

PREMIER CHAPITRE.

Notions fondamentales. Calcul topologique.

§ 4. Système d'axiomes. Règles de calcul.

I. Axiomes. Nous considérons dans ce chapitre: 1° un ensemble, que nous désignons par I et que nous appelons *espace*, 2° une fonction $\bar{X}$ définie pour chaque sous-ensemble X de I de façon que $\bar{X} \subset I$ et que nous appelons *fermeture* de X . Les éléments de l'espace sont dits des *points*.

Nous admettons les trois axiomes suivants¹⁾:

- I) $\overline{X+Y} = \bar{X} + \bar{Y}$
 II) si X ne contient qu'un seul point ou n'en contient aucun, on a
 $\bar{X} = X$
 III) $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$.

¹⁾ Des axiomes analogues ont été introduits par M. F. Riesz, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, Atti del IV Congr. Int. d. Mat., vol. II, Roma 1909. Voir aussi ma note *Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analyse Situs*, Fund. Math. **3** (1922), pp. 182—199. M. M. Fréchet appelle *accessibles* les espaces assujettis aux axiomes I—III. Voir son livre *Espaces abstraits*, Paris 1928, p. 185.

Dans ma note précitée, j'envisage à la place de l'ax. II les deux suivants:

- II') $A \subset \bar{A}$ et II'') $\bar{0} = 0$.

Le système de 4 axiomes qui résulte du système I—III en remplaçant II par ces deux axiomes est plus général. Il diffère aussi du système I—III par la propriété d'être formulé en termes de l'Algèbre de Boole, sans faire intervenir la notion de point (pour l'Algèbre de Boole, voir p. ex. M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), p. 37 ou A. Tarski, Fund. Math. **24** (1935), p. 177). Ce sont les espaces satisfaisant à ces 4 axiomes que MM. P. Alexandroff et H. Hopf ont nommés *espaces topologiques* dans leur traité *Topologie*, vol. I, p. 37 Berlin, Springer 1935), en donnant le nom d'*espaces T_1* aux espaces satisfaisant aux axiomes I—III.

Ajoutons qu'en termes de l'Algèbre de Boole complétée par la notion $\bar{A}$, on peut développer une partie considérable de la Topologie (cf. R. Sikorski, Fund. Math. à paraître).

II. Interprétation géométrique¹⁾. Dans le cas où I désigne l'espace euclidien (à n dimensions), $\bar{X}$ est l'ensemble X augmenté de ses points d'accumulation. Nous allons prouver que les trois axiomes sont alors vérifiés.

Supposons d'abord que $p \in \bar{X} + \bar{Y}$, donc que l'on a $p = \lim p_n$ où $p_n \in (X+Y)$. Il existe alors parmi les p_n une infinité de termes qui appartiennent soit tous à X , soit tous à Y ; dans le premier cas on a $p \in \bar{X}$ et dans le second $p \in \bar{Y}$. Donc, dans tous les cas, $p \in \bar{X} + \bar{Y}$. Ainsi $\overline{X+Y} \subset \bar{X} + \bar{Y}$.

Il est, d'autre part, évident que, si p appartient à la fermeture de X , p appartient, à plus forte raison, à la fermeture de chaque sur-ensemble de X , donc à $\bar{X} + \bar{Y}$. Par conséquent $\bar{X} + \bar{Y} \subset \overline{X+Y}$, d'où on conclut que l'axiome I est vérifié.

L'axiome II étant manifestement vérifié, reste à démontrer l'axiome III. On a par définition $\bar{X} \subset \bar{X}$. Afin de prouver que $\bar{\bar{X}} \subset \bar{X}$, supposons que $p \in \bar{\bar{X}}$ et que S soit une sphère (à n dimensions) qui contient p à son intérieur. Le point p appartenant à la fermeture de l'ensemble $\bar{X}$, il existe à l'intérieur de S un point $r \in \bar{X}$; cette dernière condition implique l'existence d'un point s appartenant à SX . Ainsi, toute sphère qui contient p à son intérieur, contient un point de X . Cela entraîne la formule $p \in \bar{X}$, c. q. f. d.

III. Règles du calcul topologique:

1. $XC Y$ implique $\bar{X} \subset \bar{Y}$
2. $\overline{XY} \subset \bar{X} \cdot \bar{Y}$
3. $\bar{X} - \bar{Y} \subset \overline{X - Y}$
4. $\bigcap_i \bar{X}_i \subset \overline{\bigcap_i X_i}$
5. $\sum_i \bar{X}_i \subset \overline{\sum_i X_i}$
6. si X est fini, $\bar{X} = X$
7. $X \subset \bar{X}$
8. $\bar{1} = 1$
9. $\bar{0} = 0$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{X}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{X}_n + \prod_{n=1}^{\infty} \overline{X_n + X_{n+1} + \dots}$

Les cinq premières règles résultent de l'axiome I.

En effet, pour prouver 1, remarquons que (selon § 1, II) l'inclusion $XC Y$ équivaut à l'égalité $Y = X + Y$, qui entraîne $\bar{Y} = \bar{X} + \bar{Y}$, donc, d'après l'ax. I, $\bar{Y} = \bar{X} + \bar{Y}$, ce qui équivaut à l'inclusion $\bar{X} \subset \bar{Y}$.

¹⁾ Le N° II n'interviendra pas dans la suite: il n'a pour but que de rendre les axiomes plus compréhensibles. Cf. aussi § 7, III.

Pour une interprétation dans le domaine de la Logique mathématique, voir A. Tarski, *Der Aussagenkalkül und die Topologie*, Fund. Math. **31** (1938), p. 103.

La règle 1 entraîne 2. Car les inclusions $XYCX$ et $XYCY$ impliquent $\overline{XY} \subset \overline{X}$ et $\overline{XY} \subset \overline{Y}$, d'où $\overline{XY} \subset \overline{X \cdot Y}$.

L'identité $X + Y = (X - Y) + Y$ entraîne en vertu de l'axiome I: $\overline{X} + \overline{Y} = \overline{X - Y} + \overline{Y}$ et, en multipliant les deux membres de cette égalité par $1 - \overline{Y}$, il vient $\overline{X} - \overline{Y} = \overline{X - Y} - \overline{Y} \subset X - Y$, d'où la règle 3.

La règle 4 est une généralisation de la règle 2 (à un ensemble arbitraire, dénombrable ou indénombrable, de facteurs) et elle se démontre de façon analogue. On a, en effet, pour chaque indice x : $\prod_i X_i \subset X_x$, d'où $\prod_i \overline{X_i} \subset \overline{X_x}$, donc $\prod_i \overline{X_i} \subset \prod_i \overline{X_x}$.

De façon analogue, l'inclusion $X_x \subset \sum_i X_i$ implique que $\overline{X_x} \subset \sum_i \overline{X_i}$, d'où $\sum_x \overline{X_x} \subset \sum_i \overline{X_i}$. La règle 5 se trouve ainsi établie.

La règle 6 est une conséquence immédiate des axiomes I et II.

La règle 7 résulte de l'axiome II et de la règle 1. En effet, la formule $p \in X$ équivaut à l'inclusion $(p) \subset X$, qui entraîne $\overline{(p)} \subset \overline{X}$ et comme, d'après l'ax. II, on a $\overline{(p)} = (p)$, il vient $(p) \subset \overline{X}$, donc $p \in \overline{X}$. Ainsi l'inclusion $p \in X$ entraîne $p \in \overline{X}$, c. q. f. d.

La règle 8 résulte directement de 7 et la règle 9 est implicitement contenue dans l'axiome II.

Les règles 5 et 1 impliquent que le membre droit de l'identité 10 est contenu dans le membre gauche. Pour démontrer l'inclusion inverse, supposons que p n'appartienne pas au membre droit. Il existe alors un k tel que p soit étranger à $\overline{X_k + X_{k+1} + \dots}$ et à $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{X_n}$, donc à $\overline{X_1 + \dots + X_{k-1} + X_k + X_{k+1} + \dots}$.

La dernière somme étant égale, d'après l'ax. I, au membre gauche de la formule 10, cette formule se trouve ainsi établie.

IV. Relativisation. E étant un ensemble de points fixe et X un sous-ensemble arbitraire de E , on appelle *fermeture de X relative à E* l'ensemble $E \cdot \overline{X}$. La fermeture relative satisfait aux axiomes I—III *relativisés* par rapport à E ; c'est-à-dire que, X et Y étant des sous-ensembles arbitraires de E , on a:

$$I_E) \quad E \cdot \overline{X + Y} = E \cdot \overline{X} + E \cdot \overline{Y}$$

II_E) si X ne contient qu'un seul point ou n'en contient aucun, on a

$$E \cdot \overline{X} = X$$

$$III_E) \quad E \cdot \overline{E \cdot \overline{X}} = E \cdot \overline{X}.$$

En effet, les propositions I_E et II_E sont respectivement des conséquences directes des axiomes I et II. Quant à la proposition III_E, on a d'après la règle 2 et l'axiome III:

$$\overline{E \cdot \overline{X}} \subset \overline{E \cdot \overline{E \cdot \overline{X}}} = \overline{X}, \text{ d'où } E \cdot \overline{E \cdot \overline{X}} \subset E \cdot \overline{X}$$

et, l'inclusion inverse étant une conséquence de la règle 7, on obtient l'identité III_E.

Il est ainsi établi que les axiomes I—III peuvent être relativisés par rapport à un ensemble arbitraire E . Il en est donc de même de tous les *théorèmes* qui résultent des axiomes I—III: ils restent valables lorsqu'on considère comme l'espace un sous-ensemble arbitraire E de 1 (et que l'on relativise la fermeture).

Nous avons vu au N° II que les axiomes I—III sont vérifiés dans l'espace euclidien. Il en résulte que ces axiomes sont aussi remplis lorsqu'on prend pour espace un sous-ensemble arbitraire d'un espace euclidien.

V. Analyse logique du système d'axiomes.

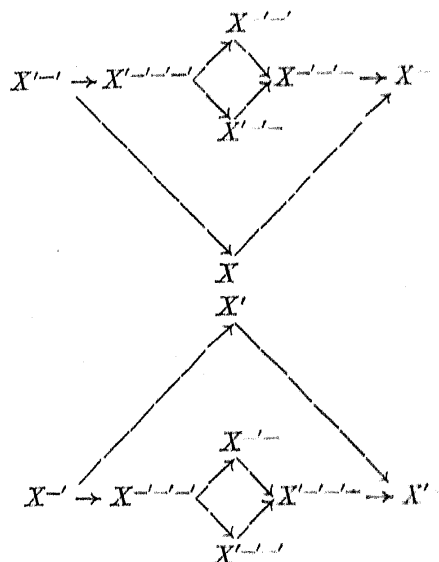
Les axiomes I—III sont *indépendants*. En effet, si on prend pour l'espace un ensemble composé de deux éléments a et b , et si l'on pose: $0=0$, $(a)=(a)$, $(b)=(b)$ et $(a,b)=0$, les axiomes II et III sont vérifiés, tandis que I ne l'est pas. Si, pour un espace non vide, on pose $\overline{X}=0$ quel que soit X , les axiomes I et III sont remplis, mais II ne l'est pas. Enfin, pour prouver l'indépendance de l'ax. III, considérons l'exemple très instructif suivant¹⁾: l'espace se compose de toutes les fonctions réelles de variable réelle; X étant un sous-ensemble de cet espace, toute fonction-limite d'une suite de fonctions extraites de X appartient à $\overline{X}$. L'espace des fonctions, ainsi conçu, satisfait aux axiomes I et II, mais ne satisfait pas à l'ax. III. En effet, A désignant l'ensemble des fonctions continues, on a $\overline{A} \neq A$, puisque la fonction (de Dirichlet) égale à 1 aux points rationnels et à 0 aux points irrationnels appartient à $\overline{A}$, mais n'appartient pas à A .

Chacun des 4 axiomes: I, II', II'' et III peut être énoncé sous la forme $F(X_1, \dots, X_k)=0$ où la fonction F ne fait intervenir que les opérations de l'Algèbre de Boole et l'opération $\overline{X}$. Il est remarquable qu'il n'existe aucun autre axiome de cette forme qui soit indépendant du système envisagé et qui soit valable dans l'espace euclidien n -dimensionnel²⁾.

La solution d'un cas particulier de ce problème est fournie par la table suivante.

¹⁾ dû à M. Fréchet; voir sa Thèse, Rend. del Circolo Matem. di Palermo 22 (1906), p. 15.

²⁾ Théorème de M.M. J. C. C. Mc Kinsey et A. Tarski, *The Algebra of Topology*, Ann. of Math. 45 (1944), p. 141—191.



Supposons, en effet, que l'on applique à un ensemble X les deux opérations: $\bar{X}$ et X' ($=1-X$). Quel est le nombre d'ensembles que l'on obtient? On prouve que ce nombre est 14¹⁾. Les 14 ensembles en question sont contenus dans la table ci-dessus²⁾. La même table renferme toutes les inclusions valables pour chaque sous-ensemble de la droite.

§ 5. Ensembles fermés, ensembles ouverts.

I. Définitions. X est un ensemble fermé lorsque $\bar{X} = X$ ³⁾. X est un ensemble ouvert lorsque le complémentaire de X est fermé, c'est-à-dire lorsque $1-\bar{X} = 1-X$, ou encore, lorsque $X = 1-\bar{1-X}$.

Exemples. Dans l'espace des nombres réels, les nombres naturels constituent un ensemble fermé; l'intervalle $a \leq x \leq b$ est fermé; l'intervalle $a < x < b$ est ouvert (non fermé); dans le plan, ce dernier ensemble n'est pas ouvert.

Dans l'espace des nombres naturels, chaque ensemble est simultanément fermé et ouvert.

f étant une fonction bornée définie dans l'intervalle $a \leq x \leq b$, son image géométrique, c. à d. l'ensemble $\bigcup_{xy} [y = f(x)]$, est fermée (dans le plan), lorsque la fonction f est continue et dans ce cas seulement (cf. § 23).

¹⁾ Pour la démonstration, voir ma note citée de Fund. Math. 3, p. 106.

²⁾ Pour des raisons typographiques nous écrivons X^- au lieu de X ; la flèche remplace ici le signe d'inclusion $\subset$.

³⁾ Notion due à G. Cantor, Math. Ann. 21 (1883), p. 51.

II. Opérations. La somme de deux ensembles fermés est un ensemble fermé. Cela résulte de l'axiome I, lorsqu'on pose $\bar{X} = X$ et $\bar{Y} = Y$.

Le produit (d'un nombre fini ou infini) d'ensembles fermés est fermé. En effet, en posant $\bar{X}_i = X_i$ dans la règle 4, on a $\prod \bar{X}_i \subset \prod X_i$ et comme on a $\prod X_i \subset \prod \bar{X}_i$, d'après 7, il vient $\prod \bar{X}_i = \prod X_i$.

En vertu de la formule de de Morgan (voir § 1, II et V), d'après laquelle on a $1-\bar{XY} = (1-\bar{X}) + (1-\bar{Y})$, et, en général, $1-\prod \bar{X}_i = \sum (1-\bar{X}_i)$, on déduit des propositions précédentes que le produit de deux ensembles ouverts est ouvert et que la somme d'une famille arbitraire d'ensembles ouverts est ouverte.

D'après les règles 8 et 9, les ensembles 0 et 1 sont simultanément fermés et ouverts¹⁾.

III. Propriétés. D'après l'ax. III, la fermeture est un ensemble fermé. On peut donc définir les ensembles fermés comme les ensembles de la forme $\bar{X}$. D'une façon analogue, les ensembles ouverts coïncident avec les ensembles de la forme $1-\bar{X}$.

Si G est ouvert, on a $G\bar{X} \subset \overline{GX}$ quel que soit X .

Car, par définition de l'ensemble ouvert, on a $G = 1-\bar{1-G}$, donc $G \cdot \bar{X} = \bar{X} - \bar{1-G} \subset \bar{X} - (1-\bar{G}) = \overline{GX}$ en vertu de la règle 3.

L'inclusion $G\bar{X} \subset \overline{GX}$ implique $\overline{G\bar{X}} \subset \overline{\overline{GX}}$ et, en tenant compte de la formule $X \subset \bar{X}$, on a $\overline{G\bar{X}} \subset \overline{GX}$, d'où l'égalité importante

$$\overline{G\bar{X}} = \overline{GX}.$$

IV. Relativisation. Conformément à la terminologie adoptée au § précédent, un ensemble X est fermé relativement à E lorsque $X = E \cdot \bar{X}$. L'ensemble X est relativement ouvert lorsque $X \subset E$ et que $E-X$ est relativement fermé (par rapport à E); autrement dit, lorsque $X = E - \overline{E-X}$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit fermé (ouvert) relativement à E est qu'il soit le produit de E et d'un ensemble fermé (ouvert).

¹⁾ La notion d'ensemble fermé (ou celle d'ensemble ouvert) peut être admise comme primitive (au lieu de la fermeture); en admettant comme axiomes les énoncés du N° II, on obtient un système analogue au système basé sur les ax. I-III. Cf. P. Alexandroff, Math. Ann. 94 (1925), p. 208 et W. Sierpiński, Math. Ann. 97 (1926), p. 335, Topologia (1928). Voir aussi plus loin § 7, III.

En effet, la condition est nécessaire, car dans le cas où X est relativement fermé, on a $X = E \cdot \bar{X}$, et dans le cas où X est relativement ouvert, on a $X = E - \bar{E} - X = E \cdot (1 - \bar{E} - X)$.

Pour prouver qu'elle est suffisante, supposons d'abord que l'on ait $X = EF$ et $F = \bar{F}$. Il s'agit de montrer que X est fermé relativement à E , c. à d. que $X = E \cdot \bar{X}$, donc que $EF = E \cdot \bar{EF}$. Or, d'après la règle 1, $\overline{EF} \subset \bar{F}$ et comme $\bar{F} = F$, il vient $E \cdot \overline{EF} \subset EF$. L'inclusion inverse résulte directement de la règle 7.

Enfin, dans le cas où $X = EG$ et G est ouvert, l'ensemble $E - X$, comme égal à $E - EG = E \cdot (1 - G)$, est le produit de E et d'un ensemble fermé; il est donc fermé relativement à E . Par conséquent X est relativement ouvert, c. q. f. d.

En particulier, si E est fermé (ouvert), la propriété d'être fermé (ouvert) relativement à E entraîne la même propriété au sens absolu. Cela résulte du théorème précédent, en tenant compte du fait que le produit de deux ensembles fermés est fermé et que le produit de deux ensembles ouverts est ouvert (voir N° II).

Le même théorème implique que la propriété d'être relativement fermé est *transitive*, c. à d. que si X est fermé dans Y et Y est fermé dans E , X est fermé dans E .

En effet, par hypothèse: $X = Y \cdot \bar{X}$ et $Y = E \cdot \bar{Y}$, donc $X = E \cdot \bar{X} \cdot \bar{Y}$ et, comme produit de E et d'un ensemble fermé, X est relativement fermé dans E .

Il en est de même de la propriété d'être relativement ouvert.

V. Ensembles F_σ , ensembles G_δ . La somme d'une famille dénombrable¹⁾ d'ensembles fermés est dite un F_σ , le produit d'une famille dénombrable d'ensembles ouverts est dit un G_δ ²⁾.

On voit aussitôt que le complémentaire d'un ensemble F_σ est un G_δ et que le complémentaire d'un G_δ est un F_σ . La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles F_σ est évidemment un F_σ .

¹⁾ Nous entendons par ensemble *dénombrable* un ensemble dont les éléments se laissent ranger en une suite finie ou infinie. Notons que, dans ce sens, tout ensemble fini est dénombrable.

²⁾ Ces deux notions, qui constituent une généralisation des notions d'ensemble fermé et d'ensemble ouvert, ont été étudiées surtout pour les buts de la Théorie des fonctions. Cependant elles se sont montrées très utiles aussi dans les problèmes géométriques de Topologie (voir surtout chap. III, §§ 20—32). Ces notions sont dues à M. W. H. Young, Ber. Ges. Wiss. Leipzig 55 (1903), p. 287.

Le produit de deux ensembles F_σ est un F_σ ; soit en effet, $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ et $B = \sum_{m=1}^{\infty} B_m$; donc $AB = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_n B_m$ et, les ensembles A_n et B_m étant fermés, leur produit $A_n \cdot B_m$ est aussi fermé; l'ensemble AB est donc un F_σ . Par raison de symétrie, le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles G_δ est un G_δ et la somme de deux ensembles G_δ est un G_δ .

Tout ensemble F_σ est somme d'une suite d'ensembles fermés croissants. On a, en effet,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots = F_1 + (F_1 + F_2) + (F_1 + F_2 + F_3) + \dots$$

et les ensembles entre parenthèses sont fermés.

De façon analogue, tout ensemble G_δ est produit d'une suite d'ensembles ouverts décroissants.

Pour que X soit un ensemble F_σ (un ensemble G_δ) relativement à E , il faut et il suffit que X soit un produit de E et d'un F_σ (d'un G_δ).

Cela résulte des identités:

$$F_1 \cdot E + F_2 \cdot E + \dots = (F_1 + F_2 + \dots) \cdot E$$

et

$$(G_1 \cdot E) \cdot (G_2 \cdot E) \cdot \dots = (G_1 \cdot G_2 \cdot \dots) \cdot E.$$

En particulier, si E est un F_σ (un G_δ), X l'est également.

D'après l'ax. II, tout ensemble dénombrable est un F_σ .

Ainsi, par exemple, l'ensemble des nombres rationnels est, dans l'espace des nombres réels, un F_σ . L'ensemble des nombres irrationnels est donc un G_δ . Nous verrons plus tard que ce dernier n'est pas un F_σ .

VI. Ensembles boreliens. En généralisant les notions d'ensemble fermé et d'ensemble ouvert à l'aide des opérations de la Théorie des ensembles (comme nous l'avons fait dans le N° précédent), on est conduit à considérer les ensembles qui se déduisent des ensembles fermés (ou ouverts) par les opérations d'addition et de multiplication dénombrables, ainsi que par celle de soustraction. On parvient à la définition suivante.

*Définition*¹⁾. La famille $\mathcal{F}$ des ensembles boreliens est la plus petite famille assujettie aux conditions suivantes:

¹⁾ Voir E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris 1898, p. 46 et F. Hausdorff, *Mengenlehre*, § 18 „Borelsche Systeme“, et *Grundzüge*, p. 304.

