est un $G_\delta$ de dimension $n$ (d'après le même th. 2).

**V. Noyau dimensionnel.**

*Théorème 6*[2]. *Dans un espace $n$-dimensionnel l'ensemble des points où l'espace est précisément de la dimension $n$, c. à d. l'ensemble $1-1_{(n-1)}$ (dit „noyau dimensionnel") est de dimension $\geqslant n-1$.*

D'après le cor. 4 du N° I, il existe un ensemble $S$ qui est un $F_\sigma$ tel que

$$\dim S \leqslant n-2 \quad \text{et} \quad \dim(1_{(n-1)}-S) \leqslant 0.$$

L'ensemble $1-1_{(n-1)}$ étant selon § 20, III, 2 un $F_\sigma$, le cor. 1 du N° I et l'hypothèse que $\dim(1-1_{(n-1)}) \leqslant n-2$ entraînent

$$\dim(1-1_{(n-1)}+S) \leqslant n-2.$$

Mais alors l'identité

$$1=[1-1_{(n-1)}+S]+[1_{(n-1)}-S]$$

donne $\dim 1 \leqslant n-1$, car en ajoutant un ensemble 0-dimensionnel, on augmente la dimension d'une unité au plus (cor. du th. 2, N° II).

On démontre de plus que chaque ensemble (non vide) qui est ouvert dans le noyau est de dimension $\geqslant n-1$[3]. La fermeture du noyau est en chaque point du noyau de dimension $n$[4].

---

[1]) Théorème de M. Tumarkin, l. c. p. 653.

[2]) Théorème de M. Menger, *Das Hauptproblem über die dimensionelle Struktur der Räume*, Proc. Akad. Amsterdam **30** (1926) p. 141.

[3]) Ibid.

[4]) W. Hurewicz, l. c. p. 762 et L. Tumarkin, l. c. p. 652. Cf. K. Menger, op. cit., Monatsh. **34**, p. 144 et P. Urysohn, l. c. p. 270.



**VI. Espaces faiblement $n$-dimensionnels.** Un espace $n$-dimensionnel dont le noyau n'est pas $n$-dimensionnel (il est alors d'après le th. 6 de dimension $n-1$) est dit *faiblement $n$-dimensionnel.*

Comme exemple d'un ensemble faiblement 1-dimensionnel, considérons l'ensemble des points du plan $(x,f(x))$ où $x$ appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor:

$$x=\frac{2}{3^{n_1}}+\frac{2}{3^{n_2}}+\ldots, \qquad n_1<n_2<\ldots$$

et où

$$f(x)=\frac{(-1)^{n_1}}{2}+\frac{(-1)^{n_2}}{2^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n_k}}{2^k}+\ldots, \qquad f(0)=0.$$

Le noyau de cet ensemble se compose des points dont l'abscisse est une extrémité droite d'un intervalle contigu à $\mathcal{C}$[1]. Comme ensemble dénombrable, le noyau est donc 0-dimensionnel.

On prouve[2] qu'il existe des ensembles faiblement $n$-dimensionnels, quel que soit $n$.

**VII. Familles dimensionnantes.** La propriété de l'espace d'être de dimension $\leqslant n$ au point $p$ est un cas particulier de la propriété suivante: $F$ étant une famille d'ensembles, convenons de dire qu'elle *dimensionne* l'espace au point $p$, si $p$ est situé dans des entourages aussi petits que l'on veut dont la frontière appartient à $F$[3].

Dans le cas particulier, où $F$ désigne la famille des ensembles de dimension $\leqslant n-1$, les points où l'espace est dimensionné par $F$ coïncident avec ceux où l'espace est de dimension $\leqslant n$.

---

[1]) Voir ma note *Une application des images de fonctions à la construction de certains ensembles singuliers*, Mathematica **6** (1932), p. 120. Le premier exemple d'un ensemble qui est de dimension 0 en chaque point, excepté une infinité dénombrable, a été donné par M. Sierpiński, Fund. Math. **2** (1921), pp. 81—95.

[2]) Théorème de S. Mazurkiewicz, *Sur les ensembles de dimension faible*, Fund. Math. **13** (1929), p. 212.

[3]) M. Menger se place à un point de vue plus général encore: un point est dit un „$E$-point", s'il appartient à des entourages aussi petits que l'on veut et qui jouissent de la propriété $E$. Voir Math. Ann. **95** (1925), p. 281. Le terme suggestif „dimensionner l'espace", que je dois à M. Knaster, remplace ici la dénomination „Unstetigkeitspunkt" de M. Hurewicz, employée par cet auteur dans l'ouvrage *Normalbereiche und Dimensionstheorie*, Math. Ann. **96** (1927).

Une propriété analogue (mais non équivalente) à celle d'être un point où l'espace se trouve dimensionné a été étudiée par M. G. T. Whyburn: il s'agit des points $p$ de la forme $p=G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots$, où $G_n$ est un entourage de $p$ et $\mathrm{Fr}(G_n) \in F$. Voir Fund. Math. **16** (1930), p. 169.

Imposons à la famille $\boldsymbol{F}$ les deux propriétés suivantes (qui appartiennent à la famille des ensembles de dimension $\leqslant n-1$):

1° *l'hérédité*, c. à d. que la formule $X \subset Y \in \boldsymbol{F}$ entraîne $X \in \boldsymbol{F}$;

2° *la $\boldsymbol{F}_\sigma$-additivité*, c. à d. que les deux conditions: $X_n \in \boldsymbol{F}$ et $X_n = \overline{X}_n \cdot S$, où $S = X_1 + X_2 + \ldots$, entraînent $S \in \boldsymbol{F}$[1]).

Comme l'a montré M. Hurewicz (dans son ouvrage précité), une grande partie de la théorie de la dimension peut être réduite à l'étude des ensembles 0-dimensionnels et des familles héréditaires $\boldsymbol{F}_\sigma$-additives. Ce mode de procéder (qui est plus abstrait que celui du texte) a l'avantage d'être applicable aussi à des problèmes qui n'entrent pas dans le domaine de la théorie de la dimension.

Citons sans démonstration (qui est d'ailleurs tout à fait analogue à celle des théorèmes correspondants du § 22) quelques théorèmes fondamentaux sur les familles $\boldsymbol{F}$ héréditaires et $\boldsymbol{F}_\sigma$-additives:

1. Pour que l'espace soit dimensionné (en chaque point) par $\boldsymbol{F}$, il faut et il suffit qu'il se compose d'un ensemble appartenant à $\boldsymbol{F}$ et d'un ensemble de dimension $\leqslant 0$.

2. Pour que l'espace soit dimensionné par $\boldsymbol{F}$, il faut et il suffit que chaque couple d'ensembles fermés et disjoints se laisse séparer par un ensemble fermé appartenant à $\boldsymbol{F}$.

3. $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F}_1$ étant deux familles héréditaires et $\boldsymbol{F}_\sigma$-additives, la famille des sommes $X+Y$ où $X \in \boldsymbol{F}$ et $Y \in \boldsymbol{F}_1$ est héréditaire et $\boldsymbol{F}_\sigma$-additive.

4. La famille des ensembles dimensionnés par $\boldsymbol{F}$ est héréditaire et $\boldsymbol{F}_\sigma$-additive.

5. Si l'espace se laisse décomposer en une série dénombrable d'ensembles fermés dont tous, sauf un, peut-être, sont dimensionnés par $\boldsymbol{F}$, tandis que l'ensemble exceptionnel est dimensionné par $\boldsymbol{F}$ au point $p$, l'espace tout entier se trouve aussi dimensionné par $\boldsymbol{F}$ au point $p$.

6. L'ensemble des points où l'espace n'est pas dimensionné par $\boldsymbol{F}$ (le „noyau" de l'espace) est un $\boldsymbol{F}_\sigma$. S'il n'est pas vide, il n'appartient pas à $\boldsymbol{F}$.

[1]) Une famille héréditaire et $\boldsymbol{F}_\sigma$-additive est appelée par M. Hurewicz „Normalbereich".

Les familles qui satisfont aux conditions 1° et 2° et qui, en outre, contiennent tous les ensembles homéomorphes à leurs éléments, ont été étudiées par M. K. Kunugui dans ses recherches sur les relations entre les notions de dimension et de rang topologique („dimension au sens de M. Fréchet"). Voir sa Thèse, *Sur la Théorie du nombre de dimensions*, Paris 1930, p. 41.



## § 23. Simplexes, complexes, polytopes.

**I. Définitions.** $p_0, \ldots, p_n$ étant un système de points situés dans un espace euclidien (à un nombre arbitraire de dimensions), on appelle *simplexe* (géométrique ouvert) $p_0 \ldots p_n$ l'ensemble des points $p$ de la forme:

$$(1) \qquad p = \lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_n p_n \text{ où } \lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1 \text{ et } \lambda_i > 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

les points $p$ et $p_i$ étant considérés comme des vecteurs[1]).

Les points $p_0, \ldots, p_n$ s'appellent *sommets* du simplexe.

Les coefficients $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ portent le nom des *coordonnées barycentriques* du point $p$ relatives aux points $p_0, \ldots, p_n$[2]).

Tout simplexe de la forme $p_{i_0} \ldots p_{i_k}$, où $0 \leqslant k \leqslant n$, est dit *face* du simplexe $S = p_0 \ldots p_n$. Evidemment $\overline{S}$ est la somme de toutes les faces $p_{i_0} \ldots p_{i_k}$ de $S$ et se compose par suite de tous les points $p$ satisfaisant à la condition qui s'obtient de (1) en y remplaçant l'inégalité $\lambda_i > 0$ par $\lambda_i \geqslant 0$.

L'ensemble $\overline{S}$ peut être défini aussi comme le plus petit ensemble *convexe* contenant les points $p_0, \ldots, p_n$ (en entendant par convexe un ensemble qui, avec tout couple de ses points, contient un segment rectiligne qui les unit).

Si toutes les faces du simplexe $S$ sont disjointes, ce simplexe est dit *simple* (ou *non-singulier*). Cette condition équivaut à *l'indépendance linéaire* des sommets du simplexe $S$; rappelons que *le point $p$ dépend linéairement des points $p_0, \ldots, p_n$* lorsqu'il existe un système de nombres $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ vérifiant les deux égalités (1). En d'autres termes encore: l'ensemble des points qui dépendent linéairement du système $p_0, \ldots, p_n$ est nommé *variété linéaire* déterminée par ces points; le simplexe est donc simple lorsqu'aucun de ses sommets n'appartient à la variété linéaire déterminée par tous les autres.

[1]) Etant donnés dans l'espace euclidien $\mathcal{E}^k$ deux vecteurs

$$p = (x_1, \ldots, x_k) \quad \text{et} \quad r = (y_1, \ldots, y_k),$$

on a par définition

$$p + r = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k).$$

$\lambda$ étant un nombre réel, on pose $\lambda p = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_k)$.

[2]) Le point $p$ est bien le centre de gravité du système des points $p_0, \ldots, p_n$, quand le point $p_i$ est porteur de la masse $\lambda_i$.

Un simplexe simple à $n+1$ sommets est dit *de dimension n au sens géométrique*; de même qu'une variété linéaire déterminée par $n+1$ points linéairement indépendants. Comme on verra (au N° II), la dimension géométrique coïncide avec la dimension topologique (dans le sens de la définition du § 20).

En particulier, un simplexe de dimension $n=0$ se réduit à un seul point; le simplexe $p_0p_1$ (simple) est un segment rectiligne sans extrémités; $p_0p_1p_2$ est l'intérieur d'un triangle (s'il est simple).

*Tout point $p$ d'un simplexe singulier $S=p_0\dots p_n$ appartient à une face $p_{i_0}\dots p_{i_k}$ avec $k<n$* [1].

