B. Problèmes de la puissance (§§ 18, 19).

Nous supposons dans les §§ 18 et 19 que l'espace satisfait aux ax. I—V.

§ 18. Puissance de l'espace. Points de condensation.

I. Puissance de l'espace. *La puissance de l'espace est* $\leqslant \mathfrak{c}$.

En effet, d'après § 17, II, 2, l'espace est séparable. Il existe par conséquent (§ 14, VI) une suite (finie ou infinie) de points $r_1, r_2, \ldots$ telle que chaque point de l'espace est un point-limite d'une sous-suite de cette suite. La puissance de l'espace ne dépasse donc pas celle de l'ensemble de toutes les suites extraites d'un ensemble dénombrable, c. à d. celle du continu.

II. Partie dense. *Tout sous-ensemble de l'espace contient une partie dense dénombrable.* En effet, considéré comme espace, ce sous-ensemble satisfait aux ax. I—V (§ 17, IV, corollaire II); il est donc séparable.

III. Points de condensation. *Le point p est dit point de condensation de l'ensemble X, lorsque chaque entourage de p contient une infinité indénombrable de points de X* [1]), autrement dit, lorsque X n'est pas localement dénombrable au point p (§ 7, IV). *L'ensemble des points de condensation de X sera désigné par $X^{\circledcirc}$.*

En vertu de l'ax. V, la formule $p \in X - X^{\circledcirc}$ implique que p est situé dans un ensemble ouvert R_n appartenant à la base de l'espace et tel que l'ensemble XR_n est dénombrable. Il s'ensuit que *l'ensemble $X - X^{\circledcirc}$ est dénombrable.* Car, en faisant, correspondre à chaque p de $X - X^{\circledcirc}$ un indice $n(p)$ de façon que $XR_{n(p)}$ soit dénombrable, il vient $X - X^{\circledcirc} \subset \sum\limits_p XR_{n(p)}$ et cette dernière somme, comme somme dénombrable d'ensembles dénombrables, est dénombrable (d'après un théorème de la Théorie des ensembles, basé sur l'axiome du choix).

IV. Règles de calcul.

(1) $(X+Y)^{\circledcirc} = X^{\circledcirc} + Y^{\circledcirc}$ (2) $X^{\circledcirc} - Y^{\circledcirc} \subset (X-Y)^{\circledcirc}$

(3) $(\prod\limits_\iota X_\iota)^{\circledcirc} \subset \prod\limits_\iota X_\iota^{\circledcirc}$ (4) $\sum\limits_\iota X_\iota^{\circledcirc} \subset (\sum\limits_\iota X_\iota)^{\circledcirc}$

(5) $X \subset Y$ *implique* $X^{\circledcirc} \subset Y^{\circledcirc}$ (6) $(X - X^{\circledcirc})^{\circledcirc} = 0$ (7) $X^{\circledcirc} \subset X' \subset \overline{X}$

(8) $X^{\circledcirc} = X^{\circledcirc\circledcirc} = X^{\circledcirc\prime} = \overline{X^{\circledcirc}} = (XX^{\circledcirc})^{\circledcirc}$ (9) $XX^{\circledcirc} \subset (XX^{\circledcirc})'$.

[1]) E. Lindelöf, Acta Math. **29** (1905), p. 183. Cf. aussi W. H. Young, Quart. Journ. of Math. **35** (1903), p. 103.

Les formules (1)—(5) résultent directement (cf. § 7, V) du fait, que la somme de deux ensembles dénombrables est dénombrable et qu'un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable. La formule (6) résulte du N° III (puisqu'un ensemble dénombrable n'admet évidemment aucun point de condensation). Chaque point de condensation étant un point d'accumulation (§ 9, II), on en déduit la formule (7). En vertu de (3) on a

$$(XX^{\circledcirc})^{\circledcirc} \subset X^{\circledcirc} \cdot X^{\circledcirc\circledcirc} \subset X^{\circledcirc\circledcirc};$$

comme, en outre, l'ensemble $X^{\circledcirc}$ est fermé (§ 7, V), on a selon (7):

$$X^{\circledcirc\circledcirc} \subset X^{\circledcirc\prime} \subset \overline{X^{\circledcirc}} = X^{\circledcirc}$$

et la formule (8) se trouve établie, car l'identité $X = XX^{\circledcirc} + X - X^{\circledcirc}$ donne en raison de (1) et (6) $X^{\circledcirc} = (XX^{\circledcirc})^{\circledcirc}$. Enfin, les formules (8) et (7) entraînent (9):

$$XX^{\circledcirc} \subset X^{\circledcirc} = (XX^{\circledcirc})^{\circledcirc} \subset (XX^{\circledcirc})'.$$

V. Ensembles clairsemés. *Tout espace clairsemé est dénombrable.*

L'ensemble $1^{\circledcirc}$ étant selon IV (9) dense en soi, l'hypothèse que l'espace est clairsemé implique que $1^{\circledcirc} = 0$, d'où $1 = 1 - 1^{\circledcirc}$ et, cette différence étant d'après N° III dénombrable, le théorème est démontré.

En le rapprochant de § 9, VI, 3, on en déduit le *théorème de Cantor-Bendixson* [1]): *tout espace se compose de deux ensembles dont l'un est parfait et l'autre dénombrable (et clairsemé).*

VI. Sommes d'ensembles clairsemés. *Tout espace qui est somme d'une famille monotone* [2]) *d'ensembles clairsemés est dénombrable* [3]).

Supposons que $1 = \sum\limits_\iota C_\iota$ où C_ι est clairsemé (l'indice ι parcourant un ensemble de puissance arbitraire) et que 1 soit indénombrable. D'après le théorème précédent, l'espace contient alors un ensemble dense en soi qui, à son tour, contient (selon II) une partie dense dénombrable $D = [p_1, p_2, \ldots]$. L'ensemble D est donc dense en soi.

[1]) G. Cantor, Math. Ann. **21** (1883), p. 575; I. Bendixson, Acta Math. **2** (1883), p. 415; E. Lindelöf, l. cit.

[2]) Une famille d'ensembles est dite *monotone*, si, quels que soient les ensembles X et Y appartenant à cette famille, on a soit $X \subset Y$, soit $Y \subset X$.

[3]) Théorème de M. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles clairsemés*, Fund. Math. **3** (1922), pp. 46—49.

Faisons correspondre à chaque p_n un indice ι_n tel que $p_n \in C_{\iota_n}$ et posons

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} C_{\iota_n}.$$

Il vient $D \subset S$. L'ensemble S étant dénombrable, comme somme dénombrable d'ensembles dénombrables, il suffit de prouver que

$$S = 1.$$

Or supposons par contre que $q \in 1 - S$. Il existe alors un C_0 tel que $q \in C_0$. Il s'ensuit que C_0 n'est contenu dans aucun des ensembles C_{ι_n}. La famille des ensembles C_ι étant monotone, on en conclut que $C_{\iota_n} \subset C_0$, quel que soit n. Donc $S \subset C_0$, d'où $D \subset S \subset C_0$, ce qui est impossible, puisque C_0 est clairsemé et D est dense en soi (non vide).

VII. Points d'ordre $\mathfrak{m}$. L'énoncé du N° III, d'après lequel tout espace indénombrable contient des points de condensation (c. à d. des points d'„ordre indénombrable") peut être précisé comme suit: *si la puissance $\mathfrak{m} > \aleph_0$ de l'espace est non confinale avec ω* (c. à d. qu'elle n'est pas somme d'une série dénombrable de nombres cardinaux inférieurs à $\mathfrak{m}$), *il existe dans l'espace un point d'ordre $\mathfrak{m}$* (point dont chaque entourage est de puissance $\mathfrak{m}$). On a aussi l'énoncé suivant: *l'espace se compose d'un ensemble clairsemé et d'une suite d'ensembles tels que tous les points d'un même ensemble sont du même ordre* [1]).

VIII. Notion d'effectivité. Cette notion est de nature *méta-mathématique*: elle concerne le mode de démonstration des théorèmes d'existence. On dit qu'un théorème d'existence, c. à d. théorème de la forme $\sum_x \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est une fonction propositionnelle (voir § 1, III), est démontré de façon *effective*, lorsqu'on a *défini* un individu a et on a démontré que a satisfait au théorème considéré, c. à d. que $\varphi(a)$ [2]).