- 1) chaque ensemble fermé appartient à F ,
 2) si X appartient à F , $1-X$ lui appartient également,
 3) si X_n ($n=1, 2, \dots$) appartient à F , l'ensemble $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ lui appartient également.

On voit aussitôt que la condition 1) peut être remplacée par

- 1') chaque ensemble ouvert appartient à F ,

et que la condition 3) peut être remplacée par la condition 3'), qui résulte de 3) en y substituant $\sum$ à $\prod$.

L'étude plus détaillée des ensembles boreliens se trouve dans les Chapitres II et III.

Les ensembles que l'on rencontre dans la majorité des applications de la Topologie sont boreliens. D'autre part, comme nous le verrons, on connaît des exemples d'ensembles non boreliens.

En ce qui concerne les ensembles *relativement boreliens*, on a le théorème suivant: *E* étant un ensemble donné, les ensembles boreliens relativement à *E* coïncident avec les ensembles de la forme BE , où B est un ensemble borelien variable.

En effet, la famille des ensembles X tels que XE est borelien relativement à E satisfait aux conditions 1)–3), car 1° si X est fermé, XE est fermé dans E , donc borelien relativement à E , 2° si XE est borelien dans E , $(1-X) \cdot E$ l'est également, puisque $(1-X) \cdot E = E - XE$, 3° si chacun des ensembles EX_n est borelien dans E , $E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ l'est également, puisque $E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} X_n = \prod_{n=1}^{\infty} (EX_n)$.

Or, la famille des ensembles boreliens étant la plus petite famille satisfaisant aux conditions 1)–3), elle est contenue dans la famille des ensembles X en question. Autrement dit, si X est borelien, XE est borelien relativement à E .

Inversement, la famille des ensembles $X = BE$, où B est borelien, satisfait aux conditions 1)–3) relativisées par rapport à E , car 1° chaque ensemble fermé dans E appartient à cette famille, 2° si $X = BE$, l'ensemble $E - X = E(1-B)$, comme produit de E et d'un ensemble borelien, appartient à la famille considérée, 3° si $X_n = EB_n$, on a $\prod_{n=1}^{\infty} X_n = E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} B_n$, donc $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ appartient aussi à la famille considérée. Par conséquent cette famille contient la famille des ensembles boreliens relativement à E . En d'autres termes, si X est borelien relativement à E , X est le produit de E et d'un ensemble borelien.

§ 6. Frontière, intérieur d'ensemble.

I. Définitions¹⁾. La frontière de X est l'ensemble

$$\text{Fr}(X) = \overline{X} \cdot \overline{1-X}.$$

L'intérieur de X est l'ensemble

$$\text{Int}(X) = 1 - \overline{1-X}.$$

Exemples. Sur le plan euclidien, X désignant le cercle $x^2 + y^2 \leq 1$, $\text{Fr}(X)$ est la circonférence du cercle, $\text{Int}(X)$ est le disque ouvert. Rien ne change, si l'on remplace le signe $\leq$ par $<$.

Dans l'espace des nombres naturels la frontière de chaque ensemble est vide.

Dans l'espace des nombres réels l'ensemble des nombres rationnels a pour frontière l'espace tout entier.

X étant un ensemble arbitraire situé dans l'espace des nombres réels et f étant la fonction définie par les conditions: $f(x) = 1$ pour $x \in X$ et $f(x) = 0$ ailleurs, la frontière de X constitue l'ensemble des points de discontinuité de la fonction f (voir § 13).

II. Formules de calcul. Nous nous servirons dans la suite des formules suivantes²⁾:

$$(1) \text{Int}(XY) = \text{Int}(X) \cdot \text{Int}(Y) \quad (1') X \subset Y \text{ implique } \text{Int}(X) \subset \text{Int}(Y).$$

$$(2) \sum_i \text{Int}(X_i) \subset \text{Int}(\sum_i X_i)$$

$$(3) \text{Int}(X) = X - \overline{1-X} = X - \text{Fr}(X) \subset X$$

$$(4) \text{Fr}(1-X) = \text{Fr}(X) \quad (5) \text{Fr}(\overline{X}) \subset \text{Fr}(X)$$

$$(6) \text{Fr}(X) = X \cdot \overline{1-X} + (\overline{X} - X) \quad (7) X + \text{Fr}(X) = \overline{X}$$

$$(8) \text{Fr}(X+Y) \subset \text{Fr}(X) + \text{Fr}(Y) \quad (9) \text{Fr}(XY) \subset \text{Fr}(X) + \text{Fr}(Y)$$

$$(10) \text{Int}(X) \cdot \text{Fr}(X) = 0 \quad (11) \text{Fr}[\text{Int}(X)] \subset \text{Fr}(X)$$

$$(12) \overline{\text{Int}[\text{Fr}(X)]} = \overline{X} \cdot \overline{\text{Int}[\text{Fr}(X)]} = \overline{\text{Int}[\text{Fr}(X)]} - \overline{X}.$$

¹⁾ Cf. G. Cantor, Göttinger Nachr. 1879, p. 128 et C. Jordan, Journ. de Math. (4) 8 (1892), p. 72.

²⁾ Quelques-unes se trouvent chez M. Zarycki, *Quelques notions fondamentales de l'Analyse Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique*, Fund. Math. 9 (1927), pp. 3–15. L'auteur étudie en outre d'autres fonctions d'ensembles, telles que le „bord“ $= X \cdot \overline{1-X}$, l'„extérieur“ $= 1 - \overline{X}$.

Les formules (1)–(3) se démontrent comme suit:

$$\begin{aligned} 1 - \overline{1 - XY} &= 1 - \overline{(1 - X) + (1 - Y)} = 1 - \overline{(1 - X) + (1 - Y)} \\ &= (1 - \overline{1 - X}) \cdot (1 - \overline{1 - Y}). \end{aligned}$$

$$\sum_i \text{Int}(X_i) = 1 - \prod_i \overline{1 - X_i} \subset 1 - \prod_i \overline{(1 - X_i)} = \text{Int}(\sum_i X_i).$$

$$\begin{aligned} 1 - \overline{1 - X} \subset 1 - \overline{(1 - X)} = X, \text{ donc } \text{Int}(X) &= X \cdot (1 - \overline{1 - X}) = X \cdot \overline{1 - X} \\ &= X - X \cdot \overline{1 - X} = X - X \cdot \overline{X} \cdot \overline{1 - X} = X - \overline{X} \cdot \overline{1 - X} = X - \text{Fr}(X) \subset X. \end{aligned}$$

Les formules (4) et (5) sont évidentes.

$\overline{X} \cdot \overline{1 - X} = (\overline{X} \cdot \overline{1 - X}) \cdot X + (\overline{X} \cdot \overline{1 - X}) \cdot (1 - X)$, d'où l'identité (6) en vertu des inclusions $X \subset \overline{X}$ et $1 - X \subset \overline{1 - X}$.

$$X + \text{Fr}(X) = X + X \cdot \overline{1 - X} + (\overline{X} - X) = X + (\overline{X} - X) = \overline{X}.$$

$$\begin{aligned} \text{Fr}(X + Y) &= \overline{X + Y} \cdot \overline{1 - (X + Y)} = \overline{X + Y} \cdot (1 - X) \cdot (1 - Y) \subset \\ &\subset \overline{X} \cdot \overline{1 - X} \cdot \overline{1 - Y} + \overline{Y} \cdot \overline{1 - X} \cdot \overline{1 - Y} \subset \overline{X} \cdot \overline{1 - X} + \overline{Y} \cdot \overline{1 - Y} = \text{Fr}(X) + \text{Fr}(Y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fr}(XY) &= \text{Fr}(1 - XY) = \text{Fr}[(1 - X) + (1 - Y)] \subset \\ &\subset \text{Fr}(1 - X) + \text{Fr}(1 - Y) = \text{Fr}(X) + \text{Fr}(Y). \end{aligned}$$

La formule (10) est évidente et la formule (11) résulte de (4) et (5).

L'inclusion $\text{Fr}(X) \subset \overline{X}$ implique en vertu de (1') et (3) que $\text{Int}[\text{Fr}(X)] \subset \overline{X}$. En désignant par G l'ensemble (ouvert) $\text{Int}[\text{Fr}(X)]$, on a donc $G = G\overline{X}$, d'où, en raison de § 5, III: $\overline{G} = \overline{G\overline{X}} = \overline{G}\overline{X}$, ce qui donne la première des égalités (12). La deuxième en résulte, en substituant $1 - X$ à X et en tenant compte de (4).

Au point de vue du calcul topologique les formules suivantes, que nous citons sans démonstration, présentent un certain intérêt:

$$\text{Int}[\text{Int}(X)] = \text{Int}(X), \quad \text{Int}(X - Y) \subset \text{Int}(X) - \text{Int}(Y),$$

$$\text{Fr}\{\text{Fr}[\text{Fr}(X)]\} = \text{Fr}[\text{Fr}(X)] \subset \text{Fr}(X).$$

La formule $\overline{\text{Int}(X + Y)} = \overline{\text{Int}(X)} + \overline{\text{Int}(Y)}$ sera établie au § 8.

III. Rapports avec les ensembles fermés et ouverts.

On voit aussitôt que toute frontière est fermée et que tout intérieur est ouvert¹⁾. De plus, l'intérieur de X est le plus grand sous-ensemble ouvert de X ; car, G étant un sous-ensemble ouvert de X , on a $1 - X \subset 1 - G = \overline{1 - G}$, d'où $\overline{1 - X} \subset \overline{1 - G}$, donc $G \subset 1 - \overline{1 - X} = \text{Int}(X)$.

Si X est fermé, on a $\text{Fr}(X) = X \cdot \overline{1 - X}$; si X est ouvert, on a $\text{Fr}(X) = \overline{X} - X$.

Chacune de ces égalités caractérise respectivement les ensembles fermés et ouverts, car on déduit de (6) dans le premier cas $\overline{X} - X = 0$, d'où $\overline{X} = X$, et dans le deuxième cas $X \cdot \overline{1 - X} = 0$, d'où $\overline{1 - X} = 1 - X$.

En particulier, l'égalité $\text{Fr}(X) = 0$ équivaut à l'hypothèse que X est simultanément fermé et ouvert.

La condition nécessaire et suffisante pour que X soit une différence de deux ensembles fermés est que $\overline{X} - X$ soit fermé²⁾.

En effet, soient $X = E - F$, où E et F sont fermés. On a

$$X = \overline{X} \cdot (E - F) = \overline{X} \cdot E - \overline{X} \cdot F$$

et comme $X \subset E$, il vient $\overline{X} \subset E$, d'où $\overline{X} \cdot E = \overline{X}$. Par conséquent $X = \overline{X} - \overline{X} \cdot F$, d'où $\overline{X} - X = \overline{X} \cdot F$; donc $\overline{X} - X$ est fermé.

Inversement, si $\overline{X} - X$ est fermé, l'ensemble X , comme égal à $\overline{X} - (\overline{X} - X)$, est une différence de deux ensembles fermés.

IV. Théorème sur l'additivité. On rapprochera à la formule (2) le théorème suivant (dont nous nous servirons au § 8):

$\{X_i\}$ étant une famille (de puissance arbitraire) d'ensembles ouverts relativement à la somme $\sum_i X_i$, on a:

$$(i) \quad \text{Int}(\sum_i X_i) = \sum_i \text{Int}(X_i),$$

$$(ii) \quad \overline{\text{Int}(\sum_i X_i)} = \sum_i \overline{\text{Int}(X_i)}.$$

¹⁾ Cette dernière proposition équivaut à l'ax. III; sous le nom de „condition de M. Hedrick“ elle a été considérée par certains auteurs comme un axiome. Voir E. R. Hedrick, Trans. Amer. Math. Soc. **12** (1911), p. 285 et M. Fréchet, *Espaces abstraits*, p. 201.

²⁾ Voir la note de M. W. Sierpiński et de moi-même, *Sur les différences de deux ensembles fermés*, Tôhoku Math. Journ. **20** (1921), p. 22.

En effet, en posant $S = \sum_i X_i$, on a par hypothèse $X_i \subset S - \overline{S - X_i} \subset C1 - \overline{S - X_i}$, donc $S \subset \sum_i (1 - \overline{S - X_i})$. Il vient: $\text{Int}(S) = S \cdot \text{Int}(S) \subset \sum_i (1 - \overline{S - X_i}) \cdot (1 - \overline{1 - S}) = \sum_i (1 - \overline{S - X_i}) + (1 - S) - \sum_i (1 - \overline{1 - S - X_i}) = \sum_i (1 - \overline{1 - X_i}) = \sum_i \text{Int}(X_i)$ et, en vertu de (2), on en tire (i).

D'après le § 5, N° III on a $\text{Int}(\bar{S}) = \text{Int}(\bar{S}) \cdot \bar{S} \subset \text{Int}(S) \cdot S$. Comme nous l'avons prouvé, $S \subset \sum_i (1 - \overline{S - X_i})$; il vient donc $\text{Int}(\bar{S}) \subset \text{Int}(\bar{S}) \cdot \sum_i (1 - \overline{S - X_i}) = \sum_i (\text{Int}(\bar{S}) - S - X_i)$. Or, $\text{Int}(\bar{S}) - \overline{S - X_i} \subset \bar{S} - \overline{S - X_i} \subset \overline{S - (S - X_i)} = \bar{X}_i$ et, le premier membre de cette inclusion étant ouvert, il est contenu dans l'intérieur de $\bar{X}_i$; ainsi $\text{Int}(\bar{S}) - \overline{S - X_i} \subset \text{Int}(\bar{X}_i)$. En tenant compte de la formule précédente, on obtient $\text{Int}(\bar{S}) \subset \sum_i \text{Int}(\bar{X}_i)$, donc $\text{Int}(\bar{S}) \subset \sum_i \text{Int}(\bar{X}_i)$.

Reste à prouver l'inclusion inverse. Or, d'après (1'), $\text{Int}(\bar{X}_i) \subset \text{Int}(\bar{S})$. Donc $\sum_i \text{Int}(\bar{X}_i) \subset \text{Int}(\bar{S})$ et finalement $\sum_i \text{Int}(\bar{X}_i) \subset \text{Int}(\bar{S})$.

§ 7. Entourage d'un point. Localisation des propriétés.

I. Définition. L'ensemble X est dit *entourage* du point p lorsque $p \in \text{Int}(X)$, c. à d. lorsque p est un point intérieur de X ; autrement dit, lorsque p n'appartient pas à $1 - X$.

Un ensemble ouvert est un entourage de chacun de ses points. Un entourage de p contient un entourage ouvert de p , à savoir, l'intérieur de cet entourage.

Chaque *sur-ensemble* d'un entourage de p est un entourage de p . Le *produit* de deux entourages de p est un entourage de p . Car (cf. § 6, II (1)): $\text{Int}(XY) = \text{Int}(X) \cdot \text{Int}(Y)$.

Un sous-ensemble X de E est dit *entourage relatif* de p par rapport à E lorsque p appartient à l'intérieur de X relatif à E , c. à d. $p \in E - \overline{E - X}$.

Si pour $i=0$ et 1, l'ensemble X_i est un entourage de p relatif à E_i , l'ensemble $X_0 + X_1$ est un entourage de p relatif à $E_0 + E_1$.

On a, en effet, $p \in E_0 E_1 - (\overline{E_0 - X_0} + \overline{E_1 - X_1})$, comme $(E_0 - X_0) + (E_1 - X_1) \supset [E_0 - (X_0 + X_1)] + [E_1 - (X_0 + X_1)] = (E_0 + E_1) - (X_0 + X_1)$, il vient $p \in (E_0 + E_1) - (\overline{E_0 + E_1} - (X_0 + X_1))$.

II. Equivalences. 1. Pour que $p \in \bar{X}$, il faut et il suffit que tout entourage E de p satisfasse à l'inégalité $XE \neq 0$.

Supposons, en effet, que $p \in \bar{X}$ et soit E un entourage arbitraire de p . Cela veut dire que p n'appartient pas à $1 - E$ et il vient $p \in \bar{X} - \overline{1 - E} \subset \bar{X} - (1 - E) = \bar{X}E$. Par conséquent $XE \neq 0$.

Supposons, d'autre part, que chaque entourage E de p satisfasse à l'inégalité $XE \neq 0$. Il en résulte que l'ensemble $1 - X$ n'est pas un entourage de p , donc que $p \in \overline{1 - (1 - X)} = \bar{X}$.

Ce théorème entraîne directement le corollaire suivant:

2. Pour que $p \in \text{Fr}(X)$, il faut et il suffit que tout entourage E de p satisfasse à la double inégalité $EX \neq 0 \neq E - X$.

Il est à remarquer que dans les deux énoncés précédents on peut remplacer le terme *entourage* de p par *ensemble ouvert contenant* p . Car chaque entourage de p contient un entourage ouvert de p .

III. Espace de Hausdorff. La notion d'entourage (ouvert) du point p est le terme primitif des espaces de Hausdorff¹⁾. Un tel espace est assujéti aux 5 axiomes suivants:

A. A chaque point p correspond au moins un entourage. Chaque entourage de p contient p .

B. U et V étant deux entourages du point p , il existe un entourage de p contenu dans UV .

C. Si U est un entourage de p et $q \in U$, il existe un entourage V de q contenu dans U .

D. Si $p \neq q$, il existe deux entourages U et V des points p et q respectivement, tels que $UV = 0$.

E. A chaque point p correspond une suite (dénombrable) d'entourages telle que tout entourage de p est sur-ensemble d'un terme de cette suite²⁾.

On voit facilement que les entourages ouverts d'un espace qui satisfait aux axiomes I—III vérifient les propositions A, B et C, tandis que les propositions D et E peuvent être en défaut³⁾. Inversement, si l'on définit la ferme-

¹⁾ *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 213. Au point de vue historique il est intéressant de rapprocher le système de F. Hausdorff à celui de D. Hilbert, Göttinger Nachr. 1902 (reproduit par ex. dans *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1913, p. 165). Cf. aussi les espaces ($\mathcal{V}$) (à voisinage) de M. Fréchet (*Espaces abstraits*, p. 172), espaces satisfaisant à l'axiome A; axiomes de „séparation“ (de M. Kolmogoroff et autres) dans Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, p. 58.

²⁾ „Das erste Abzählbarkeitsaxiom“, F. Hausdorff, ib. p. 263.

³⁾ M. Fréchet, l. c., p. 212.

ture dans l'espace de Hausdorff par la condition exprimée dans la proposition 1 du N° II, les axiomes I—III se trouvent vérifiés¹⁾.

Ceci généralise le fait que chaque espace euclidien satisfait aux axiomes I—III (cf. § 4, II), car un espace euclidien est un espace de Hausdorff (lorsque p. ex. les sphères ouvertes de centre p sont considérées comme des entourages de p).

IV. Localisation. Etant donnée une propriété P d'ensembles, désignons par P la famille des ensembles jouissant de cette propriété. La définition suivante de la localisation s'impose dans de nombreux cas:

Définition. L'ensemble X jouit de la propriété P au point p , lorsqu'il existe un entourage E de ce point tel que $XE \in P$. Le symbole X^* désigne l'ensemble des points p (appartenant ou non à X) en lesquels X ne jouit pas de la propriété P .

Ainsi, par exemple, si P est la famille composée de l'ensemble vide, on a, d'après le théorème du N° II, $X^* = \bar{X}$. En localisant les propriétés d'être un ensemble fini et d'être un ensemble dénombrable, on parvient, comme nous le verrons (§§ 9 et 18), aux notions d'ensemble dérivé et d'ensemble des points de condensation de X .

V. Familles héréditaires et additives (idéaux). Nous allons étudier l'opération X^* , en imposant à la famille P deux conditions qui seront réalisées dans plusieurs cas importants; à savoir, que la famille P (non vide) est *héréditaire* et *additive*, c. à d. que

- (i) les conditions $X \in P$ et $Y \subset X$ entraînent $Y \in P$,
- (ii) les conditions $X \in P$ et $Y \in P$ entraînent $X + Y \in P$.

Toute famille héréditaire et additive est dite un *idéal*²⁾.

Conséquences de (i). La condition (i) supposée vérifiée, on peut dans la définition du N° précédent imposer à l'entourage E la condition d'être *ouvert*. En effet, d'après le N° I, chaque entourage E de p contient un entourage ouvert G de p ; donc, si l'on suppose que $XE \in P$, l'inclusion $XG \subset XE$ entraîne $XG \in P$.

¹⁾ F. Hausdorff, l. c., pp. 233—4.

²⁾ par analogie aux idéaux en Algèbre. Cf. M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), p. 37.

De là résulte que l'ensemble $1 - X^*$, comme somme d'ensembles ouverts, est ouvert. Par conséquent X^* est fermé.

Comme $P \neq 0$, on a $0 \in P$.

Nous allons prouver que

- (1) $X \subset Y$ implique $X^* \subset Y^*$
- (2) $X^{**} \subset X^* = \bar{X}^* \subset \bar{X}$
- (3) si G est ouvert, on a $GX^* = G \cdot (GX)^*$.

En effet, soient $X \subset Y$, $p \in X^*$ et G un ensemble ouvert contenant p . Donc $XG \text{ non-} \in P$ et, comme $XG \subset YG$, on conclut de (i) que $YG \text{ non-} \in P$. Il en résulte que $p \in Y^*$.

Comme $(1 - \bar{X})X = 0 \in P$, on a $1 - \bar{X} \subset 1 - X^*$, c. à d. $X^* \subset \bar{X}$. D'où $(X^*)^* \subset \bar{X}^* = X^*$.

Supposons enfin que $p \in GX^*$. Donc H étant un entourage de p , on a $HGX \text{ non-} \in P$ (puisque HG est un entourage de p). Il en résulte que $p \in (GX)^*$. Ainsi $GX^* \subset (GX)^*$. D'autre part, d'après (1), l'inclusion $GX \subset X$ entraîne $(GX)^* \subset X^*$, d'où $G \cdot (GX)^* \subset GX^*$, ce qui implique l'égalité (3).

L'égalité (3) montre que le fait qu'un ensemble X possède ou non une propriété au point p dépend de l'entourage de ce point; c'est donc un fait „local“.

