séquent, $h(Z)$ est de I-e catégorie au point $p=h(z)$. Mais cela contredit la remarque faite au début de la démonstration, puisque Z n'est pas de I-e catégorie au point z.

L'inclusion $G\subset Z$ établie, il en résulte que z est un point intérieur de Z, donc, Z étant homogène, Z est ouvert (selon 1°).

Reste à prouver que Z est fermé.

Soit $p\in\overline{Z}$ et $z\in Z$. Posons, comme auparavant, $p=h(z)$. L'ensemble Z étant ouvert et h étant une automorphie de l'espace, $h(Z)$ est aussi ouvert. Par conséquent les formules $p\in\overline{Z}$ et $p\in h(Z)$ entraînent $Z\cdot h(Z)\neq 0$, d'où $Z=h(Z)$, donc $p\in Z$, c. q. f. d.

XII. Applications aux groupes topologiques. Un espace topologique (satisfaisant aux ax. I—III) s'appelle *groupe topologique* [1]), lorsqu'on a fait correspondre à chaque couple de points x, y leur „somme" $z=x+y$ de façon que: 1° $(x+y)+z=x+(y+z)$, 2° il existe l'élément-zéro 0 tel que $x+0=x=0+x$, 3° il existe l'élément $(-x)$ tel que $x+(-x)=0$, 4° les opérations $x+y$ et $-x$ sont continues [2]).

Posons $h_a(x)=a+x$. On voit aussitôt que la condition $y=h_a(x)$ entraîne $x=h_{-a}(y)$. On en conclut que $h_a(x)$ est (pour a fixe) une automorphie de l'espace et que la famille $\mathfrak{H}$ de toutes les fonctions h_a satisfait à l'hypothèse du théorème du N° XI.

On appelle *sous-groupe* chaque ensemble qui, avec x, contient $(-x)$ et, avec x et y, contient $x+y$. On vérifie facilement que, Z étant un sous-groupe, la condition XI (4) est réalisée. D'après ce qui précède, *chaque sous-groupe est homogène* (en particulier, chaque groupe topologique est homogène). En vertu du théorème du N° XI, *tout sous-groupe qui jouit de la propriété de Baire est soit un ensemble de I-e catégorie, soit un ensemble à la fois fermé et ouvert.*

---

[1]) Pour un excellent exposé de la théorie des groupes topologiques, voir L. Pontrjagin, *Topological Groups*, Princeton 1946. Voir aussi D. van Dantzig, *Zur topologischen Algebra*, Math. Ann. **107** (1932), p. 587—626, où l'on trouvera de nombreux renvois bibliographiques.

[2]) Une fonction continue de deux variables est une fonction continue d'une seule variable parcourant un produit cartésien (voir § 24, I). Pour les applications dont il est question ici, il suffit de supposer la continuité par rapport à chacune des variables séparément.

DEUXIÈME CHAPITRE.

Espaces métrisables et séparables.

A. Introduction de la limite, de la distance et des coordonnées (§§ 14—17).

Nous allons ajouter, à présent, aux axiomes I—III deux nouveaux axiomes (§§ 16 et 17). L'espace satisfaisant aux ax. I—V constitue, comme nous l'avons indiqué déjà dans la Préface, le domaine le plus important de la Topologie. Il est d'après un théorème du § 17 homéomorphe à un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$; c'est bien ce théorème fondamental, qui est un de nos buts les plus proches. Afin d'y parvenir d'une façon méthodique, nous étudierons d'abord deux genres d'espaces: espaces $\mathcal{L}^*$, munis de la notion de limite, et espaces métriques, munis de la notion de distance. Les §§ 14 et 15 contiennent plusieurs définitions et théorèmes importants, liés à ces notions. Dès que le théorème fondamental sera établi, tous les théorèmes concernant les espaces $\mathcal{L}^*$, ainsi que les espaces métriques, pourront être considérés comme des théorèmes sur l'espace assujetti aux ax. I—V, puisque dans un espace de ce genre la limite et la distance se laissent introduire de façon que cet espace devienne $\mathcal{L}^*$ et métrique.

§ 14. Espaces $\mathcal{L}^*$ (pourvus de la notion de limite).

I. Définition. Un ensemble d'éléments arbitraires devient un espace $\mathcal{L}^*$, lorsqu'on a fait correspondre à certaines suites (dites *convergentes*) $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ d'éléments de cet espace un élément $p=\lim\limits_{n=\infty} p_n$ de façon que les conditions suivantes soient réalisées [1]):

---

[1]) Les espaces abstraits ayant la notion de limite pour terme primitif ont été introduits par M. Fréchet dans sa Thèse, Paris 1906 et Rend Circ. Mat. di Palermo **22** (1906), *Sur quelques points du Calcul fonctionnel.* Pour la cond. 3°, voir P. Alexandroff et P. Urysohn, C. R. Paris, t. **177** (1923), p. 1274 et P. Urysohn *Sur les classes* ($\mathcal{L}$) *de M. Fréchet*, Ens. Math. **25** (1926), p. 77—83, où les espaces $\mathcal{L}^*$ sont désignés par $\mathcal{L}_l$.

1° *si* $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p$ *et* $k_1<k_2<\dots$, *on a* $\lim\limits_{n=\infty} p_{k_n} = p$,

2° *si, pour chaque* n, $p_n = p$, *on a* $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p$,

3° *si la suite* $p_1 p_2,\dots$ *ne converge pas vers* p, *elle contient une suite partielle*[1] $p_{k_1}, p_{k_2},\dots$ *dont aucune suite partielle ne converge vers* p.

On prouve facilement les deux énoncés suivants:

1. *La convergence, ainsi que la limite d'une suite, ne dépend pas de n premiers termes de cette suite*, c. à d. que l'on peut ajouter, ou supprimer, ou remplacer un nombre fini de termes, sans que la suite cesse d'être ou devienne convergente, ou bien que sa limite change de valeur.

2. *Etant données deux suites telles que* $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p = \lim\limits_{n=\infty} q_n$, *la suite* $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots$ *converge vers* p.

3. *Si* $\lim\limits_{n=\infty} p_n = p$ *et si la suite* $\{q_n\}$ *s'obtient de la suite* $\{p_n\}$ *en répétant un nombre fini de fois les termes de celle-ci, elle converge aussi vers* p.

Par hypothèse, on peut faire correspondre à chaque entier positif m un r_m tel que $p_{r_m} = q_m$ et que, pour n fixe, l'égalité $n = r_m$ ne soit réalisée que pour un nombre fini de valeurs de m. En supposant que la suite $\{q_m\}$ ne converge pas vers p, il existe selon 3° une suite $k_1<k_2<\dots$ telle que la suite $q_{k_1}, q_{k_2},\dots$ ne contient aucune suite convergente vers p. Or, dans la suite $r_{k_1}, r_{k_2},\dots$, aucun terme ne se répète une infinité de fois et il existe par conséquent une suite d'indices $l_1<l_2<\dots$ telle que $r_{k_{l_1}} < r_{k_{l_2}} < \dots$ En posant $s_n = r_{k_{l_n}}$, la suite $p_{s_1}, p_{s_2},\dots$ est donc une suite partielle de $\{p_n\}$; par conséquent, $p = \lim\limits_{n=\infty} p_{s_n} = \lim\limits_{n=\infty} q_{k_{l_n}}$, puisque $p_{s_n} = q_{k_{l_n}}$. La suite $q_{k_{l_1}}, q_{k_{l_2}},\dots$ étant une suite partielle de la suite $q_{k_1}, q_{k_2},\dots$, on parvient à la contradiction demandée.

Nous distinguons par l'astérisque les espaces $\mathcal{L}^*$ des espaces $\mathcal{L}$ de M. Fréchet, qui ne sont assujettis qu'aux conditions 1° et 2°. Ces deux conditions ne caractérisent pas d'une façon satisfaisante la notion de limite: par exemple, un ensemble composé de deux éléments a et b, où l'on suppose que seules les suites $a, a, a, \dots$ et $b, b, b, \dots$ sont convergentes (la suite $a, b, b, b, \dots$ diverge!) est un espace $\mathcal{L}$. Voir aussi N° II et N° III, ainsi que M. Fréchet, *Espaces abstraits*, p. 169.

[1]) $p_{k_1}, p_{k_2},\dots$ est une *suite partielle* (ou une *sous-suite*) de la suite $p_1, p_2, \dots$ lorsque $k_1<k_2<\dots$

II. Rapport aux axiomes I—III. X étant un ensemble situé dans un espace $\mathcal{L}^*$, on définit la fermeture $\overline{X}$ de X, en admettant que p appartient à $\overline{X}$, lorsque p est limite d'une suite extraite de X. On voit aussitôt que la condition 1° entraîne l'ax. I et la cond. 2° l'ax. II (voir d'ailleurs le raisonnement du § 4, II). L'ax. III peut ne pas être vérifié, comme le prouve l'exemple de l'ensemble des fonctions, considéré au § 4, V [1]).

Pour que $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$, *il faut et il suffit que*, X *désignant l'ensemble des éléments d'une sous-suite arbitraire* $p_{k_1}, p_{k_2},\dots$, *on ait* $p \in \overline{X}$.

En effet, si $p = \lim\limits_{n=\infty} p_n$, on a $p \in \overline{X}$ en vertu de 1°. Inversement, si la suite donnée ne converge pas vers p, elle contient selon 3° une sous-suite $p_{k_1}, p_{k_2},\dots$ dont aucune sous-suite ne converge vers p. On peut supposer, de plus, que la suite $\{p_{k_n}\}$ ne contient pas l'élément p, car en vertu de 2° elle ne pourrait le contenir qu'un nombre fini de fois et dans ce dernier cas on la remplacerait par une sous-suite qui ne contient pas p. Or aucune suite (d'éléments différents ou non) $x_1, x_2,\dots$ extraite de X ne converge vers p, car en cas où elle admet une infinité d'éléments différents, elle contient une sous-suite de la suite $p_{k_1}, p_{k_2},\dots$, donc une suite qui ne converge pas vers p, et en cas où la suite $x_1, x_2, \dots$ ne contient qu'un nombre fini de termes différents, il y en a un qui se répète une infinité de fois; ce terme étant différent de p, la suite ne pourrait converger vers p. Ainsi, en tout cas, p *non*-$\in \overline{X}$.

III. Notion de continuité. 1. *Dans les espaces* $\mathcal{L}^*$, *la condition pour qu'une fonction* f *soit continue au point* x *équivaut à la suivante* (dite condition de Heine)[2]):

$$x = \lim_{n=\infty} x_n \ \textit{entraîne}\ f(x) = \lim_{n=\infty} f(x_n).$$

[1]) Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace satisfaisant aux ax. I—III devienne $\mathcal{L}^*$ ont été données par P. Urysohn dans l'ouvrage précité.

[2]) L'hypothèse que l'espace des valeurs soit un $\mathcal{L}^*$ est essentielle. Si, en effet, un espace est un $\mathcal{L}$ sans être un $\mathcal{L}^*$, il contient une suite $y_0, y_1, \dots$ qui ne converge pas vers y_0, bien que chaque sous-suite contienne une sous-suite convergente vers y_0. Posons $f(0) = y_0$ et $f(1/n) = y_n$. La fonction f est continue dans le sens adopté au § 13, I, mais ne satisfait pas à la condition de Heine.

En général, si les espaces des arguments et des valeurs sont des espaces $\mathcal{L}$ (mais pas nécessairement $\mathcal{L}^*$), la continuité de f équivaut à la condition suivante: *si* $x = \lim\limits_{n=\infty} x_n$, *il existe une sous-suite* $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots$ *telle que* $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f(x_{k_n})$.

Supposons, en effet, que la fonction soit continue au point x et que $x = \lim\limits_{n=\infty} x_n$. Désignons par X l'ensemble des éléments d'une sous-suite arbitraire $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$ Nous avons démontré au N° précédent que $x \in \overline{X}$. Donc, par définition de la continuité (§ 13, I), $f(x) \in \overline{f(X)}$. La suite $f(x_{k_1}), f(x_{k_2}), \ldots$ étant une sous-suite arbitraire de la suite $f(x_1), f(x_2), \ldots$, cette dernière converge vers $f(x)$.

Supposons, d'autre part, que $x \in \overline{X}$. Il existe donc une suite $x_1, x_2, \ldots$ telle que $x = \lim\limits_{n=\infty} x_n$ et $x_n \in X$. Si l'on suppose la condition de Heine vérifiée, on a $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f(x_n)$ et comme $f(x_n) \in f(X)$, il vient $f(x) \in \overline{f(X)}$. La fonction est donc continue au point x.

De là, on conclut facilement que

2. *Pour que la fonction f soit bicontinue, il faut et il suffit que les égalités $x = \lim\limits_{n=\infty} x_n$ et $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f(x_n)$ soient équivalentes.*

IV. Produit cartésien des espaces $\mathcal{L}^*$. Le produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ des espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ est par définition (§ 2, I) l'ensemble des paires ordonnées (x, y) où $x \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$. On confère à l'ensemble $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ le caractère d'un espace $\mathcal{L}^*$, en convenant que la suite de points $\mathfrak{z}_n = (x_n, y_n)$ converge vers $\mathfrak{z} = (x, y)$, lorsque $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n=\infty} y_n = y$.

D'une façon analogue, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$ étant une suite infinie d'espaces $\mathcal{L}^*$, on convient qu'une suite variable $\mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}_n^1, \mathfrak{z}_n^2, \ldots$ converge (dans l'espace $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$) vers la suite $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots$, lorsque, pour chaque i, on a $\lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{z}_n^i = \mathfrak{z}^i$, c. à d. lorsque le i-ème terme de la suite variable tend vers le i-ème terme de la suite limite. En symbole:

$$(\lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}) \equiv \prod_{i=1}^{\infty} (\lim_{n=\infty} \mathfrak{z}_n^i = \mathfrak{z}^i).$$

Soit $\mathfrak{z} = f(t)$ une fonction qui fait correspondre à chaque point t d'un espace T un point $\mathfrak{z}$ du produit cartésien $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$ (ou, d'une façon moins générale, du produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$). Posons:

$$g_i(t) = [f(t)]^i = \text{la } i\text{-ème coordonnée du point } \mathfrak{z} = f(t).$$

1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(t)$ soit continue au point t est que chacune des fonctions $g_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, soit continue en ce point.*

Car, étant donnée une suite $t_1, t_2, \ldots$ convergente vers t, l'égalité $f(t) = \lim\limits_{n=\infty} f(t_n)$ signifie que, quel que soit $i = 1, 2, \ldots$, l'égalité $[f(t)]^i = \lim\limits_{n=\infty} [f(t_n)]^i$ est vérifiée.

2. *$\mathfrak{z}$ étant un point variable d'un produit cartésien, la i-ème coordonnée $\mathfrak{z}^i$ de $\mathfrak{z}$ en est une fonction continue.* Autrement dit, *la projection sur le i-ème axe est une opération continue.*

Car par définition, la condition $\lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{z}_n = \mathfrak{z}$ entraîne $\lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{z}_n^i = \mathfrak{z}^i$.

f étant une transformation de l'espace $\mathcal{X}$ en sous-ensemble de $\mathcal{Y}$, désignons par I l'image de la fonction f, c. à d. l'ensemble des points (x, y) du produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ tels que $y = f(x)$ (on peut d'ailleurs identifier I et f, cf. § 3, V). On a le théorème suivant:

3. *Si la fonction f est continue, son image I est un ensemble fermé, homéomorphe à $\mathcal{X}$.*

En effet, en supposant que $\lim\limits_{n=\infty} [x_n, f(x_n)] = (x, y)$, il vient $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = y$. La première de ces deux égalités implique en vertu de la continuité de la fonction f que $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = f(x)$; d'où $y = f(x)$, donc $(x, y) \in I$, ce qui prouve que $I = \overline{I}$.

D'autre part, en faisant correspondre à x le point $[x, f(x)]$, on définit une homéomorphie entre $\mathcal{X}$ et I. En effet, la condition $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ entraîne $\lim\limits_{n=\infty} [x_n, f(x_n)] = [x, f(x)]$. Inversement, cette dernière égalité entraîne $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$.

En tenant compte de 1 et de § 13, VI, on montre que

4. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction caractéristique d'une suite (finie ou infinie) d'ensembles soit continue est que chacun de ces ensembles soit fermé et ouvert.*

V. Exemples fondamentaux des produits cartésiens.

1. $\mathcal{J}$ désignant l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\mathcal{J}^n$ (c. à d. le produit cartésien de n facteurs identiques à $\mathcal{J}$) est un cube à n dimensions. $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ est l'ensemble de toutes les suites infinies extraites de l'intervalle $\mathcal{J}$[1]).

[1]) On prouve facilement que l'espace $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ est homéomorphe au *„cube fondamental de Hilbert"* („Fundamentalquader"), composé de toutes les suites $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \ldots$, où $\mathfrak{z}^{(i)} \leqslant 1/i$ et où la distance de deux suites $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{y}$ est, par définition, égale à $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{z}^{(i)} - \mathfrak{y}^{(i)})^2}$. Cf. D. Hilbert, Gött. Nachr. 1906, p. 200 et 439.

2. $\mathcal{X}$ désignant un espace composé de deux éléments, considérons l'espace $\mathcal{X}^{\aleph_0}$. Chaque point de cet espace est donc une suite infinie composée de deux éléments. Désignons ces deux éléments par les chiffres 0 et 2 et faisons correspondre à la suite considérée le nombre réel de l'intervalle 01 dont elle constitue le développement dans le système de numération triadique. Ainsi $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}^{(1)},\mathfrak{z}^{(2)},\ldots$ étant une suite composée de chiffres 0 et 2 et $x(\mathfrak{z})$ étant le nombre correspondant de l'intervalle 01, on a

$$x(\mathfrak{z})=\frac{\mathfrak{z}^{(1)}}{3}+\frac{\mathfrak{z}^{(2)}}{3^2}+\ldots+\frac{\mathfrak{z}^{(i)}}{3^i}+\ldots$$

Cette correspondance est, comme on prouve facilement, une homéomorphie entre l'espace $\mathcal{X}^{\aleph_0}$ et l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor (cf. § 1, VIII). Ce dernier peut donc être identifié — au point de vue topologique — avec l'ensemble $\mathcal{X}^{\aleph_0}$.

3. $\mathcal{X}$ désignant l'ensemble de tous les nombres naturels, considérons l'espace $\mathcal{N}=\mathcal{X}^{\aleph_0}$. Cet espace est homéomorphe à l'*ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle* 01 [1]).

Faisons, en effet, correspondre à chaque suite infinie $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}^{(1)},\mathfrak{z}^{(2)},\ldots$ de nombres naturels la fraction continue

$$x(\mathfrak{z})=\frac{1|}{|\mathfrak{z}^{(1)}}+\frac{1|}{|\mathfrak{z}^{(2)}}+\ldots+\frac{1|}{|\mathfrak{z}^{(i)}}+\ldots$$

La fonction $x(\mathfrak{z})$ est bicontinue, car, d'après les propriétés élémentaires des fractions continues, pour que l'on ait $x(\mathfrak{z})=\lim_{n=\infty}x(\mathfrak{z}_n)$, il faut et il suffit que $\lim_{n=\infty}\mathfrak{z}_n^{(i)}=\mathfrak{z}^{(i)}$, quel que soit i; or cette dernière condition exprime que $\lim_{n=\infty}\mathfrak{z}_n=\mathfrak{z}$.

VI. Espaces séparables. *Un espace est dit séparable* [2]), *lorsqu'il contient un ensemble dense dénombrable.* Si l'espace est un $\mathcal{L}^*$, cela revient à supposer qu'il existe une suite infinie $r_1,r_2,\ldots$ (composée d'éléments différents ou non) telle que chaque point de l'espace soit limite d'une sous-suite de la suite considérée.

---

[1]) L'espace $\mathcal{N}$ est dit aussi „*espace 0-dimensionnel de Baire*", lorsqu'on le métrise de manière qu'il devienne un espace complet.

[2]) d'après M. Fréchet, Rend. Circ. Mat. di Palermo **22** (1906), p. 23. Pour les espaces *localement séparables* (notion due à P. Urysohn, Fund. Math. **9** (1927), p. 119), cf. W. Sierpiński, Fund. Math. **21** (1933).

Toute image continue d'un espace séparable est séparable.