[1]) Voir W. Sierpiński, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties homogènes*, Fund. Math. **1** (1920). Cf. G. Cantor, Acta Math. **7** (1885), p. 118.

[2]) Comp. la notion d'effectivité chez MM. Borel et Lebesgue, ainsi que chez M. F. Bernstein (qui distingue entre „Existenz" et „Herstellung", Leipz. Ber. **60**, 1908). De nombreuses recherches de M. Sierpiński ont été consacrées à ce sujet, voir surtout *Les exemples effectifs et l'axiome du choix*, Fund. Math. **2** (1921). Cf. aussi les remarques sur l'effectivité dans la note de M. Knaster et moi dans Fund. Math. **2**, p. 251.

Dans la Topologie fondée sur le système d'ax. I—V, *nous allons considérer la base de l'espace comme définie* (ce qui est justifié par le fait que dans l'espace euclidien on sait définir une base: la suite des sphères dont le rayon et les coordonnées du centre sont rationnels). Cela donne lieu à d'autres définitions: on peut en effet définir des différents objets (ensembles, fonctions etc.) à l'aide de la base de l'espace.

Dans les problèmes de la puissance il s'agit, en général, de démontrer qu'un ensemble est de telle ou telle puissance; la démonstration est effective, si l'on *définit* la correspondance en question.

Ainsi, par ex., la démonstration donnée au N° III pour le fait que l'ensemble $X - X^{\circledcirc}$ est dénombrable n'est pas effective: nous n'avons pas défini une suite individuelle contenant tous les points de cet ensemble; nous avons démontré seulement que des suites de ce genre existent.

Par contre, il est facile d'établir d'une façon *effective* que *l'ensemble $X - X^{\backprime}$ est dénombrable*. En effet, si $p \in X - X^{\backprime}$, il existe un indice n tel que $p = XR_n$ (où R_n est un ensemble appartenant à la base de l'espace). Désignons par $n(p)$ le premier indice de ce genre. A deux points différents correspondent évidemment deux indices différents. Ainsi, les points de l'ensemble $X - X^{\backprime}$ se trouvent rangés en une suite (finie ou infinie).

Une démonstration effective de la dénombrabilité de l'ensemble $X - X^{\circledcirc}$ sera donnée au § 19.

§ 19. Puissance de diverses familles d'ensembles.

I. Familles d'ensembles ouverts. Familles d'ensembles à propriété de Baire.

1. *La famille de tous les ensembles ouverts est de puissance* $\leqslant \mathfrak{c}$.

En effet, chaque ensemble ouvert étant d'après l'ax. V somme de certains ensembles R_n, la puissance de la famille de tous les ensembles ouverts ne peut dépasser celle de la famille de toutes les suites extraites de la base de l'espace.

Chaque ensemble fermé étant le complémentaire d'un ensemble ouvert, *la famille de tous les ensembles fermés est aussi de puissance* $\leqslant \mathfrak{c}$.

Remarque. La correspondance entre les ensembles fermés et les éléments d'un sous-ensemble du continu linéaire se laisse préciser comme suit.

Soit $R_1, R_2, \dots$ une base de l'espace. Admettons que chaque terme soit répété dans cette suite une infinité de fois. G étant un ensemble ouvert, soit $k_1, k_2, \dots$ la suite de tous les entiers tels que $R_{k_n} \subset G$. Posons

$$(1) \qquad t(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n}}, \qquad t(0) = 0 \text{ [1]}.$$

Autrement dit, le développement diadique de $t(G)$ est $0, a_1, a_2 \dots$ où $a_n = 1$ ou 0, suivant que R_n est contenu dans G ou non. Ces développements admettent toujours une infinité d'unités (sauf lorsque $G=0$). On en conclut aussitôt que la fonction $t(G)$ est à valeurs différentes:

(2) *l'inégalité* $G \neq H$ *entraîne* $t(G) \neq t(H)$.

On constate facilement aussi que

(3) *l'inclusion* $G \subset H$ *entraîne* $t(G) \leqslant t(H)$.

2. *Toute famille d'ensembles ouverts disjoints est (effectivement) dénombrable.*

En effet, G étant un ensemble (non vide) de la famille considérée, il existe d'après l'ax. V un indice n tel que $R_n \subset G$. Soit $n(G)$ le premier indice de ce genre. Les ensembles ouverts en question étant disjoints par hypothèse, à deux ensembles différents correspondent toujours deux indices différents, de sorte que la famille de ces ensembles se trouve rangée en une suite (finie ou infinie).

En particulier, sur la ligne droite chaque famille d'*intervalles* n'empiétant pas les uns sur les autres est dénombrable.

Le th. 2 implique que

3. *Toute famille d'ensemble $\{X_\iota\}$ à propriété de Baire, disjoints et dont aucun n'est de première catégorie est (effectivement) dénombrable.*

Car selon § 11, IV, cor. 3, les ensembles $\mathrm{Int}[D(X_\iota)]$ sont disjoints et d'après § 10, V, 7 et 11, non vides.

[1]) Cette définition m'a été communiquée par Felix Hausdorff.

On en déduit le théorème suivant (avec les notations du § 1, VI, 6):

4 [1]). *E étant le résultat de l'opération ($\mathcal{A}$) effectuée sur les ensembles $A_{k_1 \dots k_n}$ à propriété de Baire, il existe un indice $\mu < \Omega$ tel que l'ensemble $E - K_\mu$ est de première catégorie.*

En effet, comme $A^\beta_{k_1 \dots k_n} \subset A^\alpha_{k_1 \dots k_n}$ pour $\alpha < \beta$, les ensembles

$$B^\alpha_{k_1 \dots k_n} = A^\alpha_{k_1 \dots k_n} - A^{\alpha+1}_{k_1 \dots k_n}, \quad \text{où} \quad \alpha < \Omega,$$

sont deux à deux disjoints (pour $k_1 \dots k_n$ fixe). D'après 3, à chaque système $r = (k_1 \dots k_n)$ correspond un $\gamma_r < \Omega$ tel que, pour $\alpha > \gamma_r$, l'ensemble $B^\alpha_{k_1 \dots k_n}$ est de I-e catégorie. La famille des systèmes r étant dénombrable, il existe un $\mu < \Omega$ tel que $\mu > \gamma_r$ quel que soit r. L'ensemble $B^\mu_{k_1 \dots k_n}$ est donc de I-e catégorie quel que soit le système $k_1 \dots k_n$. La somme $\sum B^\mu_{k_1 \dots k_n}$ (la sommation étant étendue à tous les systèmes $k_1 \dots k_n$) est donc également de I-e catégorie. Il en est de même de $E - K_\mu$ en vertu des inclusions

$$E - K_\mu \subset E_\mu - K_\mu \subset T_\mu = \sum B^\mu_{k_1 \dots k_n}.$$

5. *Si les ensembles $A_{k_1 \dots k_n}$ jouissent de la propriété de Baire au sens restreint et si Z est un ensemble qui contient un seul point de chaque différence (non vide) $K_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} K_\xi$, Z est de première catégorie sur tout ensemble parfait.*

En effet, comme $K_\alpha \subset E$, on a

$$Z \subset \sum_{\alpha \leqslant \mu} (K_\alpha - \sum_{\xi < \alpha} K_\xi) + (E - K_\mu).$$

On en conclut, en vertu de 4, que Z est la somme d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble de I-e catégorie. En relativisant le th. 4 par rapport à un ensemble parfait arbitraire P, il en résulte que ZP est la somme d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble de I-e catégorie sur P. L'ensemble P étant parfait, tout point individuel est non-dense dans P; donc ZP est de I-e catégorie sur P.

[1]) Voir E. Sélivanowski, *Sur les propriétés des constituantes des ensembles analytiques*, Fund. Math. **21** (1933), p. 20, W. Sierpiński, ibid. p. 29, E. Szpilrajn-Marczewski, ibid. p. 234.

L'énoncé 4 reste valable (dans l'espace des nombres réels) en remplaçant la propriété de Baire par la mesurabilité (au sens de Lebesgue) et les ensembles de I-e catégorie par les ensembles de mesure nulle.