Remarquons enfin que la proposition (1) entraîne (voir § 4, III) les formules suivantes:

- (4) $(XY)^* \subset X^* \cdot Y^*$
- (5) $(\prod_i X_i)^* \subset \prod_i X_i^*$
- (6) $\sum_i X_i^* \subset (\sum_i X_i)^*$.

Conséquences de (i) et (ii):

- (7) $(X + Y)^* = X^* + Y^*$
- (8) $X^* - Y^* \subset (X - Y)^*$.

En effet, si $p \text{ non-} \in X^*$, il existe un entourage G de p tel que $XG \in P$. De même, si $p \text{ non-} \in Y^*$, il existe un entourage H de p tel que $YH \in P$. Selon (i): $XGH \in P$ et $YGH \in P$, d'où selon (ii): $(X + Y) \cdot GH \in P$, ce qui prouve que $p \text{ non-} \in (X + Y)^*$. Donc $(X + Y)^* \subset X^* + Y^*$. L'inclusion inverse est un cas particulier de (6).

La formule (8) résulte de (7); cf. § 4, III, règle 3.

§ 8. Ensembles denses, frontières, non-denses.

I. Définitions. 1. X est un ensemble dense lorsque $\overline{X} = 1$ ¹⁾.

2. X est un ensemble frontière lorsque son complémentaire est dense, c. à d. lorsque $\overline{1-X} = 1$.

3. X est un ensemble non-dense lorsque sa fermeture est un ensemble frontière, c. à d. lorsque $\overline{1-\overline{X}} = 1$ ²⁾.

Exemples. Dans l'espace des nombres réels, les nombres rationnels constituent un ensemble dense et frontière. Cependant, cet ensemble n'est pas non-dense.

Dans le plan, la circonférence d'un cercle est non-dense.

Dans l'intervalle 01, l'ensemble C de Cantor est non-dense.

On voit aussitôt que tout sur-ensemble d'un ensemble dense est dense, tout sous-ensemble d'un ensemble frontière est frontière, tout sous-ensemble d'un ensemble non-dense est non-dense. La fermeture d'un ensemble non-dense est non-dense.

Tout ensemble non-dense est frontière. Inversement, tout ensemble frontière et fermé est non-dense.

Un ensemble frontière ne peut être ouvert que s'il est vide.

II. Conditions nécessaires et suffisantes³⁾. L'égalité $\overline{1-X} = 1$ équivaut à la formule $\text{Int}(X) = 0$. Les ensembles frontières peuvent donc être définis par la condition qu'ils ne contiennent aucun point intérieur ou encore, qu'ils ne contiennent aucun ensemble ouvert non vide. L'égalité $\text{Int}(X) = 0$ étant équivalente à l'inclusion $X \subset \text{Fr}(X)$ (voir § 6, II (3)), on peut aussi définir un ensemble frontière comme ensemble contenu dans sa frontière ou encore: comme ensemble satisfaisant à l'inclusion $X \subset \overline{1-X}$. On en conclut que pour que $\overline{X}$ soit un ensemble frontière, il faut et il suffit que l'on ait $\overline{X} \subset \overline{1-\overline{X}}$ ou, ce qui revient au même, que

$$X \subset \overline{1-\overline{X}}.$$

Cette dernière inclusion caractérise donc les ensembles non-denses.

¹⁾ G. Cantor, Math. Ann. 15 (1879), p. 2.

²⁾ Cette notion remonte à P. du Bois-Reymond, Die allgemeine Functionentheorie I, Tübingen 1882.

³⁾ Pour de nombreuses propriétés des ensembles denses, frontières et non-denses, voir A. D. Wallace, On non-boundary sets, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939), p. 420.

Une autre condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble X soit non-dense est la suivante: chaque ensemble ouvert non vide contient un ensemble ouvert non vide et disjoint de X .

En effet, si X est non-dense, l'ensemble $\overline{X}$, comme ensemble frontière, ne contient aucun ensemble ouvert non vide. Donc, G étant un ensemble ouvert ($\neq 0$) arbitraire, l'ensemble $G - \overline{X}$ est non vide, ouvert, et disjoint de X .

D'autre part, si X n'est pas non-dense, $\overline{X}$ n'est pas un ensemble frontière, donc $\text{Int}(\overline{X}) \neq 0$. Or, G étant un sous-ensemble ouvert non vide de $\text{Int}(\overline{X})$, il vient $G \subset \text{Int}(\overline{X}) \subset \overline{X}$, d'où $G \cdot \overline{X} \neq 0$ donc $GX \neq 0$ (voir § 5, III) ce qui prouve que l'ensemble ouvert non vide $\text{Int}(\overline{X})$ ne contient aucun ensemble ouvert non vide qui soit disjoint de X .

III. Opérations. La somme d'un ensemble frontière et d'un ensemble non-dense est un ensemble frontière¹⁾.

Soit, en effet, $\overline{1-X} = 1 = \overline{1-\overline{Y}}$. En tenant compte de la règle 3 du § 4, on conclut que

$$1 - \overline{Y} = \overline{1 - \overline{X} - \overline{Y}} \subset \overline{(1-X) - \overline{Y}} = \overline{1 - (X + \overline{Y})},$$

d'où $1 = \overline{1 - \overline{Y} \subset \overline{1 - (X + \overline{Y})}}$ et finalement $\overline{1 - (X + \overline{Y})} = 1$.

Il en résulte que la somme de deux, donc d'un nombre fini d'ensembles non-denses est non-dense²⁾.

Car, X et Y étant non-denses, il en est de même des ensembles $\overline{X}$ et $\overline{Y}$. D'après ce qui précède l'ensemble $\overline{X} + \overline{Y}$ est frontière et, comme ensemble fermé, il est non-dense. Il en est de même de $X + Y$, puisque $X + Y \subset \overline{X} + \overline{Y}$.

$\{X_i\}$ étant une famille d'ensembles ouverts relativement à la somme $\sum_i X_i$, si chaque X_i est un ensemble frontière, $\sum_i X_i$ l'est également; si chaque X_i est non-dense, $\sum_i X_i$ l'est également.

C'est une conséquence des formules (i) et (ii) du § 6, IV, en y posant $\text{Int}(X_i) = 0$ et $\text{Int}(\overline{X}_i) = 0$ respectivement.

¹⁾ tandis que la somme de deux ensembles frontières peut ne pas être un ensemble frontière: tel est le cas de l'ensemble des nombres rationnels et de celui des nombres irrationnels dans l'espace des nombres réels.

²⁾ Cf. S. Janiszewski, Thèse (1911) p. 26.

IV. Décomposition de la frontière. *La frontière d'un ensemble se compose de deux ensembles frontières, à savoir, de l'ensemble $X \cdot \overline{1-X} = X - \text{Int}(X)$ et de $\overline{X} - X$.*

La formule $\text{Fr}(X) = X \cdot \overline{1-X} + (\overline{X} - X)$ a été établie au § 6 (formule 6). Il suffit de prouver que l'ensemble $X \cdot \overline{1-X}$ est un ensemble frontière, car l'ensemble $\overline{X} - X$ s'en obtient par substitution de $1-X$ à X . Or, on a $1 = \overline{1-X} + (1 - \overline{1-X}) \subset \overline{1-X} + 1 - \overline{1-X} = (\overline{1-X}) + (1 - \overline{1-X}) = \overline{1-X \cdot \overline{1-X}}$, c. q. f. d.

Il est à remarquer que nous avons démontré, en même temps, que les ensembles frontières peuvent être identifiés aux ensembles de la forme $X \cdot \overline{1-X}$ (donc aussi à ceux de la forme $\overline{X} - X$).

V. Ensembles dont la frontière est non-dense. *Si l'un des ensembles $X \cdot \overline{1-X}$ ou $\overline{X} - X$ est non-dense, la frontière $\text{Fr}(X)$ est non-dense, car, d'après III, elle est alors un ensemble frontière, donc, en tant qu'ensemble fermé, elle est non-dense.*

En particulier, si X est fermé, on a $\overline{X} - X = 0$. Par conséquent, la frontière d'un ensemble fermé est non-dense. De même, la frontière d'un ensemble ouvert est non-dense.

En vue d'établir une condition nécessaire et suffisante pour que $\text{Fr}(X)$ soit non-dense, remarquons d'abord que les ensembles dont la frontière est non-dense constituent un corps, c. à d. que la somme, le produit et la différence de deux ensembles de ce genre est encore un ensemble de ce genre¹⁾.

Cela résulte directement des formules 8, 9 et 4 du § 6, II et du fait que la somme de deux ensembles non-denses est non-dense.

Pour que la frontière de X soit non-dense, il faut et il suffit que X soit la somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense.

¹⁾ Ainsi par exemple, la frontière d'une différence de deux ensembles fermés est non-dense. Il en est encore de même des ensembles qui s'obtiennent à partir des ensembles fermés par l'application itérée de la soustraction et de l'addition un nombre fini de fois. Une généralisation de ce fait aux opérations *infinies* sera traitée au § 12. Une autre famille importante d'ensembles ayant la frontière non-dense est celle des ensembles *clairsemés* (voir § 9). La notion d'ensemble à frontière non-dense correspond à celle de fonction *ponctuellement discontinue* (voir § 13, VI).

Considérons, en effet, l'identité

$$X = \text{Int}(X) + [X - \text{Int}(X)].$$

Si $\text{Fr}(X)$ est non-dense, l'ensemble $X - \text{Int}(X)$ l'est à plus forte raison. La formule précédente montre donc que X est la somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense.

Remarquons, d'autre part, que N étant un ensemble non-dense, $\text{Fr}(N)$ est aussi non-dense comme sous-ensemble de l'ensemble $\overline{N}$, qui est non-dense. Par conséquent, si X est somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense, donc de deux ensembles ayant la frontière non-dense, $\text{Fr}(X)$ est aussi non-dense, c. q. f. d.

Il résulte du théorème précédent que *pour que $\text{Fr}(X)$ soit non-dense, il faut et il suffit que X soit une différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble non-dense.*

Car d'une part $\text{Fr}(X) = \text{Fr}(1-X)$ et d'autre part, si X est somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense, $1-X$ est différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble non-dense, et réciproquement, puisque $1-(G+N) = (1-G)-N$.

Dans la famille des ensembles ayant la frontière non-dense les notions d'ensemble frontière et d'ensemble non-dense coïncident.

En effet, si X est un ensemble frontière de la forme $X = G + N$, l'ensemble ouvert G est vide, donc X est identique à l'ensemble non-dense N .

VI. Relativisation. Si $X \subset E$, X est par définition, *dense, frontière, non-dense relativement à E* , lorsqu'on a respectivement

$$\overline{X} \cdot E = E, \quad \overline{E - X} \cdot E = E, \quad \overline{E - X} \cdot E = E,$$

c. à d. lorsque $E \subset \overline{X}$, $E \subset \overline{E - X}$, $E \subset \overline{E - X}$ respectivement.

D'après II, la condition pour que X soit frontière (respectivement non-dense) relativement à E , s'exprime aussi par l'inclusion

$$X \subset \overline{E - X} \quad (\text{respectivement } X \subset \overline{E - X}).$$

On voit aussitôt que

1. X est dense dans $\overline{X}$; par conséquent $\overline{X} - X$ est frontière dans $\overline{X}$; d'après § 6, II (12), l'ensemble $X \cdot \text{Int}[\text{Fr}(X)]$ est simultanément dense et frontière dans $\text{Int}[\text{Fr}(X)]$;

2. si X est dense dans E , X est dense dans chaque sous-ensemble de E (qui contient X); si X est frontière (ou non-dense) dans E , X l'est également relativement à chaque sur-ensemble de E ;

3. si X est dense dans Y et Y l'est dans Z , X est dense dans Z . En particulier, si X est dense dans Y , X est dense dans $\bar{Y}$.

4. si X est non-dense dans $\bar{E}$, $X\bar{E}$ est non-dense dans $\bar{E}$.

En effet, on a par hypothèse: $X \subset \bar{E} - X$. Donc en vertu de la formule $\bar{E} - \bar{X} = \bar{E} - \bar{X} \subset \bar{E} - \bar{X}$, il vient $X \subset \bar{E} - X$, d'où $X\bar{E} \subset \bar{E} - \bar{X} \subset \bar{E} - \bar{X}$, c. q. f. d.

5. G étant un ensemble ouvert, si X est frontière (non-dense), il en est de même d: XG relativement à G , et de $X\bar{G}$ relativement à $\bar{G}$.

En effet, si X est un ensemble frontière, on a $X \subset 1 - X$, donc $XG \subset 1 - \bar{X} \cdot G$ et, comme on a d'après § 5, III, $1 - X \cdot G \subset G - X$, il vient $XG \subset G - X = \bar{G} - XG$.

De façon analogue, si X est non-dense, on a $X \subset 1 - X$, d'où $XG \subset 1 - \bar{X} \cdot G \subset G - \bar{X}G$.

En outre, $X \cdot \bar{G} = XG + X \cdot (\bar{G} - G)$ et l'ensemble $\bar{G} - G$, donc $X \cdot (\bar{G} - G)$, étant selon 1 non-dense dans $\bar{G}$, le reste de l'énoncé 5 résulte de III.

VII. Localisation. Par définition, X est frontière (non-dense) au point p , lorsqu'il existe un entourage G de p tel que l'ensemble XG soit frontière (non-dense).

Ainsi p. ex., dans le plan, l'ensemble composé d'un cercle (intérieur y compris) et d'un segment n'ayant qu'un seul point p commun avec le cercle, est localement non-dense en chaque point du segment, sauf au point p , mais cet ensemble n'est non-dense en aucun point du cercle.

Chaque sous-ensemble d'un ensemble frontière (non-dense) l'étant également, on peut, dans la définition précédente, remplacer le terme *entourage* par *entourage ouvert* (cf. § 7, V).

Pour que X soit non-dense au point p , il faut et il suffit que $\bar{X}$ soit un ensemble frontière en ce point.

En effet, si X est non-dense au point p , il existe un ensemble ouvert G contenant p et tel que GX soit non-dense, c. à d. que $\overline{GX}$ soit frontière. Il vient (§ 5, III): $\overline{GX} = G \cdot \bar{X}$; l'ensemble $G \cdot \bar{X}$ est donc frontière, ce qui implique que $\bar{X}$ est frontière au point p .

Inversement, si $\bar{X}$ n'est pas frontière au point $p \in G$, il existe un ensemble ouvert H tel que $0 \neq H \subset G \cdot \bar{X}$. Donc $H \subset G \cdot \bar{X} \subset \overline{GX}$, ce qui montre que X n'est pas non-dense au point p .

$\text{Int}(\bar{X})$ est l'ensemble des points en lesquels X n'est pas localement frontière; $\text{Int}(\bar{X})$ est celui où X n'est pas localement non-dense.

Soient, en effet, $p \in \text{Int}(\bar{X})$ et G un entourage ouvert de p . L'inégalité $G \cdot \text{Int}(\bar{X}) \neq 0$ entraîne $0 \neq G \cdot \text{Int}(\bar{X}) \subset GX$, ce qui prouve que X n'est pas frontière au point p .

Inversement, si $p \in 1 - \text{Int}(\bar{X})$, l'ensemble $G = 1 - \text{Int}(\bar{X})$ est un entourage ouvert de p tel que GX soit frontière, car

$$\text{Int}(GX) = \text{Int}(G) \cdot \text{Int}(X) = [1 - \text{Int}(\bar{X})] \cdot \text{Int}(X) = 0.$$

La deuxième partie de notre proposition résulte de la première en vertu de la proposition précédente.

L'ensemble des points de X où X est localement frontière (non-dense) est un ensemble frontière (non-dense).

En particulier, si X est en chacun de ses points localement frontière (non-dense), X est un ensemble frontière (non-dense).

On a, en effet, $X - \text{Int}(\bar{X}) \subset X - \text{Int}(X)$ et ce dernier ensemble étant d'après le N° IV un ensemble frontière, l'ensemble $X - \text{Int}(\bar{X})$ l'est également.

De façon analogue, $X - \text{Int}(\bar{X}) \subset \bar{X} - \text{Int}(\bar{X})$ et, ce dernier ensemble étant fermé et frontière, donc non-dense, $X - \text{Int}(\bar{X})$ est non-dense.

Chaque sous-ensemble d'un ensemble non-dense étant non-dense et la somme de deux ensembles non-denses l'étant également, la famille des ensembles non-denses est héréditaire et additive. On peut donc, dans les formules (1)-(7) du § 7, V, substituer $\text{Int}(\bar{X})$ à X^* . Il vient, en particulier:

$$(i) \quad \overline{\text{Int}(\bar{X}) + \text{Int}(\bar{Y})} = \overline{\text{Int}(\bar{X} + \bar{Y})}, \quad \sum_i \overline{\text{Int}(\bar{X}_i)} \subset \overline{\text{Int}(\sum_i \bar{X}_i)}.$$

De la proposition 5 du N° VI nous déduisons que:

(ii) G étant un ensemble ouvert et X un ensemble frontière (non-dense) en un point p , XG l'est au point p relativement à G (si $p \in G$) et $X \cdot \bar{G}$ l'est relativement à $\bar{G}$ (si $p \in \bar{G}$).

En effet, il existe par hypothèse un entourage H de p tel que HX soit frontière (non-dense). Donc d'après VI, 5 (où l'on substitue HX à X), HGX est frontière (non-dense) relativement à G et HGX l'est relativement à $\bar{G}$; de plus, les ensembles HG et $H\bar{G}$ sont des entourages de p relatifs à G et à $\bar{G}$ respectivement.

VIII. Domaines fermés¹⁾. Un ensemble X est dit un *domaine fermé* lorsqu'il est fermé et n'est localement non-dense en aucun de ses points; autrement dit (voir N° VII), lorsque $X = \text{Int}(\bar{X})$, ou encore, lorsque $X = 1 - 1 - \bar{X}$.

Les domaines fermés peuvent être définis aussi comme les *fermetures des ensembles ouverts*²⁾. En effet, la formule précédente montre que chaque domaine fermé est la fermeture d'un ensemble ouvert. Inversement, si G est ouvert et $X = \bar{G}$, G est un sous-ensemble ouvert de X . On a par conséquent $G \subset \text{Int}(X) \subset X$, d'où $\bar{G} \subset \text{Int}(\bar{X}) \subset \bar{X} = \bar{G}$, donc $X = \text{Int}(\bar{X})$.

L'inclusion $\text{Fr}(X) \subset \text{Int}(\bar{X})$ caractérise les domaines fermés parmi les ensembles fermés.

Elle est, en effet, satisfaite si X est un domaine fermé, puisque $\text{Fr}(X) \subset X$. Inversement, si $\text{Fr}(X) \subset \text{Int}(\bar{X})$, il vient

$$\bar{X} = \text{Fr}(X) + \text{Int}(\bar{X}) = \text{Fr}(X) + \text{Int}(X) = \text{Int}(\bar{X}).$$

Si X est un domaine fermé, on a $\text{Fr}(X) = \text{Fr}(1 - X) = \text{Fr}[\text{Int}(X)]$.

Car $\text{Fr}(X) = X \cdot 1 - \bar{X} = 1 - 1 - \bar{X} \cdot 1 - \bar{X} = \text{Fr}(1 - X)$.

La somme de deux domaines fermés est un domaine fermé.

Plus généralement: $\{D_i\}$ étant une famille de domaines fermés, l'ensemble $\sum D_i$ est un domaine fermé.

Ce sont des conséquences de VII (i).

X étant un sous-ensemble d'un domaine fermé D et p étant un point de D , la condition nécessaire et suffisante pour que X soit frontière (non-dense) au point p , est que X le soit relativement à D en ce point.

¹⁾ Pour ce terme, cf. H. Lebesgue, Fund. Math. 2 (1921), p. 273. Pour les théorèmes, voir mes notes de Fund. Math. 3 (1922), pp. 192—5 et Fund. Math. 5 (1924), p. 117.

²⁾ L'ensemble $\text{Int}(\bar{X})$ étant un domaine fermé, il en résulte que

$$\text{Int}(\text{Int}(\bar{X})) = \text{Int}(\bar{X}), \quad \text{donc que} \quad 1 - 1 - 1 - \bar{X} = 1 - \bar{X}.$$

Cette identité implique que le nombre des ensembles qui s'obtiennent à partir de X à l'aide des opérations $\bar{X}$ et $1 - X$ est fini (voir § 4, V).

En effet, la condition est nécessaire, car on peut, dans VII (ii), remplacer $\bar{G}$ par D . Inversement, si G est ouvert et GX est frontière (non-dense) relativement à D , il l'est relativement à l'espace tout entier, ce qui prouve que la condition est suffisante.

On voit ainsi que, dans les mêmes hypothèses concernant X et D , la propriété de X d'être un *ensemble frontière, non-dense, un domaine fermé, équivalent respectivement à la même propriété relative par rapport à D* , puisque la première (la deuxième) propriété signifie que X est en chacun de ses points localement frontière (non-dense) et la troisième propriété signifie que X n'est non-dense en aucun de ses points.

On en conclut aussi que la *propriété d'être un domaine fermé relatif est transitive*, c. à d. que, si X est un domaine fermé par rapport à Y et Y par rapport à Z , X l'est aussi par rapport à Z .

IX. Domaines ouverts. Un *domaine ouvert* est le complémentaire d'un domaine fermé¹⁾.

Les domaines ouverts peuvent être caractérisés aussi par l'égalité $X = \text{Int}(\bar{X})$. En effet, si l'on a $X = \text{Int}(\bar{X}) = 1 - 1 - \bar{X}$, l'ensemble X , comme complémentaire du domaine fermé $1 - \bar{X}$, est un domaine ouvert. Inversement, si X est un domaine ouvert et si l'on pose $D = 1 - X$, il vient $1 - 1 - \bar{X} = 1 - 1 - 1 - \bar{D} = 1 - D = X$, puisque D est un domaine fermé.

On peut aussi définir les domaines ouverts comme ensembles ouverts satisfaisant à l'inclusion $\text{Fr}(X) \subset \text{Int}(1 - \bar{X})$. Car $\text{Fr}(X) = \text{Fr}(1 - X)$ et, pour que $1 - X$ soit un domaine fermé, il faut et il suffit que $\text{Fr}(1 - X) \subset \text{Int}(1 - \bar{X})$.