Le simplexe $S$ étant singulier, il existe un système de nombres réels $\mu_0,\dots,\mu_n$ qui ne s'annulent pas simultanément et qui satisfont aux conditions:

$$\mu_0p_0+\dots+\mu_np_n=0 \quad \text{et} \quad \mu_0+\dots+\mu_n=0.$$

Il est légitime d'admettre que $\mu_n>0$ et qu'en outre, parmi les nombres $\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}$ avec $\mu_i$ positif, $\dfrac{\lambda_n}{\mu_n}$ est le plus petit (le système $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ satisfaisant à (1)). Posons

$$\lambda_i^*=\lambda_i-\frac{\lambda_n}{\mu_n}\mu_i \quad \text{pour} \quad i=0,1,\dots,n.$$

Il vient

$$p=\lambda_0^*p_0+\dots+\lambda_n^*p_n, \quad \lambda_0^*+\dots+\lambda_n^*=1 \quad \text{et} \quad \lambda_i^*\geqslant 0.$$

Comme $\lambda_n^*=0$, on a $p\in\overline{p_0\dots p_{n-1}}$, c. q. f. d.

En admettant dans ce théorème que l'entier $k$ est le plus petit possible, on en conclut que *tout point d'un simplexe $S$ appartient à une face simple de $S$*. Il en résulte aussi que

$$\overline{S}=F_0+\dots+F_m, \tag{2}$$

$F_0,\dots,F_m$ désignant le système des faces *simples* de $S$.

Une suite (finie ou infinie) de points $p_0,p_1,\dots$ de l'espace $\mathcal{E}^r$ est dite *en position générale* (dans cet espace) lorsque tout système $p_{i_0},\dots,p_{i_k}$ avec $i_0<i_1<\dots<i_k$ où $k\leqslant r$, est linéairement indépendant.

[1]) Alexandroff-Hopf, *Topologie* I, p. 607.



1. *Soit $p_0,p_1,\dots$ une suite de points de $\mathcal{E}^r$ en position générale. Etant donné un système de $l+1$ variétés linéaires $V_0,\dots,V_l$ déterminées par des systèmes disjoints formés respectivement par $k_0+1,\dots,k_l+1$ termes de cette suite, avec $k_0\leqslant r,\dots,k_l\leqslant r$, la dimension géométrique de la variété linéaire $V_0\cdot\ldots\cdot V_l$ (supposée non vide) satisfait à la relation*

$$\dim V_0\cdot\ldots\cdot V_l=k_0+\dots+k_l-lr. \tag{3}$$

Donc, en particulier, *si $r\geqslant 2n+1$, tous les simplexes $p_{i_0}\dots p_{i_k}$ avec $k\leqslant n$ sont disjoints.*

On constate, en effet, facilement [1]) que si $V_0\cdot V_1\neq 0$, la variété linéaire déterminée par la somme $V_0+V_1$ (c. à d. la plus petite variété contenant cette somme) coïncide avec $\mathcal{E}^r$, et on a

$$\dim V_0\cdot V_1=k_0+k_1-r.$$

Puis on procède par induction relativement à $l$.

2. *Etant données dans l'espace $\mathcal{E}^r$ (ou dans le cube $\mathcal{J}^r$) une suite de points $a_0,a_1,\dots$ et une suite de nombres positifs $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots$, il existe une suite de points en position générale $p_0,p_1,\dots$ telle que*

$$|p_i-a_i|<\varepsilon_i, \quad \text{où} \quad i=0,1,\dots \tag{4}$$

Procédons par induction. Soit $p_0=a_0$. Afin de définir $p_i$, considérons toutes les variétés linéaires déterminées par les systèmes de points $p_{j_0},\dots,p_{j_k}$ avec $j_0<\dots<j_k<i$ et $k<r$. Chacune d'elles étant non dense, il en est de même de leur somme. Nous désignons par $p_i$ un point situé en dehors de cette somme et vérifiant l'inégalité $|p_i-a_i|<\varepsilon$.

*Remarques.* 1° *Si $r=\aleph_0$, tous les simplexes $p_{i_0}\dots p_{i_k}$ peuvent être supposés simples (donc disjoints), quel que soit $k$.*

2° *Si $r\geqslant 2n+1$ et si $L$ est une variété linéaire à $n$ dimensions, on peut assujettir les points $p_0,p_1,\dots$ à la condition supplémentaire, que tous les simplexes $p_{i_0}\dots p_{i_l}$ (où $l\leqslant n$) soient disjoints de $L$.*

On désigne, en effet, par $p_{-n-1},\dots,p_{-1}$ un système de points linéairement indépendants qui détermine la variété $L$ et on définit $p_i$ pour $i\geqslant 0$ par un procédé analogue au précédent.

Une famille finie de simplexes est dite un *complexe*. Nous appelons *fermeture* $\overline{C}$ du complexe $C$ le complexe composé de toutes les faces des simplexes qui appartiennent à $C$. Le complexe $C$ est

[1]) Ibidem, p. 596.

dit *fermé* si $C=\overline{C}$, c. à d. si avec chaque simplexe $p_0...p_n$, il contient comme éléments tous les simplexes $p_{i_0}...p_{i_k}$, où $i_0<...<i_k\leqslant n$.

$\overline{C}$ est dit *simple* (ou *non-singulier*) si tous les simplexes-éléments de $C$ sont disjoints. En particulier, le complexe composé de toutes les faces d'un simplexe simple est simple.

Le complexe $C$ est dit à *n dimensions* si $n$ est la plus grande dimension des simplexes appartenant à $C$.

$C$ est dit un *polytope* (fermé) lorsqu'il existe un complexe simple fermé $C=(R_1,...,R_m)$ tel que $C=R_1+...+R_m$. En symbole: $C=\mathfrak{S}C$.

Un polytope est évidemment un ensemble fermé.

*Tout polytope est homéomorphe à un polytope formé par la réunion de certaines faces d'un simplexe simple.*

Car $C$ étant un complexe simple fermé à sommets $q_0,...,q_m$ et $S$ un simplexe $p_0...p_m$ à $m$ dimensions, le polytope-somme de tous les simplexes $p_{i_0}...p_{i_k}$ tels que $q_{i_0}...q_{i_k}\in C$ est homéomorphe au polytope $C=\mathfrak{S}C$.

**II. Dimension (topologique) du simplexe.** Soient $S=p_0...p_n$ un simplexe simple et $C=(R_1,...,R_m)$ un complexe simple fermé tel que

$$\overline{S}=R_1+...+R_m. \tag{1}$$

Ainsi, par exemple, si $n=2$, c. à d. si $S$ est un triangle et si l'on unit chaque sommet du triangle au centre du côté opposé, on obtient une décomposition du triangle $S$ en 6 triangles (nommée décomposition barycentrique). Plus précisément, le complexe $C$ se compose dans ce cas de 6 simplexes à 2 dimensions, de 12 simplexes à 1 dimension et de 7 points individuels (donc $m=25$).

On constate aussitôt que

1. *$F$ étant une face de $S$, on a, pour chaque $j\leqslant m$, soit $R_j\subset F$, soit $R_j\cdot F=0$.*

Par conséquent:

2. *$\overline{F}$ est la somme des simplexes appartenant au complexe composé de tous les $R_j$ tels que $R_j\subset\overline{F}$.*

On démontre aussi facilement que

3. *A chaque $\varepsilon>0$ correspond un complexe simple fermé $C=(R_1,...,R_m)$ satisfaisant à la condition* (1) *et tel que $\delta(R_j)<\varepsilon$ pour $j=1,2,...,m$.*



4. *Théorème de Sperner*[1]. *Soit $\nu(s)$ une fonction qui fait correspondre à chaque sommet $s$ de $C$ un entier positif de façon que*

(i) *si $s\in p_{i_0}...p_{i_k}$, $\nu(s)$ est l'un des indices $i_0,...,i_k$.*

*Désignons par $\nu(R)$, où $R=q_0...q_l$, l'ensemble $[\nu(q_0),...,\nu(q_l)]$.*

*Le nombre $\varrho$ des $R_j$ tels que $\nu(R_j)=(0,1,...,n)$ est alors impair.*

Procédons par induction. Notre assertion est évidente dans le cas où $n=0$. Car on a alors $S=p_0=R$ et $\nu(R)=0$, donc $\varrho=1$.

Admettons que cette assertion soit vraie pour $n-1$. Nous allons l'établir pour $n$.

Soit $\boldsymbol{F}$ la famille des simplexes à $n-1$ dimensions $F\in C$ tels que

$$\nu(F)=(0,1,...,n-1)$$

et soit $\sigma$ le nombre des $F$ tels que $F\in\boldsymbol{F}$ et $F\subset p_0...p_{n-1}$. Par hypothèse et d'après 2, $\sigma$ est impair.

Numérotons les simplexes $R_j$ de façon que les simplexes $R_1,R_2,...,R_t$ soient à $n$ dimensions (au sens géométrique) et que les simplexes $R_{t+1},...,R_m$ aient la dimension $<n$.

Désignons par $\alpha_j$, pour $j\leqslant t$, le nombre des faces $F$ de $R_j$ telles que $F\in\boldsymbol{F}$. On constate aussitôt que:

1° si $\nu(R_j)=(0,...,n)$, on a $\alpha_j=1$,

2° si $(0,...,n-1)\subset\nu(R_j)\neq(0,...,n)$, on a $\alpha_j=2$,

3° si $(0,...,n-1)$ *non* $\subset\nu(R_j)$, on a $\alpha_j=0$.

Il en résulte que

$$\varrho\equiv(\alpha_1+...+\alpha_t) \bmod 2. \tag{2}$$

En faisant correspondre à tout $R_j$ avec $j\leqslant t$ ses faces qui appartiennent à $\boldsymbol{F}$ (s'il en existe), chaque $F\in\boldsymbol{F}$ vient correspondre à un ou à deux $R_j$ suivant que $F$ est contenu ou non dans le simplexe $p_0...p_{n-1}$. On a donc d'après (2):

$$\alpha_1+...+\alpha_t\equiv\sigma \bmod 2, \quad \text{d'où} \quad \varrho\equiv\sigma \bmod 2.$$

Le nombre $\varrho$ est donc impair.

*Remarque.* Dans les applications du th. 4, n'interviendra que l'inégalité $\varrho\neq0$. Le fait que $\varrho$ est impair n'intervient que dans la démonstration de ce théorème.

[1]) Voir E. Sperner, Abh. Math. Seminar Hamburg, **6** (1928), p. 265 et la Note de B. Knaster, S. Mazurkiewicz et moi-même, Fund. Math. **14** (1929), p. 132.

5. *Etant donnés $n+1$ ensembles fermés $A_0,...,A_n$ tels que chaque face $p_{i_0}...p_{i_k}$ $(0\leqslant k\leqslant n)$ du simplexe $S$ vérifie l'inclusion*

$$p_{i_0}...p_{i_k}\subset A_{i_0}+...+A_{i_k}, \tag{3}$$

*on a* $A_0\cdot...\cdot A_n\neq 0$.

Soit $r$ un entier positif donné. Conformément à 3, il est légitime d'admettre que le complexe $\boldsymbol{C}=(R_1,...,R_m)$ satisfait à la condition (1) ainsi qu'à l'inégalité

$$\delta(R_j)<1/r \quad \text{pour} \quad j=1,...,m. \tag{4}$$

A chaque sommet $s$ du complexe $\boldsymbol{C}$ faisons correspondre un entier $\nu(s)$ de la façon suivante. D'après (1) il existe un (et un seul) simplexe $p_{i_0}...p_{i_k}$ contenant $s$. D'après (3) il existe donc parmi les ensembles $A_{i_0},...,A_{i_k}$ un, au moins, qui contient $s$; désignons son indice par $\nu(s)$. On a donc $s\in A_{\nu(s)}$. La condition (i) étant satisfaite, il existe selon 4, parmi les $R_i$, un simplexe — que nous désignerons par $s_0^r...s_n^r$ — tel que $\nu(s_i^r)=i$. Donc $s_i^r\in A_i$.

$\bar{S}$ étant compact, rien n'empêche d'admettre que la suite $s_0^1,s_0^2,...,s_0^r,...$ est convergente. Soit $a$ sa limite. La condition (4) entraîne $a=\lim\limits_{r=\infty} s_i^r$ pour $i=1,...,n$ et la formule $s_i^r\in A_i$ donne $a\in\bar{A}_i=A_i$ et finalement $a\in A_0\cdot...\cdot A_n$.