Comme on verra plus tard, si E est un ensemble analytique non borelien (dans l'espace $\mathcal{E}$ des nombres réels), l'ensemble Z, de I-e catégorie sur tout ensemble parfait, peut être supposé **indénombrable**; cela présente (dans l'espace $\mathcal{E}$) une singularité très remarquable.

Ajoutons que l'on obtient aussi un ensemble de I-e catégorie sur tout ensemble parfait en extrayant un seul point de chaque différence (non vide) $D_{\alpha+1}-D_\alpha$ où $D_\alpha=E'_\alpha$ (pour E_α, voir § 1, VI, 6) et où $\{A_{k_1\ldots k_n}\}$ est supposé un système régulier d'ensembles fermés [1]).

II. Familles monotones bien ordonnées [2]).

1. *Toute famille bien ordonnée d'ensembles ouverts décroissants est (effectivement) dénombrable.*

Soit, en effet, $G_1\supset G_2\supset\ldots\supset G_\xi\supset G_{\xi+1}\supset\ldots$ une suite transfinie d'ensembles ouverts (différents). Si α n'est pas le dernier indice, il existe un point $p_\alpha\in G_\alpha-G_{\alpha+1}$; il existe donc un indice n tel que $p_\alpha\in R_n\subset G_\alpha$, donc que

$$R_n\subset G_\alpha \quad \text{et} \quad R_n-G_{\alpha+1}\neq 0. \tag{i}$$

Soit $n(\alpha)$ le plus petit indice qui satisfait à la condition (i).

A deux nombres transfinis différents correspondent deux indices différents, car la condition $\alpha<\beta$ implique $R_{n(\beta)}\subset G_\beta\subset G_{\alpha+1}$, tandis que, selon (i), l'inclusion $R_{n(\alpha)}\subset G_{\alpha+1}$ n'a pas lieu. Ainsi, tous les indices α (sauf, peut-être, le dernier) se trouvent rangés en une suite dénombrable.

2. *Toute famille bien ordonnée d'ensembles fermés décroissants est (effectivement) dénombrable.*

Soit $F_1\supset F_2\supset\ldots\supset F_\xi\supset F_{\xi+1}\supset\ldots$ cette suite. Si α n'est pas le dernier indice, il existe un point $p_\alpha\in(F_\alpha-F_{\alpha+1})$; soit $n(\alpha)$ le plus petit indice tel que

$$R_{n(\alpha)}\cdot F_\alpha\neq 0=R_{n(\alpha)}\cdot F_{\alpha+1}.$$

Il vient pour $\alpha<\beta$: $F_\beta\subset F_{\alpha+1}$; l'inégalité $R_{n(\beta)}\cdot F_\beta\neq 0$ entraîne donc $R_{n(\beta)}\cdot F_{\alpha+1}\neq 0$, d'où $n(\alpha)\neq n(\beta)$. L'ensemble des indices α est par conséquent (effectivement) dénombrable.

En tenant compte du fait que les ensembles ouverts sont les complémentaires des ensembles fermés, on parvient à l'énoncé suivant, qui généralise les deux précédents:

3. *Toute famille bien ordonnée d'ensembles croissants ou décroissants qui sont tous fermés ou bien tous ouverts est (effectivement) dénombrable.*

[1]) Voir N. Lusin et W. Sierpiński, R. Acc. Lincei 6, v. VII (1928), p. 214.
[2]) Voir R. Baire, Thèse, Ann. di Math. (3) **3** (1899), p. 51.

Remarques. 1°. *Tout ensemble de nombres réels bien ordonné selon la grandeur est dénombrable.* Car une suite transfinie de nombres réels $x_0<x_1<\ldots<x_\xi<x_{\xi+1}<\ldots$ détermine une famille bien ordonnée d'ensembles fermés croissants $\{F_\xi\}$ où F_ξ est la demi-droite $x\leqslant x_\xi$.

2°. La démonstration des énoncés 1 et 2 reste valable lorsqu'on considère au lieu du bon ordre un *ordre où chaque élément* (sauf le dernier, s'il existe) *admet un élément qui le suit immédiatement*. Ainsi l'énoncé 3 peut être généralisé à un ordre de ce genre.

D'autres généralisations seront établies dans les NN° suivants (III, 2 et VII, 1).

III. Ensembles développables. Un ensemble E est par définition (§ 12, II) *développable*, s'il est de la forme

$$E=F_1-F_2+F_3-F_4+\ldots+F_\xi-F_{\xi+1}+\ldots,$$

les termes de la série (transfinie) étant fermés décroissants.

D'après le théorème II, 2, cette série est *dénombrable* (autrement dit, tous les indices ξ sont inférieurs à un nombre de la première ou deuxième classe).

1. *Les ensembles développables sont à la fois des $\boldsymbol{F_\sigma}$ et des $\boldsymbol{G_\delta}$.*

En effet, la différence de deux ensembles fermés est un $\boldsymbol{F_\sigma}$ comme produit d'un ensemble fermé et d'un ensemble ouvert (qui est un $\boldsymbol{F_\sigma}$ selon § 15, IV). Un ensemble développable, comme formé d'une infinité dénombrable de différences d'ensembles fermés, est donc aussi un $\boldsymbol{F_\sigma}$. Il est en outre un $\boldsymbol{G_\delta}$, car le complémentaire d'un ensemble développable, étant lui-même développable (§ 12, VI, 1), est un $\boldsymbol{F_\sigma}$.

1a. *Les ensembles clairsemés sont des $\boldsymbol{F_\sigma}$ et des $\boldsymbol{G_\delta}$* [1]).

Car chaque ensemble clairsemé est développable (§ 12, VI, 4).

Remarques. 1°. Les ensembles développables sont des ensembles $\boldsymbol{F_\sigma}$ et $\boldsymbol{G_\delta}$ *effectifs*: nous pouvons faire correspondre à chaque ensemble développable une suite bien déterminée d'ensembles fermés dont cet ensemble est la somme (ainsi qu'une suite d'ensembles ouverts dont cet ensemble est le produit).

[1]) Théorème de W. H. Young, *The Theory of Sets of Points*, Cambridge 1906, p. 65.

En effet, si E est développable, on a d'après § 12, V, 3°:

$$E = \sum_{\xi<\alpha} (A_\xi - B_\xi)$$

où les ensembles A_ξ et B_ξ désignent les termes du développement § 12, III, 3° (i).

Or, la suite A_ξ étant d'après II, 2 effectivement dénombrable, les indices $\xi<\alpha$ peuvent être imaginés rangés en une suite simple infinie $\xi_1, \xi_2, \dots$ (qui n'est pas nécessairement une suite croissante). D'autre part, nous avons fait correspondre (§ 15, IV) à chaque ensemble fermé une suite d'ensembles ouverts dont il est le produit. Il vient ainsi:

$$B_\xi = \prod_{k=1}^{\infty} G_\xi^k \quad \text{et} \quad E = \sum_{n,k=1}^{\infty} [A_{\xi_n} - G_{\xi_n}^k].$$

La série double se transformant facilement en une série simple, on *définit* ainsi une suite simple infinie d'ensembles fermés dont la somme constitue l'ensemble E. Cela veut dire que E est un $\boldsymbol{F_\sigma}$ *effectif*.

Le complémentaire d'un ensemble développable étant développable (§ 12, VI, 1), tout ensemble développable est un $\boldsymbol{G_\delta}$ effectif.

2°. Le *théorème inverse* à 1 est vrai — comme on le verra au § 33 — dans les espaces complets, mais ne subsiste pas dans des espaces arbitraires. En effet, dans l'espace des nombres rationnels, tout ensemble qui est simultanément dense et frontière est un $\boldsymbol{F_\sigma}$ et $\boldsymbol{G_\delta}$ (puisque l'espace est dénombrable), mais n'est pas développable, car sa frontière n'est pas non-dense (elle est en effet identique à l'espace tout entier, cf. § 12, V, 2°).

3°. Le th. 1 est vrai dans *chaque espace métrique*, qu'il soit séparable ou non (voir § 26, X).

Passons à présent à la démonstration de l'énoncé suivant, qui constitue une généralisation du théorème N° II, 3:

2. *Toute famille bien ordonnée d'ensembles développables croissants (ou décroissants) est dénombrable.*

En tenant compte du fait que la fonction caractéristique d'un ensemble développable est ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé (§ 13, VI), l'énoncé 2 résulte [1]) du théorème plus général suivant, que nous allons démontrer [2]).