Si X est un domaine ouvert, on a $\text{Fr}(X) = \text{Fr}(\bar{X}) = \text{Fr}(1 - \bar{X})$.

Car $\text{Fr}(X) = \bar{X} - X = \bar{X} - \text{Int}(\bar{X}) = \bar{X} \cdot 1 - \bar{X} = \text{Fr}(\bar{X})$.

La somme de deux domaines fermés étant un domaine fermé, on en conclut que le *produit* de deux domaines ouverts est un domaine ouvert.

¹⁾ Pour une application intéressante de cette notion au problème de l'interprétation topologique du Calcul des propositions, voir A. Tarski, Fund. Math. 31 (1938), p. 127. Pour des applications à l'Algèbre de Boole, voir G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Coll. Publ. 25, New York 1940, p. 103; M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), p. 375 et Fund. Math. 29 (1937), p. 263.

§ 9. Points d'accumulation.

I. Définitions. p est un point d'accumulation de l'ensemble X lorsque $p \in \overline{X-p}$. L'ensemble X' des points d'accumulation de X est dit l'ensemble dérivé de X .

p est un point isolé de X , lorsque $p \in X - X'$.

Exemples. Tout nombre réel est point d'accumulation de l'ensemble de tous les nombres réels. Tout nombre naturel est isolé dans l'ensemble de tous les nombres naturels; le dérivé de cet ensemble est vide. L'ensemble A des nombres $1/n + 1/m$ ($n=1,2,\dots, m=1,2,\dots$) a pour dérivé l'ensemble composé des nombres $1/n$ et du nombre 0; son deuxième dérivé (c. à d. le dérivé du dérivé) se compose du nombre 0 seul; son troisième dérivé est vide.

Dans le Chapitre II, § 19, N° IV, nous étudierons les dérivés d'ordre transfini.

II. Equivalences. Pour que $p \in X'$, il faut et il suffit que tout entourage E de p satisfasse à l'inégalité $XE - p \neq \emptyset$.

Pour que p soit un point isolé de X , il faut et il suffit qu'il existe un entourage E de p tel que $XE = p$.

Car, d'après le § 7, II, la condition $p \in \overline{X-p}$ s'exprime par l'inégalité $(X-p) \cdot E \neq \emptyset$.

D'après la même proposition, on peut remplacer le terme entourage par entourage ouvert.

Les termes „l'inégalité $XE - p \neq \emptyset$ “ peuvent être remplacés par la condition „ XE est infini“.

En effet, si E est un entourage de p tel que l'ensemble XE est fini, alors $XE - p$ est fermé et l'ensemble $A - E - (XE - p)$ est un entourage de p tel que $XA - p = \emptyset$.

Ceci établi, on en conclut que la condition $p \in X'$ revient à dire: X n'est pas localement fini au point p .

III. Calcul²⁾. La propriété d'être un ensemble fini étant héréditaire et additive (§ 7, V), on peut appliquer à l'opération X' les formules du § 7 concernant la localisation. Il vient, en particulier:

¹⁾ Notions dues à G. Cantor, Math. Ann. 5 (1872), p. 129. Cantor employait en outre les termes „cohérence“ et „adhérence“ pour désigner les ensembles $X \cdot X'$ et $X - X'$ respectivement.

²⁾ Des formules analogues concernant l'opération $X \cdot X'$ (la cohérence de X) ont été établies par M. Zarycki, Allgemeine Eigenschaften der Cantor-schen Kohärenzen, Trans. Amer. Math. Soc. 30, p. 498.

1. $(X+Y)' = X' + Y'$
2. $X' - Y' \subset (X - Y)'$
3. $X'' \subset X'$
4. $(\bigcup_i X_i)' \subset \bigcup_i X_i'$
5. $\sum_i X_i' \subset (\sum_i X_i)'$
6. $\overline{X'} = X'$
7. $X \subset Y$ implique $X' \subset Y'$.

On a, en outre, la formule

$$8. \quad \overline{X} = X + X'.$$

En effet, si $p \in \overline{X}$ et $p \notin X$, on en tire $X - p = X$ et $p \in \overline{X - p}$; par conséquent $p \in X'$. Inversement, si $p \in X'$, on a $p \in \overline{X - p} \subset \overline{X}$.

En vertu de l'identité évidente $p' = 0$, on conclut de 1 que le dérivé de chaque ensemble fini est vide et que

$$9. \quad (X - p)' = X' = (X + p)',$$

c. à d. qu'on n'altère pas le dérivé d'un ensemble en ajoutant à cet ensemble, ou en lui enlevant, un nombre fini de points.

IV. Ensembles isolés. Un ensemble composé exclusivement de points isolés est dit ensemble isolé.

Tout ensemble fini est isolé. Tout sous-ensemble d'un ensemble isolé est isolé.

L'ensemble $X - X'$ est isolé, car chaque point de $X - X'$, comme point isolé de X , est un point isolé de $X - X'$.

La condition pour que p soit un point isolé de l'espace s'exprime par la formule $p \notin \overline{1 - p}$, qui exprime que le point p constitue un ensemble ouvert. Pour que l'espace soit isolé, il faut et il suffit qu'on ait $1' = 0$, ou encore: que chaque sous-ensemble de cet espace soit fermé.

V. Ensembles denses en soi. X est dit dense en soi, lorsque X ne contient aucun point isolé, c. à d. lorsque $X \subset X'$.

Si X est fermé et dense en soi, X est dit parfait; cette condition peut être exprimée par l'égalité $X = X'$ (puisque la condition pour que X soit fermé s'exprime d'après III, 8 par l'inclusion $X' \subset X$).

¹⁾ G. Cantor, Math. Ann. 23 (1884), p. 471.

1. Si X est dense en soi, $\bar{X}$ est parfait.

Car, par hypothèse, $X \subset X'$, d'où $X' = X + X' = \bar{X}$ d'après III, 8. En appliquant III, 1 et 3, il vient $(\bar{X})' = X' + X'' = X' = \bar{X}$, donc $(\bar{X})' = \bar{X}$.

2. La somme d'un nombre arbitraire d'ensembles denses en soi est dense en soi (en vertu de la formule III 5).

3. Si l'espace est dense en soi, chaque ensemble ouvert, ainsi que chaque ensemble dense, est dense en soi.

Posons, en effet, $1 \subset 1'$. G étant ouvert, on a $G = 1 - F$ et $F' \subset F$. Il vient $1 - F \subset 1 - F' \subset 1' - F' \subset (1 - F)' = G'$.

Soit, d'autre part, $\bar{X} = 1$. Donc $X + X' = 1$, d'où $X' + X'' = 1$; comme $X' \subset CX'$ et $1 \subset 1'$, on en tire $1 \subset CX'$, donc $X \subset A'$.

4. Si X est dense et frontière, l'espace est dense en soi.

Par hypothèse $\bar{X} = 1 - X = 1$. Soit $p \in X$; donc $1 - X \subset 1 - p$, d'où $1 = 1 - \bar{X} \subset 1 - p$ et par suite $p \in 1 - p$, donc $p \in 1'$. Ainsi $X \subset 1'$. Par raison de symétrie, $1 - X \subset 1'$. Donc $1 \subset 1'$.

5. Les ensembles $\text{Int}[\text{Fr}(X)]$ et $X \cdot \text{Int}[\text{Fr}(X)]$ sont denses en soi quel que soit X .

Selon § 8, VI, 1, l'ensemble $X \cdot \text{Int}[\text{Fr}(X)]$ est dense et frontière dans $\text{Int}[\text{Fr}(X)]$. Ce dernier est donc dense en soi d'après 4. Comme sous-ensemble dense d'un ensemble dense en soi, l'ensemble $X \cdot \text{Int}[\text{Fr}(X)]$ est dense en soi selon 3.

Exemple. L'ensemble C de Cantor (§ 1, VIII) est parfait (et, en même temps, non-dense) dans l'intervalle 01.

VI. Ensembles clairsemés. X est dit *clairsemé*¹⁾ lorsque X ne contient aucun ensemble dense en soi et non vide.

Tout ensemble isolé est clairsemé. Tout sous-ensemble d'un ensemble clairsemé est clairsemé.

La fermeture d'un ensemble clairsemé (même d'un ensemble isolé) peut ne pas être clairsemée. En effet, écrivons chaque nombre rationnel de l'intervalle 01 sous la forme de fraction irréductible p/q ; l'ensemble des points $(p/q, 1/q)$ du plan est isolé, bien que sa fermeture contienne l'intervalle 01 tout entier.

1. Dans un espace dense en soi, chaque ensemble clairsemé est non-dense. Son complémentaire est donc dense en soi.

En effet, si X n'est pas non-dense, l'ensemble $G = \text{Int}(\bar{X})$ est un ensemble ouvert non vide. Il vient $G = G\bar{X} \subset G\bar{X}$, ce qui prouve que $G\bar{X}$ est dense dans l'ensemble G , qui — comme en-

¹⁾ „Separierte Menge“ de G. Cantor, ibid.

semble ouvert — est d'après V, 3, dense en soi. Selon la II-ème partie de la même proposition, $G\bar{X}$ est dense en soi. Donc X n'est pas clairsemé. D'après la proposition V, 3, le complémentaire d'un ensemble frontière est dense en soi.

2. La somme de deux ensembles clairsemés est clairsemée.

Supposons, en effet, que X et Y soient clairsemés et que Z soit dense en soi et tel que $0 \neq Z \subset X + Y$. Donc $Z - ZX \subset Y$ et, Z étant dense en soi et ZX étant clairsemé, $Z - ZX \neq 0$. De plus, en vertu de la proposition 1 (en y posant $1 = Z$), l'ensemble $Z - ZX$ est dense en soi. Y ne peut donc être clairsemé.

3. Tout espace se compose de deux ensembles disjoints dont l'un¹⁾ est parfait et l'autre clairsemé (bien entendu, l'un ou l'autre peut être vide).

Soit, en effet, P la somme de tous les ensembles denses en soi. Selon V, 2 et 1, P et $\bar{P}$ sont denses en soi; donc, chaque ensemble dense en soi étant sous-ensemble de P , il vient $\bar{P} \subset P$, ce qui prouve que P est fermé. Comme fermé et dense en soi, P est parfait. Enfin, $1 - P$ ne contient aucun ensemble dense en soi.

4. La frontière d'un ensemble clairsemé est non-dense.

Comme sous-ensemble de l'ensemble clairsemé X , l'ensemble $X \cdot \text{Int}[\text{Fr}(X)]$ (qui est dense en soi en vertu de V, 5) est vide. Il vient $\text{Int}[\text{Fr}(X)] = 0$, puisque l'ensemble $X \cdot \text{Int}[\text{Fr}(X)]$ est dense dans $\text{Int}[\text{Fr}(X)]$ (selon § 8, VI, 1). L'ensemble $\text{Fr}(X)$ est donc un ensemble frontière; comme il est aussi fermé, il est non-dense.

Ceci établi, on conclut de § 8, V qu'un ensemble clairsemé est la somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense (ainsi que la différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble non-dense); si un ensemble clairsemé est un ensemble frontière, il est non-dense.

5. La condition nécessaire et suffisante pour que X soit clairsemé est que, pour tout ensemble parfait P , XP soit non-dense dans P ²⁾.

Soit, en effet, X un ensemble clairsemé. D'après 1, si P est parfait (ou, plus généralement, dense en soi) et si P est considéré

¹⁾ nommé *noyau* de l'espace. Des règles du calcul concernant le noyau, analogues à celles de la fermeture, du dérivé etc., ont été établies par M. Zarycki, *Über den Kern einer Menge*, Jahresber. d. D. Math. Ver. **39** (1930), p. 154.

²⁾ Cf. M. Fréchet, *Quelques propriétés des ensembles abstraits*, Fund. Math. **10** (1927), p. 330. Voir aussi A. Denjoy, Journ. de Math. 1916, où cette condition est admise comme définition des ensembles clairsemés.

comme espace initial, l'ensemble XP y est non-dense. La condition est donc nécessaire.

Pour prouver qu'elle est suffisante, admettons que X ne soit pas clairsemé. Soit D un ensemble dense en soi et non vide, contenu dans X . Posons $P = \bar{D}$. Si la condition du théorème est supposée satisfaite, $X\bar{D}$ est non-dense dans $\bar{D}$. Donc (§ 8, VI, 4), XD est non-dense dans D , ce qui est impossible, car $XD = D \neq \emptyset$.

Remarquons finalement que dans l'énoncé 5 le terme *parfait* peut être remplacé par *dense en soi*.

§ 10. Ensembles de première catégorie.

I. Définition. Un ensemble est dit de première catégorie lorsqu'il est somme d'une suite dénombrable d'ensembles non-denses ¹⁾.

Exemples. Dans l'ensemble des nombres réels, l'ensemble des nombres rationnels est évidemment de I-e catégorie. Cependant l'ensemble des nombres irrationnels ne l'est pas: cela résulte du fait que l'espace $\mathcal{E}$ des nombres réels n'est pas de I-e catégorie (par rapport à soi-même).

Ce dernier énoncé ²⁾ peut être établi comme suit: soit $Q = \sum_{n=1}^{\infty} N_n$ un ensemble de I-e catégorie (N_n non-dense). L'ensemble N_1 étant non-dense, il existe un intervalle fermé I_1 tel que $I_1 \cdot N_1 = \emptyset$. Procédons par induction: étant donnée une suite finie d'intervalles, chacun emboîté dans le précédent: $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_{n-1}$, soit I_n un intervalle tel que l'on ait $I_n \subset I_{n-1}$ et $I_n \cdot N_n = \emptyset$ (un intervalle de ce genre existe selon § 8, II, puisque N_n est non-dense). D'après un théorème classique d'Ascoli, il existe un point commun à tous les I_n , $n = 1, 2, \dots$; ce point n'appartient donc pas à Q et par suite $\mathcal{E} \neq Q$.

La notion d'ensemble de I-re catégorie intervient fréquemment dans la théorie des fonctions; citons comme exemple le théorème suivant (voir § 27, X): étant donnée une suite convergente de fonctions continues $\{f_n(x)\}$, les points de discontinuité de la fonction $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ constituent un ensemble de I-e catégorie.

Dans de nombreux problèmes de Topologie, le rôle de la notion d'ensemble de I-e catégorie est analogue à celui d'ensemble de mesure 0 dans la théorie de la mesure (ensembles „négligeables“).

¹⁾ Notion introduite par R. Baire, Ann. di Mat. (3) **3** (1899), p. 65. M. A. Denjoy emploie le terme „gerbé“ pour les ensembles de I-e catégorie et le terme „résiduel“ pour leurs complémentaires. Voir Journ. de Math. (7), **1** (1915), p. 123—5.

²⁾ C'est un cas particulier du théorème de Baire (voir plus loin Chap. III, § 30, IV).

Il est remarquable que la famille des sous-ensembles de I-e catégorie de l'intervalle est — en admettant l'hypothèse du continu — équivalente au sens de la Théorie des ensembles à la famille des sous-ensembles de mesure 0; c. à d. qu'il existe une transformation biunivoque de l'intervalle en lui-même qui établit une correspondance biunivoque entre les éléments de ces deux familles ¹⁾.

II. Propriétés. La famille des ensembles de I-e catégorie est *héréditaire* et *additive* (même au sens dénombrable), c. à d. que chaque sous-ensemble d'un ensemble de I-e catégorie est de I-e catégorie et que la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de I-e catégorie est encore de I-e catégorie.

Tout ensemble frontière F_σ est de I-e catégorie.

En effet, si l'ensemble $X = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$ est un ensemble frontière, chacun des ensembles, F_n l'est également; comme ensemble frontière et fermé, F_n est non-dense.

Tout ensemble de I-e catégorie est contenu dans un ensemble F_σ de I-e catégorie.

On a, en effet, $X = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} \bar{N}_n$ et, l'ensemble N_n étant non-dense, $\bar{N}_n$ l'est également (voir § 8, I).

III. Théorème sur l'additivité. $\{X_i\}$ étant une famille (de puissance arbitraire) d'ensembles ouverts relativement à la somme $S = \sum_i X_i$, si chaque X_i est un ensemble de I-e catégorie, S l'est également ²⁾.

Soit, en effet, $G_1, G_2, \dots, G_\alpha, \dots$ une suite (transfinie) bien ordonnée d'ensembles ouverts non vides et disjoints, assujettie aux deux conditions: 1° SG_α est de I-e catégorie, 2° la suite est saturée, c. à d. qu'il n'existe aucun ensemble G ouvert, non vide, disjoint de tous les termes de la suite considérée et tel que SG soit de I-e catégorie.

¹⁾ W. Sierpiński, Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle, Fund. Math. **22** (1934), p. 276 et Hypothèse du continu, Monographie Matematyczne, t. **4** (1934), p. 77.

Dans le même ordre d'idées, voir E. Szpilrajn-Marczewski, On the equivalence of some classes of sets, Fund. Math. **30** (1938), p. 235 et J. C. Oxtoby et S. M. Ulam, On the equivalence of any set of first category to a set of measure zero, Fund. Math. **31** (1938), p. 201.

²⁾ S. Banach, Théorème sur les ensembles de première catégorie, Fund. Math. **16** (1930), p. 395.

On a évidemment $S = \sum_{\alpha} SG_{\alpha} + (S - \sum_{\alpha} G_{\alpha})$.

Le théorème sera démontré, lorsque nous aurons prouvé que:

1. $\sum_{\alpha} SG_{\alpha}$ est de I-e catégorie,
2. $S - \sum_{\alpha} G_{\alpha}$ est non-dense.

1) L'ensemble SG_{α} étant par hypothèse de I-e catégorie, on a $SG_{\alpha} = N_1^{\alpha} + N_2^{\alpha} + \dots + N_n^{\alpha} + \dots$, où les ensembles N_n^{α} ($n = 1, 2, \dots$) sont non-denses. Posons $N_n = N_n^1 + N_n^2 + \dots + N_n^{\alpha} + \dots$. Par conséquent $\sum_{\alpha} SG_{\alpha} = N_1 + N_2 + \dots + N_n + \dots$.

Il s'agit de prouver que N_n est non-dense. Or, les ensembles G_{α} étant disjoints, l'inclusion $N_n^{\alpha} \subset G_{\alpha}$ entraîne $N_n^{\alpha} \cdot G_{\beta} = 0$ pour tout $\beta \neq \alpha$. Donc $N_n^{\beta} = N_n^{\beta} \cdot G_{\beta} = \sum_{\alpha} N_n^{\alpha} \cdot G_{\beta} = N_n \cdot G_{\beta}$, ce qui prouve que l'ensemble N_n^{β} est ouvert dans N_n . En appliquant le théorème du § 8, III, d'après lequel la somme d'ensembles ouverts dans elle et non-denses est elle-même non-dense, on conclut que l'ensemble N_n est non-dense.

2) Pour montrer que $S - \sum_{\alpha} G_{\alpha}$ est non-dense, il suffit de prouver que $1 - \sum_{\alpha} G_{\alpha}$ est non-dense, donc, ce dernier ensemble étant fermé, que $1 - \sum_{\alpha} G_{\alpha}$ est un ensemble frontière.

Supposons, par contre, que H soit un ensemble ouvert tel que $0 \neq H \subset 1 - \sum_{\alpha} G_{\alpha}$. D'après la définition de la suite $\{G_{\alpha}\}$, l'ensemble SH n'est pas de I-e catégorie. Soit X , un ensemble tel que $HX \neq 0$. Considérons l'ensemble ouvert $G = H - \overline{S - X}$.

Or, SG est de I-e catégorie, car X_i étant ouvert dans S , on a $X_i = S - \overline{S - X_i}$, donc $SG = SH - \overline{S - X_i} = HX_i \subset X_i$. D'autre part, $G \neq 0$, car, comme nous venons de prouver, $0 \neq HX \subset G$. Enfin, $G \cdot G_{\alpha} = 0$, quel que soit α , puisque $G \subset H \subset 1 - \sum_{\alpha} G_{\alpha}$.

On parvient ainsi à une contradiction avec la définition de la suite $\{G_{\alpha}\}$.

IV. Relativisation. 1. Si X est de I-e catégorie relativement à E , X l'est également relativement à chaque sur-ensemble de E .

2. Si X est de I-e catégorie relativement à $\bar{E}$, $X\bar{E}$ est de I-e catégorie relativement à E .

3. G étant un ensemble ouvert, si X est de I-e catégorie, XG l'est relativement à G et $X \cdot \bar{G}$ relativement à $\bar{G}$.

Ces trois propositions sont des conséquences immédiates des propositions § 8, VI, 2, 4 et 5.

V. Localisation. Par définition, X est de I-e catégorie dans un point p , lorsqu'il existe un entourage G de p tel que l'ensemble XG est de I-e catégorie.

L'ensemble des points où X n'est pas de I-e catégorie (points où X est de „deuxième“ catégorie) sera désigné par $D(X)$.

La famille des ensembles de I-e catégorie étant héréditaire et additive, on peut substituer $D(X)$ à X^* dans le § 7, V. On en conclut d'abord que, dans la définition précédente, le terme *entourage* peut être remplacé par *entourage ouvert*. Puis, on a les relations suivantes:

1. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$
2. $D(X) - D(Y) \subset D(X - Y)$
3. $D(\bigcup_i X_i) \subset \bigcup_i D(X_i)$
4. $\sum_i D(X_i) \subset D(\sum_i X_i)^1$
5. $XC Y$ implique $D(X) \subset D(Y)$
6. si G est ouvert, $G \cdot D(X) = G \cdot D(GX)$.

D'après le théorème du N° III, si X est en chacun de ses points de I-e catégorie, X est un ensemble de I-e catégorie. En effet, par hypothèse, chaque point p de X appartient à un ensemble ouvert G_p tel que $X \cdot G_p$ est de I-e catégorie. X est donc somme d'ensembles ouverts dans X qui sont de I-e catégorie et d'après le théorème précité, X est lui-même de I-e catégorie²). On parvient ainsi à l'équivalence:

$$7. \{X \text{ est de I-e catégorie}\} = \{X \cdot D(X) = 0\} = \{D(X) = 0\}.$$

Car l'égalité $D(X) = 0$ entraîne $X \cdot D(X) = 0$ et celle-ci implique, comme nous venons de voir, que X est de I-e catégorie. Inversement, il est évident que si X est de I-e catégorie, on a $D(X) = 0$.