Désignons par $Q_i$ la face du simplexe $S$ opposée au sommet $p_i$, c. à d.

$$Q_i=p_0...p_{i-1}p_{i+1}...p_n. \tag{5}$$

6. *Etant donnés $n+1$ ensembles fermés $A_0,...,A_n$ tels que*

$$\bar{S}=A_0+...+A_n, \tag{6}$$ $$A_i\cdot\bar{Q}_i=0, \tag{7}$$

*on a* $A_0\cdot...\cdot A_n\neq 0$.

*En outre, l'hypothèse que les ensembles $A_i$ sont fermés peut être remplacée par celle qu'ils soient ouverts dans $\bar{S}$.*

Conformément au th. 5, il s'agit d'établir l'inclusion (3). En supposant qu'elle ne soit pas vérifiée, il existerait dans le simplexe $p_{i_0}...p_{i_k}$ un point $a$ situé en dehors des ensembles $A_{i_0},...,A_{i_k}$. Il existe donc d'après (6) un indice $i$ tel que

$$i\neq i_0,\ ...,\ i\neq i_k, \tag{8}$$ $$a\in A_i. \tag{9}$$

Les inégalités (8) impliquent que $p_{i_0}...p_{i_k}\subset\bar{Q}_i$, d'où $a\in\bar{Q}_i$. Mais cette dernière formule est incompatible avec (7) et (9).



Pour établir la deuxième partie du th. 6, supposons que les ensembles $A_0,...,A_n$ sont ouverts dans $\bar{S}$ et désignons, conformément au § 16, II, 2, par $A_0^*,...,A_n^*$ un système d'ensembles fermés tels que

$$\bar{S}=A_0^*+...+A_n^* \quad \text{et} \quad A_i^*\subset A_i, \text{ d'où } \quad A_i^*\cdot\bar{Q}_i=0 \ (0\leqslant i\leqslant n).$$

Comme $A_0^*\cdot...\cdot A_n^*\neq 0$, il vient $A_0\cdot...\cdot A_n\neq 0$.

7. *Théorème fondamental* [1]). $\dim\bar{S}=n$.

*En d'autres termes*: $\dim\mathcal{E}^n=n$.

L'inégalité $\dim\bar{S}\leqslant n$ (ou bien $\dim\mathcal{E}^n\leqslant n$) est presque évidente (cf. § 20, I, exemples). Il s'agit de prouver que $\dim S>n-1$.

Supposons par contre que $\dim\bar{S}\leqslant n-1$. Posons

$$P_i=\bar{S}-\bar{Q}_i, \tag{10}$$

$Q_i$ étant défini par l'égalité (5).

Il vient évidemment

$$\bar{S}=P_0+...+P_n. \tag{11}$$

On déduit de là en vertu de l'inégalité $\dim\bar{S}\leqslant n-1$ et du théorème 4 du § 22, III (théorème de décomposition), qu'il existe un système d'ensembles ouverts $A_0,...,A_n$ tels que

$$\bar{S}=A_0+...+A_n, \quad A_0\cdot...\cdot A_n=0 \quad \text{et} \quad A_i\subset P_i, \quad \text{d'où} \quad A_i\cdot\bar{Q}_i=0.$$

Mais ceci contredit le th. 6.

7'. *Corollaires. $\boldsymbol{C}$ étant un complexe simple fermé à $n$ dimensions et $C$ désignant le polytope $\mathfrak{S}\boldsymbol{C}$, on a* $\dim C=n$.

*$p_0...p_n$ étant un simplexe simple ou singulier, on a* $\dim p_0...p_n\leqslant n$.

Le deuxième corollaire résulte du th. 7 rapproché de la formule I (2).

Le théorème suivant, qui rentre dans un ordre d'idées analogue à celui des th. 5 et 6, sera appliqué plus tard.

8. *Etant donnés $n$ ensembles $G_1,...,G_n$ ouverts dans $\bar{S}$ tels que $G_i\cdot Q_i=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ et que la somme $G_1+...+G_n$ sépare l'espace $\bar{S}$ entre le sommet $p_0$ et la face opposée $Q_0$, on a* $G_1\cdot...\cdot G_n\neq 0$ [2]).

[1]) Voir L. E. J. Brouwer, *Über den natürlichen Dimensionsbegriff*, Journ. f. Math. **142** (1913), p. 146.

[2]) Voir ma note dans les Ann. Soc. Pol. Math. **16** (1937), p. 219.

Il existe par hypothèse (cf. § 16, VI) deux ensembles fermés $U$ et $V$ tels que

(12) $\bar{S}-(G_1+\ldots+G_n)=U+V, \quad UV=0, \quad p_0\in U, \quad \bar{Q}_0\subset V.$

Soit (conformément à l'axiome de séparation) $A_0$ un ensemble ouvert dans $\bar{S}$ tel que

(13) $$U\subset A_0 \quad \text{et} \quad V\subset \bar{S}-\bar{A}_0.$$

Posons pour $i>0$:

(14) $$A_i=G_i+(\bar{S}-\bar{A}_0-\bar{Q}_i).$$

Il vient (pour $i>0$): $A_i\cdot\bar{Q}_i=G_i\cdot\bar{Q}_i=0$, puisque $G_i$ est ouvert et $G_i\cdot Q_i=0$ par hypothèse. En outre, en vertu des dernières inclusions (12) et (13), on a $A_0\cdot\bar{Q}_0=0$. L'égalité (7) est donc satisfaite pour tout $i=0,1,\ldots,n$.

D'autre part

$$A_0+\ldots+A_n=A_0+(G_1+\ldots+G_n)+(\bar{S}-\bar{A}_0-\bar{Q}_1\cdot\ldots\cdot\bar{Q}_n)$$

et comme évidemment $\bar{Q}_1\cdot\ldots\cdot\bar{Q}_n=p_0$ et comme d'après (12) et (13)

$$p_0\in A_0 \quad \text{et} \quad \bar{S}-(G_1+\ldots+G_n)\subset A_0+(\bar{S}-\bar{A}_0),$$

l'égalité (6) se trouve réalisée.

On a donc d'après 6:

$$A_0\cdot\ldots\cdot A_n\neq 0, \quad \text{d'où} \quad G_1\cdot\ldots\cdot G_n\neq 0,$$

puisque $A_0\cdot(\bar{S}-A_0-\bar{Q}_i)=0$.

### III. Applications au problème des points invariants.

Le th. 5 du N° II permet d'établir facilement le théorème fondamental suivant.

1. *Théorème de Brouwer*[1]. *Soient $S=p_0\ldots p_n$ un simplexe simple et $f$ une transformation continue de $\bar{S}$ en un sous-ensemble de $\bar{S}$. Il existe alors un point invariant de cette transformation, c. à d. un point $x_0$ tel que $f(x_0)=x_0$.*

Il s'agit de démontrer qu'en faisant correspondre au point

$$x=\lambda_0p_0+\ldots+\lambda_np_n \quad \text{où} \quad \lambda_i\geqslant 0 \quad \text{et} \quad \lambda_0+\ldots+\lambda_n=1$$

[1]) Pour la démonstration, voir la note *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe* de B. Knaster, S. Mazurkiewicz et de moi-même, Fund. Math. **14** (1929), p. 132.



le point

$$x^*=\lambda_0^*p_0+\ldots+\lambda_n^*p_n \quad \text{où} \quad \lambda_i^*\geqslant 0 \quad \text{et} \quad \lambda_0^*+\ldots+\lambda_n^*=1$$

de façon continue, il existe un $x$ tel que $x^*=x$, c. à d. que $\lambda_i^*=\lambda_i$ pour $i=0,\ldots,n$.

Or, les ensembles $A_i=\underset{x}{E}(\lambda_i^*\leqslant\lambda_i)$ satisfont aux hypothèses du th. 5 du N° II:

1° ils sont fermés, car les coordonnées barycentriques $\lambda_i$ de $x$ sont des fonctions continues de $x_0$;

2° la condition $x\in p_{i_0}\ldots p_{i_k}$ entraîne $\lambda_{i_0}+\ldots+\lambda_{i_k}=1$ et comme $\lambda_{i_0}^*+\ldots+\lambda_{i_k}^*\leqslant 1$, il existe un indice $i_j$ $(0\leqslant j\leqslant k)$ tel que $\lambda_{i_j}^*\leqslant\lambda_{i_j}$, d'où $x\in A_{i_j}$; donc $p_{i_0}\ldots p_{i_k}\subset A_{i_0}+\ldots+A_{i_k}$.

Soit donc conformément au th. II, 5: $x\in A_0\cdot\ldots\cdot A_n$. Il vient $\lambda_i^*\leqslant\lambda_i$ pour $i=0,\ldots,n$, d'où

$$1=\lambda_0^*+\ldots+\lambda_n^*\leqslant\lambda_0+\ldots+\lambda_n=1, \quad \text{donc} \quad \lambda_i^*=\lambda_i \quad \text{pour } i=0,\ldots,n.$$

2. *Corollaire. $\mathcal{S}_n$ étant la surface de la sphère massive*

$$\mathcal{Q}_{n+1}=\underset{p}{E}[(|p|\leqslant 1)\,(p\in\mathcal{E}^{n+1})],$$

*il n'existe aucune transformation continue de $\mathcal{Q}_{n+1}$ en sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ qui soit l'identité sur $\mathcal{S}_n$.*

Autrement dit: *$\mathcal{S}_n$ n'est pas un rétracte de $\mathcal{Q}_{n+1}$.*

Supposons, par contre, que

(1) $$f\in\mathcal{S}_n^{\mathcal{Q}_{n+1}} \quad \text{et} \quad f(x)=x \quad \text{pour} \quad x\in\mathcal{S}_n.$$

$\mathcal{Q}_{n+1}$ étant homéomorphe à la fermeture d'un simplexe à $n+1$ dimensions, la fonction $-f(x)$ admet, d'après le th. 1, un point invariant $x_0$, c. à d. que

$$x_0=-f(x_0), \quad \text{d'où} \quad |x_0|=|-f(x_0)|=1, \quad \text{donc} \quad x_0\in\mathcal{S}_n;$$

mais ceci contredit l'égalité (1).

**IV. Applications aux cubes $\mathcal{J}^n$ et $\mathcal{J}^{\aleph_0}$.** Désignons dans le cube $\mathcal{J}^n$ (ainsi que dans $\mathcal{J}^{\aleph_0}$) par $V_i$ et $W_i$, $i=1,\ldots,n$, les faces opposées $x_i=0$ et $x_i=1$ respectivement.

Le théorème suivant correspond au th. 6 du N° II (et s'en déduit d'ailleurs).

1[1]. *Etant donnés* $n+1$ *ensembles fermés* $A_0,\ldots,A_n$ *tels que*

$$\mathcal{J}^n = A_0+\ldots+A_n, \quad A_{i-1}\cdot W_i = 0, \quad A_k\cdot V_i = 0 \ (i\leqslant k),$$

*on a* $A_0\cdot\ldots\cdot A_n \neq 0$.

Soit, en effet, $S=p_0\ldots p_n$ un simplexe à $n$ dimensions. Posons:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \lambda_0 p_0+\ldots+\lambda_n p_n,$$

$$\begin{cases} \lambda_0 = 1-x_1, \quad \lambda_1=(1-x_2)x_1, \quad \lambda_2=(1-x_3)x_1x_2, \quad \ldots, \\ \lambda_{n-1}=(1-x_n)x_1\cdot\ldots\cdot x_{n-1}, \quad \lambda_n = x_1\cdot\ldots\cdot x_n. \end{cases}$$

On constate facilement que $f(\mathcal{J}^n)=\bar{S}$. En outre, le bord $B$ de $S$ et le bord $V_1+W_1+\ldots+V_n+W_n$ de $\mathcal{J}^n$ se correspondent mutuellement; en effet, si $x_i=0$, on a $\lambda_i=0$, si $x_i=1$, on a $\lambda_{i-1}=0$ et inversement, si $\lambda_i=0$, on a l'une des $i+1$ égalités:

$$x_1=0, \ \ldots, \ x_i=0, \ x_{i+1}=1;$$

c. à d. $f(V_i)\subset\bar{Q}_i$, $f(W_i)\subset\bar{Q}_{i-1}$, $f^{-1}(\bar{Q}_i)\subset V_1+\ldots+V_i+W_{i+1}$.