Le produit cartésien de deux espaces séparables est séparable. En effet, si $r_1,r_2,\ldots$ est une suite dense dans l'espace $\mathcal{X}$ et $s_1,s_2,\ldots$ est une suite dense dans l'espace $\mathcal{Y}$, il résulte du N° IV que la suite

$$(r_1,s_1),\ (r_1,s_2),\ (r_2,s_1),\ (r_2,s_2),\ldots$$

est dense dans l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

D'une façon générale: $\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots$ *étant une suite d'espaces séparables, l'espace* $\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\times\ldots$ *est séparable.*

Soient, en effet, R_i un ensemble dénombrable dense dans $\mathcal{X}_i$ et r_i^* un élément fixe extrait de R_i. Soit $\mathfrak{R}$ la famille de toutes les suites $\mathfrak{r}$ telles que:

1° quel que soit i, on a $\mathfrak{r}^i\in R_i$,

2° à partir d'un certain indice m (variant avec $\mathfrak{r}$) on a constamment:

$$\mathfrak{r}^m=r_m,\ \mathfrak{r}^{m+1}=r_{m+1},\ldots$$

La famille $\mathfrak{R}$ est évidemment dénombrable. Afin de prouver qu'elle est dense dans l'espace $\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\times\ldots$, considérons, pour un point donné $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}^1,\mathfrak{z}^2,\ldots]$ de cet espace et pour chaque entier i, une suite $r_{i1},r_{i2},\ldots$ extraite de R_i et convergente vers $\mathfrak{z}^i$. Posons:

$$\mathfrak{r}_1=r_{11},r_2,r_3,\ldots$$
$$\mathfrak{r}_2=r_{12},r_{22},r_3,r_4,\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{r}_n=r_{1n},r_{2n},r_{3n},\ldots,r_{nn},r_{n+1},\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il vient $\mathfrak{r}_n\in\mathfrak{R}$ et, pour chaque i, $\mathfrak{z}^i=\lim_{n=\infty}\mathfrak{r}_n^i$, donc $\mathfrak{z}=\lim_{n=\infty}\mathfrak{r}_n$, ce qui prouve que l'ensemble $\mathfrak{R}$ est dense dans l'espace $\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\times\ldots$

Exemple. L'intervalle $\mathcal{I}$ est séparable, puisque l'ensemble des nombres rationnels y est dense. D'après le théorème précédent, aussi *l'espace* $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ *est séparable* (un ensemble dense et dénombrable y est formé de points ayant toutes les coordonnées rationnelles et n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées différentes de zéro).

VII. Rapports aux espaces de Hausdorff. Dans un espace ayant pour terme primitif la notion d'entourage ouvert (§ 7, III), on admet que *le point p est la limite de la suite $p_1, p_2, \ldots$ lorsque, pour chaque entourage U de p, il existe un indice à partir duquel on a $p_n \in U$.* Les axiomes A—D de Hausdorff impliquent les conditions 1°—3°.

En effet, on voit d'abord qu'une suite ne peut avoir deux limites différentes p et q, car il existe, en vertu de D, deux entourages U et V de p et q sans points communs. Les conditions 1° et 2° étant évidentes, supposons, pour prouver 3°, que la suite $p_1, p_2, \ldots$ ne converge pas vers p; cela veut dire qu'il existe un entourage U de p et une sous-suite $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$ qui est située en dehors de U; par conséquent, aucune suite extraite de celle-ci ne pourrait converger vers p, c. q. f. d.

Dans les espaces de Hausdorff, on définit la fermeture $\overline{X}$ d'un ensemble X comme composée de tous les points p tels que chaque entourage de p contient des points de X (§ 7, III). Nous allons démontrer que cette définition est d'accord avec celle adoptée au § 14, IV, d'après laquelle $p \in \overline{X}$, lorsque p est un point-limite d'une suite de points extraite de X, c. à d. lorsque, quel que soit l'entourage U de p, tous les points de cette suite à partir d'un certain indice appartiennent à U.

Supposons, en effet, que chaque entourage de p contienne des points de X. Soit $\{U_n\}$ la suite d'entourages de p mentionnée dans l'ax. E. D'après B, l'ensemble $U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots \cdot U_n$ contient un entourage de p et celui-ci contient par hypothèse un point p_n de X, donc $p_n \in X \cdot U_1 \cdot \ldots \cdot U_n$. Soit U un entourage arbitraire de p. D'après l'ax. E, il existe un n_0 tel que $U_{n_0} \subset U$; de sorte que, pour $n > n_0$, on a $p_n \in U_1 \cdot \ldots \cdot U_n \subset U_{n_0} \subset U$. Donc $p = \lim_{n=\infty} p_n$.

Inversement, si $p = \lim_{n=\infty} p_n$ où $p_n \in X$ et si U est un entourage de p, on a, pour n suffisamment grand, $p_n \in U$, d'où $UX \neq 0$.

On voit ainsi que *tous les théorèmes concernant l'espace $\mathcal{L}^*$ sont applicables aux espaces de Hausdorff.*

VIII. Espaces $\mathcal{L}^*$ compacts[1]. Si dans un espace $\mathcal{L}^*$, chaque suite infinie de points $p_1, p_2, \ldots$ contient une suite partielle convergente:

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} p_{k_n} = p \quad \text{où} \quad k_1 < k_2 < \ldots,$$

cet espace est dit *compact.*

[1]) L'étude détaillée des espaces compacts fera l'objet du Chapitre IV.

Exemples. 1° D'après le théorème classique de Bolzano-Weierstrass, *le cube $\mathcal{I}^n$ à n dimensions* et, plus généralement, *chaque sous-ensemble fermé et borné de l'espace $\mathcal{E}^n$ à n dimensions constituent des espaces compacts.*

2° *L'ensemble des nombres ordinaux $\alpha < \Omega$* (avec la notion de limite au sens admis dans la théorie des nombres ordinaux) *est un espace compact.*

1. *Chaque sous-ensemble fermé d'un espace compact est compact.*

2. *Théorème de Cantor*[1]). *Etant donnée, dans un espace compact, une suite descendante d'ensembles fermés non vides $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, on a $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \neq 0$.*

Formons, en effet, une suite infinie $p_1, p_2, \ldots$ en extrayant un point p_n de l'ensemble F_n. L'espace étant compact, cette suite admet une suite partielle convergente, c. à d. que l'on a la formule (1). L'ensemble F_n étant fermé et tous les termes de la suite $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$, sauf un nombre fini, étant des points de F_n, il vient $p \in F_n$. Donc $p \in (F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots)$.

3. *Théorème de M. Borel*[2]). *Si un espace compact est somme d'une suite infinie d'ensembles ouverts:*

$$(2) \qquad 1 = \sum_{n=1}^{\infty} G_n,$$

il est somme d'un nombre fini de termes de cette suite:

$$(3) \qquad 1 = \sum_{n=1}^{k} G_n$$

pour k convenablement défini.

Posons, en effet, $F_k = 1 - (G_1 + \ldots + G_k)$. Il vient $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ En supposant que la formule (3) soit en défaut pour chaque k, on a $F_k \neq 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$ On en déduit en vertu du th. 2 que

$$\prod_{k=1}^{\infty} F_k \neq 0, \quad \text{c. à d. que} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (G_1 + \ldots + G_k) \neq 1, \quad \text{donc que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} G_n \neq 1,$$

contrairement à (2).

4. *Le produit cartésien (fini ou dénombrable) d'espaces compacts est un espace compact.*

En particulier, *l'espace $\mathcal{I}^{\aleph_0}$ est compact.*

[1]) Math. Ann. **17** (1880).

[2]) Cf. E. Borel, Ann. Ecole Norm. (3) **12** (1895) (Thèse), p. 51.

Soit, en effet, $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ une suite de points extraits du produit $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$ Posons $\mathfrak{z}_n = [\mathfrak{z}_n^1, \mathfrak{z}_n^2, \ldots]$. L'espace $\mathcal{X}_1$ étant compact, il existe une suite d'entiers $1 < k_1 < k_2 < \ldots$ tels que la suite $\mathfrak{z}^1_{k_1}, \mathfrak{z}^1_{k_2}, \ldots$ est convergente; soit $\lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{z}^1_{k_n} = x^1$.

D'une façon analogue: l'espace $\mathcal{X}_2$ étant compact, il existe une suite d'entiers $1 < l_1 < l_2 < \ldots$ tels que la suite $\mathfrak{z}^2_{k_{l_1}}, \mathfrak{z}^2_{k_{l_2}}, \ldots$ est convergente; soit $\lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{z}^2_{k_{l_n}} = x^2$.

En procédant ainsi de proche en proche, on définit une suite de points $x^1 \in \mathcal{X}_1$, $x^2 \in \mathcal{X}_2, \ldots$ (finie ou infinie, suivant le nombre des espaces $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$). Posons $x = [x^1, x^2, \ldots]$. La suite $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_{k_1}, \mathfrak{z}_{k_{l_1}}, \ldots$ converge vers x.

On constate, en effet, facilement que $1 < k_1 < k_{l_1} < k_{l_{m_1}} < \ldots$ et on en déduit que la suite $\mathfrak{z}^1_{k_1}, \mathfrak{z}^1_{k_{l_1}}, \ldots$, comme sous-suite de la suite $\{\mathfrak{z}^1_{k_n}\}$, converge vers x^1; d'où il résulte que la suite $\mathfrak{z}^1_1, \mathfrak{z}^1_{k_1}, \mathfrak{z}^1_{k_{l_1}}, \ldots$ converge vers x^1. D'une façon analogue, la suite $\mathfrak{z}^2_{k_{l_1}}, \mathfrak{z}^2_{k_{l_{m_1}}}, \ldots$ est une sous-suite de $\{\mathfrak{z}^2_{k_{l_n}}\}$ et par conséquent la suite $\mathfrak{z}^2_1, \mathfrak{z}^2_{k_1}, \mathfrak{z}^2_{k_{l_1}}, \ldots$ converge vers x^2. Généralement, la suite $\mathfrak{z}^n_1, \mathfrak{z}^n_{k_1}, \mathfrak{z}^n_{k_{l_1}}, \ldots$ converge vers x^n; d'où la conclusion demandée.

5. *La compacité de l'espace est un invariant des transformations continues.*

Soit, en effet, f une transformation continue de l'espace $\mathcal{X}$ en l'espace $\mathcal{Y}$ (ces deux espaces étant supposés des $\mathcal{L}^*$). Soit $y_1, y_2, \ldots$ une suite de points appartenant à $\mathcal{Y}$. Soit $y_n = f(x_n)$. L'espace $\mathcal{X}$ étant compact, la suite $\{x_n\}$ contient une suite partielle convergente: $\lim\limits_{n=\infty} x_{k_n} = p$ où $k_1 < k_2 < \ldots$ La fonction f étant continue, cette égalité implique que

$$\lim_{n=\infty} f(x_{k_n}) = f(p), \quad \text{c. à d. que} \quad \lim_{n=\infty} y_{k_n} = f(p).$$

Cela prouve que la suite $\{y_n\}$ contient une sous-suite convergente.

6. *Toute transformation biunivoque et continue d'un espace compact $\mathcal{X}$ est une homéomorphie.*

Posons $f(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$. Soit $x = g(y)$ la fonction inverse à $y = f(x)$. Soit $\lim y_n = y_0$. Il s'agit de prouver que $\lim g(y_n) = g(y_0)$. Posons $x_n = g(y_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, c. à d. $f(x_n) = y_n$. Il s'agit donc de prouver que $\lim x_n = x_0$.

Supposons, par impossible, que la suite $\{x_n\}$ ne converge pas vers x_0. Elle contient alors, selon 3°, une suite partielle $\{x_{k_n}\}$ dont aucune suite partielle ne converge vers x_0. L'espace $\mathcal{X}$ étant compact, la suite $\{x_{k_n}\}$ contient une suite partielle convergente: $\lim\limits_{n=\infty} x_{k_{l_n}} = x'$. Donc $x' \neq x_0$.

Mais, d'autre part, l'égalité précédente implique en vertu de la continuité de f que $\lim\limits_{n=\infty} y_{k_{l_n}} = f(x')$. Comme

$$\lim_{n=\infty} y_{k_{l_n}} = \lim_{n=\infty} y_n = y_0 = f(x_0),$$

il vient $f(x_0) = f(x')$, d'où $x' = x_0$ en vertu de la biunivocité de la fonction f.

IX. Convergence continue. L'ensemble $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ conçu comme espace $\mathcal{L}^*$.

Soit $f_1, f_2, \ldots$ une suite de fonctions définies sur l'espace $\mathcal{X}$ et dont les valeurs appartiennent à l'espace $\mathcal{Y}$. On dit [1]) que cette suite *converge de façon continue* vers la fonction f lorsque la condition $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ entraîne $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

La convergence continue implique la convergence dans le sens habituel du mot. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à substituer dans la définition précédente $x_n = x$.

L'implication inverse n'a pas lieu. Ainsi p. ex. en posant $f_n(x) = x^n$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f(x) = 0$ pour $x < 1$ et $f(1) = 1$, on a l'égalité $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$ et cependant la convergence n'est pas continue.

L'exemple suivant montre que la convergence de fonctions continues vers une limite continue peut être non-continue. La fonction f_n est définie par les conditions: $f_n(x) = 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n+1}$ et pour $\frac{1}{n-1} \leqslant x \leqslant 1$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ et dans les intervalles $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$, la fonction f_n est linéaire. On a identiquement $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = 0$, mais la convergence n'est pas continue.

1. *$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant supposés des espaces $\mathcal{L}^*$, on confère à l'ensemble $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$* (voir § 13, I) *le caractère d'un espace $\mathcal{L}^*$ en convenant que l'égalité $f = \lim\limits_{n=\infty} f_n$ veut dire que la suite $\{f_n\}$ converge de façon continue vers f.*

---

[1]) Voir H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 238.

Il s'agit de prouver que l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, ainsi conçu, satisfait aux conditions 1⁰—3⁰ du N⁰ I.

Admettons d'abord que $\lim\limits_{n=\infty} f_n = f$ et que $k_1 < k_2 < \ldots$ Il s'agit de démontrer que $\lim\limits_{n=\infty} f_{k_n} = f$. Autrement dit: que la condition

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} x_n = x$$

implique que

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} f_{k_n}(x_n) = f(x).$$

Envisageons à ce but la suite $\{z_m\}$ définie par la condition: $z_m = x_n$ pour $k_{n-1} < m \leqslant k_n$ (où $k_0 = 0$). Il vient (cf. I, 3) $\lim\limits_{m=\infty} z_m = \lim\limits_{n=\infty} x_n = x$. La suite $\{f_m\}$ étant convergente de façon continue, il en résulte que $\lim\limits_{m=\infty} f_m(z_m) = f(x)$, d'où $\lim\limits_{n=\infty} f_{k_n}(z_{k_n}) = f(x)$ et comme $z_{k_n} = x_n$, on en déduit (2).

Afin d'établir la condition 2⁰, posons $f_n = f$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Il s'agit de prouver que la condition (1) entraîne $\lim f(x_n) = f(x)$. Ceci est une conséquence de la continuité de la fonction f.

Enfin, pour établir la condition 3⁰, admettons que la suite $f_1, f_2, \ldots$ ne converge pas vers f. Il existe par conséquent une suite $\{x_n\}$ satisfaisant à (1) et telle que la suite $\{f_n(x_n)\}$ ne converge pas vers $f(x)$. L'espace $\mathcal{Y}$ étant un $\mathcal{L}^*$, il existe une suite $k_1 < k_2 < \ldots$ telle que la suite $\{f_{k_n}(x_{k_n})\}$ ne contient aucune suite partielle qui converge vers $f(x)$. Nous en concluons que la suite $\{f_{k_n}\}$ ne contient aucune suite partielle qui converge vers f. Car, en supposant le contraire, il existerait une suite $m_1 < m_2 < \ldots$ telle que $\lim f_{k_{m_n}} = f$. Mais alors $\lim f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}}) = f(x)$, puisque, en vertu de (1): $\lim x_{k_{m_n}} = x$. La suite $\{f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}})\}$ étant une suite partielle de la suite $\{f_{k_n}(x_{k_n})\}$, on parvient à une contradiction avec la définition de la suite $\{k_n\}$.

Remarque. L'hypothèse de la continuité des fonctions $f, f_1, f_2, \ldots$ n'intervient que dans la démonstration de la condition 2⁰.

La limite $\lim\limits_{n=\infty} f_n$ étant définie comme dans le th. 1, on constate aussitôt que

2. *La fonction $\Phi(f, x) = f(x)$ qui fait correspondre à chaque $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ et à chaque $x \in \mathcal{X}$ l'élément $f(x)$ de $\mathcal{Y}$ est continue (sur l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$).*

X. Règles de calcul avec l'opération $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Nous établirons à présent quelques propriétés fondamentales de l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ (conçu dans le sens du théorème précédent) qui correspondent à des propriétés de la fonction exponentielle de l'Algèbre et de la Théorie des nombres cardinaux. Conformément au § 13, VIII, nous allons nous servir du symbole $\underset{\text{top}}{=}$ pour exprimer que deux espaces sont homéomorphes.

$$1. \qquad \mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times \mathcal{Z}^{\mathcal{X}} \underset{\text{top}}{=} (\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})^{\mathcal{X}},$$

d'une façon plus générale

$$\mathcal{Y}_1^{\mathcal{X}} \times \mathcal{Y}_2^{\mathcal{X}} \times \ldots \underset{\text{top}}{=} (\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots)^{\mathcal{X}}, \text{ d'où } (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\aleph_0} \underset{\text{top}}{=} (\mathcal{Y}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}.$$

Il s'agit de définir une transformation homéomorphe $g = h(f)$ du produit cartésien $\mathcal{Y}_1^{\mathcal{X}} \times \mathcal{Y}_2^{\mathcal{X}} \times \ldots$ en l'espace fonctionnel $(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots)^{\mathcal{X}}$. Or posons

$$f = [f^1, f^2, \ldots] \quad \text{où} \quad f^i \in \mathcal{Y}_i^{\mathcal{X}}, \quad \text{et} \quad g(x) = [f^1(x), f^2(x), \ldots].$$

On constate aussitôt que la fonction g, ainsi définie, est continue (cf. IV, 1), donc appartient à l'espace $(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots)^{\mathcal{X}}$. Inversement, à chaque élément g de cet espace correspond un f tel que $g = h(f)$; à savoir $f = [g^1, g^2, \ldots]$. De sorte que

$$h(\mathcal{Y}_1^{\mathcal{X}} \times \mathcal{Y}_2^{\mathcal{X}} \times \ldots) = (\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots)^{\mathcal{X}}.$$

Puis, la transformation h est continue. Soit, en effet, $\lim f_n = f$. En posant $g_n = h(f_n)$, c. à d. que $g_n(x) = [f_n^1(x), f_n^2(x), \ldots]$, il s'agit de prouver que $\lim g_n = g$, c. à d. que la condition (1) du N⁰ IX implique $\lim g_n(x_n) = g(x)$, ou encore: que $\lim\limits_{n=\infty} f_n^i(x_n) = f^i(x)$. Or, la condition $\lim f_n = f$ signifie que pour chaque i on a $\lim\limits_{n=\infty} f_n^i = f^i$ et il vient en vertu de (1): $\lim\limits_{n=\infty} f_n^i(x_n) = f^i(x)$.

Enfin, la transformation h est bicontinue. Il s'agit de démontrer que la condition $\lim g_n = g$ entraîne $\lim f_n = f$. En admettant (1), il vient $\lim g_n(x_n) = g(x)$, d'où $\lim\limits_{n=\infty} g_n^i(x_n) = g^i(x)$, c. à d. $\lim\limits_{n=\infty} f_n^i(x_n) = f^i(x)$, donc $\lim\limits_{n=\infty} f_n^i = f^i$, c. à d. $\lim\limits_{n=\infty} f_n = f$.

2. *Si $\mathcal{X} = A + B$, où A et B sont deux ensembles fermés et disjoints, on a*

$$\mathcal{Y}^A \times \mathcal{Y}^B \underset{\text{top}}{=} \mathcal{Y}^{A+B}.$$

En effet, faisons correspondre à chaque couple de fonctions $f \in \mathcal{Y}^A$ et $g \in \mathcal{Y}^B$ la fonction u identique à f sur A et à g sur B. Posons $u = h(f, g)$. On constate aussitôt que

$$h(\mathcal{Y}^A \times \mathcal{Y}^B) = \mathcal{Y}^{A+B}.$$

Soient $\lim f_n = f$ et $\lim g_n = g$. Soit $x \in A$. L'égalité (1) donne $\lim f_n(x_n) = f(x)$, donc $\lim u_n(x_n) = u(x)$. On parvient à la même conclusion en supposant que $x \in B$. On a donc $\lim u_n = u$. Cela prouve que la fonction h est continue.