De là nous concluons que

$$8. D[X - D(X)] = 0,$$

¹) L'égalité peut ne pas avoir lieu: soit par ex. dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, X_n l'intervalle $1/n \leq x \leq 1$. Comp. toutefois 13, p. 52.

²) Cette proposition se laisse établir d'une façon plus directe (sans avoir recours au théor. du N° III), lorsqu'on suppose que l'espace admet une base dénombrable composée d'ensembles ouverts $R_1, R_2, \dots$, c. à d. que chaque ensemble ouvert s'obtient par la réunion d'un certain nombre des R_n (nous ferons cette hypothèse au Chap. II, § 17). En effet, dans cette hypothèse, l'ensemble ouvert G_p peut être remplacé par un $R_{n(p)}$ et, $X \cdot R_{n(p)}$ étant de I-e catégorie, il en est de même de la somme dénombrable $\sum_{p \in X} X \cdot R_{n(p)} = X$.

c. à d. que les points de X où X est de I-e catégorie constituent un ensemble de I-e catégorie. En effet, selon 5, on a $D[X - D(X)] \subset D(X)$, donc $[X - D(X)] \cdot D[X - D(X)] \subset [X - D(X)] \cdot D(X) = 0$, d'où la formule 8 en raison de 7.

La formule 8, rapprochée de 2, implique aussitôt que $D(X) - D[D(X)] = 0$, donc que $D(X) \subset D[D(X)]$. L'inclusion inverse étant vraie selon § 7, V, (2), on en tire:

$$9. \quad D[D(X)] = D(X).$$

L'ensemble des points où X n'est pas non-dense étant égal (selon § 8, VII) à $\text{Int}(\overline{X})$, il vient:

$$10. \quad D(X) \subset \overline{\text{Int}(\overline{X})} \subset \overline{X}.$$

En tenant compte du fait que $D(X)$ est fermé (§ 7, V), on déduit de 10 la double inclusion $D[D(X)] \subset \text{Int}[\overline{D(X)}] \subset D(X)$, d'où en vertu de 9:

$$11. \quad D(X) = \overline{\text{Int}[\overline{D(X)}]},$$

ce qui prouve que $D(X)$ est un *domaine fermé* (§ 8, VIII). Ainsi $D(X) \neq 0$ implique que X n'est de I-e catégorie en aucun point de l'ensemble ouvert non vide $\text{Int}[\overline{D(X)}]$.

$$12. \quad \text{Si } D(Y) = 0, \text{ on a } D(X + Y) = D(X) = D(X - Y),$$

c. à d. que X reste de I-e catégorie au point p , si on y ajoute ou en enlève un ensemble de points de I-e catégorie. Cette proposition est une conséquence immédiate des formules 1, 2 et 5.

$$13. \quad \text{L'ensemble } D\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) - \sum_{n=1}^{\infty} D(X_n) \text{ est non-dense.}$$

Il s'agit de prouver que, G étant un ensemble ouvert non vide, il existe un ensemble ouvert non vide H tel que $H \cdot D\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) - \sum_{n=1}^{\infty} D(X_n) = 0$ et $H \subset G$.

Or, dans le cas où pour chaque n , on a $G \cdot D(X_n) = 0$, il vient $G X_n \subset X_n - D(X_n)$, donc $G \cdot \sum_{n=1}^{\infty} X_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} [X_n - D(X_n)]$, de sorte que $G \cdot \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ est selon 8 de I-e catégorie. Par conséquent $D(G \cdot \sum_{n=1}^{\infty} X_n) = 0$, ce qui implique en vertu de 6 que $G \cdot D\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = 0$ et, en posant $H = G$, on obtient l'égalité demandée.

Supposons donc qu'il existe un n tel que $G \cdot D(X_n) \neq 0$. Posons $H = G \cdot \text{Int}[\overline{D(X_n)}]$. D'après 11, on a $H \neq 0$ (voir § 5, III) et comme $H \subset D(X_n)$, H satisfait à l'égalité demandée.

VI. Formules de décomposition:

$$14. \quad X = [X - D(X)] + X \cdot D(X),$$

$$15. \quad \begin{aligned} X &= X \cdot \overline{X - D(X)} + [X - \overline{X - D(X)}] = \\ &= X - \text{Int}[\overline{D(X)}] + X \cdot \text{Int}[\overline{D(X)}]. \end{aligned}$$

Ces formules représentent une décomposition de X en deux parties disjointes dont la première est de I-e catégorie et la deuxième n'est de I-e catégorie en aucun de ses points; en outre, dans la formule 14, le premier sommande est ouvert relativement à X et dans la formule 15 il est fermé.

En effet, d'après la formule 8, l'ensemble $X - D(X)$ est de I-e catégorie, donc d'après 12: $D[X \cdot D(X)] = D(X)$, d'où $X \cdot D(X) \subset D(X) = D[X \cdot D(X)]$, ce qui prouve que l'ensemble $X \cdot D(X)$ n'est de I-e catégorie en aucun de ses points.

D'autre part, l'ensemble $X \cdot \overline{X - D(X)}$ est de I-e catégorie, comme somme de deux ensembles: $X \cdot D(X) \cdot \overline{X - D(X)}$ et $[X - D(X)] \cdot \overline{X - D(X)}$, dont le premier est non-dense, en tant que sous-ensemble de l'ensemble non-dense $D(X) \cdot \overline{1 - D(X)} = \text{Fr}[D(X)]$, et le deuxième est de I-e catégorie, en tant que sous-ensemble de l'ensemble $X - D(X)$ (cf. § 8, V et 8).

L'ensemble $X \cdot \overline{X - D(X)}$ étant de I-e catégorie, on conclut de 12 que $D[X - \overline{X - D(X)}] = D(X)$ et il vient:

$$X - \overline{X - D(X)} \subset X - [X - D(X)] = X \cdot D(X) \subset D(X) = D[X - \overline{X - D(X)}],$$

ce qui prouve que l'ensemble $X - \overline{X - D(X)}$ n'est de I-e catégorie en aucun de ses points.

16. Dans un espace dense en soi chaque ensemble Z de puissance $\aleph_1$ qui n'est pas de I-e catégorie se compose d'une famille indénombrable d'ensembles disjoints dont aucun n'est de I-e catégorie¹⁾.

¹⁾ Théorème de M. S. Ulam, *Über gewisse Zerlegungen von Mengen*, Fund. Math. 20 (1933), p. 222.

En effet, d'après un théorème de la Théorie générale des ensembles¹⁾, si Z est un ensemble de puissance $\aleph_1$ et N est une famille de sous-ensembles de Z telle que, pour chaque suite $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ d'ensembles appartenant à N , la différence $Z - \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ est indénombrable, il existe une infinité indénombrable de sous-ensembles de Z disjoints et n'appartenant pas à N .

Désignons donc par N la famille des sous-ensembles de Z de I-e catégorie. Chaque point individuel étant un ensemble de I-e catégorie (puisque l'espace est dense en soi), on conclut du théorème précédent qu'il existe une infinité indénombrable de sous-ensembles de Z , disjoints et dont aucun n'est de I-e catégorie. En augmentant l'un de ces sous-ensembles de tous les points de Z qui n'appartiennent pas aux autres, on obtient la décomposition demandée.

Ajoutons sans démonstration le théorème suivant:

17. Chaque ensemble Z contenu dans l'intervalle $\mathcal{I}$, qui n'est de I-e catégorie en aucun point de $\mathcal{I}$ contient deux ensembles disjoints qui jouissent de la même propriété²⁾. Plus encore: on prouve qu'il en contient une infinité indénombrable, si l'on admet l'hypothèse du continu³⁾.

§ 11. Propriété de Baire.

I. Définition. X jouit de la propriété de Baire (au sens large), en symbole: $X \in \mathcal{B}$, lorsque X est de la forme

$$X = G - P + R$$

où G est ouvert et P et R sont des ensembles de I-e catégorie⁴⁾.

Les ensembles que l'on rencontre „pratiquement“ jouissent toujours de la propriété de Baire; d'ailleurs, il en existent qui ne la possèdent pas, voir N° IVa. Le rôle de la propriété de Baire en Topologie est analogue à celui de la mesurabilité (d'ensembles ou de fonctions) en Analyse. Nous reviendrons sur ces questions au Chap. III, § 36.

Dans la définition précédente, l'ensemble ouvert G peut être remplacé par l'ensemble fermé F .

¹⁾ Théorème de M. S. Ulam, Fund. Math. **16** (1930), p. 145. Ce théorème a été généralisé plus tard par M. Sierpiński à tous les alefs inférieurs au premier alef „inaccessible“, ce qui permet de généraliser d'une façon analogue le théorème du texte; voir W. Sierpiński, Fund. Math. **20** (1933), p. 214.

²⁾ Théorème de M. N. Lusin. Voir W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, p. 172.

³⁾ W. Sierpiński, *ibid.*, p. 115.

⁴⁾ Cette notion se rattache à la Thèse de R. Baire, Ann. di mat. (3) **3** (1899). Lebesgue appelait les ensembles de ce genre „ensembles Z “; voir Journ. de math. s. 6, vol. **1**, p. 186.

En effet, si $X = G - P + R$ et si l'on pose $F = \bar{G}$ et $P_1 = P + (\bar{G} - G)$, il vient $X = F - P_1 + R$, où F est fermé et P_1 et R sont de I-e catégorie, puisque l'ensemble $\bar{G} - G$ est non-dense, comme frontière d'un ensemble ouvert (voir § 8, V).

Inversement, si $X = F - P + R$, on pose $G = \text{Int}(F)$ et $R_1 = F - \text{Int}(F) - P + R$ et il vient $X = G - P + R_1$, où R_1 est de I-e catégorie, puisque l'ensemble $F - \text{Int}(F) = F \cdot \overline{1 - F}$ est non-dense, comme frontière d'un ensemble fermé.

II. Généralités. Evidemment, chaque ensemble de I-e catégorie, ainsi que chaque ensemble ouvert et chaque ensemble fermé, jouit de la propriété de Baire. Il en est de même de chaque somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense, donc (voir § 8, V) de chaque ensemble ayant la frontière non-dense. Chaque ensemble clairsemé étant un ensemble de ce genre (§ 9, VI, 4), les ensembles clairsemés jouissent aussi de la propriété de Baire.

III. Opérations. 1. Si $B \in \mathcal{B}$, on a $(1 - B) \in \mathcal{B}$.

Car l'hypothèse $B = G - P + R$ entraîne

$$1 - B = (1 - G + P) - R = (1 - G) - R + (P - R)$$

et, l'ensemble $1 - G$ étant fermé et l'ensemble $P - R$ étant de I-e catégorie, il résulte du N° I que $(1 - B) \in \mathcal{B}$.

2. Si $B_n \in \mathcal{B}$ pour $n = 1, 2, \dots$, on a $(\sum_{n=1}^{\infty} B_n) \in \mathcal{B}$.

Posons, conformément à la définition: $B_n = G_n - P_n + R_n$.

En tenant compte de l'identité

$$\sum_n B_n = \sum_n G_n - (\sum_n G_n - \sum_n B_n) + (\sum_n B_n - \sum_n G_n),$$

il suffit de prouver que $(\sum_n G_n - \sum_n B_n)$ et $(\sum_n B_n - \sum_n G_n)$ sont de I-e catégorie. Or, cela résulte des inclusions:

$$\begin{aligned} \sum_n G_n - \sum_n B_n &\subset \sum_n (G_n - B_n) = \sum_n [G_n - (G_n - P_n + R_n)] \subset \\ &\subset \sum_n [G_n - (G_n - P_n)] \subset \sum_n P_n, \end{aligned}$$

$$\sum_n B_n - \sum_n G_n \subset \sum_n (B_n - G_n) = \sum_n (R_n - G_n) \subset \sum_n R_n.$$

3. Si $B_n \in \mathcal{B}$, on a $(\prod_{n=1}^{\infty} B_n) \in \mathcal{B}$.

C'est une conséquence directe des deux propositions précédentes (en vertu de la règle de Morgan, § 1, V).

4. Chaque ensemble borelien jouit de la propriété de Baire¹⁾.

La famille $\mathcal{B}$ satisfait, en effet, aux trois conditions suivantes: 1^o elle contient tous les ensembles fermés, 2^o elle contient les complémentaires des ensembles qui lui appartiennent, 3^o elle contient les produits dénombrables des ensembles qui lui appartiennent. Or, la famille des ensembles boreliens étant la plus petite famille assujettie à ces trois conditions (§ 5, VI), elle constitue une partie de la famille $\mathcal{B}$, c. q. f. d.

IV. Equivalences²⁾. Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que X jouisse de la propriété de Baire:

1. Il existe un ensemble de I-e catégorie P tel que $X - P$ est fermé et ouvert relativement à $1 - P$;

2. X est la somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble de I-e catégorie;

3. X est la différence d'un ensemble F_σ et d'un ensemble de I-e catégorie;

4. L'ensemble $D(X) \cdot D(1 - X)$ est non-dense; autrement dit, dans chaque ensemble ouvert ($\neq 0$) il existe un point où soit X , soit $1 - X$ est de I-e catégorie³⁾;

5. L'ensemble $D(X) - X$ est de I-e catégorie.

Supposons, en effet, que $X \in \mathcal{B}$. On a alors, d'après N° 1:

$$X = G - P_1 + P_2 - F + P_3 + P_4,$$

où G est ouvert, F fermé et P_n de I-e catégorie. Si l'on pose $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$, il vient $X - P = G - P - F - P$, ce qui prouve que $X - P$ est simultanément ouvert et fermé dans $1 - P$.

¹⁾ Théorème de H. Lebesgue, l. cit. p. 187. Le théorème inverse n'est pas vrai; voir plus loin § 35.

²⁾ Cf. W. Sierpiński, *Sur l'invariance topologique de la propriété de Baire*, Fund. Math. 4 (1923), p. 319 et *La propriété de Baire des fonctions et de leurs images*, ibid. 11 (1928), p. 305, E. Szpilrajn-Marczewski, *O mierności i warunkach Baire'a*, C. R. du I Congrès des Math. des Pays Slaves, Varsovie 1929, p. 200 et ma note *Sur la propriété de Baire dans les espaces métriques*, Fund. Math. 16 (1930), p. 390.

³⁾ C'est bien cette condition qui a été admise primitivement comme définition de la propriété de Baire.

Ceci établi, posons $X - P = G \cdot (1 - P)$. Soit (conformément à § 10, II) R un ensemble F_σ de I-e catégorie qui contient P . On a

$$X = X - R + XR = X - P - R + XR = G - P - R + XR = G - R + XR.$$

L'ensemble $G - R$ étant un G_δ et XR étant de I-e catégorie, X se trouve décomposé en un G_δ et un ensemble de I-e catégorie.

Si $X \in \mathcal{B}$, $1 - X$ est également un ensemble de la famille $\mathcal{B}$ (selon N° III, 1); on en conclut que $1 - X = M + N$, où M est un G_δ et N est de I-e catégorie; il vient $X = (1 - M) - N$, ce qui prouve que X est différence d'un F_σ et d'un ensemble de I-e catégorie.

Inversement, chaque F_σ , chaque G_δ et chaque ensemble de I-e catégorie étant un ensemble de la famille $\mathcal{B}$, on en conclut (en vertu de N° III) que les conditions 2 et 3 sont suffisantes.

Il est ainsi établi que chacune des conditions 1, 2, 3 est nécessaire et suffisante. Pour prouver que les deux autres le sont également, supposons que $X \in \mathcal{B}$ et posons, conformément à la définition, $X = G - P + R$. Il vient $1 - X = (1 - G) - R + (P - R)$.

Or, on n'altère pas l'ensemble $D(E)$, en ajoutant à E ou en lui enlevant un ensemble de I-e catégorie (voir § 10, V, 12). Par conséquent $D(X) = D(G)$ et $D(1 - X) = D(1 - G)$. Comme $D(G) \subset \bar{G}$ et $D(1 - G) \subset \overline{1 - G}$ (§ 10, V, 10), il vient $D(X) \cdot D(1 - X) \subset \bar{G} \cdot \overline{1 - G} = \bar{G} - G$ et, l'ensemble $\bar{G} - G$ étant non-dense, il en résulte que $D(X) \cdot D(1 - X)$ l'est également.

L'ensemble $D(X) - X$ est donc de I-e catégorie, car on a

$$D(X) - X = [D(X) - X] \cdot D(1 - X) + [D(X) - X - D(1 - X)] \subset D(X) \cdot D(1 - X) + [(1 - X) - D(1 - X)],$$

où $D(X) \cdot D(1 - X)$ est non-dense par hypothèse et $(1 - X) - D(1 - X)$ est de I-e catégorie selon § 10, V, 8.

Enfin, si l'on suppose que l'ensemble $D(X) - X$ est de I-e catégorie, on a $X \in \mathcal{B}$ en vertu de l'identité

$$X = D(X) - [D(X) - X] + [X - D(X)],$$

où $D(X)$ est fermé et les ensembles $[D(X) - X]$ et $[X - D(X)]$ sont de I-e catégorie.

Le théorème se trouve ainsi complètement démontré.

Corollaire 1. *Chaque ensemble X est contenu dans un ensemble Z qui est un F_σ tel que la condition $X \subset B \in \mathcal{B}$ entraîne que $Z \rightarrow B$ est de I-e catégorie ¹⁾.*

En effet, l'ensemble $X \rightarrow D(X)$ étant de I-e catégorie (selon § 10, V, 8), il existe un F_σ de I-e catégorie W tel que $X \rightarrow D(X) \subset W$. Par conséquent, l'ensemble $Z = W + D(X)$ est un F_σ contenant X . De plus, si $X \subset B$, il s'en suit (§ 10, V, 5) que $D(X) \subset D(B)$, d'où

$$Z \rightarrow B = W \rightarrow B + [D(X) \rightarrow B] \subset W + [D(B) \rightarrow B]$$

et, l'ensemble $D(B) \rightarrow B$ étant de I-e catégorie en vertu du théorème précédent, on conclut que $Z \rightarrow B$ l'est également.

Corollaire 2. *Si un ensemble X jouissant de la propriété de Baire n'est de I-e catégorie en aucun point de l'espace, l'ensemble $1 \rightarrow X$ est de I-e catégorie; s'il n'est de I-e catégorie en aucun de ses points, il contient un point où $1 \rightarrow X$ est de I-e catégorie (pourvu que $X \neq \emptyset$).*

En effet, l'hypothèse $1 \rightarrow D(X)$ implique selon la condition 4, que $D(1 \rightarrow X)$ est non-dense. D'autre part, selon § 10, V, 11 c'est un domaine fermé. Ces deux propriétés impliquent que $D(1 \rightarrow X) = \emptyset$, donc (§ 10, V, 7) que $1 \rightarrow X$ est de I-e catégorie.

D'autre part, si $X \subset D(X)$, on ne peut pas avoir $X \subset D(1 \rightarrow X)$, car l'ensemble X serait alors non-dense (d'après 4), contrairement à l'hypothèse.

Corollaire 3. *X étant un ensemble à propriété de Baire, la condition $XY = \emptyset$ entraîne $\text{Int}[D(X)] \cdot \text{Int}[D(Y)] = \emptyset$.*

En effet, l'égalité $XY = \emptyset$ entraîne (§ 10, V, 5): $D(Y) \subset D(1 \rightarrow X)$, d'où $D(X) \cdot D(Y) \subset D(X) \cdot D(1 \rightarrow X)$, ce qui implique d'après 4 que l'ensemble $D(X) \cdot D(Y)$ est non-dense. Il vient $\text{Int}[D(X) \cdot D(Y)] = \emptyset$, d'où l'identité demandée (selon § 6, II (1)).

IVa. Théorème d'existence. En tenant compte de N° IV, 4, nous allons établir l'existence des ensembles dépourvus de la propriété de Baire dans l'espace $\mathcal{E}$ des nombres réels.

Décomposons, à ce but, l'ensemble $\mathcal{E}$ en sous-ensembles disjoints, en rangeant dans un même sous-ensemble deux nombres lorsque leur différence est rationnelle. En vertu de l'axiome du choix, il existe un ensemble V_0 qui contient un et un seul élément de chacun

de ces sous-ensembles. Nous allons prouver que V_0 ne possède pas la propriété de Baire ¹⁾.

Soit $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ la suite des nombres rationnels ($\neq 0$). Désignons par V_n l'ensemble qui s'obtient de V_0 par la translation $y = x + r_n$. On voit aussitôt que $\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n$. En outre, $V_0 \cdot V_n = \emptyset$ (pour $n \neq 0$), car en cas contraire il existerait dans V_0 un nombre y de la forme $x + r_n$ où $x \in V_0$. Mais on aurait alors $y - x = r_n$, tandis que par définition V_0 ne contient aucun couple d'éléments dont la différence soit rationnelle.

L'espace $\mathcal{E}$ n'étant pas de I-e catégorie sur lui-même (§ 10, I), on en conclut qu'un des ensembles V_n n'est nonplus de I-e catégorie. Il en résulte que V_0 n'est pas de I-e catégorie, car V_n s'obtient de V_0 par translation, ces ensembles sont de la même catégorie. Il existe, par conséquent, un intervalle ab tel que V_0 n'est de I-e catégorie en aucun point de cet intervalle (§ 10, V, 11).

Or, supposons, par impossible, que V_0 jouisse de la propriété de Baire. D'après la condition 4, ab contient un sous-intervalle cd ($a < c < d < b$) tel que l'ensemble $cd \rightarrow V_0$ est de I-e catégorie. Soit r_n un nombre rationnel tel que $0 < r_n < c - a$.

La condition $V_0 \cdot V_n = \emptyset$ implique que $V_n \cdot cd \subset cd \rightarrow V_0$. L'ensemble $V_n \cdot cd$ est donc de I-e catégorie et il en est de même de la partie de V_0 contenue dans l'intervalle $c - r_n, d - r_n$ (puisqu'elle s'obtient de $V_n \cdot cd$ par une translation). Mais cela contredit l'hypothèse que V_0 n'est de I-e catégorie en aucun point de ab .