Enfin la fonction $f$ est biunivoque à l'intérieur de $\mathcal{J}^n$, car l'égalité

$$x_1\cdot\ldots\cdot x_{i+1} = 1-(\lambda_0+\ldots+\lambda_i)$$

implique alors

$$x_{i+1} = \frac{1-(\lambda_0+\ldots+\lambda_i)}{1-(\lambda_0+\ldots+\lambda_{i-1})}.$$

Posons $A_i^* = f(A_i)$. Il vient $\bar{S}=A_0^*+\ldots+A_n^*$ et

$$A_i^*\cdot\bar{Q}_i = f[A_i\cdot f^{-1}(\bar{Q}_i)]\subset f[A_i\cdot(V_1+\ldots+V_i+W_{i+1})] = 0.$$

Les ensembles $A_i^*$ étant fermés (cf. § 14, VIII, 5), on a donc d'après II, 6

$$A_0^*\cdot\ldots\cdot A_n^* \neq 0.$$

Comme $A_i^*\cdot\bar{Q}_i=0$, on a $A_0^*\cdot\ldots\cdot A_n^*\cdot B=0$ et la fonction $f^{-1}|S$ étant biunivoque, on en conclut que $A_0\cdot\ldots\cdot A_n\neq 0$.

2. *Etant donnés dans* $\mathcal{J}^n$ *deux systèmes d'ensembles fermés* $F_1,\ldots,F_n$ *et* $H_1,\ldots,H_n$ *tels que*

$$\mathcal{J}^n = F_i+H_i \quad \textit{et} \quad F_iV_i = 0 = H_iW_i,$$

*on a*

$$(F_1\cdot H_1)\cdot\ldots\cdot(F_n\cdot H_n)\neq 0.$$

[1] Cf. H. Lebesgue, Fund. Math. **2** (1921), p. 256 et W. Hurewicz, Math. Ann. **101** (1929) et Proc. Akad. Amsterdam **31** (1928), p. 917.



Posons, en effet,

$$A_0=H_1, \quad A_1=F_1\cdot H_2, \quad \ldots, \quad A_{n-1}=F_1\cdot F_2\cdot\ldots\cdot F_{n-1}\cdot H_n, \quad A_n=F_1\cdot\ldots\cdot F_n.$$

Soit $G_i=\mathcal{J}^n-H_i$. Comme $G_i\subset F_i$, il vient

$$A_0+\ldots+A_n\supset H_1+G_1\cdot H_2+\ldots+(G_1\cdot\ldots\cdot G_{n-1}\cdot H_n)+(G_1\cdot\ldots\cdot G_n)=\mathcal{J}^n.$$

On vérifie facilement que les hypothèses du th. 1 sont réalisées. On a donc

$$(F_1\cdot H_1)\cdot\ldots\cdot(F_n\cdot H_n) = A_0\cdot\ldots\cdot A_n\neq 0.$$

Le th. 2 admet la généralisation suivante:

3. *Etant donnés dans* $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ *deux suites infinies d'ensembles fermés* $F_1,F_2,\ldots$ *et* $H_1,H_2,\ldots$ *tels que*

$$\mathcal{J}^{\aleph_0} = F_n+H_n \quad \textit{et} \quad F_n\cdot V_n = 0 = F_n\cdot W_n,$$

*on a*

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_n\cdot H_n \neq 0.$$

Désignons par $J_n$ l'ensemble des points $x=[x_1,x_2,\ldots]$ de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ tels que $x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots=0$. La distance de deux points $x$ et $y$ de $J_n$ est égale par définition à

$$|x_1-y_1|+\frac{1}{2}|x_2-y_2|+\ldots+\frac{1}{2^n}|x_n-y_n|,$$

tandis que la distance des points $(x_1,\ldots,x_n)$ et $(y_1,\ldots,y_n)$ de $\mathcal{J}^n$ est

$$\sqrt{|x_1-y_1|^2+\ldots+|x_n-y_n|^2}.$$

Les ensembles $J_n$ et $\mathcal{J}^n$ sont donc homéomorphes et dans cette homéomorphie l'ensemble $V_i\cdot J_n$ et l'ensemble des $x$ tels que $x_i=0$ se correspondent mutuellement. De façon analogue, l'ensemble $W_i\cdot J_n$ et celui des $x$ tels que $x_i=1$ se correspondent.

Le th. 2 est donc applicable à $J_n$. Il vient

$$J_n\subset F_i+H_i, \quad i\leqslant n, \quad \text{d'où} \quad (F_1\cdot H_1)\cdot\ldots\cdot(F_n\cdot H_n)\neq 0$$

et, en vertu du th. de Cantor (§ 14, VIII, 2), $\prod_{n=1}^{\infty} F_n\cdot H_n\neq 0$.

4. *Théorème de W. Hurewicz*[1]). *L'espace* $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ *ne se laisse pas décomposer en une série (dénombrable) d'ensembles de dimension* 0 *(ni, plus généralement, d'ensembles de dimension finie).*

Soit, en effet, $Q_1, Q_2, \dots$ une suite infinie d'ensembles de dimension 0 contenus dans $\mathcal{J}^{\aleph_0}$. Il s'agit de prouver que

$$\mathcal{J}^{\aleph_0} - \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \neq 0.$$

Les ensembles $V_n$ et $W_n$ étant fermés et disjoints et $Q_n$ étant de dimension 0, il existe d'après § 22, II, th. 3, deux ensembles fermés $F_n$ et $H_n$ tels que

$$\mathcal{J}^{\aleph_0} = F_n + H_n, \; F_n \cdot V_n = 0 = H_n \cdot W_n \quad \text{et} \quad F_n \cdot H_n \cdot Q_n = 0,$$

d'où $F_n \cdot H_n \subset \mathcal{J}^{\aleph_0} - Q_n$. Il vient d'après 3:

$$0 \neq \prod_{n=1}^{\infty} F_n \cdot H_n \subset \prod_{n=1}^{\infty} (\mathcal{J}^{\aleph_0} - Q_n) = \mathcal{J}^{\aleph_0} - \sum_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

*Remarques.* $1^0$ Soit $A_n$ l'ensemble des points

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots]$$

de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ tels que $x_i \leqslant 1/n$ pour $i \leqslant n$.

L'ensemble $A_0 + A_1 + \dots$ est compact, sa dimension est infinie et cependant chacun des $A_n$ est de dimension finie.

$2^0$ L'hypothèse du continu implique le théorème suivant[2]):

*Dans tout espace (indénombrable)* $\mathcal{X}$ *qui n'est pas somme d'une série d'ensembles 0-dimensionnels, il existe un ensemble indénombrable dont tout sous-ensemble indénombrable est de dimension infinie.*

La famille de tous les ensembles $G_\delta$ étant de puissance $\mathfrak{c}$ (cf. § 19, I, 1), donc en vertu de l'hypothèse du continu, de puissance $\aleph_1$, rangeons tous les $G_\delta$ de dimension finie en une suite transfinie $Q_0, Q_1, \dots, Q_\alpha, \dots$ du type $\Omega$. Chaque ensemble composé d'un seul point individuel étant un terme de cette suite, on a $\mathcal{X} = Q_0 + \dots + Q_\alpha + \dots$

[1]) *Über unendlich-dimensionale Punktmengen*, Proc. Akad. Amsterdam **31** (1928), p. 916.

[2]) Théorème de W. Hurewicz, *Une remarque sur l'hypothèse du continu*, Fund. Math. **19** (1932), p. 8. Comme le remarque M. W. Hurewicz, l'hypothèse du continu *équivaut* à l'hypothèse, que le cube $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ satisfait à la thèse du corollaire.



D'autre part, chaque ensemble de dimension finie étant somme d'un nombre fini d'ensembles 0-dimensionnels (§ 22, I, th. 2), l'hypothèse du théorème implique qu'aucune somme dénombrable de termes de la suite $\{Q_\alpha\}$ n'épuise l'espace $\mathcal{X}$. Il existe par conséquent une infinité indénombrable de nombres $\alpha$ tels que $Q_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} Q_\xi \neq 0$. En extrayant de chacune de ces différences un point $p_\alpha$, l'ensemble $P = \{p_\alpha\}$ est l'ensemble demandé.

En effet, l'ensemble $PQ_\xi$ est dénombrable quel que soit $\xi < \Omega$, car $p_\alpha$ *non*-$\epsilon$ $Q_\xi$ pour $\xi < \alpha$. Il en est de même en remplaçant $P$ par $X \subset P$. Or, en supposant que $X$ soit de dimension finie, il existe selon le th. 5 du § 22, IV, un $\xi$ tel que $X \subset Q_\xi$, c. à d. que $X = XQ_\xi$. L'ensemble $X$ est donc dénombrable.

**V. Nerf d'un système d'ensembles.** Soient $G_0, \dots, G_n$ un système d'ensembles situés dans un espace (arbitraire) $\mathcal{X}$ et $p_0, \dots, p_n$ un système de points d'un espace euclidien (de dimension arbitraire). Si le complexe $\boldsymbol{N}$ formé des simplexes $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ tels que $G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_k} \neq 0$ est simple, il est dit le *nerf*[1]) du système $\{G_0, \dots, G_n\}$. Le nerf $\boldsymbol{N}$ est évidemment un *complexe fermé*. Sa dimension est égale au plus grand entier $k$ tel qu'il existe un système d'indices $i_0 < \dots < i_k$ vérifiant l'inégalité $G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_k} \neq 0$.

Pour que deux systèmes d'ensembles aient le même nerf, il faut et il suffit qu'ils soient *semblables au sens combinatoire* (cf. § 16, II).

Soit $S = p_0 \dots p_n$ un simplexe simple. Soit (cf. II (10)) $P_i$ la somme de toutes les faces de $S$ ayant $p_i$ pour sommet.

1. *Le complexe* $\bar{\boldsymbol{S}}$ *formé de toutes les faces de* $S$ *est le nerf du système* $\{P_0, \dots, P_n\}$.

Car le produit $P_{i_0} \cdot \ldots \cdot P_{i_k}$, en tant que somme des simplexes ayant $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ pour face, n'est vide pour aucun système $i_0 < \dots < i_k$.

De façon plus générale:

2. *Si* $\boldsymbol{C}$ *est un sous-complexe fermé de* $\bar{\boldsymbol{S}}$ *et si* $C = \mathfrak{S}\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}$ *est le nerf du système* $\{CP_0, \dots, CP_n\}$.

Car les conditions $CP_{i_0} \cdot \ldots \cdot P_{i_k} \neq 0$ et $p_{i_0} \dots p_{i_k} \subset C$ sont équivalentes.

[1]) Voir P. Alexandroff, C. R. Paris **184** (1927), p. 317. Cf. la notion de „polyèdre réciproque" de H. Poincaré, *Complément à l'analysis situs*, § VII, Rendic. di Palermo **13** (1899).

En ce qui concerne la réalisation géométrique du nerf d'un système d'ensembles donné, on a l'énoncé suivant:

3. *$\{G_0,...,G_m\}$ étant un système d'ensembles donné et $n$ un entier $\leqslant m$ tel qu'aucun point n'appartient à $n+2$ ensembles de ce système, c. à d. que l'on a*

(n) $$G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_{n+1}}=0 \text{ quels que soient } i_0<i_1<\ldots<i_{n+1},$$

*il existe alors dans l'espace $\mathcal{E}^{2n+1}$ un complexe (simple de dimension $\leqslant n$) qui est le nerf du système donné.*

Plus précisément: *les sommets $p_0,...,p_m$ de ce complexe peuvent être assujettis à la condition supplémentaire*:

$$|p_i-a_i|<\varepsilon, \quad i=0,1,...,m,$$

*les points $a_0,...,a_m$ et le nombre $\varepsilon>0$ étant donnés en avance.*

Posons, en effet, dans I, 2: $r=2n+1$ et désignons par $N$ le complexe formé des simplexes $p_{i_0}...p_{i_k}$ tels que $G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}\neq 0$. Ces simplexes étant en vertu de (n) de dimension $\leqslant n$, le complexe $N$ est donc simple (d'après I, 1); il est par conséquent le nerf du système $\{G_0,...,G_m\}$.