Inversement, en supposant que $\lim u_n = u$ et que $x \in A$, on en déduit que $\lim f_n(x_n) = f(x)$, donc que $\lim f_n = f$. D'une façon analogue, on démontre que $\lim g_n = g$. La transformation h est donc une homéomorphie.

3. $$(\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}} \underset{\text{top}}{=} \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}.$$

Posons $g(x,t) = f_t(x)$. Nous allons démontrer au préalable que

3' [1]. *Pour que la fonction g soit continue, il faut et il suffit que la fonction f (qui fait correspondre à chaque t la fonction f_t de l'argument x) soit continue*, c. à d. que l'on a *l'équivalence*:

$$g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}} \equiv f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}.$$

Soit, en effet, $g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}$. Pour t fixe, la fonction g est une fonction continue de la variable x. Autrement dit $f_t \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Nous allons démontrer que $f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}$. Or en vertu de la continuité de la fonction g, les égalités (1) et $\lim t_n = t$ impliquent $\lim g(x_n, t_n) = g(x, t)$, c. à d. $\lim\limits_{n=\infty} f_{t_n}(x_n) = f_t(x)$. Cela prouve que la convergence des fonctions f_{t_n} vers f_t est continue. Donc $\lim\limits_{n=\infty} f_{t_n} = f_t$. Ainsi la condition $\lim t_n = t$ entraîne l'égalité $\lim\limits_{n=\infty} f_{t_n} = f_t$. Mais cela veut dire que la fonction f est continue. En symbole: $f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}$.

Inversement, en admettant que la fonction f est continue, la condition $\lim t_n = t$ entraîne $\lim\limits_{n=\infty} f_{t_n} = f_t$, d'où en tenant compte de la convergence continue de la suite de fonctions f_{t_n} vers f_t, on déduit de (1) que $\lim\limits_{n=\infty} f_{t_n}(x_n) = f_t(x)$, c. à d. $\lim g(x_n, t_n) = g(x, t)$. Mais cela veut dire que la fonction g est continue. En symbole: $g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}$.

[1]) Les relations entre la continuité des fonctions f et g ont été étudiées (d'ailleurs, pour une topologie différente de celle du N° IX, 2) par R. H. Fox, *On topologies for function spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), p. 429.

L'énoncé 3' se trouve ainsi établi. En posant $g = h(f)$, on peut le formuler de cette façon:

$$h[(\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}] = \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}.$$

Il s'agit de prouver que la transformation h est une homéomorphie. Nous en établirons d'abord la continuité.

Soit $\lim f^n = f$. Posons $g_n = h(f^n)$. Il s'agit de prouver que $\lim g_n = g$. Or la condition $\lim f^n = f$, rapprochée de l'égalité $\lim t_n = t$, donne (en vertu de la convergence continue) $\lim f^n_{t_n} = f_t$. Cette dernière égalité, rapprochée de (1), donne $\lim f^n_{t_n}(x_n) = f_t(x)$, c. à d. $\lim g_n(x_n, t_n) = g(x, t)$. Cela veut dire que $\lim g_n = g$.

Afin de montrer que la fonction h est bicontinue, admettons que $\lim g_n = g$, $\lim t_n = t$ et $\lim x_n = x$ Il vient $\lim g_n(x_n, t_n) = g(x, t)$, c. à d. $\lim f^n_{t_n}(x_n) = f_t(x)$, donc $\lim f^n_{t_n} = f_t$, d'où $\lim f^n = f$.

XI. Convergence continue au sens étroit. A côté de la notion de convergence continue, il est utile de considérer dans certains problèmes (cf. § 15, VIII) la convergence continue au sens étroit, que l'on introduit comme suit.

Lorsque la convergence de la suite $\{f(x_n)\}$ implique la convergence de la suite $\{f_n(x_n)\}$ ainsi que l'égalité $\lim f_n(x_n) = \lim f(x_n)$, la suite de fonctions $\{f_n\}$ est dite *convergente de façon continue au sens étroit*.

On démontre d'une manière tout-à-fait analogue à celle du N° VIII qu'*en entendant par convergence dans l'ensemble $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ la convergence continue au sens étroit, on confère à cet ensemble le caractère d'un espace $\mathcal{L}^*$.*

1. *La convergence continue au sens étroit implique la convergence continue (dans l'ensemble $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$).*

Soit, en effet, $\lim x_n = x$. La fonction f étant continue, il vient $\lim f(x_n) = f(x)$. La convergence de la suite $\{f_n\}$ étant continue au sens étroit, la dernière égalité entraîne $\lim f_n(x_n) = f(x)$. Mais cela signifie que la convergence de la suite $\{f_n\}$ est continue.

2. *Si l'espace $\mathcal{X}$ est compact, la convergence continue coïncide avec la convergence continue au sens étroit.*

Admettons, en effet, que la suite $\{f_n\}$ ne soit pas convergente au sens étroit; c. à d. que l'on a $\lim f(x_n) = y$ et que, cependant, la suite $\{f_n(x_n)\}$ ne converge pas vers y. L'espace $\mathcal{Y}$ étant un $\mathcal{L}^*$, il existe par conséquent une suite $k_1<k_2<\dots$ telle que, pour aucune suite $m_1<m_2<\dots$, la suite $\{f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}})\}$ ne converge vers y.

L'espace $\mathscr{X}$ étant supposé compact, il existe une suite $m_1<m_2<\dots$ telle que la suite $\{x_{k_{m_n}}\}$ est convergente. Soit $\lim x_{k_{m_n}}=x$. La convergence de la suite $\{f_n\}$ étant supposée continue, il en est de même de la convergence de la suite $\{f_{k_{m_n}}\}$. On a donc

$$\lim f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}})=f(x).$$

D'autre part, la fonction f étant continue, il vient

$$\lim f(x_{k_{m_n}})=f(x)$$

et comme

$$\lim f(x_{k_{m_n}})=\lim f(x_n)=y,$$

on a $f(x)=y$, ce qui donne $\lim f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}})=y$, contrairement à la définition de la suite $\{k_n\}$.

Remarques. 1⁰ Sans l'hypothèse de la *compacité* de l'espace $\mathscr{X}$, le th. 2 est en défaut. Envisageons, en effet, l'exemple suivant: $\mathscr{X}$ désigne l'intervalle ouvert $0<x<1$, $f(x)=0$, $f_n(x)=x^n$. La convergence est évidemment continue; cependant elle n'est pas continue au sens étroit: en posant $x_n=1-\frac{1}{n}$, il vient $\lim f(x_n)=0$ tandis que $\lim f_n(x_n)=1/e$.

2⁰ En entendant par convergence dans l'espace $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ la convergence continue au sens étroit, *le th. 3' du N⁰ X est en défaut.* En effet, $\mathscr{X}$ désignant, comme auparavant, l'intervalle 01 ouvert et $\mathscr{T}$ le même intervalle fermé, posons $g(x,t)=x^{1/t}$ pour $t\neq 0$ et $g(x,0)=0$. La fonction g est évidemment continue; cependant, en posant $f_t(x)=g(x,t)$, la fonction f n'est pas continue. Car la convergence de la suite $\{f_{1/n}\}$ vers la fonction f_0 n'est pas continue au sens étroit (comme nous venons de le démontrer).

3. *f étant une transformation continue de l'espace compact $\mathscr{T}$, on a*

$$\mathscr{Y}^{f(\mathscr{T})}\underset{\text{top}}{\subset}\mathscr{Y}^{\mathscr{T}},$$

la convergence dans les deux espaces fonctionnels signifiant la convergence continue.

De façon plus générale: *en entendant la convergence dans ces espaces comme convergence continue au sens étroit, on peut omettre l'hypothèse de la compacité de l'espace $\mathscr{T}$.*

Posons $\mathscr{X}=f(\mathscr{T})$. A chaque fonction $g\in\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ faisons correspondre la fonction superposée $u=gf$, c. à d. que $u(t)=g[f(t)]$. Il vient $u\in\mathscr{Y}^{\mathscr{T}}$.

Posons $u=h(g)$. Il s'agit de prouver que h est une homéomorphie, la limite $\lim g_n=g$ (respectivement $\lim u_n=u$) signifiant que les fonctions envisagées convergent de façon continue au sens étroit.

Admettons d'abord que $\lim g_n=g$. Il s'agit de prouver que $\lim u_n=u$, c. à d. que la condition $\lim u(t_n)=y$ implique $\lim u_n(t_n)=y$. Or, la première de ces conditions veut dire que $\lim g[f(t_n)]=y$, ce qui implique en vertu de l'égalité $\lim g_n=g$, que $\lim g_n[f(t_n)]=y$, c. à d. que $\lim u_n(t_n)=y$.

Admettons, d'autre part, que $\lim u_n=u$, c. à d. que $\lim g_nf=gf$. Soit $\lim g(x_n)=y$ où $x_n=f(t_n)$, c. à d. $\lim u(t_n)=y$; il s'agit de prouver que $\lim g_n(x_n)=y$, c. à d. que $\lim u_n(t_n)=y$. Mais cela est une conséquence directe des égalités $\lim u_n=u$ et $\lim u(t_n)=y$.

Le théorème se trouve ainsi établi pour le cas de la convergence continue au sens étroit. Sa validité dans le cas de la convergence continue et de l'espace $\mathscr{T}$ compact en résulte en vertu du th. 2.

§ 15. Espaces métriques.

I. Définitions. Un ensemble est dit *espace métrique* lorsqu'on a fait correspondre à chaque couple x, y de ses éléments un nombre réel $|x-y|$, dit leur *distance*, assujetti aux conditions:

(i) *l'égalité $|x-y|=0$ équivaut à l'égalité $x=y$,*
(ii) $|x-y|+|x-z|\geqslant|y-z|$ (loi du triangle)[1].

En substituant dans (ii) respectivement y et x à z, on en conclut que $|x-y|\geqslant 0$ et que $|x-y|=|y-x|$, de sorte que la distance est une fonction non négative et symétrique par rapport aux deux variables[2].

Un ensemble est dit *sphère* ouverte (sphère fermée) de centre p et de rayon r, lorsqu'il est composé de tous les points x tels que $|p-x|<r$ (tels que $|p-x|\leqslant r$).

[1]) La notion est due à M. Fréchet, Rend. Circ. Mat. di Palermo **22** (1906), p. 17. Le terme „espace métrique" remonte à F. Hausdorff, *Grundzüge*, p. 211. Pour la définition du texte, voir M. Fréchet, *Relations entre les notions de limite et de distance*, Trans. Amer. Math. Soc. **19** (1918), p. 54 et A. Lindenbaum, *Contributions à l'étude de l'espace métrique I*, Fund. Math. **8** (1926), p. 211.

[2]) Pour les espaces munis d'une „distance" non symétrique, voir W. A. Wilson, *On quasi-metric spaces*, Amer. Journ. of Math. **53** (1931), p. 675.

Un espace ayant la fermeture pour notion primitive est dit *métrisable*, s'il est possible d'y définir la distance de façon que les conditions (i) et (ii) soient vérifiées et que l'ensemble $\overline{X}$ se compose de tous les points p tels que chaque sphère de centre p contienne des points de X.

Remarque. Si l'on remplace la condition (i) par $|x-x|=0$ (de sorte que la distance entre deux points différents ne soit pas nécessairement $\neq 0$), on peut décomposer l'espace en sous-ensembles disjoints, en rangeant dans un même sous-ensemble tous les points dont la distance deux à deux est 0 (on dit dans ce cas que les points à distance 0 sont *identifiés*). La distance entre deux ensembles X et Y de ce genre est définie comme $|x-y|$, où $x \epsilon X$ et $y \epsilon Y$. Le choix des points x et y est indifférent, car la condition $|x-x'|=0$ implique $|x'-y| \leqslant |x-x'|+|x-y|=|x-y|$.

On vérifie facilement que les sous-ensembles en question, considérés comme des points, constituent un espace métrique.

Exemples. Le cas le plus simple, et dont nous avons emprunté les notations, est celui de l'ensemble des nombres réels, où la distance est définie, comme d'habitude, par le module de la différence. D'une façon plus générale, l'espace cartésien à n dimensions est un espace métrique, la distance des points $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ étant égale à

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}.$$

La définition de la sphère coïncide alors avec celle de la sphère n-dimensionnelle, adoptée en Géométrie.

L'ensemble de toutes les *fonctions bornées* $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, devient un espace métrique lorsqu'on définit la distance entre deux fonctions par la formule

$$|f_1-f_2|=\sup|f_1(x)-f_2(x)|,$$

„sup" désignant „borne supérieure" (voir N° VIII (1)).

L'ensemble des *fonctions de carrés sommables* avec la distance

$$|f_1-f_2|=\left\{\int_0^1 [f_1(x)-f_2(x)]^2\,dx\right\}^{1/2}$$

est un espace métrique, si l'on identifie les fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle.

Un ensemble de *puissance arbitraire* peut être considéré comme un espace métrique, lorsqu'on y définit la distance comme égale identiquement à 1.

II. Relations entre les espaces métriques et les autres espaces. Un espace métrique peut être considéré comme espace de Hausdorff (§ 7, III), lorsque *toute sphère ouverte de centre p est admise comme entourage du point p*. On vérifie facilement les axiomes A—D de Hausdorff. L'axiome E est aussi réalisé, car toute sphère ouverte contient une sphère concentrique de rayon rationnel.

On en conclut en vertu de § 14, VII et § 7, III que:

1° *un espace métrique peut être considéré comme espace $\mathcal{L}^*$, en convenant que*

$$\textit{la formule } p=\lim_{n=\infty} p_n \textit{ signifie que } \lim_{n=\infty}|p-p_n|=0,$$

c. à d. que *chaque sphère de centre p contient, à partir d'un certain indice, tous les points p_n*,

2° *un espace métrique satisfait aux axiomes I—III lorsqu'on convient que la formule $p \epsilon \overline{X}$ exprime que chaque sphère de centre p contient des points de l'ensemble X*,

3° *en admettant les conventions 1° et 2°, la condition $p \epsilon \overline{X}$ équivaut à l'existence d'une suite $p_1, p_2, \ldots$ extraite de X et convergente vers p*,

4° *pour que p soit un point intérieur de X, il faut et il suffit que p soit le centre d'une sphère contenue dans X.*

III. Diamètre. Continuité. Oscillation. Le *diamètre* d'un ensemble X, en symbole: $\delta(X)$, est la borne supérieure des distances de ses points. Si $\delta(X)$ est fini, l'ensemble X est dit *borné*.

On établit facilement les propositions suivantes:

(1) $\{\delta(X)=0\} \equiv \{X$ *est vide ou se compose d'un seul point*$\}$

(2) *si* $X \subset Y$, *on a* $\delta(X) \leqslant \delta(Y)$ (3) $\delta(\overline{X})=\delta(X)$

(4) *si* $XY \neq 0$, *on a* $\delta(X+Y) \leqslant \delta(X)+\delta(Y)$

(5) *si X est compact, on a* $\delta(X)<\infty$ (c. à d. X *est borné*).

Afin d'établir (5), remarquons que dans un espace non borné il existe une suite infinie de points $p_1, p_2, \ldots$ telle que $|p_n-p_m|>1$ pour chaque n et $m<n$. Il n'existe évidemment dans la suite $\{p_n\}$ aucune suite partielle convergente.

Si l'on transforme un espace arbitraire $\mathcal{X}$ en un espace métrique $\mathcal{Y}$, la condition de *continuité* de la fonction $f(x)$ au point p

(cf. § 13, II (3)) peut être exprimée comme suit: *à chaque $\varepsilon>0$ correspond un entourage E de p tel que la condition $x\in E$ entraîne l'inégalité $|f(x)-f(p)|<\varepsilon$*. En admettant que ε est de la forme $1/n$, cela veut dire qu'il existe une suite d'entourages E_n de p tels que $\lim_{n=\infty}\delta[f(E_n)]=0$. Ainsi, G_n désignant la somme de tous les ensembles ouverts $G\subset\mathscr{X}$ tels que $\delta[f(G)]<1/n$, l'ensemble $C=G_1\cdot G_2\cdot\ldots$ constitue *l'ensemble des points de continuité de la fonction f; c'est donc un G_δ*.

Nous allons généraliser cet énoncé, en introduisant la notion d'oscillation (qui permet de „mesurer" la discontinuité). A savoir: étant donnée une fonction f définie aux points x d'un sous-ensemble A de $\mathscr{X}$, on appelle *oscillation de f dans un point p* (qu'il appartienne à A ou non) la borne inférieure des nombres $\delta[f(E)]$, où E désigne un entourage variable du point p. En formule:

$$\omega(p)=\inf\delta[f(E)],$$

„inf" désignant „borne inférieure".

Ainsi par ex., pour $f(x)=\sin 1/x$, on a $\omega(0)=2$.

Evidemment, si p n'appartient pas à $\bar{A}$, on a $\omega(p)=0$, car pour $E=1-\bar{A}$ l'ensemble $f(E)$ est vide, donc $\delta[f(E)]=0$.

En attribuant à G_n le même sens qu'auparavant, on voit aussitôt que G_n est l'ensemble des points où l'oscillation est $<1/n$. Par conséquent *l'ensemble des points où l'oscillation s'annule est un G_δ* (c'est précisément l'ensemble C). Enfin $A\cdot C$ étant l'ensemble des points de continuité de la fonction f, cet ensemble est un G_δ *relatif à A*.

Il est à remarquer que dans le cas où les deux espaces $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ sont métriques, la condition de continuité, donnée au début de ce N⁰ peut être exprimée dans sa forme classique (de Cauchy): à chaque $\varepsilon>0$ correspond un $\delta>0$ tel que la condition $|x-p|<\delta$ entraîne l'inégalité $|f(x)-f(p)|<\varepsilon$ (la sphère de centre p et de rayon δ remplace ici l'entourage E).

IV. Ecart de deux ensembles. Sphère généralisée. *L'écart des ensembles A et B*, en symbole: $\varrho(A,B)$[1]), est la borne inférieure des distances $|x-y|$ pour x parcourant A et y parcourant B (les ensembles A et B sont supposés non vides).

[1]) F. Hausdorff désigne l'écart par $\delta(A,B)$ et le diamètre par $d(A)$. Voir *Mengenlehre*, p. 145.

On a les formules suivantes:

(1) $\varrho(x,y)=|x-y|$ (2) $\varrho(\bar{A},\bar{B})=\varrho(A,B)$

(3) $\{\varrho(x,A)=0\}\equiv\{x\in\bar{A}\}$ (4) $\varrho(A,C)\leqslant\varrho(A,B)+\varrho(B,C)+\delta(B)$

(4′) $\varrho(A,C)\leqslant\varrho(A,B)+\varrho(A+B,C)+\delta(B)$

(5) *la fonction $\varrho(x,A)$ est, pour A fixe, une fonction continue de x.*

Les formules (1)—(3) sont évidentes. (4) résulte de (4′), puisque

(6) $$\varrho(A+B,C)\leqslant\varrho(A,C).$$

En supposant que la formule (4′) soit en défaut, il existerait deux couples de points x,y et u,z tels que $x\in A$, $y\in B$, $u\in A+B$, $z\in C$ et

(i) $$|x-y|+|u-z|+\delta(B)<\varrho(A,C).$$

Par suite $|u-z|<\varrho(A,C)$. Cela implique que u *non*-$\in A$, d'où $u\in B$, donc $|y-u|\leqslant\delta(B)$. Mais alors

$$\begin{aligned}\varrho(A,C)&\leqslant|x-z|\leqslant|x-y|+|y-u|+|u-z|\\&\leqslant|x-y|+|u-z|+\delta(B),\end{aligned}$$

ce qui présente une contradiction avec (i).

Pour prouver la proposition (5), considérons deux points x et x' tels que $|x-x'|<\varepsilon$. Soit $a\in A$ et $|x-a|<\varrho(x,A)+\varepsilon$. Il vient $\varrho(x',A)\leqslant|x'-a|<\varrho(x,A)+2\varepsilon$, d'où la continuité de ϱ.