[1]) Pour une démonstration plus directe, voir F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 171. Cf. aussi Z. Zalewasser, *Un théorème sur les ensembles qui sont à la fois* $\boldsymbol{F_\sigma}$ *et* $\boldsymbol{G_\delta}$, Fund. Math. **3** (1922), p. 44.

[2]) Je dois cette démonstration à Z. Zalewasser.

Théorème. Toute famille bien ordonnée de fonctions (à valeurs réelles) ponctuellement discontinues sur tout ensemble fermé:

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \dots \leqslant f_\xi(x) \leqslant f_{\xi+1}(x) \leqslant \dots \quad (\xi < \Omega)\ ^{1)},$$

est dénombrable.

Il s'agit d'établir l'existence d'un indice α tel qu'on ait, pour chaque x et ξ, $f_{\alpha+\xi}(x) = f_\alpha(x)$.

Soit, pour n fixe, $R_{n,1}, R_{n,2}, \dots, R_{n,i}, \dots$ la suite des ensembles appartenant à la base de l'espace et tels qu'il existe un nombre ordinal $\alpha_{n,i}$ satisfaisant à la condition:

$$x \in R_{n,i} \text{ entraîne } f_{\alpha_{n,i}+\xi}(x) - f_{\alpha_{n,i}}(x) < 1/n, \text{ quel que soit } \xi.$$

Posons $R^n = R_{n,1} + R_{n,2} + \dots$ Soit $\alpha_n > \alpha_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots$ Il vient

$$f_{\alpha_n+\xi}(x) - f_{\alpha_n}(x) < 1/n \quad \text{pour} \quad x \in R^n.$$

Par conséquent, si l'on pose $\alpha > \alpha_n$, $n = 1, 2, \dots$, on a pour $x \in R^1 \cdot R^2 \cdot \dots$:

$$f_{\alpha+\xi}(x) - f_\alpha(x) < 1/n, \text{ quel que soit } n, \text{ d'où } f_{\alpha+\xi}(x) = f_\alpha(x).$$

Notre théorème sera donc démontré dès que l'égalité $R^n = 1$ sera établie pour chaque n.

Supposons, par impossible, qu'il existe un n tel que l'ensemble fermé $F = 1 - R^n$ soit non vide. Soit $[a_1, a_2, \dots]$ un ensemble dénombrable dense dans F. Il existe un γ tel que

(i) $\quad \xi \geqslant \gamma$ entraîne $f_\xi(a_m) = f_\gamma(a_m)$, quel que soit m.

Car à chaque m correspond un γ_m tel que $f_\xi(a_m) = f_{\gamma_m}(a_m)$ pour $\xi \geqslant \gamma_m$ (cf. remarque 1° du N° II); il suffit donc que γ soit supérieur à tous les γ_m où $m = 1, 2, \dots$ On peut admettre en outre que $\gamma > \alpha_n$.

Le point a_m étant situé en dehors de R^n, il existe dans chaque entourage de a_m un point x et un indice $\beta_m > \gamma$ tels que $f_{\beta_m}(x) - f_\gamma(x) \geqslant 1/n$; il existe donc un b_m tel que

$$|b_m - a_m| < 1/n \quad \text{et} \quad f_{\beta_m}(b_m) - f_\gamma(b_m) \geqslant 1/n.$$

L'inégalité $\gamma > \alpha_n$ implique d'autre part que $f_{\alpha_n}(b_m) \leqslant f_\gamma(b_m)$, donc que $f_{\beta_m}(b_m) - f_{\alpha_n}(b_m) \geqslant 1/n$, d'où $b_m \in F$.

[1]) Ω désigne, comme d'habitude, le plus petit nombre ordinal indénombrable.

Soit β un nombre supérieur à tous les β_m, $m=1,2,\dots$ Il vient

(ii) $$f_\beta(b_m)-f_\gamma(b_m)\geqslant {}^1/_n, \quad m=1,2,\dots$$

La fonction $f_\beta(x)$ étant ponctuellement discontinue sur chaque ensemble fermé, il existe un point de continuité de la fonction partielle $f_\beta|F$. Soit donc $G(\neq 0)$ un ensemble ouvert dans F et tel qu'on ait $|f_\beta(x)-f_\beta(x')|<{}^1/_{2n}$ pour x et x' appartenant à G. D'une façon analogue, il existe dans G un point de continuité de la fonction $f_\gamma|\overline{G}$; soit $H(\neq 0)$ un ensemble ouvert dans F tel que:

$$f_\beta(x)-f_\beta(x')|<{}^1/_{2n} \quad \text{et} \quad |f_\gamma(x)-f_\gamma(x')|<{}^1/_{2n} \quad \text{pour} \quad x\in H \quad \text{et} \quad x'\in H.$$

Pour m convenablement choisi on peut substituer dans ces inégalités a_m à x et b_m à x'. En vertu de (i), on a $f_\beta(a_m)=f_\gamma(a_m)$; il vient ainsi

$$|f_\beta(a_m)-f_\beta(b_m)|<{}^1/_{2n} \quad \text{et} \quad |f_\beta(a_m)-f_\gamma(b_m)|<{}^1/_{2n},$$

d'où $|f_\beta(b_m)-f_\gamma(b_m)|<{}^1/_n$, contrairement à (ii).

2 a. *Toute famille bien ordonnée d'ensembles clairsemés croissants (ou décroissants) est dénombrable*[1]).

Car chaque ensemble clairsemé est développable (§ 12, VI, 4).

IV. Dérivé d'ordre α[2]). Le dérivé d'ordre α de X est défini par les conditions:

$$X^{(1)}=X^{\backprime}, \quad X^{(\alpha+1)}=(X^{\alpha})^{\backprime} \quad \text{et} \quad X^{(\lambda)}=\prod_{\alpha<\lambda}X^{(\alpha)}$$

si λ est un nombre limite.

Le dérivé $X^{\backprime}$ étant fermé et le produit d'ensembles fermés l'étant aussi, on prouve facilement (par l'induction tranfinie) que $X^{(\alpha)}$ est fermé, quel que soit α. En outre, tout ensemble fermé contenant son dérivé, la famille des dérivés est décroissante:

$$X^{(1)}\supset X^{(2)}\supset\dots\supset X^{(\alpha)}\supset\dots$$

Par conséquent (d'après II, 2), *il n'y a qu'un ensemble dénombrable de dérivés de l'ensemble X qui soient différents*; autrement dit, à partir d'un certain nombre $\beta<\Omega$ tous les dérivés sont identiques: $X^{(\beta)}=X^{(\beta+1)}=\dots$

L'ensemble $X^{(\beta)}$, comme identique à son dérivé, est *parfait*.

1) Dans ma note de Fund. Math. **3** (1922), p. 42, il se trouve une démonstration directe de cet énoncé. Une démonstration effective résulte d'ailleurs du théorème § 18, VI de M. Sierpiński (voir sa note citée).

2) G. Cantor, Math. Ann. **17** (1880), p. 357.

En particulier, si l'on pose $X=1$ et $1^{(0)}=1$, on a (§ 12, I):

(i) $$1=\sum_{\alpha<\beta}(1^{(\alpha)}-1^{(\alpha+1)})+1^{(\beta)}.$$

Or, chacun des ensembles $1^{(\alpha)}-1^{(\alpha+1)}$ étant dénombrable, en tant que composé de points isolés (§ 18, VIII), leur somme dénombrable $\sum_{\alpha<\beta}(1^{(\alpha)}-1^{(\alpha+1)})$ est encore un ensemble dénombrable.