### VI. Transformations d'espaces métriques en polytopes [1]).

Soit $\{G_0,...,G_m\}$ un système de sous-ensembles ouverts d'un espace métrique $\mathcal{X}$ et soit $\{p_0,...,p_m\}$ un système de points d'un espace euclidien. Posons:

(1) $$G=G_0+...+G_m \quad \text{et} \quad F_i=G-G_i.$$

La transformation suivante de $G$ est appelée *transformation $\varkappa$ correspondante aux systèmes $\{G_0,...,G_m\}$ et $\{p_0,...,p_m\}$*:

(2) $$\varkappa(x)=\lambda_0(x)\cdot p_0+...+\lambda_m(x)\cdot p_m$$

où

(3) $$\lambda_i(x)=\frac{\varrho(x,F_i)}{\varrho(x,F_0)+...+\varrho(x,F_m)}$$

(en convenant que $\varrho(x,0)=1$).

[1]) Cf. P. Alexandroff, C. R. Paris **183** (1926), p. 640, Math. Ann. **98** (1928), p. 635, Ann. of Math. **30** (1928), p. 6, W. Hurewicz, Mon. f. Math. u. Phys. **37** (1930), p. 202, ainsi que ma note *Sur un théorème fondamental concernant le nerf d'un système d'ensembles*, Fund. Math. **20** (1933), pp. 191—196.



1. *$\varkappa(x)$ est le point de la fermeture du simplexe (simple ou singulier) $S=p_0...p_m$ à coordonnées barycentriques $\lambda_0(x),...,\lambda_m(x)$.*

Cela veut dire que

$$\lambda_0(x)+...+\lambda_m(x)=1 \quad \text{et} \quad \lambda_i(x)\geqslant 0.$$

Pour s'en convaincre, on n'a qu'à constater que le dénominateur dans la formule (3) ne s'annule pour aucun $x$. Or, $F_i$ étant fermé dans $G$, on a l'équivalence:

(4) $$[\varrho(x,F_i)=0]\equiv(x\in F_i) \quad \text{pour} \quad x\in G.$$

En supposant que $\varrho(x,F_0)+...+\varrho(x,F_m)=0$, on aurait $\varrho(x,F_i)=0$, donc $x\in F_i$ pour chaque $i$. Mais alors $x$ n'appartiendrait à aucun $G_i$, contrairement à (1).

2. *La transformation $\varkappa$ est continue sur $G$.*

Car la fonction $\lambda_i(x)$ est continue sur $G$.

3. *En désignant par $Q_i$ la face $p_0...p_{i-1}p_{i+1}...p_m$ et par $P_i$ la somme des faces de la forme $p_ip_{i_1}...p_{i_k}$ $(0\leqslant k\leqslant m)$, on a les formules suivantes*:

(5) $$\varkappa[G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}-\sum_{i\neq i_j}G_i]\subset p_{i_0}...p_{i_k},$$

(6) $$\varkappa(F_i)\subset\overline{Q}_i,$$ (7) $$\varkappa(G_i)\subset P_i.$$

Admettons, en effet, que

$$x\in G_{i_j} \quad \text{pour} \quad 0\leqslant j\leqslant k \quad \text{et} \quad x \text{ non-}\in G_i \quad \text{pour} \quad i\neq i_j.$$

Il vient

$$x \text{ non-}\in F_{i_j} \quad \text{et} \quad x\in F_i, \quad \text{d'où} \quad \lambda_{i_j}(x)\neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_i(x)=0,$$

d'après (4) et (3). Donc $\varkappa(x)\in p_{i_0}...p_{i_k}$. D'où l'inclusion (5).

D'après (4), si $x\in F_i$, on a $\lambda_i(x)=0$, donc $\varkappa(x)\in\overline{Q}_i$.

Enfin, si $x\in G_i$, on a $\lambda_i(x)\neq 0$, donc $\varkappa(x)\in P_i$.

*Remarque.* Si le système $\{G_0,...,G_m\}$ satisfait à la condition (n), on a $\dim\overline{\varkappa(G)}\leqslant n$.

C'est une conséquence immédiate de l'inclusion (5) et de II, 7'.

4. *Dans le cas où le simplexe $S=p_0...p_m$ est simple, les inclusions* (5)—(7) *peuvent être remplacées par les identités*:

$$(8) \qquad \varkappa^{-1}(p_{i_0}...p_{i_k})=G_{i_0}\cdot...\cdot G_{i_k}-\sum_{i\neq i_j} G_i,$$

$$(9) \qquad \varkappa^{-1}(\bar{Q}_i)=F_i, \qquad (10) \qquad \varkappa^{-1}(P_i)=G_i.$$

*Dans ce cas, la fonction $\varkappa$ transforme l'ensemble $G$ en sous-ensemble du polytope $N=\mathfrak{S}\boldsymbol{N}$, où le complexe $\boldsymbol{N}$ (nerf du système $\{G_0,...,G_m\}$) se compose des simplexes $p_{i_0}...p_{i_k}$ tels que $G_{i_0}\cdot...\cdot G_{i_k}\neq 0$.*

Enfin, *si la condition* (n) *du th.* 3 *du* N⁰ V *est vérifiée, on a*

$$(11) \qquad \dim \boldsymbol{N}=\dim N\leqslant n.$$

Les faces d'un simplexe simple étant disjointes deux à deux, l'identité (8) résulte de (5). $\bar{Q}_i$ étant la somme de toutes les faces qui n'ont pas $p_i$ pour sommet, la $i$-ème coordonnée barycentrique de tout point de $\bar{Q}_i$ s'annule, d'où la formule (9). La formule (10) se démontre d'une façon analogue.

Pour établir la deuxième partie du théorème, il suffit de remarquer que la condition $G_{i_0}\cdot...\cdot G_{i_k}=0$ entraîne d'après (8) l'égalité $\varkappa^{-1}(p_{i_0}...p_{i_k})=0$, ce qui veut dire qu'aucune valeur de la fonction $\varkappa$ n'appartient au simplexe $p_{i_0}...p_{i_k}$; donc toutes ses valeurs appartiennent à $N$.

*Remarques.* 1⁰ On démontre facilement[1]) que chaque sous-ensemble d'un simplexe simple se laisse transformer d'une façon continue en un polytope-somme de certaines faces du simplexe sans qu'aucun point ne quitte la fermeture de la face à laquelle il appartenait. En particulier, si $\varkappa(G)$ est ce sous-ensemble et $f(p)$ en désigne la transformation en question, la fonction superposée $g(x)=f\varkappa(x)$ transforme l'ensemble $G$ en un polytope et satisfait à l'inclusion $g^{-1}(p_{i_0}...p_{i_k})\subset G_{i_0}\cdot...\cdot G_{i_k}$.

2⁰ Le membre droit de l'égalité (8) est nommée (d'après G. Boole en Algèbre de Logique) „constituant de l'univers du discours $G$ relatif au système $G_0,...,G_m$". L'univers du discours se décompose en constituants; les constituants sont disjoints deux à deux.

Le th. 4 établit une correspondance entre ces constituants et les faces du simplexe $S$.

[1]) Cf. ma note précitée, p. 193.



5. *$\mathfrak{X}$ étant un espace totalement borné de dimension $n$, à tout $\varepsilon>0$ correspond une transformation continue $f$ de $\mathfrak{X}$ en un sous-ensemble d'un polytope à $n$ dimensions et telle que*

$$(12) \qquad \delta[f^{-1}(y)]<\varepsilon \text{ quel que soit } y\in f(\mathfrak{X}).$$

Plus précisément: *soient $\mathfrak{X}$ un espace à propriété $D_n$, $G_0,...,G_m$ un système d'ensembles ouverts tels que $\mathfrak{X}=G_0+...+G_m$ et $S$ un simplexe simple $p_0...p_m$; désignons par $\boldsymbol{A}_n$ le complexe formé des faces de $S$ de dimension $\leqslant n$ et posons $A_n=\mathfrak{S}\boldsymbol{A}_n$; il existe alors une fonction $f\in A_n^{\mathfrak{X}}$ telle que*

$$(13) \qquad f^{-1}(P_i)\subset G_i \quad \text{pour} \quad i=0,1,...,m.$$

En effet, l'espace $\mathfrak{X}$ jouissant de la propriété $D_n$, il existe un système d'ensembles ouverts $G_0^*,...,G_m^*$ tels que

$$(14) \qquad \mathfrak{X}=G_0^*+...+G_m^*, \quad G_i^*\subset G_i \quad \text{et} \quad G_{i_0}^*\cdot...\cdot G_{i_{n+1}}^*=0$$

pour $i_0<...<i_{n+1}\leqslant m$.

La transformation $\varkappa$, correspondante aux systèmes $\{G_0^*,...,G_m^*\}$ et $\{p_0,...,p_m\}$, est la fonction $f$ demandée. Car $\boldsymbol{N}$ désignant le nerf du système $\{G_0^*,...,G_m^*\}$, on a la formule (11), d'où $\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{A}_n$, donc $\varkappa(\mathfrak{X})\subset A_n$; d'autre part, l'égalité (10) entraîne (13) en vertu de l'inclusion (14).

La deuxième partie du th. 5 se trouve ainsi établie. Pour en déduire la première, il suffit d'envisager une décomposition $\mathfrak{X}=G_0+...+G_m$ en ensembles ouverts de diamètre $<\varepsilon$.

Inversement, on a le théorème suivant:

6. *Si à toute décomposition $\mathfrak{X}=G_0+...+G_m$ en ensembles ouverts correspond une fonction $f\in A_n^{\mathfrak{X}}$ satisfaisant à la condition* (13), *l'espace $\mathfrak{X}$ jouit de la propriété $D_n$.*

Posons, en effet, $G_i^*=f^{-1}(P_i)$. Il s'agit de montrer que les conditions (14) sont vérifiées.

La première de ces conditions résulte de II (11), la deuxième résulte de l'inclusion (13) et la dernière — du fait que le nerf du système $\{A_n\cdot P_0,...,A_n\cdot P_m\}$, donc du système $\{G_0^*,...,G_m^*\}$, est de dimension $\leqslant n$ (d'après le th. V, 2).

Dans le même ordre d'idées, on a l'énoncé suivant:

7. *Si à tout $l>n$ et à tout système d'ensembles ouverts $\{G_0,...,G_m\}$ tel que $\mathfrak{X}=G_0+...+G_m$ et dont le nerf est de dimension $l$, correspond une fonction $f\in A_{l-1}^{\mathfrak{X}}$ assujettie à* (13), *$\mathfrak{X}$ jouit de la propriété $D_n$.*

Il s'agit de faire correspondre au système $\{G_0,\dots,G_m\}$ un système d'ensembles ouverts satisfaisant aux conditions (14). Admettons que, pour un $k\geqslant n$ et pour tout $l\leqslant k$, il existe toujours un système $\{G_0^*,\dots,G_m^*\}$ demandé; il s'agit de montrer qu'il en est ainsi pour $k+1$.

Comme $k+1>n$, il existe d'après l'hypothèse du th. 7, une fonction $f\in A_k^{\mathcal{X}}$ vérifiant (13). Posons $H_i=f^{-1}(P_i)$. Le nerf du système $\{A_k\cdot P_0,\dots,A_k\cdot P_m\}$, donc du système $\{H_0,\dots,H_m\}$, étant de dimension $\leqslant k$, il existe par hypothèse un système d'ensembles ouverts $\{G_0^*,\dots,G_m^*\}$ vérifiant les deux égalités (14), ainsi que l'inclusion $G_i^*\subset H_i$. Rapprochée de (13), cette inclusion implique l'inclusion (14).