Ajoutons l'énoncé suivant facile à établir:

(7) $$\varrho(A,B+C)=\text{ soit }\varrho(A,B),\text{ soit }\varrho(A,C).$$

Une *sphère généralisée ouverte de rayon r et de centre A (supposé non vide)* est, par définition, l'ensemble de tous les points x tels que $\varrho(x,A)<r$. En remplaçant $<$ par $\leqslant$, on parvient à la définition de la sphère généralisée *fermée*.

La fonction $\varrho(x,A)$ étant continue et l'ensemble des nombres réels $<r$ étant ouvert, la sphère généralisée ouverte est en effet un ensemble ouvert (cf. § 13, IV); de même la sphère généralisée fermée est un ensemble fermé. On voit, en outre, que la sphère généralisée ouverte est la somme des sphères ouvertes de rayon r et de centre appartenant à A.

D'après (2), on n'altère pas la sphère, en remplaçant A par $\bar{A}$.

A étant un ensemble fermé et S_n désignant la sphère ouverte de centre A et de rayon $1/n$, on a

(8) $$A=\prod_{n=1}^{\infty}S_n.$$

Donc, *tout ensemble fermé est un* G_δ [1]) et, par raison de symétrie, *tout ensemble ouvert est un* F_σ.

V. Transformation limitative [2]). *Tout espace métrique est homéomorphe à un espace borné.*

Définissons une „nouvelle distance” par la formule

$$\|x-y\| = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

La distance $\|x-y\|$ satisfait aux axiomes (i) et (ii), qui définissent la notion de l'espace métrique. En effet, l'égalité $\|x-y\|=0$ équivaut à l'égalité $|x-y|=0$. On a en outre:

$$\|x-y\|+\|x-z\| \geqslant \frac{|x-y|}{1+|x-y|+|x-z|} + \frac{|x-z|}{1+|x-y|+|x-z|} =$$

$$= \frac{|x-y|+|x-z|}{1+|x-y|+|x-z|} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{|x-y|+|x-z|}} \geqslant \frac{1}{1+\dfrac{1}{|y-z|}} = \|y-z\|.$$

Les deux espaces métriques, l'un métrisé par la distance $|x-y|$ et l'autre par $\|x-y\|$, sont homéomorphes, c. à d. que l'on a l'équivalence $\{\lim_{n=\infty}|x_n-y|=0\} \equiv \{\lim_{n=\infty}\|x_n-y\|=0\}$.

Cela résulte directement du fait que la fonction $u=\dfrac{t}{1+t}$ est bicontinue dans le domaine des nombres non négatifs.

Enfin, le diamètre de l'espace est $\leqslant 1$ (relativement à la distance $\|x-y\|$).

Remarque. Le théorème précédent peut être établi de façon plus directe en définissant la „nouvelle distance” comme égale à $|x-y|$ dans le cas où $|x-y|\leqslant 1$ et à 1 dans le cas contraire [3]).

VI. Métrisation du produit cartésien. Soient $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ deux espaces métriques. D'après § 14, IV, le produit cartésien $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ de ces espaces se compose de tous les couples (x,y) où $x\in\mathscr{X}$ et $y\in\mathscr{Y}$, la limite étant définie par la convention que la suite $\mathfrak{z}_n=(x_n,y_n)$

[1]) C'est une propriété importante des espaces métriques, qui est considérée par certains auteurs comme axiome topologique. Voir „propriété $\mathscr{F}$“ chez P. Urysohn, Math. Ann. **94** (1925), p. 286.

[2]) Cf. „Schränkungstransformation“ chez H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen I*, Berlin 1921, p. 115; cf. aussi R. Baire, Acta Math. **30** (1906), p. 6.

[3]) Voir M. H. A. Newman, *Elements of the Topology of plane sets of points*, Cambridge 1939, p. 47.

converge vers $\mathfrak{z}=(x,y)$ lorsque $\lim_{n=\infty} x_n=x$ et $\lim_{n=\infty} y_n=y$. Le produit $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ peut être métrisé par la formule

$$(1)\qquad |\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1| = \sqrt{|x-x_1|^2+|y-y_1|^2}.$$

On voit, en effet, que, pour que $\mathfrak{z}=\lim_{n=\infty}\mathfrak{z}_n$, il faut et il suffit que $\lim_{n=\infty}|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|=0$.

Soit, de façon plus générale, $\mathscr{X}_i$, $i=1,2,\ldots$, un espace métrique de diamètre $\leqslant 1$ (cf. N° V). L'espace $\mathscr{X}_1\times\mathscr{X}_2\times\ldots$ se compose de points $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}^1,\mathfrak{z}^2,\ldots]$, le point $\mathfrak{z}_n$ tendant vers $\mathfrak{z}$, lorsque la i-ème coordonnée de $\mathfrak{z}_n$ tend vers la i-ème coordonnée de $\mathfrak{z}$. On pose

$$(2)\qquad |\mathfrak{z}-\mathfrak{y}| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|.$$

La distance ainsi définie satisfait aux conditions (i) et (ii), car l'équivalence $\{|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|=0\}\equiv\{\mathfrak{z}=\mathfrak{y}\}$ est évidente et la règle du triangle résulte de la formule

$$|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}|+|\mathfrak{z}-\mathfrak{w}| = \sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}[|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|+|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{w}^i|] \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}|\mathfrak{y}^i-\mathfrak{w}^i| = |\mathfrak{y}-\mathfrak{w}|.$$

Il s'agit de prouver que, pour que $\mathfrak{z}=\lim_{n=\infty}\mathfrak{z}_n$, il faut et il suffit que $\lim_{n=\infty}|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|=0$, c. à d. il s'agit d'établir l'équivalence:

$$\{\lim_{n=\infty}|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|=0\} \equiv \{\lim_{n=\infty}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}_n^i|=0, \text{ quel que soit } i\}.$$

Or, la condition $\lim_{n=\infty}|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|=0$ entraîne pour chaque i $\lim_{n=\infty}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}_n^i|=0$, car $|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}_n^i|\leqslant 2^i|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|$. Supposons que, inversement, $\lim_{n=\infty}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}_n^i|=0$, quel que soit i. Soit, pour un $\varepsilon>0$ donné, m un entier positif tel que $2^{-m}<\varepsilon$. Soit j un entier tel que l'on ait $|\mathfrak{z}^1-\mathfrak{z}_n^1|<\varepsilon,\ldots,|\mathfrak{z}^m-\mathfrak{z}_n^m|<\varepsilon$, pour tout $n>j$. En tenant compte du fait que $|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}_n^i|<\delta(\mathscr{X}_i)\leqslant 1$, on en tire l'inégalité

$$|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n| \leqslant \sum_{i=1}^{m}2^{-i}|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{z}_n^i| + \sum_{i=m+1}^{\infty}2^{-i} < 2\varepsilon, \text{ d'où } \lim_{n=\infty}|\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_n|=0.$$

Remarques. 1. Il y a bien d'autres définitions de distance qui peuvent être admises au lieu de (1). Ainsi par ex. rien ne change au point de vue topologique, si on admet comme la distance entre les points $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}_1$ le plus grand des deux nombres $|x-x_1|$ et $|y-y_1|$ ou bien la somme de ces nombres.

2. Si l'on ne fait pas l'hypothèse que $\delta(\mathfrak{X}_i) \leqslant 1$, on pose [1]

$$|\mathfrak{z}-\mathfrak{y}| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|}{1+|\mathfrak{z}^i-\mathfrak{y}^i|}.$$

La distance $|x-y|$, considérée comme fonction de la variable $\mathfrak{z}=(x,y)$, est continue. Soit, en effet, $\mathfrak{a}=(a,b)$ un point donné et posons $|\mathfrak{z}-\mathfrak{a}|<\varepsilon$. Il vient $|x-a|\leqslant|\mathfrak{z}-\mathfrak{a}|<\varepsilon$ et $|y-b|<\varepsilon$. Par conséquent

$$|x-y| \leqslant |x-a|+|a-b|+|b-y| < |a-b|+2\varepsilon$$

et

$$|a-b| \leqslant |a-x|+|x-y|+|y-b| < |x-y|+2\varepsilon,$$

donc $||x-y|-|a-b||<2\varepsilon$, d'où la conclusion demandée (cf. N° III).

VII. Distance de deux ensembles fermés. Espace $2^{\mathfrak{X}}$. Nous désignons par le symbole $2^{\mathfrak{X}}$ *la famille de tous les ensembles fermés, bornés et non vides,* situés dans l'espace métrique $\mathfrak{X}$. La notion d'écart entre les ensembles ne peut servir à métriser cet „espace": en désignant, par ex., par A l'ensemble composé du nombre 0, par B l'intervalle 1,2 et par C l'ensemble composé du nombre 3, on constate que l'écart ne satisfait pas à la loi du triangle (en outre, l'écart s'annule pour tout couple d'ensembles qui ont des points communs). Or, admettons la „métrique" suivante [2]: *la distance de deux ensembles A et B, en symbole:* dist(A,B), *est le plus grand des deux nombres*:

$$\sup_{x \in A} \varrho(x,B) \quad et \quad \sup_{y \in B} \varrho(y,A).$$

L'ensemble $2^{\mathfrak{X}}$ est un *espace métrique* (relativement à la notion de distance ainsi définie). En effet, on voit aussitôt que pour avoir dist$(A,B)=0$, il faut et il suffit que $A=B$.

Quant à la loi du triangle, on a pour $x \in A$ et $y \in B$ (N° IV (4)):

$$\varrho(x,C) \leqslant |x-y|+\varrho(y,C) \leqslant |x-y|+\text{dist}(B,C),$$

d'où

$$\varrho(x,C) \leqslant \inf_{y \in B}|x-y|+\text{dist}(B,C) =$$
$$= \varrho(x,B)+\text{dist}(B,C) \leqslant \text{dist}(A,B)+\text{dist}(B,C),$$

[1]) Cf. la formule de M. Fréchet, *Espaces abstraits*, p. 82.

[2]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Chap. VIII, § 6. Cf. aussi D. Pompéju, Ann. de Toulouse (2) **7** (1905).

et par raison de symétrie, pour $z \in C$:

$$\varrho(z,A) \leqslant \text{dist}(B,A)+\text{dist}(B,C),$$

donc

$$\text{dist}(A,C) \leqslant \text{dist}(B,A)+\text{dist}(B,C).$$

Observons, en outre, que:

(1) $$|a-b| = \text{dist}[(a),(b)],$$

(2) $$\{\text{dist}(A,B)\leqslant\varepsilon\} \equiv \{A \subset R_\varepsilon(B)\}\cdot\{B \subset R_\varepsilon(A)\},$$

$R_\varepsilon(X)$ désignant la sphère fermée de rayon ε et de centre X.

VIII. Convergence uniforme. Métrisation de l'espace $\mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$. $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces métriques donnés, considérons, dans la famille des fonctions $y=f(x)$ qui transforment l'espace $\mathfrak{X}$ (tout entier) en un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{Y}$, les fonctions *bornées*, en entendant par fonction bornée une fonction f telle que l'ensemble $f(\mathfrak{X})$ est borné.

1. *La famille des fonctions bornées peut être considérée comme un espace métrique lorsque la distance de deux fonctions est définie par la formule* [1])

(1) $$|f_1-f_2| = \sup_{x \in \mathfrak{X}} |f_1(x)-f_2(x)|.$$

En effet, d'abord la distance ainsi définie est toujours finie, car x' étant un point fixe, on a

$$|f_1(x)-f_2(x)| \leqslant |f_1(x)-f_1(x')|+|f_1(x')-f_2(x')|+|f_2(x')-f_2(x)|.$$

Comme, en outre, la condition $|f_1-f_2|=0$ équivaut évidemment à l'égalité $f_1=f_2$, reste à vérifier la loi du triangle. Or

$$|f_1-f_2|+|f_1-f_3| = \sup|f_1(x)-f_2(x)|+\sup|f_1(x)-f_3(x)| \geqslant$$
$$\geqslant \sup\{|f_1(x)-f_2(x)|+|f_1(x)-f_3(x)|\} \geqslant \sup|f_2(x)-f_3(x)| = |f_2-f_3|.$$

D'après la définition de la convergence dans les espaces métriques, une suite de fonctions f_n converge vers f dans l'espace fonctionnel considéré, lorsque $\lim|f_n-f|=0$, c. à d. lorsqu'à chaque $\varepsilon>0$ correspond un $n(\varepsilon)$ tel que l'on ait, pour $n>n(\varepsilon)$, $\sup_{x \in \mathfrak{X}}|f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$, donc que $|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$, quel que soit x.

[1]) Cf. M. Fréchet, Rend. di Palermo **22** (1906), p. 36. Cette définition de la distance entre fonctions remonte (d'après M. Fréchet) à Weierstrass.

On voit ainsi que la convergence entendue dans le sens de la formule (1) coïncide avec la *convergence uniforme* entendue dans le sens habituel.

Les fonctions continues constituent un ensemble fermé dans l'espace fonctionnel métrisé par la formule (1).

Cela résulte du théorème suivant:

2. *La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues est une fonction continue.*

La suite $f_1, f_2, \dots$ étant supposée uniformément convergente vers f, à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un n tel que

$$\text{(i)} \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Soit x_0 un point fixe. La fonction f_n étant continue au point x_0, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour $|x - x_0| < \delta$, on a

$$\text{(ii)} \qquad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Les inégalités (i) et (ii), rapprochées de l'inégalité

$$\text{(iii)} \qquad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

qui résulte de (i), impliquent que $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ si $|x - x_0| < \delta$. Cela veut dire que la fonction f est continue au point x_0.

Dans le même ordre d'idées on a le théorème suivant [1]):

2'. *La limite d'une suite convergente de façon continue (de fonctions continues ou non) est une fonction continue.*

Soit $\lim f_n(x) = f(x)$. Supposons que $\lim a_n = a$ et que cependant la suite $\{f(a_n)\}$ ne converge pas vers $f(a)$. Il existe alors un entourage ouvert G du point $f(a)$ et une suite d'entiers $k_1 < k_2 < \dots$ telle que $f(a_{k_n}) \in \mathcal{Y} - \overline{G}$, quel que soit n. L'ensemble $\mathcal{Y} - \overline{G}$ étant un entourage du point $f(a_{k_n})$, il existe un indice m_n tel que $f_{m_n}(a_{k_n})$ lui appartient. On peut admettre qu'en outre $m_1 < m_2 < \dots$ La suite des fonctions $\{f_n\}$ étant supposée convergente de façon continue, l'égalité $\lim a_{k_n} = a$ (qui résulte de l'égalité $\lim a_n = a$) entraîne $\lim f_{m_n}(a_{k_n}) = f(a)$, d'où $f(a) \in \overline{\mathcal{Y} - \overline{G}} \subset \overline{\mathcal{Y} - G} = \mathcal{Y} - G$, contrairement à la définition de G (d'après laquelle $f(a) \in G$).

[1]) Cf. H. Hahn, *Reelle Funktionen I*, Leipzig 1932, p. 225.

3. *La convergence uniforme entraîne la convergence continue au sens étroit, donc — dans le domaine des fonctions continues — la convergence continue* (cf. § 14, XI, 1).

Autrement dit: si la suite $\{f_n\}$ est uniformément convergente, la condition $\lim f(x_n) = y$ entraîne $\lim f_n(x_n) = y$.

Supposons par impossible que la suite $\{f_n(x_n)\}$ ne converge pas vers y. Elle contient par conséquent une suite partielle $\{f_{k_n}(x_{k_n})\}$ dont aucune suite partielle ne converge vers y. La suite $\{f_n\}$ étant uniformément convergente, il en est de même de la suite $\{f_{k_n}\}$. Il existe par conséquent une suite d'entiers $m_1 < m_2 < \dots$ telle que l'on a pour chaque x

$$|f_{k_{m_n}}(x) - f(x)| < 1/n, \quad \text{donc en particulier} \quad |f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}}) - f(x_{k_{m_n}})| < 1/n.$$

Rapprochée de l'égalité $\lim f(x_n) = y$, qui entraîne la formule $\lim f(x_{k_{m_n}}) = y$, cette dernière inégalité donne $\lim f_{k_{m_n}}(x_{k_{m_n}}) = y$, contrairement à la définition de la suite $\{k_n\}$.

4. *Si l'espace $\mathcal{Y}$ est compact, la convergence continue au sens étroit entraîne la convergence uniforme (ces deux genres de convergence sont donc équivalents).*

En effet, en supposant que la suite $\{f_n\}$ ne soit pas uniformément convergente, il existe un $\varepsilon > 0$, une suite d'entiers $k_1 < k_2 < \dots$ et une suite de points $x_1, x_2, \dots$ telles que

$$(2) \qquad |f_{k_n}(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon \text{ quel que soit } n.$$

L'espace $\mathcal{Y}$ étant compact, il existe une suite $m_1 < m_2 < \dots$ telle que la suite $\{f(x_{m_n})\}$ est convergente: $\lim f(x_{m_n}) = y$. La convergence de la suite $\{f_n\}$ étant supposée continue au sens étroit, il en est de même de la convergence de la suite $\{f_{k_{m_n}}\}$. La condition $\lim f(x_{m_n}) = y$ entraîne donc $\lim f_{k_{m_n}}(x_{m_n}) = y$. Mais alors, pour n suffisamment grand, on a $|f_{k_{m_n}}(x_{m_n}) - f(x_{m_n})| < \varepsilon$, contrairement à (2). Cette contradiction prouve que la suite $\{f_n\}$ n'est pas convergente de façon continue au sens étroit.

5. *Si l'espace $\mathcal{X}$ est compact, la convergence continue entraîne la convergence uniforme (ces deux genres de convergence sont donc équivalents dans le domaine des fonctions continues).*

Supposons, comme dans la démonstration précédente, que la suite $\{f_n\}$ ne soit pas uniformément convergente; donc que l'on ait l'inégalité (2).

L'espace $\mathcal{X}$ étant compact, il est légitime d'admettre que la suite $\{x_n\}$ est convergente: $\lim x_n = x$. La convergence de la suite $\{f_n\}$ étant supposée continue, il en est de même de la suite $\{f_{k_n}\}$ (cf. § 14, IX, remarque), et il vient

$$\lim_{n=\infty} f_{k_n}(x_n) = f(x). \tag{3}$$

D'autre part, comme $\lim\limits_{m=\infty} f_m(x_n) = f(x_n)$, il existe une suite d'entiers $m_1 < m_2 < \dots$ telle que

$$|f_{m_n}(x_n) - f(x_n)| < 1/n, \quad \text{d'où} \quad |f_{k_n}(x_n) - f_{m_n}(x_n)| > \varepsilon - 1/n,$$

selon (2). Mais cela est incompatible avec (3), puisque la formule $\lim x_n = x$ entraîne $\lim f_{m_n}(x_n) = f(x)$.

Remarques. Si l'on fait l'une de deux hypothèses: a) l'espace $\mathcal{X}$ est compact, b) l'espace $\mathcal{Y}$ est compact, — les fonctions-éléments de $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ sont bornées (cf. III (5) et § 14, VIII, 5). La formule (1) confère donc à $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ le caractère d'un espace métrique. La notion de limite qui en dérive (conformément à II, 1^0) coïncide dans le cas a) avec celle qui a été envisagée dans le N^0 IX du § 14 (convergence continue), et dans le cas b) avec celle du N^0 XI du § 14 (convergence continue au sens étroit).

On déduit ces conclusions directement des th. 5 et 4.

6. *Soit p un point fixe de l'espace métrique $\mathcal{X}$. Faisons correspondre à chaque sous-ensemble borné A $(\neq 0)$ de $\mathcal{X}$ la fonction f_A définie comme suit:*

$$f_A(x) = \varrho(x,A) - |x-p|. \tag{4}$$

On a alors

$$\operatorname{dist}(A,B) = |f_A - f_B|. \tag{5}$$

Observons d'abord que la fonction f_A est bornée:

$$|f_A(x)| \leqslant \varrho(p,A) + \delta(A).$$

Car l'inégalité IV (4) donne:

$$\varrho(x,A) \leqslant \varrho(p,A) + |x-p| \quad \text{et} \quad |x-p| \leqslant \varrho(x,A) + \varrho(A,p) + \delta(A).$$

Par raison de symétrie, on peut supposer que

$$\operatorname{dist}(A,B) = \sup_{x \in A} \varrho(x,B).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit a un point de A tel que $\operatorname{dist}(A,B) \leqslant \varrho(a,B) + \varepsilon$. Comme $\varrho(a,A) = 0$, il vient d'après (4):

$$\operatorname{dist}(A,B) \leqslant \varrho(a,B) - \varrho(a,A) + \varepsilon \leqslant |f_B - f_A| + \varepsilon. \tag{6}$$

Désignons, d'autre part, par a_x, pour chaque $x \in \mathcal{X}$, un point de A tel que $\varrho(x,A) \geqslant |x - a_x| - \varepsilon$. Selon IV (4): $\varrho(x,B) \leqslant |x - a_x| + \varrho(a_x,B)$, d'où

$$\varrho(x,B) - \varrho(x,A) \leqslant \varrho(a_x,B) + \varepsilon \leqslant \operatorname{dist}(A,B) + \varepsilon$$

et de même: $\varrho(x,A) - \varrho(x,B) \leqslant \operatorname{dist}(A,B) + \varepsilon$. Donc

$$|f_B - f_A| \leqslant \operatorname{dist}(A,B) + \varepsilon. \tag{7}$$

Les formules (6) et (7) entraînent l'identité (5).