On retrouve ainsi dans la formule (i) le théorème de Cantor-Bendixson (§ 18, V): *en enlevant de l'espace un ensemble dénombrable, on parvient à un ensemble parfait.*

C'est précisément par cette voie que ce théorème a été démontré pour la première fois. L'avantage de ce raisonnement vis-à-vis du raisonnement exposé au § précédent est de ne pas faire intervenir l'axiome du choix et de pouvoir énumérer *effectivement* les éléments de chaque ensemble clairsemé; car la suite des dérivés et l'ensemble $X-X^{\backprime}$ sont effectivement dénombrables (§ 18, VIII)[1])

V. Analyse logique[2]). Les relations entre les propositions suivantes ont été étudiées dans les espaces $\mathcal{L}$:

(1) *toute infinité bien ordonnée d'ensembles fermés croissants est dénombrable,*

(2) *toute infinité bien ordonnée d'ensembles fermés décroissants est dénombrable,*

(3) *tout ensemble contient un ensemble dense dénombrable,*

(4) *tout ensemble clairsemé est dénombrable,*

(5) *tout ensemble indénombrable contient un point de condensation.*

On prouve que les propositions (4) et (5) sont équivalentes, que (4) entraîne (2) et que (3) entraîne (1). Les implications inverses subsistent dans les espaces $\mathcal{L}$ dans lesquels la fermeture est toujours un ensemble fermé, mais elles peuvent être en défaut dans des espaces $\mathcal{L}$ plus généraux.

1) Cf. W. Sierpiński, *Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles des points*, Fund. Math. **1**, pp. 1—6.

2) Cf. W. Sierpiński, *Sur l'équivalence de trois propriétés des ensembles abstraits*, Fund. Math. **2** (1921), pp. 179—188, et ma note *Une remarque sur les classes $\mathcal{L}$ de M. Fréchet*, Fund. Math. **3** (1922), pp. 41—43. Voir aussi (pour le cas de l'espace métrique) W. Gross, *Zur Theorie der Mengen in denen ein Distanzbegriff definiert ist*, Wiener Ber. **123** (1914), p. 801.

VI. Familles de fonctions continues. Soit f une fonction continue qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en sous-ensemble de l'espace $\mathcal{Y}$. L'espace $\mathcal{X}$ étant séparable, il existe une suite de points $x_1, x_2, \dots$ telle que chaque point p de $\mathcal{X}$ en est limite d'une sous-suite: $p = \lim x_{k_n}$. Or, la fonction f étant continue, ses valeurs sont déterminées par celles aux points x_n, car $f(p) = \lim f(x_{k_n})$. Autrement dit, si $f(x_n) = g(x_n)$ pour chaque n, les fonctions f et g sont identiques. Il en résulte que la puissance de la famille $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ de toutes les fonctions continues qui transforment l'espace $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de l'espace $\mathcal{Y}$ ne peut dépasser la puissance de la famille des suites (dénombrables) extraites de l'espace $\mathcal{Y}$, c. à d. la puissance $\mathfrak{c}^{\aleph_0}$, qui est égale à $\mathfrak{c}$. *La famille considérée est donc de puissance* $\leqslant \mathfrak{c}$.

Ainsi, la famille des sous-ensembles de l'espace $\mathcal{Y}$ qui sont des images continues d'un sous-ensemble fixe de l'espace $\mathcal{X}$ est de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$. Il en résulte que dans un espace ayant la puissance du continu il y a autant des *types topologiques* (§ 13, VIII) que des sous-ensembles, à savoir 2 .

VII. Structure des familles monotones d'ensembles fermés[1]**.** Envisageons, dans un espace métrique séparable $\mathcal{X}$, une famille *monotone* $\boldsymbol{F}$ d'ensembles fermés; cela veut dire que, pour chaque couple A, B de ses éléments, on a soit $A \subset B$, soit $B \subset A$. La famille $\boldsymbol{F}$ sera considérée comme *ordonnée*: nous dirons que A *précède* B lorsque $A \subset B$ et $A \neq B$.

La famille $\boldsymbol{G}$ des complémentaires des ensembles-éléments de $\boldsymbol{F}$ est évidemment une famille monotone d'ensembles ouverts. La fonction $t(G)$ envisagée dans I (1) établit en vertu de (2) et (3) une similitude entre la famille $\boldsymbol{G}$ et un sous-ensemble de l'intervalle 01. Autrement dit:

1. *La famille* $\boldsymbol{F}$ *est semblable à un sous-ensemble de l'intervalle* 01.

En d'autres termes, *on peut munir chaque élément* A *de* $\boldsymbol{F}$ *d'un indice* y *tel que* $0 \leqslant y \leqslant 1$ *et que l'inégalité* $y_1 < y_2$ *équivaille à la relation*:

$$A_{y_1} \subset A_{y_2}, \quad A_{y_1} \neq A_{y_2}.$$

[1]) Pour les NN° VII—X, voir ma note *Sur les familles monotones d'ensembles fermés et leurs applications à la théorie des espaces connexes*, Fund. Math. **30** (1938), pp. 17—24. Ces applications se trouvent dans ma *Topologie II*.

Nous allons démontrer que, d'une façon plus précise:

2. *J désignant l'ensemble des indices y auxquels correspondent les ensembles A_y, on peut l'assujettir à la condition suivante: les extrémités des intervalles contigus à $\bar{J}$ appartiennent à J; si $\boldsymbol{F}$ contient le premier ou le dernier élément, ces éléments sont munis des indices* 0 *et* 1.

En conséquence: *si $\boldsymbol{F}$ n'admet pas de lacunes et contient le premier et le dernier élément, J est fermé. Si, en outre, $\boldsymbol{F}$ n'admet pas de sauts, J coïncide avec l'intervalle* 01 *tout entier.*

Le théorème 2 est une conséquence directe du théorème suivant de la Théorie générale des ensembles ordonnés:

F étant un ensemble ordonné qui admet une partie dense dénombrable D, il existe une correspondance φ entre F et un sous-ensemble J de l'intervalle 01 *qui conserve l'ordre des éléments; cette correspondance peut être assujettie à la condition supplémentaire énoncée dans le th.* 2.

La correspondance φ en question se laisse définir comme suit[1]). Soit $d_0, d_1, \dots$ la suite composée de tous les éléments de D et de tous les éléments de F qui admettent un élément voisin. Supposons, ce qui est évidemment légitime, que F contienne le premier élément d_0 et le dernier élément d_1.

Posons

$$\varphi(d_0) = 0, \quad \varphi(d_1) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(d_n) = \tfrac{1}{2}[\varphi(d_k) + \varphi(d_l)],$$

où (pour $n > 1$) d_k, d_l désigne le couple des éléments voisins dans le système $d_0, \dots, d_{n-1}$ tels que $d_k \prec d_n \prec d_l$. Enfin, pour $a \in F - D$, soit $\varphi(a)$ la borne inférieure des nombres $\varphi(d_n)$ où $a \prec d_n$.

La fonction φ ainsi définie établit la correspondance demandée.

En effet, on démontre par induction pour chaque n que, d_j et d_q étant deux éléments voisins dans le système $d_0, \dots, d_{n-1}$, il existe un s tel que $|\varphi(d_j) - \varphi(d_q)| = 1/2^s$. On conclut de là que, si $\varphi(d_n) = i/2^m$ où i est impair, on a

$$\varphi(d_k) = (i-1)/2^m \quad \text{et} \quad \varphi(d_l) = (i+1)/2^m,$$

k et l ayant le même sens qu'auparavant.

Soit uv un intervalle contigu à $\bar{J}$. Soit m le plus grand entier

[1]) Voir ma note des Fund. Math. **8** (1921), p. 215.

tel qu'il existe dans la suite $\varphi(d_0), \varphi(d_1), \ldots$ deux nombres de la forme $i/2^m$ et $(i+1)/2^m$ satisfaisant à la condition

$$i/2^m \leqslant u < v \leqslant (i+1)/2^m.$$

L'un des deux nombres i ou $i+1$, soit i, est impair; désignons par n l'indice tel que $\varphi(d_n)=i/2^m$. Il existe par conséquent un $l<n$ tel que $\varphi(d_l)=(i+1)/2^m$ et que, dans le système $d_0, \ldots, d_n$, les éléments d_n et d_l sont voisins. Nous en concluons que

$$i/2^m = u \quad \text{et} \quad (i+1)/2^m = v.$$

En effet, s'il n'en est pas ainsi, il existe un d_s tel que $d_n \lessgtr d_s \lessgtr d_l$; s étant le plus petit indice possible, il vient $\varphi(d_s)=(2i+1)/2^{m+1}$. Conformément à la définition du nombre m, on a $u<(2i+1)/2^{m+1}<v$; mais cela contredit l'hypothèse que uv est un intervalle contigu.