8. *Les points $p_0,\dots,p_m$ de $\mathcal{E}^n$ étant supposés en position générale, on a pour tout $y$:*

$$\varkappa^{-1}(y)=K_0+\dots+K_m,\quad K_i\subset G_i,\quad K_i\cdot K_{i'}=0\quad \textit{pour}\ i\neq i',$$

*les $K_i$ étant fermés (vides ou non) dans la somme $G=G_0+\dots+G_m$.*

Soit $S^*=p_0^*\dots p_m^*$ un simplexe à $m$ dimensions (dans $\mathcal{E}^m$). Posons (cf. (3)):

$$\varkappa^*(x)=\lambda_0(x)\cdot p_0^*+\dots+\lambda_m(x)\cdot p_m^*.$$

Désignons par $A_n^*$ la somme des simplexes $p_{i_0}^*\dots p_{i_k}^*$ avec $k\leqslant n$, et posons pour $t\in A_n^*$:

$$f(t)=\beta_0(t)\cdot p_0+\dots+\beta_m(t)\cdot p_m,$$

où $\beta_0(t),\dots,\beta_m(t)$ sont les coordonnées barycentriques de $t$ (par rapport aux sommets $p_0^*,\dots,p_m^*$). On a évidemment $\varkappa(x)=f[\varkappa^*(x)]$. Par conséquent $\varkappa^{-1}(y)=\varkappa^{*-1}[f^{-1}(y)]$.

Les simplexes $p_{i_0}\dots p_{i_k}$ avec $k\leqslant n$ étant simples, la fonction $f$ est biunivoque sur chaque simplexe $p_{i_0}^*\dots p_{i_k}^*$. L'ensemble $f^{-1}(y)$ est donc fini. En désignant par $P_i^*$ la somme des faces de $S^*$ ayant $p_i^*$ pour sommet et en posant $H_i=f^{-1}(y)\cdot P_i^*$, il vient

$$\varkappa^{-1}(y)=\varkappa^{*-1}(H_0)+\dots+\varkappa^{*-1}(H_m),$$

puisque $P_0^*+\dots+P_m^*=\overline{S^*}$.

Les ensembles

$$K_0=\varkappa^{*-1}(H_0),\quad K_1=\varkappa^{*-1}(H_1-H_0),\ \dots,$$
$$K_m=\varkappa^{*-1}[H_m-(H_0+\dots+H_{m-1})]$$



sont les ensembles demandés. Car

$$K_0+\dots+K_m=$$
$$=\varkappa^{*-1}\{H_0+(H_1-H_0)+\dots+[H_m-(H_0+\dots+H_{m-1})]\}=\varkappa^{-1}(y),$$
$$K_i\subset\varkappa^{*-1}(H_i)\subset\varkappa^{*-1}(P_i^*)=G_i\ \text{(selon (10))},$$
$$K_i\cdot K_{i'}\subset\varkappa^{*-1}[H_i\cdot(H_{i'}-H_i)]=0\ \text{pour}\ i<i'.$$

Enfin, $H_i$ étant fini, $K_i$ est fermé dans $G$.

**VII. Approximation des fonctions continues par les fonctions $\varkappa$** [1]**.**

1. *Etant donnés: une décomposition d'un espace métrique (arbitraire) $\mathcal{X}=G_0+\dots+G_m$ en ensembles ouverts, une fonction $f\in(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$, un nombre $\varepsilon>0$ et un système de points $p_0,\dots,p_m$ de $\mathcal{J}^r$ tel que*

$$(15)\qquad \delta[(p_i)+f(G_i)]<\varepsilon\ \textit{pour}\ i=0,1,\dots,m,$$

*la transformation $\varkappa$ correspondante aux systèmes $\{G_0,\dots,G_m\}$ et $\{p_0,\dots,p_m\}$ satisfait à la condition*

$$(16)\qquad |\varkappa(x)-f(x)|<\varepsilon\ \textit{quel que soit}\ x\in\mathcal{X}.$$

Remarquons, au préalable, que d'une façon générale:

2. *Si parmi les arêtes $p_0p_i$ du simplexe (simple ou singulier) $p_0\dots p_n$, l'arête $p_0p_j$ est la plus grande, on a*

$$|p_0-x|\leqslant|p_0-p_j|\ \textit{pour tout}\ x\in\overline{p_0\dots p_n}.$$

Car le centre de gravité des masses $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ placées aux points $p_0,\dots,p_n$ ne peut être situé à l'extérieur de la sphère de centre $p_0$ et de rayon $|p_0-p_j|$ (sphère qui contient tous les points $p_0,\dots,p_n$).

Ceci établi, soit $x$ un point fixe de $\mathcal{X}$ et soit $i_0,\dots,i_k$ le système de tous les indices tels que $x\in G_{i_0},\dots,x\in G_{i_k}$. On a donc

$$(17)\qquad x\in[G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}-\sum_{i\neq i_j}G_i],\ \text{d'où}\ \varkappa(x)\in(p_{i_0}\dots p_{i_k})$$

d'après (5).

[1]) Les théorèmes du N° VII permettront d'établir (dans le vol. II) les théorèmes du „plongement" de la théorie de la dimension; en particulier: que tout espace métrique séparable de dimension $n$ est homéomorphe à un sous-ensemble de l'espace cartésien à $2n+1$ dimensions.

Envisageons parmi les points $p_{i_0}, \dots, p_{i_k}$ celui qui est le plus éloigné du point $f(x)$. Il est légitime d'admettre que c'est le point $p_{i_0}$. Il résulte de (17) et 2, en substituant le simplexe $f(x)p_{i_0}\dots p_{i_k}$ au simplexe $p_0\dots p_n$, que

(18) $$|f(x)-\varkappa(x)| \leqslant |f(x)-p_{i_0}|.$$

Comme $x \in G_{i_0}$, on a $f(x) \in f(G_{i_0})$, d'où

(19) $$|p_{i_0}-f(x)| \leqslant \delta[(p_{i_0})+f(G_{i_0})].$$

Les inégalités (18), (19) et (15) entraînent (16).

3. *Toute fonction $f \in (\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$ peut être approchée uniformément par des fonctions $\varkappa$.*

Plus précisément: *étant donné un système d'ensembles ouverts $\{G_0, \dots, G_m\}$ tel que*

(20) $$\mathcal{X} = G_0 + \dots + G_m \quad \textit{et} \quad \delta[f(G_i)] < \varepsilon \quad \textit{pour} \quad i = 0, \dots, m,$$

*il existe dans $\mathcal{J}^r$ un système de points en position générale $\{p_0, \dots, p_m\}$ tel que la fonction $\varkappa$ correspondante aux systèmes $\{G_0, \dots, G_m\}$ et $\{p_0, \dots, p_m\}$ vérifie l'inégalité* (16).

Enfin, *si $\mathcal{X}$ jouit de la propriété $D_n$, on peut admettre que*

(20') $$\dim \overline{\varkappa(\mathcal{X})} \leqslant n.$$

Soit, en effet, $a_i \in f(G_i)$ (si $G_i = 0$, $a_i$ désignera un point arbitraire de $\mathcal{J}^r$). D'après I, 2, il existe dans $\mathcal{J}^r$ un système de points $p_0, \dots, p_m$ en position générale et assujetti à la condition (15). La deuxième partie du th. 3 en résulte en vertu de 1.

Pour en déduire la première, on décompose le cube $\mathcal{J}^r$ en un système fini d'ensembles ouverts (de sphères de diamètre $< \varepsilon$ p. ex.):

(21) $$\mathcal{J}^r = H_0 + \dots + H_m \quad \text{où} \quad \delta(H_i) < \varepsilon,$$

et on pose $G_i = f^{-1}(H_i)$. Les conditions (20) sont donc vérifiées. D'où l'inégalité (16).

Enfin, si $\mathcal{X}$ jouit de la propriété $D_n$, on remplace le système $\{G_0, \dots, G_m\}$ par un système $\{G_0^*, \dots, G_m^*\}$ tel que

$$\mathcal{X} = G_0^* + \dots + G_m^*, \quad G_i^* \subset G_i, \quad G_{i_0}^* \cdot \ldots \cdot G_{i_{n+1}}^* = 0.$$

L'inégalité (20') résulte alors du th. VI, 3, remarque.

*Remarque.* Dans le cas où $r \geqslant 2n+1$, les points $p_0, \dots, p_m$ peuvent être assujettis à la condition supplémentaire, que tous les simplexes $p_{i_0}\dots p_{i_k}$ avec $k \leqslant n$, soient disjoints d'une variété linéaire $L$ de dimension $\leqslant n$, donnée en avance. (Cf. N° I, remarque 2°).



Le th. 3 peut être précisé comme suit:

4. *Etant donnés deux ensembles fermés et disjoints $A$ et $B$ tels que l'ensemble $E = A + B$ jouit de la propriété $D_n$, toute fonction $f \in (\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$, où $r \geqslant 2n+1$, peut être approchée uniformément par des fonctions $\varkappa$ assujetties à la condition*

$$\overline{\varkappa(A)} \cdot \overline{\varkappa(B)} = 0.$$

Soient, comme dans (21), $H_0, \dots, H_s$ des ensembles ouverts tels que

(21') $$\mathcal{J}^r = H_0 + \dots + H_s \quad \text{et} \quad \delta(H_j) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad j \leqslant s.$$

Posons: $m = 2s+1$, $K_j = f^{-1}(H_j)$ et

$$G_0 = K_0 - A, \quad \dots, \quad G_s = K_s - A, \quad G_{s+1} = K_0 - B, \quad \dots, \quad G_m = K_s - B.$$

Les ensembles $G_0, \dots, G_m$ sont donc ouverts et vérifient les conditions (20), car $\delta[f(K_j)] = \delta(H_j) < \varepsilon$. On a, en outre, pour tout $i \leqslant m$:

(22) $$\text{soit} \quad G_i A = 0, \quad \text{soit} \quad G_i B = 0.$$

L'ensemble $E$ jouissant de la propriété $D_n$, il existe selon § 22, III, 4, un système d'ensembles ouverts $Q_0, \dots, Q_m$ tel que

(23) $$\mathcal{X} = Q_0 + \dots + Q_m,$$ (24) $$Q_i \subset G_i,$$

(25) $$E \cdot Q_{i_0} \cdot \ldots \cdot Q_{i_{n+1}} = 0 \quad \text{pour} \quad i_0 < \dots < i_{n+1} \leqslant m.$$

On a donc d'après (20): $\delta[f(Q_i)] < \varepsilon$. En considérant, comme dans la démonstration du th. 3, un système de points $p_0, \dots, p_m$ en position générale et tel que $\delta[p_i + f(Q_i)] < \varepsilon$, on constate que la fonction $\varkappa$ correspondante aux systèmes $\{Q_0, \dots, Q_m\}$ et $\{p_0, \dots, p_m\}$ satisfait à la condition (16).