Remarques. 1) *Chaque ensemble de puissance $\aleph_1$, dépourvu de la propriété de Baire, contient une famille indénombrable de sous-ensembles disjoints dépourvus de cette propriété.*

Pour s'en convaincre, on substitue à N dans le théorème de M. Ulam (§ 10, VI, p. 54) la famille des sous-ensembles de Z jouissant de la propriété de Baire.

¹⁾ C'est la construction qui a servi à G. Vitali (*Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna 1905) pour démontrer l'existence des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue.

Une démonstration de l'existence des ensembles dépourvus de la propriété de Baire a été donnée aussi par H. Lebesgue, *Contributions à l'étude des correspondances de M. Zermelo*, Bull. Soc. Math. de France **35** (1907), pp. 202—212.

¹⁾ Théorème de M. E. Szpilrajn-Marczewski, l. cit. p. 209.

2) La démonstration de l'existence des ensembles dépourvus de la propriété de Baire dans l'espace $\mathcal{E}$ est *non-effective*, c. à d. qu'elle ne donne aucun moyen de nommer un ensemble individuel de ce genre. Le problème d'en donner une démonstration effective reste ouvert¹⁾.

Il en est de même du problème de l'existence des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue.

V. Relativisation. 1. *La propriété de Baire est transitive*, c. à d. que X jouissant de la propriété de Baire relativement à E , la condition $E \in \mathcal{B}$ entraîne $X \in \mathcal{B}$.

On a, en effet, $X = U + P$ où U est un G_δ relativement à E et P est un ensemble de I-e catégorie relativement à E . Par conséquent $U = VE$, où V est un G_δ (voir § 5, V). Comme produit de deux ensembles appartenant à $\mathcal{B}$, l'ensemble U appartient également à $\mathcal{B}$. Enfin, P étant de I-e catégorie, on en conclut que l'ensemble $X = U + P$ appartient à $\mathcal{B}$.

2. Si X jouit de la propriété de Baire relativement à $\bar{E}$, XE jouit de cette propriété relativement à E .

Car on a $X = G - P + R$, où G est ouvert dans $\bar{E}$ et P et R sont de I-e catégorie dans $\bar{E}$. En multipliant par E , il vient $XE = GE - PE + RE$. L'ensemble GE étant ouvert dans E et les ensembles PE et RE étant (selon § 10, IV, 2) de I-e catégorie dans E , notre proposition se trouve démontrée.

VI. Propriété de Baire au sens restreint. X jouit de la propriété de Baire au sens restreint, en symbole: $X \in \mathcal{B}_r$, lorsque quel que soit E , l'ensemble XE jouit de la propriété de Baire relativement à E .

Nous allons prouver que, dans cette définition, le domaine de variabilité de E peut être restreint à celui des ensembles *parfaits*.

En effet, E étant un ensemble arbitraire, soit $\bar{E} = A + C$ la décomposition de $\bar{E}$ en un ensemble parfait et un ensemble clairsemé (voir § 9, VI, 3). Il vient $X \cdot \bar{E} = XA + XC$. Par hypothèse, XA jouit de la propriété de Baire relativement à A , donc selon

¹⁾ Ce problème a été posé par R. Baire. Voir à ce sujet une indication de H. Lebesgue dans son Mémoire du Journ. de Math. s. 6, 1, p. 186.

$N^0 V$, 1. relativement à $\bar{E}$. L'ensemble XC étant clairsemé, il jouit aussi de la propriété de Baire relativement à $\bar{E}$ (voir N^0 II). Il en est donc de même de leur somme $XA + XC = X \cdot \bar{E}$. On en conclut en vertu de $N^0 V$, 2 que XE jouit de la propriété de Baire relativement à E , c. q. f. d.

Ceci établi, on voit que le domaine de variabilité de E peut être défini aussi comme celui des ensembles *fermés*.

La relativisation des théorèmes des $N^0 N^0$ précédents donne des énoncés concernant la famille $\mathcal{B}_r$. En particulier, si X est un ensemble borelien, XE est un ensemble borelien relativement à E (voir § 5, VI) et jouit par conséquent de la propriété de Baire relativement à E , de sorte qu'on a alors $X \in \mathcal{B}_r$. D'une façon analogue, chaque ensemble clairsemé appartient à $\mathcal{B}_r$.

Le théorème du N^0 IV implique que la condition nécessaire et suffisante pour que $X \in \mathcal{B}_r$ est que chaque ensemble Z fermé dans X soit une somme d'un ensemble borelien et d'un ensemble de I-e catégorie dans Z ¹⁾.

L'importance de cette condition tient au fait que, dans les espaces où la notion d'ensemble borelien est un invariant topologique, p. ex. dans les espaces métriques complets, elle implique directement l'invariance topologique de la propriété de Baire au sens restreint (voir § 31).

Dans les espaces métriques le terme *borelien* peut être remplacé par G_δ .

En effet, $X \cdot \bar{Z}$ ayant la propriété de Baire relativement à $\bar{Z}$, on a $Z = X \cdot \bar{Z} = M + P$, où M est un ensemble G_δ relativement à $\bar{Z}$ et P est un ensemble de I-e catégorie dans $\bar{Z}$. Comme produit d'un G_δ et de l'ensemble fermé $\bar{Z}$, l'ensemble M est donc borelien; comme ensemble de I-e catégorie dans $\bar{Z}$, l'ensemble P est aussi de I-e catégorie dans Z (§ 10, IV, 2).

Supposons à présent que la condition du théorème soit satisfaite. Il s'agit de prouver que $X \in \mathcal{B}_r$, autrement dit que, F étant un ensemble fermé arbitraire, XF jouit de la propriété de Baire relativement à F . Or, par hypothèse $XF = M + P$, où M est un ensemble borelien (relativement à l'espace) et P est de I-e catégorie dans XF . Par conséquent M est borelien relativement à F et P est de I-e catégorie relativement à F (§ 10, IV, 1). L'ensemble XF jouit donc de la propriété de Baire relativement à F .

¹⁾ Théorème de M. Sierpiński, Sur l'invariance topologique de la propriété de Baire, Fund. Math. 4 (1923), p. 319.

VII. Opération ($\mathcal{A}$). La propriété de Baire est un invariant de l'opération ($\mathcal{A}$)¹.

Soit, en effet,

$$(1) \quad X = \sum_{\delta} \prod_{n=1}^{\infty} X_{\delta^1 \dots \delta^n},$$

les ensembles $X_{\delta^1 \dots \delta^n}$ jouissant de la propriété de Baire (pour les notations et les propriétés de l'opération ($\mathcal{A}$) voir § 1, VI).

Le système des ensembles $X_{\delta^1 \dots \delta^n}$ peut être supposé „régulier”, car, le produit d'un nombre fini d'ensembles à propriété de Baire étant un ensemble du même genre, on peut remplacer $X_{\delta^1 \dots \delta^n}$ par $X_{\delta^1} \cdot X_{\delta^1 \delta^2} \cdot \dots \cdot X_{\delta^1 \dots \delta^n}$.

D'après IV, il existe un ensemble Z qui est un F_{σ} tel que:

$$(2) \quad X \subset Z$$

(3) si $B \in \mathcal{B}$ et $X \subset B$, l'ensemble $Z - B$ est de I-e catégorie.

De façon générale, il existe un $Z_{y^1 \dots y^l}$ jouissant de la propriété de Baire et tel que

$$(2a) \quad \sum_{\delta} \prod_{n=1}^{\infty} X_{y^1 \dots y^l \delta^1 \dots \delta^n} \subset Z_{y^1 \dots y^l},$$

(3a) si $B \in \mathcal{B}$ et $\sum_{\delta} \prod_{n=1}^{\infty} X_{y^1 \dots y^l \delta^1 \dots \delta^n} \subset B$, l'ensemble $Z_{y^1 \dots y^l} - B$ est de I-e catégorie.

On peut supposer, en outre, que

$$(4) \quad Z_{y^1 \dots y^l} \subset X_{y^1 \dots y^l}$$

puisque l'ensemble $Z_{y^1 \dots y^l} \cdot X_{y^1 \dots y^l}$ satisfait évidemment aux conditions imposées à $Z_{y^1 \dots y^l}$.

En tenant compte de l'identité $X = Z - (Z - X)$ et du fait que Z est un F_{σ} , tout revient à prouver que $Z - X$ est de I-e catégorie. Or, en appliquant successivement les propositions (1), (4) et § 1, VI, 4, il vient

$$Z - X = Z - \sum_{y} \prod_{l=1}^{\infty} X_{y^1 \dots y^l} \subset Z - \sum_{y} \prod_{l=1}^{\infty} Z_{y^1 \dots y^l} \subset \sum_{y} \sum_{l=0}^{\infty} (Z_{y^1 \dots y^l} - \sum_{m=1}^{\infty} Z_{y^1 \dots y^l m}).$$

¹ Voir: O. Nikodym, *Sur une propriété de l'opération ($\mathcal{A}$)*, Fund. Math. 7 (1925), p. 149 et C. R. Soc. Sc. de Varsovie 19 (1926), p. 204; N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur quelques propriétés des ensembles ($\mathcal{A}$)*, Bull. Acad. Cracovie 1918, p. 35; E. Szpilrajn-Marczewski, l. c.; N. Lusin, C. R. Paris 164 (1917).

La sommation $\sum_y \sum_{l=0}^{\infty}$ étant dénombrable (§ 1, VI, 3), il reste à prouver que l'ensemble $(Z_{y^1 \dots y^l} - \sum_{m=1}^{\infty} Z_{y^1 \dots y^l m})$ est de I-e catégorie. Mais c'est une conséquence de (3a) où l'on peut poser $B = \sum_{m=1}^{\infty} Z_{y^1 \dots y^l m}$ en vertu de la formule

$$\sum_{\delta} \prod_{n=1}^{\infty} X_{y^1 \dots y^l \delta^1 \dots \delta^n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\delta} \prod_{n=1}^{\infty} X_{y^1 \dots y^l m \delta^1 \dots \delta^n} \subset \sum_{m=1}^{\infty} Z_{y^1 \dots y^l m},$$

qui résulte des propositions § 1, VI, 1a et (2a).

Corollaire. La propriété de Baire au sens restreint est un invariant de l'opération ($\mathcal{A}$).

En effet, E étant un ensemble fixe, on a selon (1)

$$E \cdot X = \sum_{\delta} \prod_{n=1}^{\infty} (E \cdot X_{\delta^1 \dots \delta^n}).$$

Donc, si l'on suppose que $E \cdot X_{\delta^1 \dots \delta^n}$ jouit de la propriété de Baire relativement à E , il en est de même de $E \cdot X$ d'après le théorème précédent.

Remarques. L'invariance de la propriété de Baire est un cas particulier du théorème suivant de la Théorie générale des ensembles:

Soit $\mathcal{S}$ une famille de sous-ensembles d'un espace donné satisfaisant aux conditions suivantes: 1° la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles appartenant à $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$, 2° le complémentaire d'un ensemble appartenant à la famille $\mathcal{S}$ lui appartient également, 3° à chaque ensemble X (de l'espace donné) correspond un ensemble $Z \supset X$ de la famille $\mathcal{S}$ tel que les conditions $X \subset S \in \mathcal{S}$ et $Y \subset Z - S$ entraînent $Y \in \mathcal{S}$.

Sous ces hypothèses, la propriété d'appartenir à la famille $\mathcal{S}$ est un invariant de l'opération ($\mathcal{A}$)¹.

La famille des ensembles jouissant de la propriété de Baire est une famille $\mathcal{S}$ (d'après III et IV, cor. 1). Un autre exemple important d'une famille $\mathcal{S}$ fournit la famille des ensembles mesurables au sens de Lebesgue. En effet, les conditions 1° et 2° sont évidemment

¹ Théorème de M. Szpilrajn-Marczewski, loco cit. p. 300.

réalisées; la condition 3^o l'est également, car on peut prendre pour Z un ensemble G_δ ayant la mesure égale à la mesure extérieure de X et l'ensemble $Z - S$ est alors de mesure nulle.

La mesurabilité au sens de Lebesgue est donc un invariant de l'opération $(\mathcal{A})$.

§ 12. Séries alternées d'ensembles fermés.

I. Formules de la Théorie générale des ensembles ¹⁾. Soit

$$(1) \quad X_0, X_1, \dots, X_\xi, \dots, X_\alpha$$

une suite transfinie d'ensembles décroissants, c. à d. tels que la condition $\xi > \zeta$ entraîne $X_\xi \subset X_\zeta$. Supposons, en outre, que:

$$(2) \quad X_0 = 1,$$

$$(3) \quad X_\lambda = \bigcap_{\xi < \lambda} X_\xi \text{ si } \lambda \text{ est un nombre-limite ou bien si } \lambda = \alpha.$$

On prouve facilement que

$$(4) \quad 1 = X_0 - X_1 + X_1 - X_2 + \dots + X_\xi - X_{\xi+1} + \dots + X_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} (X_\xi - X_{\xi+1}) + X_\alpha.$$

Les ensembles $(X_0 - X_1 + X_1 - X_2 + \dots)$ et $(X_1 - X_2 + X_2 - X_3 + \dots + X_\alpha)$ étant disjoints, il vient:

$$(4a) \quad 1 - (X_0 - X_1 + X_2 - X_3 + \dots) = X_1 - X_2 + X_3 - X_4 + \dots + X_\alpha.$$

II. Définition. Un ensemble de la forme

$$E = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + F_\xi - F_{\xi+1} + \dots,$$

où les termes sont fermés décroissants, est dit *développable en série alternée d'ensembles fermés décroissants* ou, tout court, *ensemble développable*.

Dans les espaces complets, les ensembles développables coïncident avec les ensembles qui sont simultanément des F_σ et G_δ (Chap. III, § 30, VI). Plusieurs propriétés importantes des ensembles F_σ et G_δ sont des conséquences de leur développabilité; c'est une des raisons pour laquelle les ensembles développables méritent d'être étudiés. Cf. aussi § 13, VI.

¹⁾ Voir F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 80.

III. Théorème de séparation. Développement en série alternée. E et H étant deux ensembles arbitraires donnés, admettons que la suite (1) remplisse les conditions (2) et (3), ainsi que la condition suivante:

$$X_{\xi+1} = \overline{X_\xi \cdot E} \cdot \overline{X_\xi \cdot H}.$$

La suite (1) est évidemment composée d'ensembles fermés. Elle est, en outre, décroissante puisque $X_{\xi+1} \subset \overline{X_\xi} = X_\xi$. Donc, à partir d'un certain indice, tous ses termes sont identiques; c'est cet indice que nous désignerons par $\alpha - 1$. Par conséquent

$$X_\alpha = \overline{X_\alpha \cdot E} \cdot \overline{X_\alpha \cdot H}.$$

Posons: $P_\xi = X_\xi - \overline{X_\xi \cdot E}$, $R_\xi = X_\xi - \overline{X_\xi \cdot H}$. Donc $X_\xi - X_{\xi+1} = P_\xi + R_\xi$, d'où, en vertu de (4),

$$1 = \sum_{\xi < \alpha} P_\xi + \sum_{\xi < \alpha} R_\xi + X_\alpha, \text{ donc } 1 - \sum_{\xi < \alpha} P_\xi \subset \sum_{\xi < \alpha} R_\xi + X_\alpha.$$

D'autre part, $P_\xi = X_\xi - \overline{X_\xi \cdot E} \subset X_\xi - X_\xi \cdot E = X_\xi - E \subset 1 - E$, d'où

$$\sum_{\xi < \alpha} P_\xi \subset 1 - E, \text{ donc } E \subset 1 - \sum_{\xi < \alpha} P_\xi \subset \sum_{\xi < \alpha} R_\xi + X_\alpha.$$

De façon analogue, $\sum_{\xi < \alpha} R_\xi \subset 1 - H$. On obtient ainsi:

$$E - X_\alpha \subset \sum_{\xi < \alpha} R_\xi, \quad H - \sum_{\xi < \alpha} R_\xi = 0.$$

De plus, l'ensemble

$$\sum_{\xi < \alpha} R_\xi = \sum_{\xi < \alpha} (X_\xi - \overline{X_\xi \cdot H}) = 1 - \overline{H} + \overline{E} \cdot \overline{H} - \overline{E} \cdot H + \overline{E} \cdot \overline{H} \cdot \overline{E} \cdot H - \dots$$

est la somme d'une série alternée d'ensembles fermés décroissants, car $X_{\xi+1} = \overline{X_\xi \cdot E} \cdot \overline{X_\xi \cdot H} \subset \overline{X_\xi \cdot H}$.

De là on conclut, en particulier, que

1^o si l'équation $X = \overline{X \cdot E} \cdot \overline{X \cdot H}$ ne possède que la racine $X = 0$, il existe un ensemble développable D (à savoir l'ensemble $D = \sum_{\xi < \alpha} R_\xi$) tel que $E \subset D$ et $HD = 0$ ¹⁾.

¹⁾ Nous nous servirons de cet énoncé pour démontrer un théorème important de Baire sur les fonctions de la classe (voir Chap. II, § 27, X).

2° en posant $H = 1 - E$, on a:

$$(5) X_{\xi+1} = \overline{X_{\xi} \cdot E} \cdot \overline{X_{\xi} - E} = \text{frontière de } X_{\xi} \cdot E \text{ relative à } X_{\xi},$$

$$(6) X_{\alpha} = \overline{X_{\alpha} \cdot E} \cdot \overline{X_{\alpha} - E} \text{ et } E - X_{\alpha} = \sum_{\xi < \alpha} R_{\xi},$$

car $\sum_{\xi < \alpha} R_{\xi} \subset 1 - H = E$ et $R_{\xi} \subset X_{\xi} - X_{\xi+1}$, de sorte que l'ensemble $\sum_{\xi < \alpha} R_{\xi}$, comme sous-ensemble de $\sum_{\xi < \alpha} (X_{\xi} - X_{\xi+1})$, est disjoint de X_{α} . On a donc $\sum_{\xi < \alpha} R_{\xi} \subset E - X_{\alpha}$.

On voit ainsi qu'en retranchant de E le „reste” $X_{\alpha} \cdot E$, on obtient un ensemble développable. Par conséquent:

3° si le reste $X_{\alpha} \cdot E$ s'annule, on a (en posant $H = 1 - E$):

$$(i) E = \sum_{\xi < \alpha} R_{\xi} = 1 - \overline{1 - E} + \overline{E} \cdot \overline{1 - E} - \overline{E - E} + \overline{E} \cdot \overline{1 - E} \cdot \overline{E - E} - \dots$$

$$(ii) E = 1 - H = 1 - \sum_{\xi < \alpha} P_{\xi} = 1 - \sum_{\xi < \alpha} (X_{\xi} - \overline{X_{\xi} \cdot E}) = \sum_{\xi < \alpha} (\overline{X_{\xi} \cdot E} - X_{\xi+1}) = \overline{E} \cdot \overline{E} \cdot \overline{1 - E} + \overline{E} \cdot \overline{1 - E} - \overline{E} \cdot \overline{1 - E} \cdot \overline{E - E} + \dots \text{ (d'après I (4a)).}$$

IV. Propriétés du reste. L'ensemble X_{α} de la formule (6) est le plus grand ensemble satisfaisant à l'équation

$$(7) X = \overline{X \cdot E} \cdot \overline{X - E}.$$

En effet, si X satisfait à (7), on a d'abord $X \subset X_0 = 1$. Puis, si $X \subset X_{\xi}$, il vient $X \cdot E \subset X_{\xi} \cdot E$ et $X - E \subset X_{\xi} - E$, d'où $\overline{X \cdot E} \cdot \overline{X - E} \subset \overline{X_{\xi} \cdot E} \cdot \overline{X_{\xi} - E}$, donc, suivant (5) et (7), $X \subset X_{\xi+1}$. Enfin, si pour chaque $\xi < \lambda$ (λ nombre limite) on a $X \subset X_{\xi}$, il vient $X \subset \prod_{\xi < \lambda} X_{\xi} = X_{\lambda}$.

Ainsi, en vertu du principe de l'induction transfinie, X est un sous-ensemble de chaque X_{ξ} , donc de X_{α} .

Il est à remarquer que l'égalité (7) équivaut à

$$(8) \overline{X \cdot E} = X = \overline{X - E}.$$

Elle implique, en effet, que $X \subset \overline{X \cdot E}$ et $X \subset \overline{X - E}$ et, on a d'autre part $\overline{X \cdot E} \subset \overline{X}$ et $\overline{X - E} \subset \overline{X}$, d'où l'équivalence demandée puisque, en vertu de (7), $X = \overline{X}$.

V. Conditions nécessaires et suffisantes. Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que l'ensemble E soit développable:

1° l'égalité (8) implique que $X = 0$; autrement dit, quel que soit l'ensemble fermé $F \neq 0$, la frontière de FE relative à F , c. à d. l'ensemble $\overline{F \cdot E} \cdot \overline{F - E}$, est $\neq F$;

2° quel que soit l'ensemble fermé F , la frontière de FE relative à F est non-dense dans F .

3° le reste s'annule, c. à d. $X_{\alpha} \cdot E = 0$.

Démonstration. 1. La condition 1° est nécessaire. Supposons, en effet, que E soit développable en une série alternée d'ensembles fermés décroissants:

$$(9) E = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + F_{\xi} - F_{\xi+1} + \dots \quad (\xi + 1 < \alpha).$$

On peut évidemment supposer que les indices limites sont omis dans ce développement. Or, si l'on admet que $F_0 = 1$, $F_{\lambda} = \prod_{\xi < \lambda} F_{\xi}$ (pour λ limite) et $F_{\alpha} = \prod_{\xi < \alpha} F_{\xi}$, on conclut de (4) que

$$(10) 1 - E = F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \dots + F_{\alpha}.$$

Nous allons prouver que l'égalité (8) entraîne $X \subset F_{\xi}$, quel que soit ξ . On a d'abord $X \subset F_0 = 1$. Admettons que $X \subset F_{\xi}$. Dans le cas où ξ est pair, on conclut de la formule (9) que $X \cdot E \subset F_{\xi+1}$ (car toutes les différences qui précèdent $F_{\xi+1}$ sont disjointes de F_{ξ} , donc de X , tandis que tous les termes qui suivent $F_{\xi+1}$ sont contenus dans $F_{\xi+1}$). Donc $X = \overline{X \cdot E} \subset F_{\xi+1}$. De façon analogue, si ξ est impair, on conclut de (10) que $X - E \subset F_{\xi+1}$, d'où $X = \overline{X - E} \subset F_{\xi+1}$. Finalement, si $X \subset F_{\xi}$ pour chaque $\xi < \lambda$, il vient

$$X \subset \prod_{\xi < \lambda} F_{\xi} = F_{\lambda}.$$

Il est ainsi établi que $X \subset F_{\xi}$, quel que soit ξ . Par conséquent $X \subset F_{\alpha}$. Cela implique en raison de (10) que $X \subset 1 - E$, d'où $X \cdot E = 0$, donc $X = \overline{X \cdot E} = 0$.