3. *Abstraction faite d'un ensemble dénombrable d'indices, on a pour tout y*:

$$(1) \quad A_y = \overline{\sum_{u<y} A_u}, \qquad\qquad (2) \quad A_y = \prod_{z>y} A_z \text{ [1]}.$$

Soit, en effet, $R_1, R_2, \ldots$ la base de l'espace $\mathfrak{X}$. A chaque $y \in J$ qui ne satisfait pas à (1), faisons correspondre un entier $n(y)$ tel que

$$A_y \cdot R_{n(A)} \neq 0 \quad \text{et} \quad R_{n(A)} \cdot \sum_{u<y} A_u = 0.$$

Si $y \neq y'$, on a $n(y) \neq n(y')$. L'ensemble des y qui ne satisfont pas à l'égalité (1) est donc dénombrable.

Le cas de l'égalité (2) est analogue.

4. *Abstraction faite d'un ensemble dénombrable d'indices, on a pour tout y*

$$(3) \qquad \mathrm{Int}\,(A_y) = \sum_{u<y} \mathrm{Int}\,(A_u).$$

En effet, la famille des ensembles $B_y = \overline{\mathfrak{X}-A_y}$ étant monotone, la famille des B_y tels que

$$B_y \neq \prod_{u<y} B_u, \ \text{c. à d. que} \ \mathrm{Int}\,(A_y) \neq \sum_{u<y} \mathrm{Int}\,(A_u),$$

est dénombrable d'après 3. Il suffit de prouver que, si $y'<y$ et $B_{y'}=B_y$, on a $B_y = \prod_{u<y} B_u$. Or cette égalité résulte de la double inclusion

$$B_y \subset \prod_{u<y} B_u \subset B_{y'}.$$

[1]) Voir W. Sierpiński, Bull. de l'Acad. Polon. des Sc. 1921, p. 62.

VIII. Familles strictement monotones. Nous dirons qu'une famille d'ensembles (fermés) est *strictement monotone*, lorsqu'on a pour chaque couple $A \neq B$ de ses éléments soit $A \subset \mathrm{Int}\,(B)$, soit $B \subset \mathrm{Int}\,(A)$. Les éléments de la famille considérée étant munis d'indices (conformément aux th. 1 et 2 du N° VII), la monotonie stricte signifie que

l'inégalité $y_1 < y_2$ entraîne l'inclusion $A_{y_1} \subset \mathrm{Int}\,(A_{y_2})$.

F étant une famille strictement monotone d'ensembles fermés, on a pour tout y, abstraction faite d'un ensemble dénombrable:

$$(4) \qquad A_y = \prod_{z>y} A_z = \prod_{z>y} \mathrm{Int}\,(A_z),$$

$$(5) \qquad A_y = \overline{\sum_{u<y} A_u} = \overline{\mathrm{Int}\,(A_y)},$$

$$(6) \qquad \mathrm{Int}\,(A_y) = \sum_{u<y} \mathrm{Int}\,(A_u) = \sum_{u<y} A_u,$$

$$(7) \qquad \overline{\mathfrak{X}-A_y} = \prod_{u<y} \overline{\mathfrak{X}-A_u} = \prod_{u<y} (\mathfrak{X}-A_u).$$

La formule (4) résulte de (2) en vertu de l'inclusion $A_y \subset \mathrm{Int}\,(A_z) \subset A_z$. La formule (5) est une conséquence de (1); elle signifie que A_y est un *domaine fermé*. Les formules (6) et (7), qui sont équivalentes, résultent de (3) en vertu de l'inclusion $\mathrm{Int}\,(A_u) \subset A_u \subset \mathrm{Int}\,(A_y)$.

En combinant les formules (4) et (7), on obtient des formules pour la *frontière* de A_y. On a ainsi

$$(8) \qquad \mathrm{Fr}\,(A_y) = \prod_{z>y} \mathrm{Int}\,(A_z) - \sum_{u<y} A_u,$$

ou encore (cf. (2) et (7)): il existe deux suites d'indices $\{u_n\}$ et $\{z_n\}$ telles que

$$u_1 < u_2 < \ldots < y < \ldots < z_2 < z_1$$

et que

$$(9) \qquad \mathrm{Fr}\,(A_y) = \prod_n [\mathrm{Int}\,(A_{z_n}) - A_{u_n}] = \prod_n A_{z_n} \cdot \overline{\mathfrak{X}-A_{u_n}}.$$

IX. Rapports des familles strictement monotones aux fonctions continues. 1. *Théorème. Si $f \in \mathcal{J}^{\mathfrak{X}}$, la famille F des ensembles*

$$f^{-1}(0y) = \underset{x}{E}\,[0 \leqslant f(x) \leqslant y], \ \textit{où} \ y \in \mathcal{Y} = f(\mathfrak{X}),$$

est strictement monotone et, pour chaque y qui n'admet pas d'élément qui le suit immédiatement, $f^{-1}(0y)$ *est le produit de tous les éléments qui le suivent, c. à d. que*

$$f^{-1}(0y)=\prod_{z>y} f^{-1}(0z),$$

la variabilité de z *étant restreinte à* $\mathcal{Y}$.

Soient, en effet, $y_1<y_2$ deux éléments de $\mathcal{Y}$. L'inclusion évidente $0y_1\subset 0y_2-y_2=\mathrm{Int}\,(0y_2)$ entraîne

$$f^{-1}(0y_1)\subset f^{-1}[\mathrm{Int}\,(0y_2)]\subset \mathrm{Int}\,[f^{-1}(0y_2)],$$

l'inclusion $f^{-1}[\mathrm{Int}\,(B)]\subset\mathrm{Int}\,[f^{-1}(B)]$ étant valable pour chaque fonction continue f.

La famille $\boldsymbol{F}$ est donc strictement monotone.

Admettons que y ne soit pas le dernier élément de $\mathcal{Y}$ et que parmi les $z>y$ il n'existe pas de plus petit dans $\mathcal{Y}$. Par conséquent

$$\mathcal{Y}\cdot(0y)=\prod_{z>y}\mathcal{Y}\cdot(0z);\quad \text{d'où}\quad f^{-1}(0y)=f^{-1}[\prod_{z>y}\mathcal{Y}\cdot(0z)]=\prod_{z>y}f^{-1}(0z).$$

En tenant compte de (1) et (2), on montre que

2. *Abstraction faite d'un ensemble dénombrable d'éléments* y *de* $f(\mathcal{X})$, *on a*

$$f^{-1}(0y)=\overline{f^{-1}(0y-y)},\quad f^{-1}(y1)=\overline{f^{-1}(y1-y)},$$
$$f^{-1}(y)=\overline{f^{-1}(0y-y)}\cdot\overline{f^{-1}(y1-y)}.$$

La dernière égalité est une conséquence des deux premières:

$$f^{-1}(y)=f^{-1}[(0y)\cdot(y1)]=f^{-1}(0y)\cdot f^{-1}(y1).$$

Le th. 1 admet le théorème réciproque suivant:

3. *Théorème.* $\boldsymbol{F}$ *étant une famille strictement monotone d'ensembles fermés munis d'indices conformément aux th. 1 et 2 du N⁰ VII (et où* $A_1=\mathcal{X}$*), il existe une fonction* $f\in\mathcal{I}^{\mathcal{X}}$ *telle qu'on a, pour chaque indice* $y<1$,

$$A_y=f^{-1}(0y)\quad \textit{ou bien}\quad \prod_{z>y}A_z=f^{-1}(0y), \tag{10}$$

suivant que A_y *admet ou non un élément qui le suit immédiatement dans* $\boldsymbol{F}$.

La fonction f se laisse définir comme il suit:

Soit $(A_{r_1},A_{s_1}),(A_{r_2},A_{s_2}),\ldots$ la suite des sauts. Posons

$$\mathcal{X}^*=\mathcal{X}-\sum_n[\mathrm{Int}\,(A_{s_n})-A_{r_n}].$$

Soit:

1⁰ pour $x\in\mathcal{X}^*$

$$f(x)=\text{borne inférieure des } y \text{ tels que } x\in A_y,$$

2⁰ pour $x\in\mathrm{Int}\,(A_{s_n})-A_{r_n}$

$$f(x)=r_n+(s_n-r_n)\frac{\varrho(x,A_{r_n})}{\varrho(x,A_{r_n})+\varrho[x,\mathcal{X}-\mathrm{Int}\,(A_{s_n})]}\ [1].$$

Nous allons démontrer d'abord que la fonction f est continue sur $\mathcal{X}^*$. Notons à ce but la double implication évidente

$$[f(x)<y]\to[x\in A_y]\to[f(x)\leqslant y], \tag{11}$$

valable pour chaque y appartenant à l'ensemble J des indices.