Désignons par $N_A$, respectivement $N_B$, le polytope-somme des simplexes (disjoints!) $p_{i_0}\dots p_{i_k}$ tels que

$$A \cdot Q_{i_0} \cdot \ldots \cdot Q_{i_k} \neq 0, \quad \text{respectivement} \quad B \cdot Q_{i_0} \cdot \ldots \cdot Q_{i_k} \neq 0.$$

On a donc selon (23), (25) et (5)

$$\varkappa(A) \subset N_A \quad \text{et} \quad \varkappa(B) \subset N_B; \quad \text{d'où} \quad \overline{\varkappa(A)} \subset N_A \quad \text{et} \quad \overline{\varkappa(B)} \subset N_B.$$

De plus, selon (23) et (22), tout $Q_i$ est disjoint soit de $A$, soit de $B$. Donc

$$N_A \cdot N_B = 0, \quad \text{d'où} \quad \overline{\varkappa(A)} \cdot \overline{\varkappa(B)} = 0.$$

Les deux généralisations suivantes du th. 4 seront appliquées plus tard:

5. *Etant donnés $l+1$ ensembles fermés $A_0,\ldots,A_l$ de dimension $\leqslant n$, toute fonction $f\in(\mathcal{J}^r)^{\mathfrak{X}}$, où $r\geqslant 2n+1$, peut être approchée uniformément par des fonctions $\varkappa$ assujetties à la condition*

$$\dim[\overline{\varkappa(A_0)}\cdot\ldots\cdot\overline{\varkappa(A_l)}]\leqslant\dim(A_0\cdot\ldots\cdot A_l). \tag{26}$$

Les ensembles $H_0,\ldots,H_s$ et $K_0,\ldots,K_s$, ayant le même sens que dans la démonstration du th. 4, on a

$$\mathfrak{X}=K_0+\ldots+K_s \quad \text{et} \quad \delta[f(K_j)]<\varepsilon. \tag{27}$$

Posons $E=A_0+\ldots+A_l$ et $v=\dim(A_0\cdot\ldots\cdot A_l)$. D'après § 22, III, 5, il existe un système d'ensembles ouverts $G_0,\ldots,G_m$ satisfaisant aux conditions (20) et tel qu'à tout système $i_0<\ldots<i_{v+1}\leqslant m$ correspond un $\nu\leqslant l$ tel que

$$A_\nu\cdot G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_{v+1}}=0. \tag{28}$$

De plus, comme l'ensemble $E$ jouit de la propriété $D_n$, le système $\{G_0,\ldots,G_m\}$ peut être assujetti, en vertu de § 22, III, 4, à la condition

$$E\cdot G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_{n+1}}=0 \tag{29}$$

(en remplaçant au besoin, les $G_i$ par des $Q_i$ vérifiant les formules (5) du § 22, III).

$p_0,\ldots,p_m$ étant (conformément à I, 2) un système de points en position générale et satisfaisant à la condition (15), l'inégalité (16) se trouve vérifiée.

Désignons par $N_\nu$, pour $\nu=0,\ldots,l$, la somme des simplexes $p_{i_0}\ldots p_{i_k}$ tels que $A_\nu\cdot G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}\neq 0$; on a donc d'après (29): $k\leqslant n$. Les points $p_0,\ldots,p_m$ étant en position générale dans $\mathcal{J}^r$, tous ces simplexes sont disjoints et $N_\nu$ est un polytope de dimension $\leqslant n$. Le produit $N_0\cdot\ldots\cdot N_l$ est donc la somme des simplexes $p_{i_0}\ldots p_{i_k}$ tels qu'on a pour tout $\nu\leqslant l$ l'inégalité $A_\nu\cdot G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}\neq 0$. Il en résulte d'après (28) que $k\leqslant v$; d'où

$$\dim(N_0\cdot\ldots\cdot N_l)\leqslant v.$$

L'inégalité (26) en résulte, car (d'après (5)):

$$\varkappa(A_\nu)\subset N_\nu \quad \text{et} \quad N_\nu=\overline{N}_\nu, \quad \text{d'où} \quad \overline{\varkappa(A_\nu)}\subset N_\nu.$$



6. *Etant donnés $l+1$ ensembles fermés $A_0,\ldots,A_l$ de dimensions $k_0,\ldots,k_l$ et tels que $A_0\cdot\ldots\cdot A_l=0$, toute fonction $f\in(\mathcal{J}^r)^{\mathfrak{X}}$, où $r\geqslant k_\nu$ pour $\nu=0,\ldots,l$, peut être approchée uniformément par des fonctions $\varkappa$ assujetties à la condition*

$$\dim[\overline{\varkappa(A_0)}\cdot\ldots\cdot\overline{\varkappa(A_l)}]\leqslant k_0+\ldots+k_l-lr \quad (\textit{ou bien } =-1). \tag{30}$$

Les ensembles $H_j$ et $K_j$ ayant le même sens que dans la démonstration du th. 4 (en remplaçant $2n+1$ par $r$), les conditions (27) sont réalisées. Désignons par $\{G_0,\ldots,G_m\}$ le système de tous les ensembles $K_j-A_\nu$, où $j\leqslant s$ et $\nu\leqslant l$ (donc $m=(s+1)(l+1)-1$). Aucun $G_i$, où $i=0,\ldots,m$, n'a donc des points communs avec deux termes différents du système $\{A_0,\ldots,A_l\}$. Par conséquent, si

$$A_\nu\cdot G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}\neq 0\neq A_{\nu'}\cdot G_{i'_0}\cdot\ldots\cdot G_{i'_{k'}} \quad \text{et} \quad \nu\neq\nu',$$

tous les indices $i_0,\ldots,i_k$ diffèrent de tous les indices $i'_0,\ldots,i'_{k'}$.

Il en résulte que — $p_0,\ldots,p_m$ et $N_0,\ldots,N_l$ ayant le même sens que dans la démonstration du th. 5 et $Z_\nu$ désignant l'ensemble des sommets des simplexes formant $N_\nu$ — on a $Z_\nu\cdot Z_{\nu'}=0$. De plus, le système $\{G_0,\ldots,G_m\}$ étant assujettie à la condition (29) où l'on remplace $n$ par $r$ (ce qui est évidemment légitime), les simplexes en question sont de dimension $\leqslant r$. On a donc en vertu de I, 1:

$$\dim(N_0\cdot\ldots\cdot N_l)\leqslant k_0+\ldots+k_l-lr \quad (\text{ou bien } =-1),$$

d'où (30) en vertu de l'inclusion $\overline{\varkappa(A_\nu)}\subset N_\nu$.

7. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace totalement borné de dimension $\leqslant r$. Etant donné un $\eta>0$, toute fonction $f\in(\mathcal{J}^r)^{\mathfrak{X}}$ peut être approchée uniformément par des fonctions $\varkappa$ telles que, quel que soit $y$, l'ensemble $\varkappa^{-1}(y)$ se décompose en un nombre fini d'ensembles fermés, disjoints et de diamètre $<\eta$.*

$H_j$ et $K_j$ ayant toujours le même sens qu'auparavant, soit $V_0,\ldots,V_q$ un système d'ensembles ouverts tel que

$$\mathfrak{X}=V_0+\ldots+V_q \quad \text{et} \quad \delta(V_\nu)<\eta \quad \text{pour } \nu=0,\ldots,q.$$

Désignons par $\{G_0,\ldots,G_m\}$ le système de tous les produits $K_j\cdot V_\nu$. Les conditions (20) sont donc vérifiées, et on a $\delta(G_i)<\eta$. Comme $\dim\mathfrak{X}\leqslant r$, on peut admettre en outre que

$$G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_{r+1}}=0 \quad \text{pour} \quad i_0<\ldots<i_{r+1}\leqslant m.$$

Les points $p_0,\dots,p_m$ ayant le même sens que dans la démonstration du th. 5, l'inégalité (16) se trouve vérifiée. On a, en outre, d'après VI, 8:

$$\varkappa^{-1}(y)=F_0+\dots+F_m,\quad F_i=\overline{F}_i\subset G_i \quad \text{et} \quad F_i\cdot F_{i'}=0 \quad \text{pour } i\neq i'.$$

Enfin $\delta(F_i)<\eta$, puisque $\delta(G_i)<\eta$.

**VIII. Complexes et polytopes infinis.** Une famille dénombrable (infinie) de simplexes $R_1,R_2,\dots$ est dite un *complexe infini* lorsqu'aucun point de $\overline{R}_i$ $(i=1,2,\dots)$ n'est limite d'une suite de points extraits de différents termes de la suite $\{R_j\}$ [1]).

Les notions de *fermeture*, de *complexe fermé* et de *complexe simple* s'appliquent aux complexes infinis comme dans le cas des complexes finis.

De façon analogue, $C$ est dit un *polytope infini* lorsqu'il existe un complexe simple fermé infini $\boldsymbol{C}$ tel que $C=\mathfrak{S}\boldsymbol{C}$.

On démontre que *tout sous-ensemble ouvert de l'espace $\mathcal{E}^n$ est un polytope infini* [2]).

La notion du *nerf* d'une suite infinie d'ensembles $G_0,G_1,\dots$ assujettie à la condition:

(1) *tout $G_i$ n'a des points communs qu'avec un nombre fini des $G_j$*,

s'introduit comme dans le cas de suite finie (N° V).

Le th. V, 1 se généralise comme suit:

1. *$\boldsymbol{C}$ étant un complexe simple, fermé et infini à sommets $p_0,p_1,\dots$ et $P_i$ désignant la somme des simplexes de $\boldsymbol{C}$ ayant $p_i$ pour sommet, $\boldsymbol{C}$ est le nerf de la suite $P_0,P_1,\dots$*

Autrement dit, *les conditions* $(p_{i_0}\dots p_{i_k})\in\boldsymbol{C}$ *et* $P_{i_0}\cdot\ldots\cdot P_{i_k}\neq 0$ *sont équivalentes.*

En effet, $P_{i_0}\cdot\ldots\cdot P_{i_k}$ étant la somme de tous les simplexes de $\boldsymbol{C}$ ayant $p_{i_0}\dots p_{i_k}$ pour face, on a, d'une part, $p_{i_0}\dots p_{i_k}\subset P_{i_0}\cdot\ldots\cdot P_{i_k}$ et la condition $(p_{i_0}\dots p_{i_k})\in\boldsymbol{C}$ implique que $P_{i_0}\cdot\ldots\cdot P_{i_k}\neq 0$. D'autre part, si $x\in P_{i_0}\cdot\ldots\cdot P_{i_k}$, $x$ appartient à un simplexe $R_j\in\boldsymbol{C}$ dont $p_{i_0}\dots p_{i_k}$ est une face; le complexe $\boldsymbol{C}$ étant fermé, on a donc $(p_{i_0}\dots p_{i_k})\in\boldsymbol{C}$.

[1]) En symbole (voir § 25, III): $\overline{R}_i\cdot\mathrm{Ls}\,R_j=0$.

[2]) Théorème de Runge (cf. Acta Math. **6** (1884), p. 229). Pour la démonstration voir Alexandroff-Hopf, *Topologie* I, p. 143.



L'énoncé V, 3 admet l'extension suivante.

Désignons par $\mathcal{E}^l_{-1}$, resp. par $\mathcal{E}^{\aleph_0}_{-1}$, l'ensemble des points de $\mathcal{E}^l$, resp. de $\mathcal{E}^{\aleph_0}$, dont la première coordonnée („l'abscisse") s'annule. Pour $l$ fini, $\mathcal{E}^l_{-1}$ est évidemment isométrique à $\mathcal{E}^{l-1}$.

2. *$G_0,G_1,\dots$ étant une suite d'ensembles satisfaisant à la condition* (1), *$a_0,a_1,\dots$ étant une suite de points situés dans $\mathcal{E}^{\aleph_0}_{-1}$, et $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots$ une suite de nombres positifs, il existe un complexe simple infini situé dans $\mathcal{E}^{\aleph_0}-\mathcal{E}^{\aleph_0}_{-1}$ à sommets $p_0,p_1,\dots$ qui est le nerf du système $G_0,G_1,\dots$ et qui satisfait à l'inégalité*

$$(2)\qquad |p_i-a_i|<\varepsilon_i \quad \textit{pour} \quad i=0,1,\dots$$

*De plus, si la condition* (n) *du th. V, 3 est remplie, $\aleph_0$ peut être remplacé par $2n+1$.*

Soit, en effet, $a_i^*$ un point à abscisse positive $<1/i$ et tel que $|a_i^*-a_i|<\varepsilon_i$. D'après I, 2 (cf. rem. 1°), il existe un $p_i$ à abscisse positive $<1/i$ et à distance de $a_i^*$ suffisamment petite pour que l'inégalité (2) soit vérifiée et qu'en outre tous les simplexes à sommets appartenant à la suite $p_0,p_1,\dots$ soient disjoints (dans le cas où la condition (n) est remplie, on demandera seulement que les simplexes de dimension $\leqslant n$ soient disjoints).

Soit $S_0,S_1,\dots$ le complexe $\boldsymbol{N}$ formé de tous les simplexes $p_{i_0}\dots p_{i_k}$ tels que $G_{i_0}\cdot\ldots\cdot G_{i_k}\neq 0$. Il s'agit de prouver que $\boldsymbol{N}$ est le nerf du système $G_0,G_1,\dots$, c. à d. que $\boldsymbol{N}$ est un complexe simple. Cela revient à démontrer qu'au simplexe $S_0$ (par exemple) correspond un indice $i_0$ tel que l'égalité

$$(3)\qquad \overline{S}_0\cdot\overline{\sum_{j>i_0}S_j}=0$$

soit vérifiée.