Remarque. Dans le cas où l'espace $\mathcal{X}$ est *borné*, on peut définir la fonction f_A d'une façon plus simple; on pose alors $f_A(x) = \varrho(x,A)$.

Le th. 6 implique aussitôt le corollaire suivant:

7. *L'espace $2^{\mathcal{X}}$ est isométrique à un sous-ensemble de l'espace des transformations continues bornées de $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de $\mathcal{E}$, cet espace étant métrisé par la formule* (1).

En particulier, *si l'espace $\mathcal{X}$ est compact, on a les „inclusions topologiques"* (ou plus précisément, métriques):

$$\mathcal{X} \underset{\text{top}}{\subset} 2^{\mathcal{X}} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{E}^{\mathcal{X}},$$

ce dernier espace étant métrisé par la formule (1).

Le théorème précédent permet de considérer l'espace $2^{\mathcal{X}}$ comme sous-ensemble de l'espace $\mathcal{E}^{\mathcal{X}}$. Inversement, f étant une fonction continue, élément de l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, l'ensemble des points $[x,f(x)]$ du produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (ensemble que nous allons identifier avec f) est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (cf. § 14, IV, 3), donc — s'il est borné — il est un élément de l'espace $2^{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$. Plus précisément, on a le théorème suivant:

8. *Si l'espace $\mathcal{X}$ est compact, on a l'inclusion topologique*

$$\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \underset{\text{top}}{\subset} 2^{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}.$$

Remarquons au préalable que f et g étant deux fonctions définies sur $\mathcal{X}$ et dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{Y}$, on a l'inégalité:

$$\operatorname{dist}(f,g) \leqslant |f-g|. \tag{8}$$

Pour s'en convaincre, posons $p_x = [x,f(x)]$ et $q_x = [x,g(x)]$. Il vient $p_x \in f$ et $q_x \in h$, donc

$$\varrho(p_x,g) \leqslant |p_x - q_x| = |f(x) - g(x)| \leqslant |f-g|, \quad \text{d'où} \quad \sup_{x \in \mathcal{X}} \varrho(p_x,g) \leqslant |f-g|.$$

Par raison de symétrie $\sup_{x\in\mathfrak{X}} \varrho(q_x, f) \leqslant |f-g|$, d'où l'inégalité (8).

Passons à la démonstration du th. 8. Il s'agit de démontrer que, pour que la suite des fonctions $f_n \epsilon \mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$ converge uniformément vers la fonction $f \epsilon \mathcal{Y}^{\mathfrak{X}}$, il faut et il suffit que $\lim_{n=\infty} \operatorname{dist}(f_n, f) = 0$.

Or, la suite $\{f_n\}$ étant supposée uniformément convergente, on a

$$\lim_{n=\infty} |f_n - f| = 0, \quad \text{d'où} \quad \lim_{n=\infty} \operatorname{dist}(f_n, f) = 0$$

en vertu de (8).

Inversement, admettons que $\lim_{n=\infty} \operatorname{dist}(f_n, f) = 0$. Nous allons démontrer que la convergence de la suite $\{f_n\}$ vers f est continue, d'où on déduira en vertu de 5 qu'elle est uniforme (l'espace $\mathfrak{X}$ étant compact par hypothèse).

Soit $\lim x_n = x$. Il s'agit de démontrer que $\lim f_n(x_n) = f(x)$.

Posons $q_n = [x_n, f_n(x_n)]$. Comme $\varrho(q_n, f) \leqslant \operatorname{dist}(f_n, f)$, on a $\lim \varrho(q_n, f) = 0$. Il existe donc une suite de points $p_n \epsilon f$ tels que $\lim |q_n - p_n| = 0$. Posons $p_n = [x_n^*, f(x_n^*)]$. On a par conséquent, d'une part

$$\lim |x_n - x_n^*| = 0, \text{ d'où } \lim x_n^* = x, \text{ donc } \lim f(x_n^*) = f(x),$$

et d'autre part, $\lim |f_n(x_n) - f(x_n^*)| = 0$, d'où finalement $\lim f_n(x_n) = f(x)$.

L'énoncé suivant résulte aussitôt de 6 (ainsi que de 7):

9 [1]). *Tout espace métrique $\mathfrak{X}$ est isométrique à un sous-ensemble de l'espace de toutes les fonctions à valeurs réelles, continues, bornées et définies sur $\mathfrak{X}$, la distance de deux fonctions étant donnée par la formule* (1).

Pour s'en convaincre, on substitue à A dans (4) un ensemble composé d'un seul point a.

Ajoutons que, dans ce cas, la démonstration devient plus simple. En effet, en posant

$$f_a(x) = |x-a| - |x-p|,$$

il vient $|f_a(x)| \leqslant |a-p|$ et $|f_a(x) - f_b(x)| = \big||x-a| - |x-b|\big| \leqslant |a-b|$, d'où $|f_a - f_b| \leqslant |a-b|$. D'autre part, $f_a(a) - f_b(a) = -|a-p| - |a-b| + |a-p|$, d'où $|f_a - f_b| \geqslant |a-b|$. Donc $|f_a - f_b| = |a-b|$.

[1]) Cf. ma note de Fund. Math. **25** (1935), p. 543 et K. Kunugui, Proc. Imp. Acad. Japan. **11** (1936), p. 351.

IX. Espaces totalement bornés. Un espace métrique est dit *totalement borné*, lorsqu'il se laisse décomposer pour chaque $\varepsilon > 0$ en un nombre fini d'ensembles de diamètre $< \varepsilon$ [1]).

1. *Pour qu'un espace soit totalement borné, il faut et il suffit qu'à chaque $\varepsilon > 0$ corresponde un ensemble fini F_ε tel que $\varrho(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$, quel que soit x.*

En effet, l'espace étant supposé totalement borné, on a

$$1 = A_1^n + \dots + A_{k_n}^n, \quad \delta(A_i^n) < 1/n \quad \text{pour } i \leqslant k_n.$$

Soit p_i^n un point choisi de A_i^n. L'ensemble $F_{1/n}$ composé des points $p_1^n, \dots, p_{k_n}^n$ est l'ensemble demandé (pour $\varepsilon > 1/n$).

Inversement, $F_{\varepsilon/2}$ étant un ensemble satisfaisant à la condition du théorème, le système des sphères de rayon $\varepsilon/2$ et de centre appartenant à $F_{\varepsilon/2}$ présente le recouvrement demandé de l'espace.

La condition qui vient d'être établie peut s'exprimer à l'aide de la notion de distance d'ensembles (N° VII) comme suit: *l'espace est la limite d'une suite d'ensembles finis* (à savoir, de la suite $F_1, F_{1/2}, \dots, F_{1/n}, \dots$).

Cela résulte aussi du théorème suivant:

2. *$\mathfrak{X}$ étant totalement borné, $2^{\mathfrak{X}}$ l'est également.*

Pour prouver ce dernier théorème, envisageons l'ensemble F_ε considéré auparavant; soit $H_{1,\varepsilon}, \dots, H_{k,\varepsilon}$ le système de tous les sous-ensembles de F_ε. A chaque ensemble fermé X faisons correspondre l'ensemble $H_{i,\varepsilon}$ des points p de F_ε tels que $\varrho(p, X) < \varepsilon$; il vient $\operatorname{dist}(X, H_{i,\varepsilon}) \leqslant \varepsilon$.

L'énoncé (5) du N° III se laisse préciser comme suit:

3. *Chaque espace métrique compact est totalement borné.*

En effet, l'espace étant supposé non totalement borné, il existe selon 1, un $\varepsilon > 0$ tel qu'à chaque ensemble fermé F correspond un point x satisfaisant à l'inégalité $\varrho(x, F) \geqslant \varepsilon$. On en déduit aussitôt l'existence d'une suite infinie de points $p_1, p_2, \dots$ telle que $|p_n - p_m| \geqslant \varepsilon$ pour chaque n et $m < n$. Cette suite ne contient évidemment aucune suite partielle convergente.

4. *Chaque espace totalement borné et, en particulier, chaque espace métrique compact est séparable.*

[1]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 108.

Pour s'en convaincre, on n'a qu'à considérer l'ensemble des points p_i^n, $n=1,2,\ldots,i\leqslant k_n$, définis dans la démonstration du th. 1.

5. *G étant un sous-ensemble ouvert d'un espace totalement borné $\mathcal{X}$, il existe une suite d'ensembles ouverts $G_0, G_1, \ldots$ telle que $G=G_0+G_1+\ldots$ et que*

(i) *G_l n'a des points communs qu'avec un nombre fini des G_j,*

(ii) $\overline{G}_l\subset G$ *et* (iii) $\lim\limits_{l=\infty}\delta(G_l)=0$.

On peut admettre que $G\neq\mathcal{X}$, car autrement on pose $G_0=\mathcal{X}$ et $G_l=0$ pour $i>0$.

Soit S_m la sphère ouverte de centre $\mathcal{X}-G$ et de rayon $1/m$ (cf. N° IV). $\mathcal{X}$ étant totalement borné, soit $H_{1,m},\ldots,H_{k_m,m}$ un système d'ensembles ouverts tels que

$$\mathcal{X}=H_{1,m}+\ldots+H_{k_m,m} \quad \text{et} \quad \delta(H_{j,m})<1/m.$$

Comme $G=\sum\limits_{m=0}^{\infty}(S_m-\overline{S}_{m+2})$, on a $G=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{k_m}(S_m-\overline{S}_{m+2})\cdot H_{j,m}$.

En rangeant les termes de cette série double en une suite infinie $G_0, G_1, \ldots$, les conditions (i)—(iii) se trouvent réalisées.

La condition (i) est en effet une conséquence directe de la formule

$$(S_m-\overline{S}_{m+2})\,(S_n-\overline{S}_{n+2})\subset S_{m+2}-\overline{S}_{m+2}=0 \quad \text{pour } n\geqslant m+2.$$

La condition (ii) résulte de la formule

$$\overline{(S_m-\overline{S}_{m+2})\cdot H_{j,m}}\subset\overline{\mathcal{X}-S_{m+2}}\subset G.$$

Enfin, (iii) résulte de l'inégalité $\delta(H_{j,m})<1/m$.

Remarques. 1°. Dans un espace *métrique arbitraire*, à chaque $\varepsilon>0$, correspond un ensemble *fermé et isolé* (fini ou infini) F_ε tel que $\varrho(x,F_\varepsilon)<\varepsilon$, quel que soit x. Rangeons, en effet, tous les points de l'espace en une suite transfinie $p_0, p_1, \ldots, p_\alpha, \ldots$ Posons $p_{\alpha_0}=p_0$ et d'une façon générale, pour $\gamma>0$, soit p_{α_γ} le point à indice minimum tel que $|p_{\alpha_\gamma}-p_{\alpha_\xi}|\geqslant\varepsilon$, quel que soit $\xi<\gamma$ (bien entendu, si un point p_{α_γ} de ce genre existe). F_ε est l'ensemble des p_{α_γ}.

2°. Considérons comme l'espace $\mathcal{X}$ la courbe $y=\sin 1/x$, $0<x\leqslant 1$, la distance de deux points p et q étant définie comme égale au diamètre de l'arc pq. Cet espace est évidemment séparable et borné (même complet), mais n'est pas totalement borné. La famille de ses sous-ensembles situés sur l'axe des abscisses (qui sont tous fermés) est indénombrable et la distance entre deux éléments quelconques de cette famille dépasse l'unité; par conséquent cette famille et, à plus forte raison, *l'espace $2^{\mathcal{X}}$ est non séparable.*

Il est remarquable que la courbe $\mathcal{X}$ peut être transformée par homéomorphie (par projection sur l'axe des x) de façon que l'espace $2^{\mathcal{X}}$ devienne séparable.

On voit ainsi que les propriétés topologiques de l'espace $2^{\mathcal{X}}$ ne sont pas nécessairement des propriétés topologiques de l'espace $\mathcal{X}$. Cela tient au fait que la définition de l'espace $2^{\mathcal{X}}$ n'a pas été topologique.

X. Produits cartésiens d'espaces totalement bornés.

1. *$\{\mathcal{X}_i\}$ étant une suite (finie ou infinie) d'espaces totalement bornés et tels que $\delta(\mathcal{X}_i)\leqslant 1$, leur produit cartésien, métrisé par la formule* (2) *du* N° VI, *est totalement borné.*

Soient, en effet, $\varepsilon>0$ et i un entier tel que $2^{-i}<\varepsilon/2$. Pour chaque $l\leqslant i$, il existe par hypothèse un système fini de points: $r_{l1},\ldots,r_{lk_l}$ tels que chaque point de l'espace $\mathcal{X}_l$ se trouve situé à distance $<\varepsilon/2$ d'un point appartenant à ce système. Soit, pour $n>i$, r_n un point arbitrairement choisi de $\mathcal{X}_n$.

Considérons, pour i fixe, le système fini des suites de la forme

$$\mathfrak{y}=[r_{1j_1}, r_{2j_2}, \ldots, r_{ij_i}, r_{i+1}, r_{i+2}, \ldots] \quad \text{où} \quad j_1\leqslant k_1,\ \ldots,\ j_i\leqslant k_i.$$

Etant donné un point $\mathfrak{z}=[x_1,x_2,\ldots]$ de l'espace $\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\times\ldots$, il existe, pour $l\leqslant i$, un point r_{lj_l} tel que $|r_{lj_l}-x_l|<\varepsilon/2$, d'où

$$|\mathfrak{y}-\mathfrak{z}|=\sum_{l=1}^{i}2^{-l}|r_{lj_l}-x_l|+\sum_{n=i+1}^{\infty}2^{-n}|r_n-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

L'espace $\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2\times\ldots$ est donc totalement borné.

L'intervalle $\mathcal{J}=01$ étant totalement borné, il en résulte que

2. *Le cube $\mathcal{J}^n$, pour $n\leqslant\aleph_0$, est totalement borné, donc séparable.*

De là on conclut en vertu de IX, 2 que

3. *L'espace $2^{(\mathcal{J}^n)}$ est totalement borné, donc séparable* ($n\leqslant\aleph_0$).

Rapprochés de VIII, 8, les théorèmes précédents impliquent:

4. *Si $\mathcal{X}$ est métrique et compact, l'espace fonctionnel $(\mathcal{J}^n)^{\mathcal{X}}$, métrisé par la formule* VIII (1), *est séparable* ($n\leqslant\aleph_0$).

Car $(\mathcal{J}^n)^{\mathcal{X}}\underset{\text{top}}{\subset}2^{\mathcal{J}^n\times\mathcal{X}}$ et $\mathcal{J}^n\times\mathcal{X}$ est totalement borné.

XI. Prolongement des fonctions continues. 1. *A et B étant deux ensembles fermés et disjoints, il existe une fonction continue f, définie sur l'espace tout entier et telle que*

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x)=0 \text{ pour } x\in A, \quad f(x)=1 \text{ pour } x\in B, \\ 0<f(x)<1 \text{ pour tous les autres } x. \end{cases}$$

Posons, en effet [1]),

$$(2)\qquad f(x)=\frac{\varrho(x,A)}{\varrho(x,A)+\varrho(x,B)}$$

en convenant que $\varrho(x,0)=1$.

On constate aussitôt (en tenant compte de IV (3) et (5)) que la fonction f, ainsi définie, est continue et satisfait aux conditions (1).

Le th. 1 est un cas particulier du théorème fondamental de Tietze, qui va suivre. La démonstration de ce dernier repose sur le lemme suivant.

2. *Etant donnée une fonction continue f définie sur un sous-ensemble fermé F d'un espace métrique $\mathfrak{X}$ et telle que $|f(x)|\leqslant c$, où $c>0$, il existe une fonction continue g, définie sur l'espace $\mathfrak{X}$ tout entier et satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$(3)\qquad |g(x)|\leqslant \tfrac{1}{3}c \text{ pour } x\in\mathfrak{X} \text{ et } |g(x)|<\tfrac{1}{3}c \text{ pour } x\in\mathfrak{X}-F,$$

$$(4)\qquad |f(x)-g(x)|\leqslant \tfrac{2}{3}c \text{ pour } x\in F.$$

Posons, en effet,

$$A=\underset{x}{E}[f(x)\leqslant -\tfrac{1}{3}c] \text{ et } B=\underset{x}{E}[f(x)\geqslant \tfrac{1}{3}c].$$

Les ensembles A et B étant fermés (cf. § 13, IV) et disjoints, on constate facilement que la fonction

$$(5)\qquad g(x)=\tfrac{1}{3}c\,\frac{\varrho(x,A)-\varrho(x,B)}{\varrho(x,A)+\varrho(x,B)}$$

satisfait aux conditions imposées.

---

[1]) Cf. P. Urysohn, Math. Ann. **94** (1925), p. 294.

3. *Théorème de Tietze* [1]). *Etant donnée une fonction continue f à valeurs réelles, définie sur un sous-ensemble fermé F d'un espace métrique $\mathfrak{X}$, il existe une fonction continue f^* à valeurs réelles, définie sur l'espace $\mathfrak{X}$ tout entier et telle que*

$$(6)\qquad f^*(x)=f(x) \text{ pour } x\in F.$$

De plus, *si la fonction f est bornée*:

$$(7)\qquad |f(x)|\leqslant c, \quad \text{où} \quad c>0,$$

on a

$$(8)\qquad |f^*(x)|<c \text{ pour } x\in\mathfrak{X}-F.$$

Envisageons d'abord le cas où la fonction f est bornée, c. à d. où l'inégalité (7) est réalisée. Posons

$$(9)\qquad f^*(x)=\sum_{n=\infty}^{\infty} g_n(x),$$

où les fonctions g_n sont définies par induction comme suit.

Posons $g_0(x)=0$. Soit $n\geqslant 0$. Admettons que

$$(10)\qquad \Big|f(x)-\sum_{i=0}^{n} g_i(x)\Big|\leqslant (\tfrac{2}{3})^n c \quad \text{pour } x\in F$$

(tel est le cas de $n=0$ selon (7)).

Substituons dans 2: $f(x)-\sum_{i=0}^{n} g_i(x)$ à $f(x)$ et $(\frac{2}{3})^n c$ à c. Il en résulte qu'il existe une fonction continue g_{n+1} définie sur $\mathfrak{X}$ et telle que

$$(11)\qquad |g_{n+1}(x)|\leqslant \frac{2^n}{3^{n+1}}c \text{ pour } x\in\mathfrak{X},$$

$$(12)\qquad |g_{n+1}(x)|<\frac{2^n}{3^{n+1}}c \text{ pour } x\in\mathfrak{X}-F,$$

$$(13)\qquad \Big|f(x)-\sum_{i=0}^{n+1} g_i(x)\Big|\leqslant (\tfrac{2}{3})^{n+1} c \text{ pour } x\in F.$$

---

[1]) H. Tietze, *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, Journ. f. Math. **145** (1915), p. 9—14. Pour la démonstration, cf. P. Urysohn, l. c., p. 293.

Cf. aussi K. Borsuk, Bull. Acad. Pol. 1933, où il s'agit de prolonger la fonction f de façon que le „prolongement" soit une opération *linéaire* sur les fonctions prolongées.

La suite des fonctions $g_1, g_2, \ldots$ se trouve ainsi définie et les formules (10—(12) sont remplies pour chaque $n=0,1,\ldots$

Les fonctions g_n étant continues et la série (9) étant — selon (11) — uniformément convergente sur $\mathcal{X}$, la fonction f^* est continue sur $\mathcal{X}$ (d'après VIII, 2).

L'inégalité (10) implique aussitôt la formule (6).