2. La condition 1° entraîne 2°. En effet, d'après § 6, II (12), on a $\text{Int}[\text{Fr}(E)] = \text{Int}[\text{Fr}(E)] \cdot E = \text{Int}[\text{Fr}(E)] - \overline{E}$. On en conclut que l'on peut poser dans (8): $X = \text{Int}[\text{Fr}(E)]$ en tenant compte du fait général que l'égalité $\overline{X} = \overline{X \cdot E}$ entraîne $\overline{X} = \overline{X \cdot E}$ (puisque $\overline{X \cdot E} \subset \overline{X \cdot E} \subset \overline{X}$). Or, si l'on suppose que l'égalité (8)

entraîne $X=0$, on en conclut que $\text{Int}[\overline{\text{Fr}(E)}]=0$, donc que la frontière de E ne possède pas de points intérieurs, c. à d. qu'elle est non-dense.

De plus, si l'on considère FE à la place de E et la frontière de FE relative à F , à la place de la frontière de E , on parvient à la conclusion que cette frontière relative est non-dense dans F , car la condition 1° entraîne la même condition „relativisée” par rapport à F (cette dernière signifie en effet que la condition 1° est réalisée pour tout $X \subset F$).

3. La condition 2° entraîne 3°. En effet, en posant $F=X_\alpha$ dans 2°, on en conclut que la frontière de $X_\alpha \cdot E$ relative à X_α est non-dense dans X_α . Elle ne peut donc être identique à X_α que dans le seul cas où $X_\alpha=0$. Ainsi, en vertu de (6), on a $X_\alpha=0$, d'où $X_\alpha \cdot E=0$.

4. La condition 3° est suffisante d'après III, 3°.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

Comme nous l'avons prouvé au § 8, V, pour que la frontière d'un ensemble soit non-dense, il faut et il suffit que cet ensemble soit somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense (ou encore qu'il soit différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble non-dense). On en conclut en vertu du théorème précédent que

La condition nécessaire et suffisante pour que E soit un ensemble développable est que, relativement à chaque ensemble fermé F , l'ensemble EF soit somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense (ou, ce qui est équivalent, qu'il soit différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble non-dense).

La condition 1° du théorème précédent conduit à la suivante: quel que soit l'ensemble fermé non vide F , il existe dans F un point où soit FE , soit $F-E$ est „localement vide” relativement à F ¹⁾, c. à d. qu'il existe un entourage G de ce point tel qu'on ait soit $GFE=0$, soit $GF-E=0$.

En effet, si $\overline{FE}=F=\overline{F-E}$, l'inégalité $GF \neq 0$ entraîne $GFE \neq 0 \neq GF-E$ (voir § 5, III); la condition en question implique donc 1°. Inversement, si $p \in F-FE$, on pose $G=1-\overline{FE}$; donc $GFE=0$. Si $p \in F-\overline{F-E}$, on pose $G=1-\overline{F-E}$.

¹⁾ Cf. § 7, IV et § 11, IV, 4.

VI. Propriétés des ensembles développables.

1. Les ensembles développables constituent un corps¹⁾, c. à d. que la somme, le produit et la différence de deux ensembles développables sont des ensembles développables.

C'est une conséquence de la condition 2° du théorème du N° V et du fait que les ensembles ayant la frontière non-dense constituent un corps (§ 8, V).

2. Tout ensemble développable jouit de la propriété de Baire au sens restreint.

Car E étant un ensemble développable et F un ensemble fermé, l'ensemble EF est somme d'un ensemble ouvert et d'un ensemble non-dense dans F (cf. N° V).

3. Si un ensemble frontière est développable, il est non-dense.

Car dans le domaine des ensembles ayant la frontière non-dense, les notions d'ensemble frontière et d'ensemble non-dense coïncident (§ 8, V).

4. Tout ensemble clairsemé est développable, car la frontière d'un ensemble clairsemé est non-dense (§ 9, VI, 4).

VII. Résidus²⁾. L'ensemble $X \cdot \overline{X-X}$ est dit le *résidu* de X (au sens de Hausdorff).

L'ensemble $X_\alpha \cdot E$ (le reste de E) est identique à son résidu.

Car E et X étant deux ensembles qui satisfont à la formule (8), XE est identique à son résidu: $X=\overline{X-E}=\overline{X-XE}=\overline{XE-XE}$ puisque $X=\overline{XE}$; il en résulte que $XE=XE \cdot \overline{XE-XE}$.

La condition nécessaire et suffisante pour que E soit un ensemble développable est qu'aucun ensemble $Y (\neq 0)$ fermé dans E ne soit identique à son résidu.

Supposons, en effet, que $Y=\overline{Y \cdot E}$ et $Y=\overline{Y \cdot \overline{Y-Y}}$. Par conséquent $\overline{Y}=\overline{YE}$ et, d'autre part, $\overline{Y} \subset \overline{Y-Y}=\overline{Y-YE}=\overline{Y-E} \subset \overline{Y}$. Donc $\overline{YE}=\overline{Y}=\overline{Y-E}$ et, en substituant $\overline{Y}$ à X dans V, 1°, on a $\overline{Y}=0$. La condition est donc nécessaire. Elle est aussi suffisante, car elle implique en vertu de l'énoncé précédent que $X_\alpha \cdot E=0$, donc d'après V, 3°, que l'ensemble E est développable.

¹⁾ Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 82.

²⁾ F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 280.

Il est à remarquer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit différence de deux ensembles fermés est que son résidu soit vide.

En effet, d'après § 6, III, X est la différence de deux ensembles fermés lorsque l'ensemble $\overline{X}-X$ est fermé, autrement dit, lorsque $\overline{\overline{X}-X} \subset \overline{X}-X \subset 1-X$, c. à d. lorsque $X \cdot \overline{X}-X=0$.

VIII. Résidus d'ordre transfini. E étant un ensemble donné, on forme la suite des résidus de tout ordre de la façon suivante: R_1 =le résidu de E , $R_{\xi+1}$ =le résidu de R_ξ et $R_\lambda = \prod_{\xi < \lambda} R_\xi$ pour λ limite. La suite des résidus ainsi définis étant décroissante, on aboutit à un certain nombre β tel que $R_\beta = R_{\beta+1} = \dots$. D'après I (4), on a: $E - R_\beta = E - R_1 + R_1 - R_2 + \dots$

Les termes de cette série alternée ne sont pas fermés, mais en vertu de l'identité $X - \overline{X} - X = \overline{X} - \overline{X} - X$ (puisque $\overline{X} - X - \overline{X} - X = 0$), on a $R_\xi - R_{\xi+1} = \overline{R_\xi} - \overline{R_{\xi+1}} = \overline{R_\xi} - R_\xi$, donc

$$(1) \quad E - R_\beta = \overline{E} - \overline{E} - E + \overline{E \cdot \overline{E}} - E - \dots + \overline{R_\xi} - \overline{R_{\xi+1}} - R_\xi + \dots$$

En particulier, si E est développable, le „dernier résidu” R_β de E est vide (voir N° VII) et la formule (1) présente un développement de E en série d'ensembles fermés décroissants.

IX. Ensembles localement fermés dans les espaces réguliers.

D'après la définition générale de la localisation, l'ensemble X est dit localement fermé au point p lorsqu'il existe un entourage E de p tel que l'ensemble EX soit fermé.

Evidemment, un ensemble fermé est localement fermé en chaque point. Tout ensemble est localement fermé en chaque point isolé. Si X est fermé au point p et Y est fermé dans X , Y est fermé au point p , car, l'ensemble EX étant fermé, la condition $Y = \overline{Y} \cdot X$ implique que EY est fermé.

Admettons à présent que l'espace satisfasse à l'axiome de „régularité”, d'après lequel, si p n'appartient pas à un ensemble fermé F , il existe un entourage E de p tel que $\overline{E} \cdot F = 0$ ¹⁾.

¹⁾ On prouve facilement que chaque espace métrique satisfait à cet axiome, de sorte que le N° IX reste valable pour les espaces métriques.

Voir pour cet axiome L. Vietoris, Mon. f. Math. u. Ph. **31** (1921), p. 173 et H. Tietze, Beiträge zur allgemeinen Topologie, Math. Ann. **88** (1923), p. 301.

Nous allons démontrer que, sous cette hypothèse, l'ensemble des points où X n'est pas localement fermé est égal à $\overline{X}-X$, ce qui implique que le résidu de X coïncide avec l'ensemble des points de X où X n'est pas localement fermé.

Soit d'abord $p \in 1 - \overline{X} - X$. Soit, conformément à l'axiome de régularité, E un entourage fermé de p tel que $E \cdot \overline{X} - X = 0$. Il en résulte que $E \cdot \overline{X} - X = 0$, d'où $E \cdot \overline{X} \subset X$, donc $E \cdot \overline{X} = E \cdot X$, ce qui prouve que l'ensemble EX est fermé, donc que X est fermé au point p .

Supposons, réciproquement, que X soit fermé au point p , donc que $EX = \overline{EX}$ et $p \in 1 - \overline{1 - E}$. Il s'agit de prouver que $p \in 1 - \overline{X} - X$. Il suffit évidemment d'établir l'inclusion $\overline{X} - X \subset 1 - \overline{E}$. Or, en tenant compte de la formule générale $\overline{X} - \overline{Y} \subset \overline{X - Y}$, on démontre en effet facilement que

$$\overline{X} - X \subset \overline{X} - EX = \overline{X} - \overline{EX} \subset \overline{X - EX} = \overline{X - E \cdot X} \subset 1 - \overline{E},$$

et par suite $\overline{X} - X \subset 1 - \overline{E}$.

Ceci établi, on en conclut en vertu des propositions du N° VII que:

1° la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit développable, est que tout ensemble non vide fermé dans E contienne un point où il est localement fermé,

2° la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit localement fermé en chacun de ses points est qu'il soit différence de deux ensembles fermés¹⁾, c. à d. que le résidu de E soit vide, ou encore que $\overline{E} - E$ soit fermé (voir § 6, III).

Le dernier résidu R_β étant identique à son propre résidu, c'est un ensemble qui n'est localement fermé en aucun de ses points. Nous allons démontrer que, parmi les ensembles fermés dans X , l'ensemble R_β est le plus grand qui ne soit localement fermé en aucun de ses points.

Supposons, en effet, que l'ensemble Y soit fermé dans X et que $Y - R_\beta \neq 0$. Il s'agit de prouver que Y contient un point où il est localement fermé. Or on déduit, en tenant compte de la décomposition VIII (1), l'existence d'un indice ξ tel que $Y R_\xi - R_{\xi+1} \neq 0$.

¹⁾ Voir la note de M. W. Sierpiński et de moi-même, Sur les différences de deux ensembles fermés, Tôhoku Math. Journ. **20** (1921), p. 22.

Admettons que ξ désigne le plus petit indice de ce genre. Par conséquent $Y \subset R_\xi$, donc Y est fermé dans R_ξ et, l'ensemble $R_{\xi+1}$ étant le résidu de R_ξ , l'ensemble R_ξ est localement fermé en chaque point de $R_\xi - R_{\xi+1}$, donc en chaque point de l'ensemble non vide $Y \cap R_\xi - R_{\xi+1}$. Cela implique (comme nous l'avons démontré auparavant) que l'ensemble Y est aussi localement fermé en chaque point de ce dernier ensemble.

§ 13. Continuité. Homéomorphie.

I. Définition. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces satisfaisant aux axiomes I—III. Soit $y = f(x)$ une fonction ayant $\mathcal{X}$ pour l'ensemble des arguments et dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{Y}$. La fonction f est dite *continue au point x* , lorsque, pour chaque ensemble X , la condition $x \in \bar{X}$ entraîne $f(x) \in \overline{f(X)}$ ¹.

Si la fonction f est continue en chaque point, elle est dite *continue*, tout court. La famille des fonctions continues ayant $\mathcal{X}$ pour l'ensemble des arguments et dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{Y}$ sera désignée par $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

Dans le cas où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ désignent des ensembles de nombres réels, la notion de continuité considérée ici coïncide avec celle de l'Analyse classique. Ainsi, p. ex. $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ désigne la famille des fonctions continues à valeurs réelles, définies sur l'intervalle $0 \leq x \leq 1$.

II. Conditions nécessaires et suffisantes. Pour qu'une fonction f soit continue au point x , il faut et il suffit que, Y étant un entourage arbitraire de $f(x)$, l'ensemble $f^{-1}(Y)$ soit un entourage de x ; en d'autres termes, que pour chaque Y

$$(1) \quad f(x) \in \text{Int}(Y) \text{ entraîne } x \in \text{Int}[f^{-1}(Y)],$$

ou encore (en remplaçant Y par $\mathcal{Y} - Y$) que

$$(2) \quad x \in \overline{f^{-1}(Y)} \text{ entraîne } f(x) \in \bar{Y}.$$

En effet, on prouve en vertu de § 3, II, 12 que la condition (2) est nécessaire, en posant dans la définition: $X = f^{-1}(Y)$. La suffisance résulte de § 3, II, 11, en posant dans (2): $Y = f(X)$ ².

¹ Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Chap. 9, § 1.

Dans le cas où les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ont des points communs, il est désirable de distinguer entre la fermeture dans $\mathcal{X}$ et dans $\mathcal{Y}$. Pour simplifier les notations, nous omettons cette distinction.

² Ici n'intervient que l'ax. 1, qui est d'ailleurs superflu si f est biunivoque.

En tenant compte du fait qu'il existe dans chaque entourage d'un point un ensemble ouvert contenant ce point, on parvient à la condition suivante („définition de Cauchy”):

(3) pour que f soit continue au point x , il faut et il suffit qu'à chaque ensemble ouvert H contenant $f(x)$ corresponde un ensemble ouvert G contenant x et tel que $f(G) \subset H$.

III. L'ensemble D des points de discontinuité. Par définition, on a $x \in D$ lorsqu'il existe un ensemble X tel que $x \in \bar{X}$ et $f(x) \notin \overline{f(X)}$, c. à d. tel que $x \in \bar{X} - f^{-1}[\overline{f(X)}]$. Il vient:

$$(1) \quad D = \sum_X \{ \bar{X} - f^{-1}[\overline{f(X)}] \}, \text{ d'où } f(D) = \sum_X [f(\bar{X}) - \overline{f(X)}],$$

la sommation s'étendant à tous les sous-ensembles X de $\mathcal{X}$.

En effet,

$$\begin{aligned} f(D) &= \sum_X f(\bar{X} - f^{-1}[\overline{f(X)}]) = \sum_X f(\bar{X} \cdot f^{-1}[\mathcal{Y} - \overline{f(X)}]) = \\ &= \sum_X \{ f(\bar{X}) \cdot [\mathcal{Y} - \overline{f(X)}] \} = \sum_X [f(\bar{X}) - \overline{f(X)}], \end{aligned}$$

d'après § 3, II, 13.

En vertu des propositions II (1) et (2), on a:

$$(2) \quad D = \sum_Y \{ f^{-1}[\text{Int}(Y)] - \text{Int}[f^{-1}(Y)] \} = \sum_Y [\overline{f^{-1}(Y)} - f^{-1}(Y)],$$

car d'une part la condition $f(x) \in \text{Int}(Y)$ équivaut à $x \in f^{-1}[\text{Int}(Y)]$ et d'autre part $f(x) \in \bar{Y}$ équivaut à $x \in \overline{f^{-1}(Y)}$.

On peut enfin supposer que dans la première des égalités (2), la variable Y parcourt la famille des ensembles ouverts et que dans la deuxième, elle varie dans celle des ensembles fermés.

En effet, si l'on pose $\text{Int}(Y) = G$, on a

$$f^{-1}[\text{Int}(Y)] - \text{Int}[f^{-1}(Y)] \subset f^{-1}(G) - [\text{Int } f^{-1}(G)]$$

et si l'on pose $\bar{Y} = F$, on a

$$\overline{f^{-1}(Y)} - f^{-1}(Y) \subset \overline{f^{-1}(F)} - f^{-1}(F).$$

Ainsi:

$$(3) \quad D = \sum_G \{ f^{-1}(G) - \text{Int}[f^{-1}(G)] \} = \sum_F [\overline{f^{-1}(F)} - f^{-1}(F)].$$

La première des égalités (3) implique que $DC\mathfrak{X}'$ (dérivé de $\mathfrak{X}$), car tout point *isolé* de l'espace, comme point intérieur de chaque ensemble qui le contient, n'appartient pas à $f^{-1}(G) - \text{Int}[f^{-1}(G)]$.

Les égalités suivantes définissent deux classes importantes de fonctions: 1° $D=0$ les fonctions *continues*, 2° $\overline{\mathfrak{X}-D}=\mathfrak{X}$ les fonctions *ponctuellement discontinues*.

IV. Fonctions continues en chaque point. Si la fonction f est continue, on a $D=0$ et $f(D)=0$. Les formules III (1)–(3) fournissent aussitôt les conditions suivantes, nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction f soit continue:

- (1) $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$, quel que soit X ,
- (2) $\overline{f^{-1}(Y)} \subset f^{-1}(\overline{Y})$, quel que soit Y ,
- (3) $f^{-1}(G)$ est ouvert, quel que soit l'ensemble ouvert G ,
- (4) $f^{-1}(F)$ est fermé, quel que soit l'ensemble fermé F .

Les deux dernières conditions résultent de l'égalité III (3), car la condition $D=0$ équivaut à l'hypothèse que, pour chaque ensemble ouvert G , on a $f^{-1}(G) - \text{Int}[f^{-1}(G)] = 0$, donc que $f^{-1}(G)$ est ouvert; de même l'hypothèse $\overline{f^{-1}(F)} - f^{-1}(F) = 0$ signifie que $f^{-1}(F)$ est fermé.

En particulier, $f(x)$ étant une fonction continue à valeurs réelles et ab un intervalle, les ensembles $\bigcup_x \{a \leq f(x) \leq b\}$, $\bigcup_x \{a \leq f(x)\}$ et $\bigcup_x \{f(x) = a\}$ sont fermés; l'ensemble $\bigcup_x \{a < f(x) < b\}$ est ouvert.

En tenant compte du fait que l'opération f^{-1} est additive et multiplicative (§ 3, II, 6a et 7a), on déduit de (3) et (4) que

- (5) si Y est respectivement un F_σ ou un G_δ , $f^{-1}(Y)$ l'est également.
- (6) La superposition de deux fonctions continues donne une fonction continue. Plus précisément: si la fonction f est continue au point x et la fonction g l'est au point $f(x)$, la fonction superposée $h = gf$ est continue au point x .

En effet, en vertu de la continuité de la fonction f , la condition $x \in \overline{X}$ entraîne $f(x) \in \overline{f(X)}$ et celle-ci entraîne, en vertu de la continuité de la fonction g , la condition $g[f(x)] \in \overline{g[f(X)]}$, d'où la conclusion demandée.

V. Relativisation. Fonctions partielles. Rétraction.

Rappelons que l'on désigne par $f|A$ la fonction qui s'obtient de f en restreignant à A l'ensemble de ses arguments (§ 3, II). La fonction partielle $f|A$ est dite *continue au point x relativement à A* , lorsque $x \in A$ et que la condition $x \in \overline{XA}$ entraîne $f(x) \in \overline{f(XA)}$.

1. La continuité d'une fonction en un point p est une propriété locale, c. à d. que, A étant un entourage de p , la continuité de la fonction partielle $f|A$ en un point p entraîne celle de la fonction f en ce point.

Soit, en effet, $p \in \overline{X}$. On a évidemment $X = XA + (X - A)$, d'où $\overline{X} = \overline{XA} + \overline{X - A} \subset \overline{XA} + \overline{X - A}$ et, comme par hypothèse p n'appartient pas à $\overline{X - A}$, il vient $p \in \overline{XA}$, d'où, par suite de la continuité de la fonction partielle: $f(p) \in \overline{f(XA)} \subset \overline{f(X)}$.

2. Si $\mathfrak{X} = A + B$, $p \in AB$ et les fonctions $f|A$ et $f|B$ sont continues au point p , la fonction f l'est également.

En effet, si $p \in \overline{X} = \overline{XA} + \overline{XB}$, on a soit $p \in \overline{XA}$, soit $p \in \overline{XB}$. Donc $f(p) \in \overline{f(XA)} \subset \overline{f(X)}$ ou bien $f(p) \in \overline{f(XB)} \subset \overline{f(X)}$.

3. Si $\mathfrak{X} = A + B$ est une décomposition de $\mathfrak{X}$ en deux ensembles fermés et si les fonctions $f|A$ et $f|B$ sont continues, f est continue sur $\mathfrak{X}$.

Car, dans le cas où $p \in AB$, la fonction f est continue en p d'après la proposition 2 et dans le cas où p non- $\in A$, p est un point intérieur de B , de sorte qu'on arrive alors à la même conclusion en vertu de la proposition 1.

Un sous-ensemble A de $\mathfrak{X}$ est dit un *rétracte* de $\mathfrak{X}$ ¹⁾ lorsqu'il existe une transformation continue, dite *rétraction*, f de $\mathfrak{X}$ en A telle que $f(x) = x$ pour $x \in A$; autrement dit, lorsque l'identité restreinte aux points de A admet une extension continue f sur l'espace $\mathfrak{X}$ tout entier et telle que $f(\mathfrak{X}) = A$.

La rétraction peut être considérée comme une généralisation de la projection: étant donné un produit cartésien (fini ou dénombrable) $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \dots$, on définit une rétraction de ce produit en l'axe $\mathfrak{X}_1$, en posant $f(x_1, x_2, \dots) = x_1$.