Soit $\eta$ la plus petite abscisse des sommets du simplexe $S_0$ (donc la plus petite abscisse des points de $\overline{S}_0$). Soit $1/k\leqslant\eta$. D'après (1) aucun $p_i$ ne peut être sommet d'une infinité des simplexes $S_j$. Il existe, par conséquent, un indice $i_0$ tel que, pour $j>i_0$, aucun parmi les points $p_0,\dots,p_k$ n'est un sommet de $S_j$. L'abscisse du point $p_j$ étant $<1/j$, il en résulte que tous les sommets de $S_j$, donc tous les points de $S_j$, ont l'abscisse $\leqslant\dfrac{1}{k+1}$. Il en est encore de même de l'abscisse des points de l'ensemble $\overline{\sum_{j>i_0}S_j}$. Comme $\dfrac{1}{k+1}<\eta$, l'égalité (3) en résulte.

La notion de transformation $\varkappa$ s'étend aussi aux suites infinies d'ensembles ouverts $G_0, G_1, \dots$ assujetties à la condition (1). Posons

(4) $$G = G_0 + G_1 + \dots \quad \text{et} \quad F_i = G - G_i.$$

Etant donnée une suite de points $p_0, p_1, \dots$ dans un espace euclidien ou dans $\mathcal{E}^{\aleph_0}$, on pose

(5) $$\varkappa(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(x) \cdot p_i$$

où

(6) $$\lambda_i(x) = \frac{\varrho(x, F_i)}{\sum_{j=0}^{\infty} \varrho(x, F_j)}.$$

Pour tout $x \in G$, on a, d'après (1), $\varrho(x, F_j) = 0$ pour $j$ suffisamment grand; comme, d'autre part, d'après (4):

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varrho(x, F_j) \neq 0,$$

la sommation (5) n'est qu'en apparence infinie.

Par conséquent:

3. *La fonction $\varkappa$ est continue sur $G$.*

Le théorème suivant se démontre comme les th. 3 et 4 du Nº VI.

4. *$N$ désignant le complexe composé des simplexes $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ tels que $G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_k} \neq 0$, on a*

$$\varkappa(G) \subset N = \mathfrak{S} N$$

*et les inclusions* VI (5) *et* VI (7) *sont vérifiées.*

*De plus, si le complexe $N$ est simple, il est le nerf du système $G_0, G_1, \dots$ et les égalités* VI (8) *et* VI (10) *sont remplies.*

*Enfin, si la condition* (n) *du th.* V, 3 *est satisfaite, on a la formule* VI (11).

**IX. Prolongement des fonctions continues**[1]. En utilisant la transformation $\varkappa$ appliquée aux systèmes infinies, on peut établir le théorème de Tietze (§ 15, XI) dans une forme plus avantageuse (l'espace $\mathfrak{X}$ étant supposé métrique séparable).

[1] Cf. S. Lefschetz, Ann. of Math. **35** (1934), p. 118 et ma note *Sur le prolongement des fonctions continues et les transformations en polytopes*, Fund. Math. **24** (1935), p. 259.



1. *Soient $F = \overline{F} \subset \mathfrak{X}$ et $f \in (\mathcal{E}^r)^F$ où $r \leqslant \aleph_0$. Il existe un ensemble $N$, somme d'une suite de simplexes contenus dans $\mathcal{E}^r$, et une extension $f^* \in [f(F) + N]^{\mathfrak{X}}$ de $f$.*

Plus précisément: *l'ensemble $G = \mathfrak{X} - F$ étant supposé décomposé en ensembles ouverts $G_0, G_1, \dots$ conformément au th.* 5 *du* § 15, IX, *c. à d. que la condition* VIII (1) *ainsi que les formules:*

(ii) $$\overline{G}_i \subset G \quad \text{et} \quad \text{(iii)} \quad \lim_{i=\infty} \delta(G_i) = 0$$

*sont vérifiées, — il existe alors une suite de points $p_0, p_1, \dots$ dans $\mathcal{E}^r$ telle que la transformation $\varkappa$ correspondante aux systèmes $(G_0, G_1, \dots)$ et $(p_0, p_1, \dots)$ présente un prolongement continue de la fonction $f$ sur $G$.*

Il est évidemment légitime d'admettre que $G \neq 0 \neq F$ et que les termes de la suite (finie ou infinie) $G_0, G_1, \dots$ sont des ensembles non vides.

Soient $q_i, a_i$ un couple de points tel que

(1) $$q_i \in G_i, \quad a_i \in F,$$

(2) $$|a_i - q_i| < \varrho(G_i, F) + \frac{1}{i}.$$

Posons

(3) $$f_0(q_i) = f(a_i) \quad \text{et} \quad f_0(x) = f(x) \quad \text{pour } x \in F.$$

La fonction $f_0$ est continue sur l'ensemble $Q = F + q_0 + q_1 + \dots$ En effet, la suite $q_0, q_1, \dots$ formant un ensemble isolé d'après VIII (1), il suffit, pour établir la continuité de la fonction $f_0$, de montrer que la condition

(4) $$\lim_{i=\infty} q_{j_i} = a \in F, \quad \text{où} \quad j_0 < j_1 < \dots,$$

implique

(5) $$\lim_{i=\infty} f_0(q_{j_i}) = f_0(a).$$

Or les inégalités

$$|a_{j_i} - a| \leqslant |a_{j_i} - q_{j_i}| + |q_{j_i} - a|$$

et

$$|a_{j_i} - q_{j_i}| < \varrho(G_{j_i}, F) + \frac{1}{j_i} \leqslant |q_{j_i} - a| + \frac{1}{j_i},$$

valables pour $a \in F$ (d'après (2) et (1)), entraînent

$$|a_{j_i} - a| < 2|q_{j_i} - a| + \frac{1}{j_i},$$

d'où en vertu de (4): $\lim_{i=\infty} a_{j_i} = a$, donc

(6) $$\lim_{i=\infty} f(a_{j_i}) = f(a),$$

la fonction $f$ étant continue (sur $F$).

La formule (5) résulte aussitôt de (6) d'après (3).

Posons

$$p_i = f_0(q_i)$$

et désignons par $N$ la somme des simplexes $p_{i_0} \dots p_{i_k}$ tels que $G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_k} \neq 0$. Soit $f^*$ la fonction définie par les conditions:

(7) $$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{pour } x \in F \\ \varkappa(x) & \textit{pour } x \in G, \end{cases}$$

la fonction $\varkappa$ correspondant aux suites $(G_0, G_1, \dots)$ et $(p_0, p_1, \dots)$.

L'ensemble $G$ étant ouvert, il s'agit de prouver que la fonction $f^*$ est continue sur $F$.

Soient $a \in F$ et $\varepsilon > 0$. La fonction $f_0$ étant continue sur $Q$, il existe un entourage $H$ de $a$ tel qu'on a, pour $q_i \in H$:

(8) $$|f_0(q_i) - f(a)| < \varepsilon, \quad \text{c. à d.} \quad |p_i - f(a)| < \varepsilon.$$

Désignons par $K$ l'ensemble $HF$ augmenté des $x$ tels que

(9) $$x \, \varepsilon \, G_i \text{ entraîne } G_i \subset H.$$

$K$ est un entourage de $a$. Car s'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite de points $\{x_i\}$ et une suite d'indices $\{m_i\}$ telles que

(10) $$\lim_{i=\infty} x_i = a, \quad x_i \in G_{m_i} \quad \text{et} \quad G_{m_i} - H \neq 0.$$

En vertu de (ii), $a$ non-$\in \overline{G}_i$. Il y a donc une infinité d'indices $m_i$ différents. Mais alors les conditions (10) sont incompatibles avec (iii).

$K$ étant un entourage de $a$, tout revient à démontrer que, étant donné un point $x \in GK$, on a

(11) $$|f^*(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Soit $i_0, \dots, i_k$ le système de tous les indices tels que $x \in G_{i_0}, \dots, x \in G_{i_k}$. On a donc

(12) $$x \in [G_{i_0} \cdot \ldots \cdot G_{i_k} - \sum_{i \neq i_j} G_i],$$

d'où

(13) $$f^*(x) \in (p_{i_0} \dots p_{i_k}),$$

d'après (7) et VI (5) (cf. VIII, 4).



Comme $x \in KG_{i_m}$ (pour $m \leqslant k$), on a d'après (9), $G_{i_m} \subset H$, d'où (selon (1)): $q_{i_m} \in H$ et par conséquent (cf. (8)):

(14) $$|p_{i_m} - f(a)| < \varepsilon, \quad m = 0, 1, \dots, k.$$

Les inégalités (14), rapprochées de la formule (13), entraînent (11) (en vertu du th. VII, 2 où l'on substitue au simplexe $p_0 \dots p_n$ le simplexe $f(a)\, p_{i_0} \dots p_{i_k}$).

*Remarque*. Le th. 1 reste vrai en remplaçant l'espace $\mathcal{E}^r$ par un sous-ensemble *convexe* arbitraire.

2. *Si dans les hypothèses du th.* 1, *on a* $f(F) \subset \mathcal{E}^{\aleph_0}_{-1}$ *et* $r = \aleph_0$, $N$ *peut être supposé un polytope infini* $\subset \mathcal{E}^{\aleph_0} - \mathcal{E}^{\aleph_0}_{-1}$.

De façon analogue, *si* $r \geqslant 2n+1$, $f(F) \subset \mathcal{E}^r_{-1}$ *et si le nerf de la suite* $\{G_i\}$ *est de dimension* $\leqslant n$ *(c. à d. que la condition* (n) *du th.* V, 3 *est vérifiée)*, $N$ *peut être supposé un polytope infini de dimension* $\leqslant n$, *contenu dans* $\mathcal{E}^r - \mathcal{E}^r_{-1}$. *A savoir* $N = \mathfrak{S}\boldsymbol{N}$ *où* $\boldsymbol{N}$ *est le nerf de la suite* $\{G_i\}$.

Pour s'en convaincre on n'aura qu'à modifier dans la démonstration du th. 1 la définition de la fonction $f_0$ (c. à d. la première égalité (3)) comme suit.

Soit, conformément à VIII, 2, $\boldsymbol{N}$ un complexe simple infini situé dans $\mathcal{E}^r - \mathcal{E}^r_{-1}$ (où $r = \aleph_0$ respectivement $r \geqslant 2n+1$) à sommets $p_0, p_1, \dots$, qui est le nerf de la suite $G_0, G_1, \dots$ et qui satisfait à l'égalité

(15) $$\lim_{i=\infty} |p_i - f(a_i)| = 0.$$

On pose $f_0(q_i) = p_i$. La fonction $f_0$ est continue, car la condition (4) entraîne (6) et celle-ci entraîne en vertu de (15) la formule

$$\lim_{i=\infty} p_{j_i} = f(a),$$

qui équivaut à (5).

La démonstration de la continuité de la fonction $f^*$ ne demande aucune modification.

3. *Corollaire. Etant donnés deux espaces métriques séparables* $\mathcal{X}$ *et* $\mathcal{Y}$, *un sous-ensemble fermé* $F$ *de* $\mathcal{X}$ *tel que* $\dim(\mathcal{X} - F) = n$ *et une fonction* $f \in \mathcal{Y}^F$, *l'espace* $\mathcal{Y}$ *peut être conçu comme sous-ensemble d'un espace* $\mathcal{Z}$ *tel que:* $\mathcal{Y}$ *est fermé dans* $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z} - \mathcal{Y}$ *est un polytope infini de dimension* $n$ *et la fonction* $f$ *admet une extension* $f^* \in \mathcal{Z}^{\mathcal{X}}$.

On imagine en effet l'espace $\mathcal{Y}$ comme situé dans $\mathcal{E}^{\aleph_0}_{-1}$ et on applique le théorème précédent.