Enfin, l'inégalité (8) résulte de (12): on a pour $x \in \mathcal{X}-F$

$$|f^*(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |g_{n+1}(x)| < c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = c.$$

Le cas de fonction f bornée se trouve ainsi établi. Le cas général se ramène à celui-ci comme suit. Transformons l'espace $\mathcal{E}$ des nombres réels en l'intervalle ouvert $-1<t<1$ par une homéomorphie h (par exemple $h(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x$). La fonction superposée hf étant bornée, il existe une fonction continue h^* définie sur $\mathcal{X}$ et telle que

$$h^*(x) = hf(x) \text{ pour } x \in F \text{ et } |h^*(x)| < 1 \text{ quel que soit } x \in \mathcal{X}.$$

h^{-1} désignant la fonction inverse à h, on pose $f^*(x) = h^{-1}h^*(x)$.

4. *Corollaire. Toute fonction continue f, définie sur un sous-ensemble fermé F d'un espace métrique $\mathcal{X}$ et dont les valeurs appartiennent à l'espace $\mathcal{J}^n$ ou $\mathcal{E}^n$ (où n est un entier positif ou $\aleph_0$), se laisse prolonger sur l'espace $\mathcal{X}$ tout entier.*

D'après § 14, IV, 1, la condition pour qu'un point variable de l'espace $\mathcal{J}^n$ (ou $\mathcal{E}^n$) varie d'une façon continue, est que chacune de ses coordonnées varie de la même façon. Le corollaire se réduit donc au cas où l'on remplace l'espace $\mathcal{J}^n$, respectivement $\mathcal{E}^n$, par $\mathcal{J}$ ou $\mathcal{E}$.

Remarques. Dans le cas où $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, on obtient un prolongement continu de la fonction f en posant

$$f^*(p) = \inf_{x \in F} \left\{ f(x) + \frac{|p-x|}{\varrho(p,F)} - 1 \right\} \quad \text{pour } p \in \mathcal{X}-F\text{ [1]}.$$

Il vient $0 \leqslant f^*(p) \leqslant 1$ (le signe d'égalité n'étant pas exclu).

[1] Voir F. Hausdorff, Math. Zft. **5** (1919), p. 296. Sa démonstration est réproduite dans la I-e édition de ma *Topologie I*.

XII. Rapports des espaces métriques séparables au cube $\mathcal{J}^{\aleph_0}$. Séparabilité de l'espace $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

Théorème 1 [1]. *Tout espace métrique séparable $\mathcal{X}$ est homéomorphe à un sous-ensemble du cube $\mathcal{J}^{\aleph_0}$. En symbole:*

$$\mathcal{X} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{J}^{\aleph_0}.$$

Conformément au N° V, on peut admettre que l'espace $\mathcal{X}$ est de diamètre $\leqslant 1$. Soit $p_1, p_2, \ldots$ une suite (infinie) de points dense dans l'espace. Faisons correspondre au point x de $\mathcal{X}$ le point $h(x)$ du cube $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ à coordonnées $|x-p_1|, |x-p_2|, \ldots$:

(1) $$h(x) = [|x-p_1|, |x-p_2|, \ldots], \text{ c. à d. } h^{(n)}(x) = |x-p_n|.$$

La fonction $h^{(n)}$ est continue d'après N° VI. La fonction h est donc continue d'après § 14, IV, 1. Nous allons montrer qu'elle est bicontinue.

Soit

(2) $$\lim_{k=\infty} h(x_k) = h(x).$$

Il s'agit de prouver que $\lim_{k=\infty} x_k = x$.

Supposons que cette dernière égalité ne soit pas vérifiée.

Il existe alors un $\eta > 0$ et une suite $m_1 < m_2 < \ldots$ telle que

(3) $$|x_{m_k} - x| > \eta \text{ quel que soit } k.$$

Soit j un indice tel que

(4) $$|x-p_j| < \eta/3.$$

La condition (2) entraîne $\lim_{k=\infty} h^{(j)}(x_k) = h^{(j)}(x)$, c. à d.

$$\lim_{k=\infty} |x_k - p_j| = |x-p_j|.$$

On a donc, pour k suffisamment grand

$$|x_{m_k} - p_j| < |x-p_j| + \eta/3,$$

d'où $|x_{m_k} - x| \leqslant |x_{m_k} - p_j| + |x-p_j| < \eta$, d'après (4).

On parvient ainsi à une contradiction avec (3).

Corollaire. Tout espace métrique séparable est homéomorphe à un espace totalement borné.

Car l'espace $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ est totalement borné (cf. X, 2).

[1] Ce théorème est dû à P. Urysohn. On le rapprochera du théorème du § 17, IV.

Remarque. Le th. 1 peut être précisé comme suit: *les homéomorphies constituent un ensemble dense dans l'espace* $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$ (métrisé par la formule VIII (1)).

En d'autres termes: *à chaque transformation continue f de $\mathfrak{X}$ en sous-ensemble de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ et à chaque $\varepsilon>0$, correspond une transformation homéomorphe h de $\mathfrak{X}$ en sous-ensemble de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ telle que $|h(x)-f(x)|<\varepsilon$ quel que soit x.*

Ou encore: *f est la limite d'une suite uniformément convergente d'homéomorphies.*

Il suffit, à cet effet, de remplacer la formule (1) par la suivante:

$$h(x)=[f^{(1)}(x),f^{(2)}(x),\ldots,f^{(n)}(x),\ |x-p_1|,\ |x-p_2|,\ldots],$$

l'entier n étant choisi de façon que $\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$.

Théorème 2[1]. *Si $\mathfrak{X}$ est métrique compact et $\mathfrak{Y}$ métrique séparable, l'espace $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$ (métrisé par la formule* VIII (1)) *est séparable.*

Car l'inclusion $\mathfrak{Y}\underset{\text{top}}{\subset}\mathcal{J}^{\aleph_0}$ implique $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}\underset{\text{top}}{\subset}(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$ et ce dernier espace est séparable (d'après X, 4).

Remarques. 1) *Si l'espace métrique $\mathfrak{X}$ est non compact, l'espace $\mathcal{J}^{\mathfrak{X}}$ (métrisé par la formule* VIII (1)) *est non séparable.*

En effet, l'espace $\mathfrak{X}$ contient, par hypothèse, un sous-ensemble fermé, dénombrable (infini) et isolé $F=(p_1,p_2,\ldots)$. Faisons correspondre à chaque point $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}^1,\mathfrak{z}^2,\ldots]$ de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor la fonction $f_{\mathfrak{z}}$ définie (sur F) par l'égalité $f_{\mathfrak{z}}(p_l)=\frac{1}{2}\mathfrak{z}^l$. L'ensemble F étant isolé, la fonction $f_{\mathfrak{z}}$ est continue: $f_{\mathfrak{z}}\in\mathcal{J}^F$. Soit, conformément au théorème de Tietze (N⁰ XI, 3), $f_{\mathfrak{z}}^*$ un prolongement de la fonction $f_{\mathfrak{z}}$ sur l'espace $\mathfrak{X}$ tout entier. Il vient $|f_{\mathfrak{z}}^*-f_{\mathfrak{y}}^*|\geqslant|f_{\mathfrak{z}}-f_{\mathfrak{y}}|=1$ pour $\mathfrak{z}\neq\mathfrak{y}$. La famille des fonctions $f_{\mathfrak{z}}$, où $\mathfrak{z}\in\mathcal{C}$, étant indénombrable, l'espace $\mathcal{J}^{\mathfrak{X}}$ est non séparable.

2) La séparabilité de l'espace $\mathcal{J}^{\mathcal{J}}$ est une conséquence directe du *théorème de Weierstrass*, d'après lequel chaque fonction continue est la limite d'une suite uniformément convergente de polynômes à coefficients rationnels. Exprimé en d'autres termes, ce théorème signifie que l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dense dans l'espace $\mathcal{J}^{\mathcal{J}}$.

[1]) Voir K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Math. **17** (1931), p. 165.

XIII. Prolongement des ensembles relativement fermés ou ouverts. Soit E un sous-ensemble (non vide) fixe de l'espace métrique 1. Faisons correspondre à tout $X\subset E$ l'ensemble

$$(1)\qquad F(X)=\underset{x}{E}[\varrho(x,X)\leqslant\varrho(x,E-X)].$$

En convenant que $\varrho(x,0)=\infty$, il vient

$$(2)\qquad F(0)=0,\qquad\qquad (3)\qquad F(E)=1.$$

On a les relations suivantes:

$$(4)\qquad X\subset F(X),\qquad\qquad (5)\qquad \overline{F(X)}=F(X),$$

$$(6)\qquad F(X+Y)=F(X)+F(Y),$$

(7) *si* $X_1+\ldots+X_n=E$, *on a* $F(X_1)+\ldots+F(X_n)=1$,

$$(8)\qquad E\cdot F(X)=E\cdot\overline{X},$$

(9) *si X est fermé dans E, on a $E\cdot F(X)=X$.*

L'inclusion (4) résulte du fait que, pour $x\in X$, on a $\varrho(x,X)=0$. L'égalité (5) est une conséquence de la continuité de la fonction $\varrho(x,A)$ (cf. IV (5)). Passons à la démonstration de (6).

En posant $x\in F(X)$, on a d'après (1) et IV (6):

$$\varrho(x,X+Y)\leqslant\varrho(x,X)\leqslant\varrho(x,E-X)\leqslant\varrho[x,E-(X+Y)],$$

d'où $x\in F(X+Y)$. Donc $F(X)\subset F(X+Y)$.

Admettons, d'autre part, que $x\in F(X+Y)$, c. à d. que

$$(10)\qquad \varrho(x,X+Y)\leqslant\varrho[x,E-(X+Y)].$$

Conformément à IV (7), $\varrho(x,X+Y)$ est égal soit à $\varrho(x,X)$, soit à $\varrho(x,Y)$. Admettons que

$$(11)\qquad \varrho(x,X+Y)=\varrho(x,X).$$

Nous allons démontrer que $x\in F(X)$, c. à d. que

$$\varrho(x,X)\leqslant\varrho(x,E-X),$$

ce qui achevera la démonstration de la formule (6).

D'après (10), (11) et IV (6):

$$\varrho(x,X)\leqslant\varrho[x,E-(X+Y)]\quad\text{et}\quad\varrho(x,X)=\varrho(x,X+Y)\leqslant\varrho(x,Y),$$

d'où selon IV (7):

$$\varrho(x,X)\leqslant\varrho[x,E-(X+Y)+Y]\leqslant\varrho(x,E-X),$$

puisque $E-(X+Y)+Y=E-X+Y\supset E-X$.

La formule (6) se trouve ainsi établie. (7) résulte de (6) et (3). Passons à la démonstration de (8).

D'après (4) et (5) on a $\overline{X} \subset F(X)$. Il reste à démontrer que $E \cdot F(X) \subset \overline{X}$.

Supposons par contre que $x \in [E \cdot F(X) - \overline{X}]$. D'après (1) et IV (3), on a donc $0 < \varrho(x, X) \leqslant \varrho(x, E - X)$, d'où x *non*-ϵ $E - X$, et comme $x \in E$, il vient $x \in X$, ce qui présente la contradiction demandée.

La condition (9) résulte de (8). Car X étant supposé fermé dans E, on a $X = E \cdot \overline{X}$.

A côté de l'ensemble fermé $F(X)$, envisageons l'ensemble *ouvert* $G(X)$ suivant

(12) $$G(X) = \underset{x}{E}[\varrho(x, X) < \varrho(x, E - X)].$$

On constate aussitôt que

(13) $$G(X) = 1 - F(E - X).$$

Rapprochées de l'égalité (13), les relations (2)—(9) impliquent les suivantes:

(14) $G(E) = 1$, (15) $G(0) = 0$,

(16) $$G(XY) = G(X) \cdot G(Y),$$

(17) *si* $X_1 \cdot \ldots \cdot X_n = 0$, *on a* $G(X_1) \cdot \ldots \cdot G(X_n) = 0$,

(18) $$E \cdot G(X) = E - \overline{E - X},$$

(19) *si* X *est ouvert dans* E, *on a* $E \cdot G(X) = X$.

Les propriétés des fonctions $F(X)$ et $G(X)$ étant établies, on en déduit directement les deux théorèmes suivants sur le „prolongement" des ensembles relativement fermés ou ouverts:

1. *Etant donnée une famille d'ensembles* $\{X_\iota\}$ *fermés dans* E, *il existe une famille d'ensembles* $\{F_\iota\}$ *fermés (dans* 1*) tels que* $E \cdot F_\iota = X_\iota$ *et que*

(20) *la condition* $X_{\iota_1} + \ldots + X_{\iota_n} = E$ *entraîne* $F_{\iota_1} + \ldots + F_{\iota_n} = 1$,

quel que soit le système (fini) d'indices $\iota_1, \ldots, \iota_n$.

2. *Etant donnée une famille d'ensembles* $\{X_\iota\}$ *ouverts dans* E, *il existe une famille d'ensembles* $\{G_\iota\}$ *ouverts (dans* 1*) tels que* $E \cdot G_\iota = X_\iota$ *et que*

(21) *la condition* $X_{\iota_1} \cdot \ldots \cdot X_{\iota_n} = 0$ *entraîne* $G_{\iota_1} \cdot \ldots \cdot G_{\iota_n} = 0$,

quel que soit le système d'indices $\iota_1, \ldots, \iota_n$.

Il suffit, en effet, de poser $F_\iota = F(X_\iota)$ et $G_\iota = G(X_\iota)$.

§ 16. Axiome IV (de séparation).

I. Axiome IV [1]. *A et B étant deux ensembles fermés et disjoints, il existe un ensemble ouvert G tel que* $A \subset G$ *et* $\overline{G} \cdot B = 0$.

L'espace considéré dans le § 16 est assujetti aux axiomes I—IV.

Remarques. L'axiome IV est appelé aussi de *„normalité"*.

On appelle *parfaitement normal* tout espace topologique où, outre l'axiome IV, l'axiome suivant est vérifié: *chaque ensemble fermé est un* G_δ (cf. § 15, IV). Comme on verra (§ 16, IV, 1), les espaces parfaitement normaux présentent une généralisation des espaces métriques.

On prouve [2] qu'un grand nombre de propriétés importantes d'espaces métriques appartient aux espaces parfaitement normaux.

II. Systèmes semblables au sens combinatoire. Deux systèmes finis d'ensembles $A_1, \ldots, A_n$ et $B_1, \ldots, B_n$ sont dits *semblables au sens combinatoire* [3], lorsqu'on a l'équivalence

(1) $$\{A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k} = 0\} \equiv \{B_{i_1} \cdot \ldots \cdot B_{i_k} = 0\},$$

quel que soit le système d'indices ($\leqslant n$).

La même dénomination est applicable aussi aux suites infinies satisfaisant à la condition (1) pour chaque k.

1. *Théorème* [4]. *Etant donné un système fini d'ensembles fermés* $F_1, \ldots, F_n$, *chaque* F_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *est contenu dans un ensemble ouvert* G_i *tel que le système* $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_n$ *est semblable au sens combinatoire au système donné.*

Considérons, en effet, tous les produits de la forme $F_{i_1} \cdot \ldots \cdot F_{i_k}$ où $F_1 \cdot F_{i_1} \cdot \ldots \cdot F_{i_k} = 0$. Soit S leur somme. L'ensemble S étant fermé et disjoint de F_1, il existe d'après l'ax. IV un ensemble ouvert G_1 tel que $F_1 \subset G_1$ et $\overline{G}_1 \cdot S = 0$. Nous allons prouver que le système $\overline{G}_1, F_2, \ldots, F_n$ est semblable au système $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

---

[1]) Cf. H. Tietze, *Beiträge zur allgemeinen Topologie*, I, Math. Ann. **88** (1923), p. 301.

[2]) Voir E. Čech, *Sur la dimension des espaces parfaitement normaux*, Bull. Acad. Bohème, 1932.

[3]) d'après P. Alexandroff, Annals of Math. **30** (1928), p. 16.

[4]) Cf. W. Hurewicz, Math. Ann. **100** (1928). Ce théorème présente une généralisation de l'ax. IV. Pour une extension au cas d'une suite infinie d'ensembles, voir ma note de Fund. Math. **24** (1935), p. 259.

Considérons à ce but un produit vide dont les facteurs appartiennent au deuxième système; il s'agit de montrer que le produit des facteurs correspondants du premier système est également vide. On peut évidemment se borner au cas où F_1 se trouve parmi ces facteurs. Le produit considéré est alors de la forme $F_1 \cdot F_{i_1} \cdot \ldots \cdot F_{i_k} = 0$. Il en résulte que $F_{i_1} \cdot \ldots \cdot F_{i_k} \subset S$ et comme $\overline{G}_1 \cdot S = 0$, il vient $\overline{G}_1 \cdot F_{i_1} \cdot \ldots \cdot F_{i_k} = 0$.

Ceci établi, procédons par induction. Nous supposons que le système $F_1, \ldots, F_n$ est semblable au système $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_{k-1}, F_k, \ldots, F_n$, où $F_1 \subset G_1, \ldots, F_{k-1} \subset G_{k-1}$. Il existe alors, comme nous venons de prouver, un ensemble ouvert G_k tel que $F_k \subset G_k$ et que le système

$$\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_{k-1}, F_k, F_{k+1}, \ldots, F_n$$

est semblable au système

$$\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_{k-1}, \overline{G}_k, F_{k+1}, \ldots, F_n.$$

Ce dernier est donc semblable à $F_1, \ldots, F_n$, puisque la propriété d'être semblable est transitive.

Le théorème est ainsi démontré complètement.

2. *Corollaire. Etant donné un système d'ensembles ouverts $G_1, \ldots, G_n$ tel que $1 = G_1 + \ldots + G_n$, il existe un système d'ensembles ouverts $H_1, \ldots, H_n$ tel que $1 = H_1 + \ldots + H_n$ et $\overline{H}_i \subset G_i$.*

En appliquant le théorème précédent aux ensembles $F_i = 1 - G_i$, on en déduit l'existence d'ensembles ouverts V_i tels que $F_i \subset V_i$ et que $\overline{V}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{V}_n = 0$. Posons $H_i = 1 - \overline{V}_i$. Il vient

$$\overline{H}_i = \overline{1 - \overline{V}_i} \subset \overline{1 - V_i} = 1 - V_i \subset 1 - F_i = G_i$$

et

$$H_1 + \ldots + H_n = 1 - (\overline{V}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{V}_n) = 1.$$

Dans les espaces métriques, l'énoncé précédent se laisse étendre aux familles de puissance arbitraire d'ensembles ouverts:

3. *Etant donnée dans un espace métrique une famille d'ensembles ouverts $\{G_\iota\}$ telle que*

$$(1) \qquad 1 = \sum_\iota G_\iota,$$

il existe une famille d'ensembles fermés $\{F_\iota\}$ telle que

$$(2) \qquad 1 = \sum_\iota F_\iota \quad \text{et} \quad F_\iota \subset G_\iota.$$

On peut supposer de plus que F_ι soit de la forme $F_\iota = \overline{H}_\iota$ où H_ι est ouvert et où $1 = \sum_\iota H_\iota$.

Tout espace métrique étant homéomorphe à un espace borné (d'après N° V), on peut admettre que l'espace 1 est borné.

Il est aussi légitime d'admettre que l'on a $G_\iota \neq 1$ pour chaque ι; car si l'on avait $G_{\iota_0} = 1$, il suffirait de poser $F_{\iota_0} = 1$ et $F_\iota = 0$ pour $\iota \neq \iota_0$.

Posons $C_\iota = 1 - G_\iota$. On a donc $C_\iota \neq 0$ quel que soit ι. Posons pour chaque point x de l'espace:

$$(3) \qquad \sigma(x) = \sup_\iota \varrho(x, C_\iota)$$

et

$$(4) \qquad F_\iota = \mathop{E}_x [\varrho(x, C_\iota) \geqslant \tfrac{1}{2}\sigma(x)].$$

On a $\overline{F}_\iota = F_\iota$. En effet, l'équivalence évidente

$$[\varrho(x, C_\iota) \geqslant \tfrac{1}{2}\sigma(x)] \equiv [\varrho(x, C_\iota) \geqslant \tfrac{1}{2}\varrho(x, C_\varkappa) \text{ quel que soit } \varkappa]$$

donne

$$F_\iota = \prod_\varkappa \mathop{E}_x [\varrho(x, C_\iota) \geqslant \tfrac{1}{2}\varrho(x, C_\varkappa)].$$

En tant que produit d'ensembles fermés (en vertu de la continuité de la fonction $\varrho(x, A)$, cf. § 15, IV (5)), l'ensemble F_ι est fermé.