4. A étant un rétracte de $\mathfrak{X}$, toute fonction continue f définie sur A (et dont les valeurs appartiennent à un espace $\mathfrak{Y}$) admet une extension continue f^* sur $\mathfrak{X}$; c. à d. que $f = f^*|A$.

En effet, g désignant une rétraction de $\mathfrak{X}$ en A , il suffit de poser $f^*(x) = f[g(x)]$ où $x \in \mathfrak{X}$.

¹⁾ Voir K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Math. 17 (1931), p. 153.

VI. Fonctions caractéristiques. On appelle *fonction caractéristique d'un ensemble* A la fonction qui admet la valeur 1 aux points de A et la valeur 0 aux points du complémentaire de A .

On a l'égalité suivante:

$$(1) \quad \text{Fr}(A) = D,$$

c. à d. que la frontière de A coïncide avec l'ensemble des points de discontinuité de la fonction caractéristique de A .

Soit, en effet, $f(x) = a$ pour $x \in A$ et $f(x) = b$ pour $x \in 1 - A$. Il suffit de considérer le cas où $x \in A$.

Si l'on suppose que $x \in \text{Fr}(A)$, l'ensemble $A = f^{-1}(a)$ n'est pas un entourage de x , bien que l'ensemble composé du point x seul soit un entourage de $f(x)$. Il en résulte selon II que $x \in D$.

Inversement, si $x \in A - \text{Fr}(A)$, on a $x \in \text{Int}(A)$ et, en vertu de la même proposition, x est un point de continuité de la fonction f .

L'identité (1) implique que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction caractéristique d'un ensemble A soit respectivement continue ou ponctuellement discontinue est que cet ensemble soit à la fois fermé et ouvert ou bien possède la frontière non-dense.

Car la condition $D = 0$ équivaut à l'égalité $\text{Fr}(A) = 0$, qui signifie que A est simultanément fermé et ouvert.

On en conclut en vertu de § 12, V, 2° que pour que la fonction caractéristique d'un ensemble A soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé, il faut et il suffit que l'ensemble A soit développable en série alternée d'ensembles fermés décroissants.

Ajoutons aux propriétés topologiques des fonctions caractéristiques les formules suivantes, qui appartiennent à la Théorie générale des ensembles et dont la démonstration ne présente aucune difficulté¹⁾: $c(x, A)$ désignant la fonction caractéristique de A , on a:

1. $c(x, 1) = 1$ 2. $c(x, 0) = 0$ 3. $c(x, A') = 1 - c(x, A)$
4. $c(x, \sum_i A_i) = \max_i c(x, A_i)$ 5. $c(x, \prod_i A_i) = \min_i c(x, A_i)$
6. $c(x, AB) = c(x, A) \cdot c(x, B)$
7. $c(x, A - B) = c(x, A) - c(x, AB)$

8. Limes A_n désignant l'ensemble $\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{\infty} A_{n+k} = \prod_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+k}$ (dans le cas où cette égalité a lieu), on a $c(x, \text{Limes } A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(x, A_n)$.

¹⁾ Voir par ex. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 20.

La notion de fonction caractéristique est employée aussi relativement aux suites (finies ou infinies) d'ensembles¹⁾. On appelle *fonction caractéristique du système d'ensembles* $A_1, \dots, A_n$ la fonction $y = f(x)$ qui fait correspondre à chaque x un système de nombres $y = [y^{(1)}, \dots, y^{(n)}]$ tels que $y^{(k)} = 1$ ou 0 suivant que $x \in A_k$ ou $x \in 1 - A_k$, $k = 1, \dots, n$; autrement dit, $y^{(k)} = f^{(k)}(x)$ est la fonction caractéristique de A_k .

La fonction caractéristique $y = f(x)$ d'une suite infinie d'ensembles $A_1, A_2, \dots$ admet pour valeurs les points de l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor; à savoir, $y^{(k)} = 2$ ou 0, suivant que $x \in A_k$ ou $x \in 1 - A_k$, $k = 1, 2, \dots$. Comme on voit, $\frac{1}{2}f^{(k)}(x)$ est la fonction caractéristique de A_k .

VII. Fonctions biunivoques et continues. Supposons à présent que la fonction f , qui transforme l'espace $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, soit *biunivoque*, c. à d. qu'à des arguments différents correspondent toujours des valeurs différentes de la fonction. Les propriétés suivantes sont des invariants des transformations biunivoques et continues:

1. la propriété d'être un point d'accumulation de l'espace; en effet, $x \in \overline{\mathcal{X} - x}$ entraîne $f(x) \in \overline{f(\mathcal{X} - x)} = \overline{\mathcal{Y} - f(x)}$, puisque $f(\mathcal{X} - x) = f(\mathcal{X}) - f(x)$ (voir § 3, III);

2. la propriété d'être dense en soi (c'est une conséquence immédiate de la proposition précédente);

3. la propriété d'être un ensemble frontière dans l'espace, car l'égalité $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X} - X}$ entraîne $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X}) = f(\overline{\mathcal{X} - X}) \subset \overline{f(\mathcal{X} - X)} = \overline{\mathcal{Y} - f(X)}$.

VIII. Fonctions bicontinues. Homéomorphie.

La fonction $y = f(x)$ transformant l'espace $\mathcal{X}$ en l'espace $\mathcal{Y}$ (tout entier) est dite *bicontinue* si elle est biunivoque et si la fonction $f(x)$, ainsi que la fonction inverse $f^{-1}(y)$, est continue. La transformation est dite alors une *homéomorphie*²⁾ et les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ s'appellent *homéomorphes* (ou du même *type topologique*; cf. aussi § 3, IV). En symbole:

$$\mathcal{X} \stackrel{\text{top}}{=} \mathcal{Y} \quad (\text{équivalence topologique}).$$

Dans le cas où $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, l'homéomorphie est nommée *auto-morphie* (topologique).

¹⁾ E. Szpilrajn-Marczewski, *Fund. Math.* **26** (1936), p. 302 et **31** (1938), p. 207.

²⁾ selon une dénomination de H. Poincaré, *Journ. Ec. Polyt.* (2) **1** (1895) p. 9.

On voit aussitôt que l'homéomorphie est une relation *symétrique, transitive et réflexive*.

Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour qu'une fonction biunivoque f soit bicontinue:

$$(1) \quad f(\overline{X}) = \overline{f(X)}, \text{ quel que soit } X,$$

$$(2) \quad f^{-1}(\overline{Y}) = \overline{f^{-1}(Y)}, \text{ quel que soit } Y.$$

En effet, d'après IV (1), l'inclusion $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ équivaut à la continuité de la fonction f , tandis que l'inclusion $\overline{f(X)} \subset f(\overline{X})$ équivaut, d'après IV (2), à la continuité de la fonction f^{-1} . De là résulte la première partie du théorème. Par un raisonnement analogue on en démontre la deuxième¹⁾.

Une condition nécessaire et suffisante pour l'homéomorphie est aussi la suivante:

$$(3) \quad \overline{X} = f^{-1}[\overline{f(X)}] \text{ quel que soit } X,$$

qui équivaut évidemment à la condition:

$$(3a) \quad \{x \in \overline{X}\} = \{f(x) \in \overline{f(X)}\}.$$

En effet, dans le cas où la fonction f est biunivoque, notre énoncé est vrai, car alors l'égalité (3) équivaut à (1). Il s'agit donc de prouver que toute fonction satisfaisant à la condition (3) est biunivoque. Posons $f(p) = f(q)$. Il vient: $\overline{p} = f^{-1}[\overline{f(p)}] = f^{-1}[\overline{f(q)}] = \overline{q}$, donc $p = q$, c. q. f. d.

IX. Propriétés topologiques. Comme nous l'avons indiqué déjà au § 3, IV, *chaque propriété topologique de l'espace* (c. à d. propriété énoncée à l'aide de l'opération $\overline{X}$) *est invariante par rapport aux transformations bicontinues*.

D'une façon plus générale, si un point a (ou un ensemble A , ou une famille d'ensembles $\mathcal{A}$, etc.) possède relativement à l'espace $\mathcal{X}$ une propriété donnée et si la fonction f transforme l'espace $\mathcal{X}$ en l'espace $\mathcal{Y}$ d'une façon bicontinue, le point $f(a)$ possède la même propriété relativement à l'espace $\mathcal{Y}$.

¹⁾ Cette démonstration ne dépend d'aucun axiome topologique. Voir II, renvoi¹⁾.

Ainsi, *deux espaces homéomorphes ne peuvent être distingués l'un de l'autre par aucun moyen topologique*. De façon analogue, si A et B sont deux ensembles situés respectivement dans les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, et s'il existe une transformation bicontinue de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ qui transforme A en B , les ensembles A et B sont dans leurs espaces, au point de vue topologique, indiscernables. Nous les appellerons *topologiquement équivalents* (par rapport aux espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$).

Il importe de remarquer que deux ensembles peuvent être homéomorphes et, cependant, leur situation dans l'espace peut être différente, de sorte qu'il n'y ait pas d'équivalence topologique entre eux. Par ex. dans l'espace des nombres réels, un ensemble composé d'un point, d'un segment et d'un second point (dans l'ordre indiqué) n'est pas équivalent (tout en étant homéomorphe) à un ensemble composé de deux points et d'un segment qui les suit. Les mêmes ensembles (considérés comme sous-ensembles du plan) sont équivalents par rapport au plan.

Une propriété d'un ensemble A situé dans un espace $\mathcal{X}$ qui est invariante par rapport aux transformations homéomorphes de A en sous-ensembles de $\mathcal{X}$, ou plus généralement, en sous-ensembles des espaces appartenant à une famille $\mathfrak{F}$ d'espaces — est dite un *invariant intrinsèque* par rapport à l'espace $\mathcal{X}$, respectivement par rapport à la famille $\mathfrak{F}$ d'espaces.

Ainsi par exemple (comme on verra plus tard), la propriété d'être un sous-ensemble ouvert A de l'espace cartésien $\mathcal{E}^n$ est un invariant intrinsèque par rapport à $\mathcal{E}^n$. Tel est aussi le nombre des régions en lesquelles l'espace $\mathcal{E}^n$ est coupé par un sous-ensemble fermé et borné A . Bien que ces propriétés soient des propriétés „extérieures“ de A , elles sont équivalentes (dans le domaine des sous-ensembles de $\mathcal{E}^n$) à des propriétés „intérieures“ (c. à d. exprimées en termes topologiques en considérant A comme l'espace). De là résulte leur invariance.

Le rôle de l'espace est ici essentiel. Si l'on prend pour l'espace l'intervalle $\mathcal{I}$ au lieu de $\mathcal{E}^n$, les deux propriétés mentionnées ne sont pas des invariants intrinsèques.

Comme on verra au § 31, IV, la propriété d'être un ensemble G_δ est un invariant intrinsèque par rapport à la famille des espaces complets.

Toutes les propriétés de l'espace, de ses sous-ensembles, des points etc., considérées jusqu'ici, sont des propriétés topologiques, donc des invariants des transformations homéomorphes de l'espace.

X. Rang topologique. L'espace $\mathcal{X}$ est dit *topologiquement contenu*¹⁾ dans l'espace $\mathcal{Y}$ s'il est homéomorphe à un sous-ensemble de $\mathcal{Y}$. En symbole:

$$\mathcal{X} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{Y} \text{ (inclusion topologique).}$$

¹⁾ d'après M. P. Alexandroff.

Si $\mathcal{X}$ est topologiquement contenu dans $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}$ l'est dans $\mathcal{X}$, nous dirons que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ont le même *rang topologique*¹⁾. Par contre, si cette relation n'a lieu que dans un seul sens, on dit que le rang topologique de l'un des espaces est supérieur à celui de l'autre.

Bien entendu, deux espaces peuvent avoir le même rang topologique sans qu'ils soient homéomorphes. Tels sont par ex. la droite illimitée et l'intervalle fermé. On a cependant, d'après un théorème de la Théorie des ensembles²⁾, la proposition suivante: *$\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ayant le même rang topologique, il existe un ensemble $A \subset \mathcal{X}$ et un ensemble $B \subset \mathcal{Y}$ tels que A est homéomorphe à B et $\mathcal{X} - A$ est homéomorphe à $\mathcal{Y} - B$.*

Les rangs topologiques de deux espaces peuvent être *incomparables*. Tel est par exemple le cas d'une circonférence et d'un ensemble composé de trois segments n'ayant qu'une seule extrémité en commun.

XI. Ensembles homogènes. Un ensemble A est dit *homogène* dans l'espace, si pour chaque couple a, b de ses points, il existe une automorphie $f(x)$, c. à d. une transformation bicontinue de l'espace en lui-même, telle que $f(a) = b$ et $f(A) = A$. En particulier, l'espace entier est homogène, si tous ses points sont topologiquement équivalents (dans le sens du N° IX).

Tels sont par ex. une circonférence, un espace euclidien à n dimensions. Ces espaces sont, en outre, *bihomogènes*, c. à d. qu'il existe une transformation faisant correspondre b à a et a à b simultanément. Il est d'ailleurs à remarquer qu'un espace peut être homogène sans être bihomogène³⁾.

Dans le même ordre d'idées, on prouve⁴⁾ que A étant un ensemble fermé et ouvert simultanément, a et b deux points équivalents et tels que $a \in A$ et $b \in 1 - A$, les points a et b sont bi-équivalents, c. à d. qu'il existe une transformation bicontinue f de l'espace en lui-même telle que $f(a) = b$ et $f(b) = a$ ⁵⁾.

Un ensemble A peut ne pas être homogène dans l'espace qui le contient, bien qu'il soit homogène quand on le considère comme un espace pour lui-même.

Il résulte facilement de la définition que, *A étant un ensemble homogène, chaque propriété topologique qui appartient à un point de A appartient à tous les autres*. En particulier, si l'on envisage

¹⁾ = „type de dimensions“ de M. Fréchet (voir Math. Ann. **68**, 1910, p. 145—168) = „Homöe“ de M. Mahlo.

²⁾ S. Banach, Fund. Math. **6** (1924), p. 236—239.

³⁾ Voir ma note *Un problème sur les ensembles homogènes*, Fund. Math. **3** (1922) p. 14—19 (problème de M. Knaster).

⁴⁾ Ibidem, p. 16.

⁵⁾ Dans une note *Ceber topologisch homogene Kontinua*, Fund. Math. **15** (1930), p. 102, M. van Dantzig distingue d'autres genres de homogénéité, en particulier l'homogénéité *involutoire*. Ces notions peuvent aussi être localisées.

les propriétés d'être un point intérieur, un point d'accumulation, un point où l'ensemble donné est de I-e catégorie, on en conclut respectivement que *tout ensemble homogène A est*

1° *soit un ensemble ouvert, soit un ensemble frontière;*

2° *soit dense en soi, soit isolé;*

3° *soit un ensemble de I-e catégorie, soit un ensemble qui n'est de I-e catégorie en aucun de ses points.*

Dans cet ordre d'idées on a le théorème suivant¹⁾:

Soit $\mathcal{S}$ une famille d'automorphies de l'espace telle qu'à chaque couple de points x, y corresponde une automorphie h appartenant à cette famille et satisfaisant à l'égalité $y = h(x)$. Soit Z un ensemble tel que l'on ait pour chaque élément h de $\mathcal{S}$

$$(4) \quad \text{soit } Z = h(Z), \quad \text{soit } Z \cdot h(Z) = 0.$$

Dans ces hypothèses, si Z jouit de la propriété de Baire, Z est ou bien un ensemble de I-e catégorie ou bien un ensemble simultanément fermé et ouvert.

Pour le démontrer, remarquons d'abord (cf. N° IX) que, z étant un point de Z , si Z jouit d'une propriété (topologique) au point z , l'ensemble $h(Z)$ jouit de la même propriété au point $h(z)$. En outre, Z est homogène, car on peut faire correspondre au point $z_1 \in Z$ une automorphie h telle que $z_1 = h(z)$ et, comme $z_1 \in Z \cdot h(Z)$, il vient en raison de (4): $Z = h(Z)$.

Il en résulte selon 3° que si Z n'est pas de I-e catégorie, Z n'est de I-e catégorie dans aucun de ses points. On en conclut en vertu de la propriété de Baire (§ 11, IV, cor. 2) qu'il existe un point $z \in Z$ dans lequel $1 - Z$ est de I-e catégorie. Soit donc G un ensemble ouvert tel que $z \in G$ et que $G - Z$ soit de I-e catégorie. Nous allons prouver que $G - Z = 0$.

Supposons, par contre, que $p \in G - Z$. Soit h une automorphie appartenant à $\mathcal{S}$ et telle que $p = h(z)$. Comme $p \in h(Z) - Z$, il vient d'après (4): $Z \cdot h(Z) = 0$, d'où $h(Z) \subset 1 - Z$, donc $G \cdot h(Z) \subset G - Z$, ce qui prouve que $G \cdot h(Z)$ est un ensemble de I-e catégorie. Par con-

¹⁾ Ce théorème présente une extension aux espaces topologiques d'un théorème de S. Banach concernant les groupes topologiques (voir N° suivant). Le théorème de Banach a trouvé des applications importantes dans le Calcul fonctionnel. Voir S. Banach *Théorie des opérations linéaires*, cette Collection Tome I (1932), p. 20; voir aussi ma note, *Sur la propriété de Baire dans les groupes métriques*, Studia Math. **4** (1933).

séquent, $h(Z)$ est de I-e catégorie au point $p = h(z)$. Mais cela contredit la remarque faite au début de la démonstration, puisque Z n'est pas de I-e catégorie au point z .

L'inclusion $G \subset Z$ établie, il en résulte que z est un point intérieur de Z , donc, Z étant homogène, Z est ouvert (selon 1°).

Reste à prouver que Z est fermé.

Soit $p \in \bar{Z}$ et $z \in Z$. Posons, comme auparavant, $p = h(z)$. L'ensemble Z étant ouvert et h étant une automorphie de l'espace, $h(Z)$ est aussi ouvert. Par conséquent les formules $p \in \bar{Z}$ et $p \in h(Z)$ entraînent $Z \cdot h(Z) \neq \emptyset$, d'où $Z = h(Z)$, donc $p \in Z$, c. q. f. d.

XII. Applications aux groupes topologiques. Un espace topologique (satisfaisant aux ax. I—III) s'appelle *groupe topologique*¹⁾, lorsqu'on a fait correspondre à chaque couple de points x, y leur „somme” $z = x + y$ de façon que: 1° $(x + y) + z = x + (y + z)$, 2° il existe l'élément-zéro 0 tel que $x + 0 = x = 0 + x$, 3° il existe l'élément $(-x)$ tel que $x + (-x) = 0$, 4° les opérations $x + y$ et $-x$ sont continues²⁾.

Posons $h_a(x) = a + x$. On voit aussitôt que la condition $y = h_a(x)$ entraîne $x = h_{-a}(y)$. On en conclut que $h_a(x)$ est (pour a fixe) une automorphie de l'espace et que la famille $\mathcal{H}$ de toutes les fonctions h_a satisfait à l'hypothèse du théorème du N° XI.

On appelle *sous-groupe* chaque ensemble qui, avec x , contient $(-x)$ et, avec x et y , contient $x + y$. On vérifie facilement que, Z étant un sous-groupe, la condition XI (4) est réalisée. D'après ce qui précède, *chaque sous-groupe est homogène* (en particulier, chaque groupe topologique est homogène). En vertu du théorème du N° XI, *tout sous-groupe qui jouit de la propriété de Baire est soit un ensemble de I-e catégorie, soit un ensemble à la fois fermé et ouvert.*

¹⁾ Pour un excellent exposé de la théorie des groupes topologiques, voir L. Pontrjagin, *Topological Groups*, Princeton 1946. Voir aussi D. van Dantzig, *Zur topologischen Algebra*, Math. Ann. **107** (1932), p. 587—626, où l'on trouvera de nombreux renvois bibliographiques.

²⁾ Une fonction continue de deux variables est une fonction continue d'une seule variable parcourant un produit cartésien (voir § 24, I). Pour les applications dont il est question ici, il suffit de supposer la continuité par rapport à chacune des variables séparément.

DEUXIÈME CHAPITRE.

Espaces métrisables et séparables.

A. Introduction de la limite, de la distance et des coordonnées (§§ 14—17).

Nous allons ajouter, à présent, aux axiomes I—III deux nouveaux axiomes (§§ 16 et 17). L'espace satisfaisant aux ax. I—V constitue, comme nous l'avons indiqué déjà dans la Préface, le domaine le plus important de la Topologie. Il est d'après un théorème du § 17 homéomorphe à un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{E}^{\aleph_0}$; c'est bien ce théorème fondamental, qui est un de nos buts les plus proches. Afin d'y parvenir d'une façon méthodique, nous étudierons d'abord deux genres d'espaces: espaces $\mathcal{L}^*$, munis de la notion de limite, et espaces métriques, munis de la notion de distance. Les §§ 14 et 15 contiennent plusieurs définitions et théorèmes importants, liés à ces notions. Dès que le théorème fondamental sera établi, tous les théorèmes concernant les espaces $\mathcal{L}^*$, ainsi que les espaces métriques, pourront être considérés comme des théorèmes sur l'espace assujetti aux ax. I—V, puisque dans un espace de ce genre la limite et la distance se laissent introduire de façon que cet espace devienne $\mathcal{L}^*$ et métrique.

§ 14. Espaces $\mathcal{L}^*$ (pourvus de la notion de limite).

I. Définition. Un ensemble d'éléments arbitraires devient un espace $\mathcal{L}^*$, lorsqu'on a fait correspondre à certaines suites (dites *convergentes*) $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ d'éléments de cet espace un élément $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ de façon que les conditions suivantes soient réalisées¹⁾:

¹⁾ Les espaces abstraits ayant la notion de limite pour terme primitif ont été introduits par M. Fréchet dans sa Thèse, Paris 1906 et Rend. Circ. Mat. di Palermo **22** (1906), *Sur quelques points du Calcul fonctionnel*. Pour la cond. 3°, voir P. Alexandroff et P. Urysohn, C. R. Paris, t. **177** (1923), p. 1274 et P. Urysohn *Sur les classes ($\mathcal{L}$) de M. Fréchet*, Ens. Math. **25** (1926), p. 77—83, où les espaces $\mathcal{L}^*$ sont désignés par $\mathcal{L}_f$.