Or, soit $\lim x_n=x$, $x_n\in\mathcal{X}^*$, $f(x)=q$ et $\lim f(x_n)=q'$. Il s'agit de démontrer que $q'=q$.

Pour prouver que $q'\geqslant q$, il y a deux cas à distinguer, suivant que q est ou non l'extrémité droite d'un intervalle contigu à $\bar{J}$. Dans le premier cas, on a $q\in J$ d'après VII, 2; soit r l'extrémité gauche de l'intervalle contigu envisagé (on a aussi $r\in J$). Comme x n'appartient pas à A_r, il en est de même pour x_n avec n suffisamment grand; d'où $f(x_n)\geqslant q$ et par conséquent $q'\geqslant q$.

Soit, dans le cas où q n'est pas une extrémité droite d'un intervalle contigu, $y_1<y_2<\ldots$, $\lim y_n=q$ et $y_n\in J$. Pour n fixe, on a x *non-*$\in A_{y_n}$, donc pour k suffisamment grand x_k *non-*$\in A_{y_n}$, d'où $f(x_k)\geqslant y_n$. Il en résulte que $q'\geqslant q$.

La démonstration de l'inégalité $q'\leqslant q$ est analogue. Dans le cas où q est l'extrémité gauche d'un intervalle contigu qs, on a pour n suffisamment grand $x_n\in A_q$, car les formules $x_n\in\mathcal{X}^*$ et x_n *non-*$\in A_q$ impliquent x_n *non-*$\in\mathrm{Int}\,(A_s)$, tandis que $x\in A_q\subset\mathrm{Int}\,(A_s)$. Il vient $f(x_n)\leqslant q$ et $q'\leqslant q$.

---

[1] Cette formule fournit une *interpolation* de la fonction f définie par la condition 1⁰; c. à d. que l'on a $f(x)\leqslant r_n$ pour $x\in A_{r_n}$, $r_n<f(x)<s_n$ pour $x\in\mathrm{Int}(A_{s_n})-A_{r_n}$ et $f(x)\geqslant s_n$ pour $x\in\mathcal{X}-\mathrm{Int}\,(A_{s_n})$.

Ajoutons que, lorsque $E=0$, on pose $\varrho(x,E)=1$.

Dans le cas contraire, soit $y_1 > y_2 > \ldots$, $\lim y_n = q$ et $y_n \in J$. Pour n fixe, on a $x \in A_{y_{n+1}} \subset \operatorname{Int} A_{y_n}$. Donc, pour k suffisamment grand, $x_k \in A_{y_n}$, d'où $f(x_k) \leqslant y_n$ et $q' \leqslant q$.

La continuité de la fonction f sur $\mathfrak{X}^*$ étant ainsi établie, il s'agit de prouver que, $\{x_n\}$ étant une suite d'éléments extraits de $A_{s_{m_n}} - A_{r_{m_n}}$, convergente vers x, on a $f(x) = \lim f(x_n)$.

Or, il est légitime d'admettre que $r_{m_1} < r_{m_2} < \ldots$, d'où, en posant $q' = \lim r_{m_n}$, on a $q' = \lim f(x_n)$, puisque $r_{m_n} \leqslant f(x_n) \leqslant s_{m_n} \leqslant r_{m_{n+1}}$. Evidemment, x n'appartient à aucun $A_{r_{m_n}}$, d'où $f(x) \geqslant q'$. D'autre part, si $q' \leqslant y \in J$, on a $x \in \overline{\sum A_{s_{m_n}}} \subset A_y$, car $s_{m_n} \leqslant q'$; donc $f(x) \leqslant y$ et par suite $f(x) \leqslant q'$.

Afin d'établir la formule (10), remarquons que l'on a selon (11):

(12) $$A_y \subset f^{-1}(0y) \quad \text{et, pour} \quad y < z \in J, \quad f^{-1}(0y) \subset A_z.$$

Or, dans le cas où y est l'extrémité gauche d'un intervalle contigu, l'inclusion $f^{-1}(0y) \subset A_y$ est une conséquence directe de 1° et 2°. Dans le cas contraire, posons $y = \lim z_n$, $z_1 > z_2 > \ldots$ Il vient selon (12)

$$\prod_{z>y} A_z = \prod_{n=1}^{\infty} A_{z_n} \subset \prod_{n=1}^{\infty} f^{-1}(0z_n) \subset \prod_{n=2}^{\infty} A_{z_{n-1}} = \prod_{z>y} A_z$$

et comme $(0y) = \prod_{n=1}^{\infty} (0z_n)$, on a $f^{-1}(0y) = \prod_{n=1}^{\infty} f^{-1}(0z_n) = \prod_{z>y} A_z$.

Conséquences du th. 3.

(13) $$f^{-1}(0y-y) \subset \operatorname{Int}(A_y) \subset A_y \subset f^{-1}(0y),$$

(14) $$\operatorname{Fr}(A_y) \subset f^{-1}(y) \subset \prod_{z>y} A_z - \sum_{u<y} A_u \subset \prod_{z>y} A_z - \sum_{u<y} \operatorname{Int}(A_u),$$

(15) *si y n'admet pas d'élément qui le précède immédiatement,*
$$f^{-1}(0y-y) = \sum_{u<y} \operatorname{Int}(A_u), \quad \text{c. à d.} \quad f^{-1}(y1) = \prod_{u<y} \overline{\mathfrak{X} - A_u},$$

(16) *si y n'admet pas d'élément voisin et $0 < y < 1$, on a*
$$f^{-1}(y) = \prod_{u<y} \overline{\mathfrak{X} - A_u} \cdot \prod_{z>y} A_z,$$

(17) *abstraction faite d'un ensemble dénombrable d'indices y, on a toujours:*
$$A_y = f^{-1}(0y), \ \operatorname{Int}(A_y) = f^{-1}(0y-y), \ \mathfrak{X} - A_y = f^{-1}(y1-y), \ \operatorname{Fr}(A_y) = f^{-1}(y),$$

(18) *si* $\sum_{y<1} A_y = A_0 + \sum_{0<y<1} \operatorname{Fr}(A_y)$, *on a* $\operatorname{Fr}(A_y) = f^{-1}(y)$ *pour* $0 \neq y \neq 1$.

Afin d'établir (13), posons $u = f(x) < y$, d'où $x \in f^{-1}(0u)$. Si y admet un élément précédent voisin, on a $f^{-1}(0u) \subset \operatorname{Int}(A_y)$. Si $u < v < y$ et $v \in J$, il vient $f^{-1}(0u) \subset A_v \subset \operatorname{Int}(A_y)$. Donc $f^{-1}(0y-y) \subset \operatorname{Int}(A_y)$. Le reste de la formule (13) est évident.

La formule (14) résulte de (13) et (10):

$$\operatorname{Fr}(A_y) = A_y - \operatorname{Int}(A_y) \subset f^{-1}(0y) - f^{-1}(0y-y) = f^{-1}(y) \subset f^{-1}(0y) \subset A_z$$

et $A_u \subset f^{-1}(0u)$, d'où $A_u \cdot f^{-1}(y) = 0$.

Pour démontrer (15), posons $f(x) < u < y$, d'où $x \in f^{-1}(0u-u)$ et selon (13), $x \in \operatorname{Int}(A_u)$, donc

$$f^{-1}(0y-y) \subset \sum_{u<y} \operatorname{Int}(A_u).$$

L'inclusion inverse résulte de (13).

La formule (16) résulte de (15) et (10).

D'après (4), (6), (10) et (15), on a, abstraction faite de $\aleph_0$ indices y:

$$A_y = \prod_{z>y} A_z = f^{-1}(0y) \quad \text{et} \quad \operatorname{Int}(A_y) = \sum_{u<y} \operatorname{Int}(A_u) = f^{-1}(0y-y),$$

d'où le reste de (17).