Par définition de limite supérieure, à chaque x correspond un indice ι_0 tel que

$$\varrho(x, C_{\iota_0}) \geqslant \tfrac{1}{2} \sup_\iota \varrho(x, C_\iota).$$

Il vient $x \in F_{\iota_0}$ d'après (3) et (4), d'où l'égalité (2).

L'égalité (1) implique qu'à chaque x correspond un ι_0 tel que $x \in G_{\iota_0}$, donc (l'ensemble G_{ι_0} étant ouvert) que $\varrho(x, C_{\iota_0}) > 0$. Par conséquent $\sigma(x) > 0$. Donc, en supposant que $x \in F_\iota$, il vient d'après (4):

$$\varrho(x, C_\iota) > 0,$$

d'où $x \in G_\iota$ et par suite $F_\iota \subset G_\iota$.

Enfin, pour démontrer la deuxième partie du théorème, désignons — conformément à l'axiome IV — par H_ι un ensemble ouvert tel que

$$F_\iota \subset H_\iota \quad \text{et} \quad \overline{H}_\iota \cdot C_\iota = 0;$$

d'où

$$1 = \sum_\iota H_\iota \quad \text{et} \quad \overline{H}_\iota \subset G_\iota.$$

III. Transformation de l'espace en ensemble linéaire. L'énoncé suivant servira de lemme pour établir un théorème fondamental du § 17. Pour les espaces métriques cet énoncé a été démontré du au § 15 (th. 1 du N⁰ XI).

A et B étant deux ensembles fermés et disjoints, il existe une fonction f continue, définie sur l'espace $\mathcal{X}$ tout entier et telle que

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad f(x) = 0 \ \ \textit{pour} \ \ x \in A, \quad f(x) = 1 \ \ \textit{pour} \ \ x \in B\,^{1)}.$$

Au préalable, faisons correspondre à chaque fraction de la forme $r = k/2_n$ $(k = 0, 1, \dots, 2^n)$ un ensemble ouvert $G(r)$ de façon que

1⁰ $A \subset G(0)$, $\mathcal{X} - B = G(1)$,

2⁰ *la condition* $r < r'$ *entraîne* $\overline{G(r)} \subset G(r')$.

Nous procédons par induction suivant l'exposant n. En identifiant $G(0)$ avec l'ensemble G de l'ax. IV, les conditions 1⁰ et 2⁰ se trouvent réalisées pour $n = 0$. Supposons qu'elles le soient encore pour $n-1$; il s'agit de définir $G(k/2^n)$ pour k impair. Par hypothèse

$$\overline{G[(k-1)/2^n]} \subset G[(k+1)/2^n].$$

Il existe donc, d'après l'ax. IV, un ensemble ouvert, que nous désignons par $G(k/2^n)$, tel que

$$\overline{G[(k-1)/2^n]} \subset G(k/2^n) \quad \text{et} \quad \overline{G(k/2^n)} \subset G[(k+1)/2^n].$$

La fonction $G(r)$ est ainsi définie pour chaque r.

Posons $f(x) = 0$ pour $x \in G(0)$ et $f(x) =$ borne supérieure des r tels que $x \in \mathcal{X} - G(r)$ pour x non-$\in G(0)$. D'après 1⁰ on a $f(x) = 0$ pour $x \in A$ et $f(x) = 1$ pour $x \in B$.

Il reste à prouver que la fonction f est continue, c. à d. (§ 13, II (3)) qu'à chaque point x_0 et à chaque nombre naturel n vient correspondre un ensemble ouvert H contenant x_0 et tel que la condition $x \in H$ entraîne $|f(x_0) - f(x)| < 1/2^n$.

Soit r une fraction (diadique finie) telle que

$$f(x_0) < r < f(x_0) + 1/2^{n+1}.$$

[1]) P. Urysohn, *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Math. Ann. **94** (1925), p. 290.

Posons $H = G(r) - \overline{G(r - 1/2^n)}$, en convenant que $G(s) = 0$ pour $s < 0$ et $G(s) = \mathcal{X}$ pour $s > 1$. Or on a d'abord $x_0 \in H$. Car l'inégalité $f(x_0) < r$ implique $x_0 \in G(r)$, tandis que l'inégalité $r - 1/2^{n+1} < f(x_0)$ implique

$$x_0 \in \mathcal{X} - G(r - 1/2^{n+1}) \subset \mathcal{X} - \overline{G(r - 1/2^n)}.$$

En outre, l'hypothèse $x \in H$ entraîne $x \in G(r)$, d'où $f(x) \leqslant r$; comme elle entraîne aussi

$$x \in \mathcal{X} - \overline{G(r - 1/2^n)} \subset \mathcal{X} - G(r - 1/2^n),$$

il vient $r - 1/2^n \leqslant f(x)$. Donc

$$f(x_0) - 1/2^n < f(x) < f(x_0) + 1/2^n.$$

Remarques. 1) Le théorème précédent *caractérise* les espaces normaux.

Pour s'en convaincre, on n'a qu'à substituer dans l'ax. IV:

$$G = \underset{x}{E}\,(0 \leqslant f(x) < 1/2).$$

2) Dans les espaces *parfaitement normaux* (en particulier, dans les espaces métriques, cf. N⁰ I et § 15, XI, 1), la fonction f peut être assujettie aux conditions supplémentaires suivantes:

$$A = f^{-1}(0) \quad \text{et} \quad B = f^{-1}(1).$$

Le théorème ainsi modifié *caractérise* les espaces parfaitement normaux[1]).

IV. Rapports à l'espace métrique. Le th. 1 du § 15, XI, rapproché de la remarque 1 du N⁰ III, implique que

1. *Tout espace métrique satisfait à l'axiome* IV.

On a d'ailleurs la proposition plus générale suivante[2]):

2. *A et B étant deux ensembles fermés situés dans un espace métrique, il existe deux ensembles fermés A^* et B^* tels que*

$$A^* + B^* = 1, \quad A^*(A+B) = A \quad \textit{et} \quad B^*(A+B) = B.$$

C'est une conséquence directe du th. 1 du § 15, XIII, en posant

$$X_0 = A, \quad X_1 = B \quad \text{et} \quad E = A + B.$$

[1]) Voir N. Vedenissoff, *Sur les fonctions continues dans les espaces topologiques*, Fund. Math. **27** (1936), p. 234.

[2]) Cf. L. Vietoris, Fund. Math. **19** (1932), p. 271.

V. Ensembles séparés. Deux ensembles X et Y sont dits *séparés*[1]) lorsque $\bar X\cdot Y=0=X\cdot\bar Y$.

On a les propositions suivantes:

1. *X et Y étant deux ensembles séparés, 1° l'ensemble $\bar X\cdot\bar Y$ est non-dense, 2° les conditions $V\subset X$ et $W\subset Y$ impliquent que V et W sont séparés.*

2. *A et B étant deux ensembles fermés (ou deux ensembles ouverts), les ensembles $A-B$ et $B-A$ sont séparés.*

3. *Deux ensembles disjoints qui sont tous les deux fermés ou bien tous les deux ouverts sont séparés.*

4. *X étant séparé de Y et de Z, X est séparé de $Y+Z$.*

5. *Pour que X et Y soient des ensembles séparés, il faut et il suffit qu'ils soient disjoints et fermés dans leur somme.*

6[2]). *A et B étant deux ensembles séparés, situés dans un espace métrique, il existe un ensemble ouvert G tel que $A\subset G$ et $\bar G\cdot B=0$.*

On peut supposer, de plus, que G soit situé dans une sphère généralisée de centre A et de rayon aussi petit que l'on veut.

D'une façon plus générale:

7. *A et B étant deux sous-ensembles d'un espace métrique vérifiant la condition $A\cdot\bar B=0$, il existe un ensemble ouvert G tel que $A\subset G$ et $\bar G\cdot B\subset\bar A$.*

8. *Le th. 2 du § 15, XIII, reste vrai en remplaçant la condition* (21) *par la suivante:*

$$\textit{l'égalité } X_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot X_{\iota_n}=0 \textit{ entraîne } \bar G_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot\bar G_{\iota_n}=\bar X_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot\bar X_{\iota_n}.$$

En particulier[3]):

9. *$A_1,\ldots,A_n$ étant un système d'ensembles séparés deux à deux il existe un système d'ensembles ouverts $G_1,\ldots,G_n$ tels que:*

$$A_i\subset G_i \quad \textit{et} \quad \bar A_i\cdot\bar A_j=\bar G_i\cdot\bar G_j \quad \textit{pour } i\neq j.$$

---

[1]) d'après S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **1** (1920), p. 66. Cf. dans le même ordre d'idées l'ouvrage de M. Knaster et de moi-même, Fund. Math. **2** (1921), p. 206, où l'opérateur $X\cdot\bar Y+\bar X\cdot Y$, nommé *jonction* de X et Y, est étudié.

[2]) H. Tietze, Math. Ann. **88** (1923), p. 301; P. Alexandroff et P. Urysohn, Math. Ann. **92** (1924), pp. 258—266; P. Urysohn, Math. Ann. **94** (1925), pp. 262—295.

[3]) Cf. K. Menger, Ergebnisse Math. Koll. **1** (Wien 1931), p. 16.

Démonstrations: ad 1. On a

$$\bar X\cdot\bar Y=\bar X\cdot\bar Y\cdot Y+\bar X\cdot\bar Y-Y=\bar X\cdot\bar Y-Y\subset\bar Y-Y$$

et l'ensemble $\bar Y-Y$ est un ensemble frontière (§ 8, IV). On a, en outre, l'inclusion $\bar V\cdot W\subset\bar X\cdot Y=0$.

ad 2. $\overline{A-B}\subset\bar A=A$, d'où $\overline{A-B}\cdot(B-A)=0$.

Le cas d'ensembles ouverts se ramène à celui d'ensembles fermés en vertu de l'identité $A-B=(1-B)-(1-A)$.

ad 3. C'est un cas particulier de la proposition 2 puisque, dans ce cas, $A-B=A$ et $B-A=B$.

ad 4. $\bar X\cdot(Y+Z)=\bar X\cdot Y+\bar X\cdot Z=0$ et $X\cdot\overline{Y+Z}=X\cdot\bar Y+X\cdot\bar Z=0$.

ad 5. Si X et Y sont séparés, ils sont à plus forte raison disjoints; en outre, $X=X+\bar X\cdot Y=\bar X\cdot(X+Y)$, ce qui prouve que X est fermé dans $X+Y$. D'autre part, les conditions $XY=0$ et $\bar X\cdot(X+Y)=X$ entraînent $\bar X\cdot Y\subset XY=0$.

ad 6. C'est un cas particulier du th. 2 du § 15, XIII, en posant

$$X_0=A,\quad X_1=B \quad \text{et} \quad E=A+B.$$

ad 7. Les ensembles A et $B-\bar A$ sont séparés, car

$$A\cdot\overline{B-\bar A}\subset A\bar B=0=\bar A\cdot(B-\bar A).$$

Il existe donc d'après 6 un G ouvert tel que

$$A\subset G \text{ et } \bar G\cdot(B-\bar A)=0, \text{ c. à d. que } \bar G\cdot B\subset\bar A.$$

ad 8. D'après le th. 2, § 15, XIII, il existe une famille d'ensembles ouverts H_ι telle que $EH_\iota=X_\iota$ et que l'égalité $X_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot X_{\iota_n}=0$ entraîne $H_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot H_{\iota_n}=0$. En substituant dans 7: $A=X_\iota$ et $B=1-H_\iota$, on en conclut qu'il existe un G_ι ouvert tel que

$$X_\iota\subset G_\iota \quad\text{et}\quad \bar G_\iota\cdot(1-H_\iota)\subset\bar X_\iota, \quad\text{c. à d. que}\quad \bar G_\iota\subset H_\iota+\bar X_\iota.$$

Admettons que $X_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot X_{\iota_n}=0$. Il vient

$$\bar X_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot\bar X_{\iota_n}\subset\bar G_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot\bar G_{\iota_n}\subset(H_{\iota_1}+\bar X_{\iota_1})\cdot\ldots\cdot(H_{\iota_n}+\bar X_{\iota_n}).$$

Il reste à prouver que le membre droit de cette double inclusion est contenu dans le membre gauche. Or, d'une part $H_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot H_{\iota_n}=0$ et d'autre part, tout produit de n termes parmi les groupes

$$H_{\iota_1},\ldots,H_{\iota_n} \quad\text{et}\quad \bar X_{\iota_1},\ldots,\bar X_{\iota_n},$$

dont au moins un facteur appartient au deuxième groupe, est contenu dans $\bar{X}_{\iota_1}\cdot\ldots\cdot\bar{X}_{\iota_n}$; en effet, l'égalité $EH_\iota = X_\iota$ implique (cf. § 5, III)

$$\bar{E}\cdot H_\iota\subset\overline{E\cdot H_\iota}=\bar{X}_\iota,\ \text{donc}\ H_\iota\cdot X_\varkappa\subset\bar{X}_\iota\cdot\bar{X}_\varkappa.$$

Remarques. Un espace (assujetti aux axiomes I—III) est dit *héréditairement normal*[1]) lorsque chaque sous-ensemble (considéré comme l'espace) satisfait à l'axiome IV.

Tout espace héréditairement normal satisfait au th. 6 (première partie).

Soient, en effet, A et B deux ensembles séparés. Posons $E=1-\bar{A}\cdot\bar{B}$. Les ensembles $\bar{A}-\bar{B}$ et $\bar{B}-\bar{A}$ sont donc disjoints et fermés dans E. L'espace étant supposé héréditairement normal, il existe un ensemble G ouvert dans E et tel que

$$\bar{A}-\bar{B}\subset G,\quad \bar{G}E(\bar{B}-\bar{A})=0.$$

Or, G étant ouvert dans E et E étant ouvert (dans l'espace), G est ouvert. Comme $A\bar{B}=0$, il vient $A\subset\bar{A}-\bar{B}\subset G$. Enfin, comme $B\bar{A}=0$, on a $\bar{G}B\subset\bar{G}\cdot\bar{B}-\bar{A}=\bar{G}E\bar{B}-\bar{A}=0$.

Ajoutons que l'on peut démontrer que tout espace héréditairement normal satisfait aux th. 7 et 9[2]).

VI. Séparation d'ensembles. On dit que *l'ensemble C sépare les ensembles A et B* lorsque le complémentaire de C se décompose en deux ensembles séparés dont l'un contient A et l'autre B.

Ainsi par ex. *la frontière d'un ensemble ouvert G sépare chaque couple de points dont l'un est situé dans G et l'autre à l'extérieur de G*, c. à d. dans $1-\bar{G}$. Car $1-\mathrm{Fr}(G)=G+(1-\bar{G})$.

D'après l'axiome de séparation, *chaque couple d'ensembles fermés et disjoints A et B peut être séparé par un ensemble fermé.* Car il existe un ensemble ouvert G tel que $A\subset G$ et $\bar{G}\cdot B=0$, d'où $B\subset 1-\bar{G}$. La frontière de G sépare donc A et B.

Dans un espace métrique, en raison de V, 6, *chaque couple d'ensembles séparés peut être séparé par un ensemble fermé.*

---

[1]) ou *complètement normal*, cf. par exemple Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, p. 69.

[2]) Voir *Topologie I*, première édition, p. 100.

§ 17. Axiome V (de la base).

I. Axiome V[1]). *Il existe une suite $R_1, R_2, \ldots$ d'ensembles ouverts (non vides) tels que chaque ensemble ouvert (non vide) est somme de certains termes de cette suite.*

Une suite de ce genre est dite *base de l'espace.*

Conformément à l'axiome V, *si p est un point d'un ensemble ouvert G, il existe un indice n tel que $p\in R_n\subset G$.* En tenant compte de l'axiome IV, cette formule peut être remplacée par

$$(1)\qquad p\in R_n,\quad \bar{R}_n\subset G.$$

En effet, d'après l'axiome IV (en y posant $A=p$ et $B=1-G$), il existe un ensemble ouvert H tel que $p\in H$ et $\bar{H}\subset G$; il existe donc selon l'axiome V un n tel que $p\in R_n\subset H$, d'où $\bar{R}_n\subset\bar{H}\subset G$.

Une conséquence immédiate de l'axiome V est le suivant

Théorème de M. Lindelöf[2]). *Toute famille (indénombrable) d'ensembles ouverts $\{G_\iota\}$ contient une suite (dénombrable) $G_{\iota_1}, G_{\iota_2}, \ldots$ telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_{\iota_n}=\sum_\iota G_\iota.$$

Soit, en effet, $R_{k_1}, R_{k_2}, \ldots$ la suite de tous les ensembles contenus dans des ensembles de la famille $\{G_\iota\}$. A chaque indice k_n vient correspondre (en vertu de l'axiome du choix) un indice ι_n tel que $R_{k_n}\subset G_{\iota_n}$. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_{k_n}\subset\sum_{n=1}^{\infty} G_{\iota_n}\subset\sum_\iota G_\iota.$$

D'autre part, si $p\in G_\iota$, il existe un indice j tel que $p\in R_j\subset G_\iota$. L'indice j appartenant à la suite $k_1, k_2, \ldots$, il vient

$$p\in\sum_{n=1}^{\infty} R_{k_n}\quad \text{d'où}\quad \sum_\iota G_\iota\subset\sum_{n=1}^{\infty} R_{k_n},\quad \text{c. q. f. d.}$$

---

[1]) Voir F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 263 („das zweite Abzählbarkeitsaxiom").

[2]) C. R. Paris, t. **137** (1903), p. 697. Cf. aussi W. H. Young, Proc. London Math. Soc. (1) **35** (1903), p. 384.

Remarques. 1. Le th. de Lindelöf se laisse formuler de la façon équivalente suivante: *toute famille (indénombrable) d'ensembles fermés $\{F_\iota\}$ contient une suite (dénombrable) $F_{\iota_1}, F_{\iota_2}, \dots$ telle que*

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_{\iota_n} = \prod_{\iota} F_\iota.$$

Pour s'en convaincre, il suffit de désigner par G_ι le complémentaire de F_ι et d'appliquer la règle de de Morgan (§ 1, V) au th. de Lindelöf.

Pour les espaces contenant une base, les homéomorphies peuvent être caractérisées parmi les transformations continues par une infinité dénombrable de conditions comme suit:

2. *Pour que la transformation continue f de l'espace 1 en l'espace $f(1)$ soit une homéomorphie, il faut et il suffit que*

$$\bar{R}_k \subset R_l \quad \textit{entraîne} \quad f(R_k)\cdot\overline{f(1-R_l)} = 0.$$

En effet, f étant une homéomorphie, l'inclusion $\bar{R}_k \subset R_l$, en tant qu'équivalente à l'égalité $\bar{R}_k\cdot(1-R_l)=0$, implique que

$$f(\bar{R}_k)\cdot f(1-R_l) = 0, \quad \text{d'où} \quad f(R_k)\cdot\overline{f(1-R_l)} = 0,$$

donc $f(R_k)\cdot\overline{f(1-R_l)} = 0$, puisque l'ensemble $f(R_k)$ est ouvert.

Inversement, si f est continue sans être bicontinue, deux cas peuvent se présenter: ou bien f n'est pas biunivoque, ou bien il existe un G ouvert tel que $f(G)$ n'est pas ouvert. Dans le premier cas, il existe deux points x et x' tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$; il existe donc un l tel que

$$x \in R_l \quad \text{et} \quad x' \in 1-R_l, \quad \text{d'où} \quad f(x) = f(x') \in f(1-R_l).$$

Dans le deuxième cas, il existe un point x tel que $x \in G$ et $f(x) \in \overline{f(1)-f(G)}$; il existe donc un l tel que

$$x \in R_l \subset G, \quad \text{d'où} \quad f(x) \in \overline{f(1)-f(R_l)}.$$

Dans les deux cas, on a donc $f(x) \in \overline{f(1-R_l)}$.

D'autre part, comme $x \in R_l$, il existe d'après (1) un k tel que $x \in R_k$ et $\bar{R}_k \subset R_l$. On a donc $f(x) \in f(R_k)\cdot\overline{f(1-R_l)}$, c. q. f. d.

3. Le théorème suivant nous apprend qu'en introduisant l'ax. V on peut en même temps remplacer l'ax. IV par l'axiome de „*régularité*" (§ 12, IX), qui est moins restrictif.

Théorème de M. Tychonoff[1]). *Si un espace régulier satisfait aux axiomes I, II, III et V, il satisfait aussi à l'axiome IV.*

Soient, en effet, A et B deux ensembles fermés disjoints. En vertu de l'ax. de régularité (et de l'ax. du choix), à chaque point a de A correspond un ensemble ouvert G_a tel que $a \in G_a$ et $\bar{G}_a\cdot B = 0$. Par conséquent $A \subset \sum_{a\in A} G_a$ et d'après le théorème de M. Lindelöf on peut poser $A \subset G_{a_1} + G_{a_2} + \dots$

D'une façon analogue, il existe une suite d'ensembles ouverts $\{H_{b_n}\}$ tels que $B \subset H_{b_1} + H_{b_2} + \dots$ et $A\cdot\bar{H}_{b_n} = 0$.

Posons $U_1 = G_{a_1}$, $V_1 = H_{b_1} - \bar{U}_1$ et de façon générale:

$$U_n = G_{a_n} - (\bar{V}_1 + \dots + \bar{V}_{n-1}), \quad V_n = H_{b_n} - (\bar{U}_1 + \dots + \bar{U}_n).$$

Les ensembles ouverts $G = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ et $H = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ contiennent A et B. En effet, comme $A \subset \sum_{n=1}^{\infty} G_{a_n}$ et $A\cdot\bar{V}_n \subset A\cdot\bar{H}_{b_n} = 0$, il vient $A \subset G$. De façon analogue $B \subset H$. Reste à démontrer que $GH = 0$, c. à d. que $U_n\cdot V_m = 0$. Or, si $m \leqslant n-1$, on a (d'après la définition de U_n) l'égalité $U_n\cdot\bar{V}_m = 0$; si, au contraire, $n \leqslant m$, il vient $\bar{U}_n\cdot V_m = 0$. Donc en tout cas $U_n\cdot V_m = 0$.

II. Rapports aux espaces métriques séparables. *Tout espace métrique séparable satisfait à l'axiome V.* De plus, *ε étant un nombre positif donné, on peut supposer que $\delta(R_n) < \varepsilon$.*

En effet, d'après la définition de l'espace séparable, il existe un ensemble dénombrable S dense dans l'espace. Soit $R_1, R_2, \dots$ la suite de toutes les sphères ouvertes ayant pour centre un point arbitraire de S et pour rayon un nombre rationnel arbitraire (que l'on peut, d'ailleurs, supposer inférieur à $\varepsilon/2$).

Soit G un ensemble ouvert et $p \in G$. Il existe un $\eta > 0$ tel que

(i) $$|x-p| < \eta \quad \text{entraîne} \quad x \in G.$$

L'ensemble S étant dense, il existe un point $s \in S$ et un nombre rationnel ϱ tels que

(ii) $$|s-p| < \varrho < \eta/2.$$

[1]) *Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn.* Math. Ann. **95** (1925), pp. 139—142.

R_n étant la sphère ouverte de centre s et de rayon ϱ, on a d'après (ii): $p \in R_n$. En outre, si $x \in R_n$, on a $|x-s| < \varrho$, donc selon (ii): $|x-p| \leqslant |x-s| + |s-p| < \eta$, ce qui implique en raison de (i) que $x \in G$. Ainsi $R_n \subset G$, c. q. f. d.

Remarques. 1) En particulier, dans un espace cartésien, les sphères dont le rayon et les coordonnées du centre sont rationnels constituent une base.

2) *Tout espace satisfaisant à l'ax. V est séparable.* Car, en choisissant un point dans chaque R_n, on obtient un ensemble dense dans l'espace.

3) Selon § 15, II, § 16, IV et § 17, II, *chaque espace métrique séparable satisfait aux axiomes I—V*. Nous allons voir qu'au point de vue topologique il y a *équivalence* entre espace métrique séparable et espace satisfaisant aux ax. I—V. Nous montrerons en effet que ce dernier est toujours *métrisable*.

4) *Dans chaque espace métrique séparable, il existe une suite d'ensembles fermés-ouverts tels que chaque ensemble fermé-ouvert est limite* (dans le sens de § 13, VI, 8) *d'une suite de certains termes de cette suite* [1]).

Cela résulte aussitôt du théorème suivant, appartenant à la Théorie des Ensembles:

Soit $G_1, G_2, \ldots$ une suite de sous-ensembles d'un ensemble fixe 1. *Soit $\boldsymbol{A}$ la famille de tous les ensembles X tels que X, de même que X', est somme de certains termes de cette suite. Il existe alors une suite d'ensembles $A_1, A_2, \ldots$ appartenant à $\boldsymbol{A}$ telle que chaque $A \in \boldsymbol{A}$ est de la forme*

$$A = \operatorname*{Limes}_{k=\infty} A_{i_k}.$$

Pour s'en convaincre, envisageons tous les systèmes composés d'un nombre pair d'entiers positifs $(m_0, \ldots, m_k, n_0, \ldots, n_k)$ pour lesquels il existe un $X \in \boldsymbol{A}$ tel que

$$(1) \qquad G_{m_0} + \ldots + G_{m_k} \subset X \quad \text{et} \quad G_{n_0} + \ldots + G_{n_k} \subset X'.$$

Rangeons tous les systèmes de ce genre en une suite infinie $s_1, s_2, \ldots$

[1]) Voir W. Sierpiński, *Sur une propriété des espaces métriques séparables* Fund. Math. **30** (1938), p. 129.
Dans un ordre d'idées analogue cf. J. de Groot, *A note on 0-dimensional spaces*, Indagationes Math. **9** (1947), p. 94.

$(m_0^i, \ldots, m_{k_i}^i, n_0^i, \ldots, n_{k_i}^i)$ étant le i-ème terme de la suite $\{s_i\}$, nous désignons par A_i un ensemble $X \in \boldsymbol{A}$ satisfaisant à (1) (en ajoutant l'indice i), d'ailleurs arbitraire.

Soit $A \in \boldsymbol{A}$. Il existe par hypothèse deux suites d'entiers $m_0, m_1, \ldots$ et $n_0, n_1, \ldots$ telles que

$$A = G_{m_0} + G_{m_1} + \ldots \quad \text{et} \quad A' = G_{n_0} + G_{n_1} + \ldots$$

Posons $s_{i_k} = (m_0, \ldots, m_k, n_0, \ldots, n_k)$. L'ensemble A satisfaisant à (1) pour chaque k, il vient

$$G_{m_0} + \ldots + G_{m_k} \subset A_{i_k} \quad \text{et} \quad G_{n_0} + \ldots + G_{n_k} \subset A'_{i_k},$$

d'où

$$G_{m_0} + \ldots + G_{m_k} \subset \prod_{j=0}^{\infty} A_{i_{k+j}} \quad \text{et} \quad G_{n_0} + \ldots + G_{n_k} \subset \prod_{j=0}^{\infty} A'_{i_{k+j}},$$

donc

$$A \subset \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{\infty} A_{i_{k+j}} \quad \text{et} \quad A' \subset \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{\infty} A'_{i_{k+j}},$$

et finalement

$$A \subset \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{\infty} A_{i_{k+j}} \subset \prod_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{i_{k+j}} \subset A, \quad \text{c. à d.} \quad A = \operatorname*{Limes}_{k=\infty} A_{i_k}.$$

III. Conséquences de l'axiome V.

1. *Chaque sous-ensemble d'un espace satisfaisant à l'ax. V satisfait également à cet axiome.* En effet, $XR_1, XR_2, \ldots$ est une base relative à l'ensemble X, puisque chaque ensemble ouvert dans X est de la forme XG, où G est ouvert (dans l'espace entier).

2. *Chaque espace satisfaisant aux ax. I—V est un espace de Hausdorff, donc un espace $\mathcal{L}^*$.* Plus précisément, si le terme „entourage ouvert du point p (au sens de Hausdorff)" signifie „ensemble ouvert contenant p" et si l'égalité $p = \lim p_n$ veut dire que chaque entourage ouvert de p contient tous les p_n à partir d'un indice suffisamment grand, alors les axiomes A — E de Hausdorff (§ 7, III), ainsi que les axiomes 1^0—3^0, qui définissent l'espace $\mathcal{L}^*$ (§ 14, I), se trouvent vérifiés.

En effet, les ax. I—III entraînent les ax. A — C (§ 7, III), l'ax. IV entraîne D (en posant dans l'ax. IV: $A = p$, $B = q$, $G = U$ et $1 - G = V$) et l'ax. V entraîne évidemment E. Enfin, chaque espace de Hausdorff est un espace $\mathcal{L}^*$ (§ 14, VII).

Ainsi, tous les théorèmes concernant l'espace $\mathcal{L}^*$ s'appliquent à l'espace satisfaisant aux axiomes I—V. C'est, comme nous verrons, un cas particulier du théorème général qui va suivre.

IV. Métrisation de l'espace et introduction des coordonnées.

Théorème d'Urysohn[1]. *Tout espace $\mathcal{X}$ satisfaisant aux axiomes I—V est homéomorphe à un espace métrique séparable.*

Plus précisément: *$\mathcal{X}$ est topologiquement contenu dans le cube fondamental $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ de Hilbert:*

$$\mathcal{X} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{J}^{\aleph_0}.$$

Autrement dit[2], il existe une suite de fonctions $f^1(x), f^2(x), \dots$ (les „coordonnées" du point x), définies sur l'espace $\mathcal{X}$, ayant leurs valeurs situées dans l'intervalle 01 et telles qu'en définissant la distance entre les suites (de nombres réels) $y=[y^{(1)}, y^{(2)}, \dots]$ et $z=[z^{(1)}, z^{(2)}, \dots]$ par la formule

$$\text{(i)} \qquad |y-z| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot |y^{(n)} - z^{(n)}|,$$

la fonction $f(x)=[f^1(x), f^2(x), \dots]$ est bicontinue.

Extrayons en effet de la suite $R_1, R_2, \dots$ (qui forme la base de l'espace) tous les couples (R_{k_n}, R_{m_n}) tels que $\overline{R}_{k_n} \subset R_{m_n}$. D'après le théorème § 16, III, il existe une fonction continue $f^n(x)$ telle que

$$\text{(ii)} \quad 0 \leqslant f^n(x) \leqslant 1, \; f^n(x)=0 \text{ pour } x \in \overline{R}_{k_n} \text{ et } f^n(x)=1 \text{ pour } x \text{ non-}\in R_{m_n}.$$

Chacune des fonctions $f^n(x)$ étant continue, il en est de même de la fonction $f(x)=[f^1(x), f^2(x), \dots]$ (§ 14, IV). Pour prouver que la fonction $f(x)$ est bicontinue, il reste à démontrer (voir § 13, VIII, 3a) que la condition p *non*-$\in \overline{X}$ entraîne $f(p)$ *non*-$\in \overline{f(X)}$.

Or, d'après l'ax. V, il existe un indice m_n tel que $p \in R_{m_n} \subset 1-\overline{X}$ et, en vertu de I (1), il existe un k_n tel que $p \in \overline{R}_{k_n} \subset R_{m_n}$.

Soit $x \in X$. Donc x *non*-$\in R_{m_n}$ et, d'après (ii), $f^n(x)=1$. D'après la même formule on a $f^n(p)=0$, d'où selon (i): $|f(x)-f(p)| \geqslant 1/2^n$. Cela veut dire que dans la sphère de centre $f(p)$ et de rayon $1/2^n$ il n'y a aucun point de l'ensemble $f(X)$. Donc $f(p)$ *non*-$\in \overline{f(X)}$.

Corollaire I. L'espace $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ a le rang topologique le plus élevé parmi les espaces satisfaisant aux ax. I—V, ou, ce qui revient au même, parmi les espaces métriques séparables.

[1]) *Zum Metrisationsproblem*, Math. Ann. **94** (1925), p. 310.
[2]) Voir § 14, V et § 15, VI.

Car l'espace $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, en tant que produit d'espaces métriques séparables, est lui-même métrique séparable (§ 14, VI) et satisfait par conséquent aux ax. I—V (on peut d'ailleurs définir directement la base de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ comme constituée par les ensembles de la forme $R_1 \times \dots \times R_n \times \mathcal{J} \times \mathcal{J} \times \mathcal{J} \times \dots$, où R_i désigne un intervalle variable à extrémités rationnelles et situé dans l'intervalle $\mathcal{J}$).

Il résulte du théorème d'Urysohn et du corollaire précédent que tous les théorèmes concernant l'espace métrique séparable sont applicables à l'espace satisfaisant aux ax. I—V. On en conclut aussi que *l'étude des espaces topologiques assujettis aux axiomes I—V n'est rien d'autre (au point de vue topologique) que celle des sous-ensembles de $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ ou encore celle des sous-ensembles de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ de Fréchet (puisque $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ et $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ ont évidemment le même rang topologique).*

Corollaire II. Tout sous-ensemble d'un espace satisfaisant aux axiomes I—V leur satisfait aussi[1].

Remarques. 1) Il est intéressant de rapprocher le théorème d'Urysohn (et le corollaire I) au théorème suivant de MM. Banach et Mazur[2]: *tout espace métrique séparable est isométrique à un sous-ensemble de l'espace C de toutes les fonctions réelles continues dans l'intervalle* $0 \leqslant x \leqslant 1$, la distance entre deux fonctions-éléments de cet espace étant définie par la formule

$$|f_1 - f_2| = \sup |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Ainsi l'espace C possède également le rang topologique le plus élevé parmi les espaces métriques séparables. Au point de vue topologique, il a envers l'espace $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ le désavantage d'être non compact; au point de vue géométrique, il a l'avantage d'avoir non seulement le plus grand rang topologique mais *le plus grand rang géométrique* parmi les espaces métriques séparables.

2) D'après le théorème d'Urysohn, l'axiome V constitue une condition *suffisante* pour qu'un espace satisfaisant aux axiomes I—IV soit métrisable. Bien entendu, cette condition n'est pas *nécessaire* (lorsqu'on n'exige pas d'avance que l'espace soit séparable).

[1]) Pour une démonstration plus directe, voir P. Urysohn, Math. Ann. **94** (1925), p. 285.
[2]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, p. 187. Cf. aussi P. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, Bull. Sc. Math. **151** (1927), pp. 1—38.

Je dois à M. Aronszajn la condition suivante, qui est *nécessaire et suffisante pour qu'un espace satisfaisant aux axiomes I—III soit métrisable*[1]): c'est *l'existence d'une suite infinie de familles* F_n $(n=1,2,\ldots)$ *composées d'ensembles ouverts tels que*:

1⁰ *quel que soit* n, *l'espace est la somme des ensembles-éléments de* F_n,

2⁰ *étant donnés un point* p, *deux suites d'ensembles* G_n *et* G_n^* $(n=1,2,\ldots)$ *tels que* $p\in G_n$, $G_n\cdot G_n^*\neq 0$, $G_n\in F_n$, $G_n^*\in F_n$, *et un entourage quelconque* E *de* p, *il existe un indice* k *tel que* $G_k+G_k^*\subset E$.

Citons encore, dans le même ordre d'idées, le théorème suivant de M. Chittenden[2]). Supposons qu'on ait défini dans l'espace une fonction non négative de deux variables (l'„écart") $\varphi(x,y)$ telle que $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$ et $[\varphi(x,y)=0]\equiv[x=y]$ (la loi du triangle n'est pas supposée vérifiée); dans ces hypothèses, s'il existe une fonction $f(t)$ réelle de variable réelle, tendant vers 0 avec t et telle que les inégalités $\varphi(x,y)<t$ et $\varphi(y,z)<t$ entraînent $\varphi(x,z)<f(t)$, l'espace est métrisable (la notion de limite étant définie d'une façon évidente à l'aide de l'écart $\varphi(x,y)$).

V. Réduction d'ensembles fermés à des points individuels. Soit F un sous-ensemble fermé d'un espace $\mathfrak{X}$ satisfaisant aux axiomes I—V. En identifiant tous les points de F, on obtient un nouvel espace satisfaisant également à ces axiomes. Plus précisément:

1[3]). *Il existe une fonction continue* f *qui transforme l'ensemble* F *en un seul point, n'appartenant pas à* $f(\mathfrak{X}-F)$, *et qui est une homéomorphie sur* $\mathfrak{X}-F$.

En effet, en vertu du théorème d'Urysohn, il est légitime d'admettre que $\mathfrak{X}\subset\mathcal{E}^{\aleph_0}$, c. à d. que les points x de $\mathfrak{X}$ sont des suites de nombres réels: $x=[x^1,x^2,x^3,\ldots]$. Posons, pour abréger,

[1]) Une condition analogue a été donnée par MM. Alexandroff et Urysohn, *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe* $(\mathcal{L})$ *soit une classe* $(\mathcal{D})$, C. R. Paris **177** (1923), p. 1274. Cf. aussi M. Fréchet, *Espaces abstraits*, p. 220.

[2]) *On the equivalence of écart and voisinage*, Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917), p. 161.

[3]) Voir ma note *Remarques sur les transformations continues des espaces métriques*, Fund. Math. **30** (1938), p. 48 et F. Hausdorff, *Erweiterung einer stetigen Funktion*, ibid. p. 40.

$\delta(x)=\varrho(x,F)$ et désignons par $f(x)$ le point de $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ défini comme suit:

$$f(x)=[\delta(x),x^1\cdot\delta(x),x^2\cdot\delta(x),\ldots].$$

Si $x\in F$, on a $\delta(x)=0$, d'où $f(x)=[0,0,0,\ldots]$. Inversement, cette dernière égalité entraîne $\delta(x)=0$, d'où $x\in F$.

Chacune des coordonnées de $f(x)$ étant une fonction continue de x, la fonction f est continue (§ 14, IV).

Enfin la fonction f est une homéomorphie sur $\mathfrak{X}-F$. En effet, la condition $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n)=f(x)$ entraîne $\lim\limits_{n=\infty}\delta(x_n)=\delta(x)$ et $\lim\limits_{n=\infty} x_n^k\cdot\delta(x_n)=x^k\cdot\delta(x)$ pour chaque k. En supposant que $x\in\mathfrak{X}-F$, on a $\delta(x)\neq 0$, donc $\delta(x_n)\neq 0$ pour n suffisamment grand. Par conséquent

$$\lim_{n=\infty} x_n^k=\lim_{n=\infty}\frac{x_n^k\cdot\delta(x_n)}{\delta(x_n)}=\frac{\lim\limits_{n=\infty} x_n^k\cdot\delta(x_n)}{\lim\limits_{n=\infty}\delta(x_n)}=\frac{x^k\cdot\delta(x)}{\delta(x)}=x^k.$$

Donc $\lim\limits_{n=\infty} x_n=x$.

Le th. 1 se généralise comme suit:

2. *Etant donné dans un espace métrique séparable* $\mathfrak{X}$, n *ensembles fermés et disjoints* $F_1,\ldots,F_n$, *il existe une fonction continue* f *qui transforme* $\mathfrak{X}$ *en espace métrique séparable de façon que les ensembles* $f(F_1),\ldots,f(F_n)$ *se réduisent à* n *points individuels* $p_1,\ldots,p_n$ *(différents), dont aucun n'appartient à* $f[\mathfrak{X}-(F_1+\ldots+F_n)]$, *et que la fonction* f *est une homéomorphie sur* $\mathfrak{X}-(F_1+\ldots+F_n)$.

Par l'application itérée du th. 1, on réduit en effet successivement les ensembles $F_1,F_2,\ldots$ en des points $p_1,p_2,\ldots$ de la manière demandée.

Dans le même ordre d'idées, on établit l'extension suivante des théorèmes d'Urysohn et de Tietze:

3. *Soient* $F=\overline{F}\subset\mathfrak{X}\subset\mathcal{J}^{\aleph_0}$ *et* $f\in(\mathcal{J}^{\aleph_0})^F$. *Il existe une transformation continue* g *de l'espace* $\mathfrak{X}$ *tout entier en sous-ensemble du produit cartésien* $\mathcal{J}^{\aleph_0}\times\mathcal{J}\times\mathcal{J}^{\aleph_0}$ *qui coïncide avec* f *sur* F *et qui est une homéomorphie sur* $\mathfrak{X}-F$.

Soit, en effet, $f^*\in(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathfrak{X}}$ une extension de la fonction f (cf. th. de Tietze, § 15, XI, 3). Posons[1])

$$g(x)=[f^*(x),\ \varrho(x,F),\ x\cdot\varrho(x,F)]\quad\text{où}\quad x\in\mathfrak{X}.$$

[1]) Ibidem.