Enfin (18) se déduit de (14).

Le théorème 3 entraîne le

4. *Corollaire. Etant donnée une famille $\boldsymbol{F}$ de sous-ensembles fermés de $\mathfrak{X}$, strictement monotone et telle que chaque élément de cette famille qui n'admet pas d'élément qui le suit immédiatement est le produit de tous les éléments qui le suivent, il existe une fonction continue f à valeurs réelles définie sur $\mathfrak{X}$ et un ensemble $J \subset \mathcal{J}$ tels que la famille $\boldsymbol{F}$ coïncide avec la famille des ensembles $f^{-1}(0y)$, où $y \in J$.*

X. Familles strictement monotones à type d'ordre fermé. Admettons, à présent, que $\boldsymbol{F}$ soit une famille strictement monotone de sous-ensembles fermés de $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X} \neq 0$), *ne contenant pas de lacunes et contenant comme éléments l'ensemble vide et l'espace $\mathfrak{X}$.* Ces hypothèses signifient que

$$J = \bar{J}, \quad 0 \in J, \quad 1 \in J.$$

Dans le cas où J est indénombrable, désignons par P son noyau parfait (donc $J - P$ est dénombrable, cf. § 17, VI) et par P^* l'ensemble qui s'obtient de P en le privant des extrémités de ses intervalles contigus. Soit φ une fonction continue sur $\mathcal{J}$, non-décroissante, telle que $\varphi(P)=\mathcal{J}$ et qui est croissante sur l'ensemble P^* [1]). Soit $\gamma(t)$ et $\Gamma(t)$ le premier et le dernier y tel que $\varphi(y)=t$. Soit $g(x)=\varphi f(x)$, f étant la fonction du N° IX, th. 3.

Dans le cas où $\overline{\overline{J}}\leqslant\aleph_0$, nous posons: $\varphi=0$, $\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=1$. Donc $g(x)=0$.

On constate aussitôt que

1. *L'ensemble* $J\cdot\varphi^{-1}(t)=\underset{y}{E}(y\in J)[\gamma(t)\leqslant y\leqslant\Gamma(t)]$ *est dénombrable. Si* $\gamma(t)\neq\Gamma(t)$ *et* $P\neq 0$, $\gamma(t)$ *et* $\Gamma(t)$ *sont les extrémités d'un même intervalle contigu à* P. *Si* $\gamma(t)=\Gamma(t)$, $\gamma(t)$ *est un point de* P^*. *Donc,* $\gamma(t)$ *n'admet pas dans* J *d'élément qui le précède immédiatement, ni* $\Gamma(t)$ *qui le suive immédiatement.*

2. $g^{-1}(t)=\prod\limits_{\Gamma(t)<z}A_z\cdot\prod\limits_{u<\gamma(t)}\overline{\mathfrak{X}-A_u}$.

On a, en effet, d'après (10) et (15):

$$\prod_{\Gamma(t)<z}A_z=f^{-1}[0,\Gamma(t)]=\underset{x}{E}[0\leqslant f(x)\leqslant\Gamma(t)],$$
$$\prod_{u<\gamma(t)}\overline{\mathfrak{X}-A_u}=f^{-1}[\gamma(t),1]=\underset{x}{E}[\gamma(t)\leqslant f(x)\leqslant 1]$$

et, d'autre part,

$$\underset{x}{E}[0\leqslant f(x)\leqslant\Gamma(t)]\cdot\underset{x}{E}[\gamma(t)\leqslant f(x)\leqslant 1]=\underset{x}{E}[\gamma(t)\leqslant f(x)\leqslant\Gamma(t)]=$$
$$=\underset{x}{E}[f(x)\in\varphi^{-1}(t)]=f^{-1}\varphi^{-1}(t)=g^{-1}(t),$$

puisque $\varphi^{-1}(t)=\underset{y}{E}[\gamma(t)\leqslant y\leqslant\Gamma(t)]$ en vertu des définitions de γ et de Γ.

3. *Abstraction faite de* $\aleph_0$ *valeurs de* t, *on a*

1°: $g^{-1}(0t)\in\boldsymbol{F}$,

2°: $g^{-1}(t)=f^{-1}(y)$ *où* $t=\varphi(y)$.

En effet, abstraction faite de $\aleph_0$ valeurs de t, chaque t est de la forme $t=\varphi(y)$ où $y\in P^*$. On a alors

$$g^{-1}(0t)=\underset{x}{E}[0\leqslant\varphi f(x)\leqslant t]=\underset{x}{E}[0\leqslant f(x)\leqslant y]=f^{-1}(0y),$$

car les conditions $y'<y$ et $\varphi(y')<\varphi(y)=t$ sont équivalentes.

On en déduit 1° en vertu de (17). 2° résulte de l'équivalence:

$$\{g(x)=t\}\equiv\{\varphi f(x)=t\}\equiv\{f(x)=y\}.$$

[1]) La définition de la fonction φ ne présente aucune difficulté. Voir par exemple § 24a, VI a, théorème (définition de la fonction f).

4. *Théorème. Si la famille* $\boldsymbol{F}$ *est indénombrable, la fonction* g *a les tranches (c. à d. les ensembles* $g^{-1}(t)$*) les plus fines parmi toutes les fonctions continues* h *telles que* $h(\mathfrak{X})=\mathcal{J}$ *et que, abstraction faite de* $\aleph_0$ *valeurs de la variable* $t\in\mathcal{J}$, *on a* $h^{-1}(0t)\in\boldsymbol{F}$.

Si la famille $\boldsymbol{F}$ *est dénombrable (ou finie), il n'existe aucune fonction* h *de ce genre.*

Il s'agit de prouver que la condition $g(x)=g(x')$ entraîne $h(x)=h(x')$.

Supposons par contre que $h(x)<h(x')$. Pour chaque t tel que $h(x)<t<h(x')$, on a donc

(19) $$x\in h^{-1}(0t)\quad\text{et}\quad x'\ non\text{-}\in h^{-1}(0t).$$

L'ensemble de ces t étant indénombrable, il en existe une infinité indénombrable de t tels que $h^{-1}(0t)\in\boldsymbol{F}$. A chaque t de ce genre correspond, par conséquent, un indice $w\in J$ tel que $h^{-1}(0t)=A_w$. De plus, à deux t différents correspondent toujours deux w différents; car en supposant que $t<t'$ et $h^{-1}(0t)=h^{-1}(0t')$, on aurait pour un t'' tel que $t<t''<t'$ la formule

$$h^{-1}(t'')\subset h^{-1}(0t')-h^{-1}(0t)=0$$

— contrairement à l'hypothèse que $h(\mathfrak{X})=\mathcal{J}$.

L'ensemble W des w tels que

(20) $$A_w=h^{-1}(0t)\quad\text{où}\quad h(x)<t<h(x')$$

est donc indénombrable. Désignons par W^* l'ensemble qui s'en obtient en le privant de son premier point (s'il existe). Il vient pour $w\in W^*$:

(21) $$x\in\operatorname{Int}(A_w)\quad\text{et}\quad x'\ non\text{-}\in A_w.$$

Soit, en effet, $w'<w$ et conformément à (20):

$$A_{w'}=h^{-1}(0t')\quad\text{où}\quad h(x)<t'<h(x').$$

On a donc $x\in h^{-1}(0t')=A_{w'}\subset\operatorname{Int}(A_w)$, d'où la première formule (21). La deuxième est une conséquence directe de (19) et (20).

Posons $g(x)=t_0=g(x')$, c. à d. $x\in g^{-1}(t_0)$ et $x'\in g^{-1}(t_0)$. On a donc d'après 2: $x'\in A_z$ pour chaque $z>\Gamma(t_0)$, ainsi que $x\in\overline{\mathfrak{X}-A_u}$, c. à d. x *non-*$\in\operatorname{Int}(A_u)$, pour chaque $u<\gamma(t_0)$. On en conclut en vertu de (21) que $w\leqslant\Gamma(t_0)$ et $w\geqslant\gamma(t_0)$, c. à d. que

$$W^*\subset J\cdot\underset{y}{E}[\gamma(t_0)\leqslant y\leqslant\Gamma(t_0)].$$

Mais alors l'ensemble W^* est dénombrable en vertu de 1.