INTRODUCTION

Nous rappellerons ici quelques notations et théorèmes élémentaires de la Théorie générale des ensembles et de l'Algèbre de la Logique. Les notions de la Théorie des ensembles seront d'emploi constant (excepté l'opération ($\mathcal{A}$), qui est d'un caractère plus spécial). L'Algèbre de la Logique, dans la majorité des paragraphes (surtout dans ceux de nature „géométrique") ne sera pas employée, tandis que nous en ferons usage dans certains problèmes (surtout liés à la Théorie des fonctions) où l'emploi des notations logiques s'impose de façon très naturelle et permet de simplifier les raisonnements (p. ex. aux §§ 27, 33—35).

En première lecture, on peut omettre tout ce qui concerne l'Algèbre de la Logique.

§ 1. Opérations de la Logique et de la Théorie des ensembles.

I. Algèbre de la Logique. α et β étant deux propositions, α' désigne la *négation* de α (c'est à dire „non α"), $\alpha+\beta$ la *somme* logique („α ou β"), $\alpha\cdot\beta$ le *produit* logique („α et β"); $\alpha\rightarrow\beta$ veut dire que α entraîne β *(implication)*, $\alpha\equiv\beta$ veut dire que α équivaut à β.

Citons, à titre d'exemple, les théorèmes suivants: $\alpha''\equiv\alpha$ (loi de double négation), $(\alpha\rightarrow\beta)\equiv(\beta'\rightarrow\alpha')$ (loi de contraposition), $(\alpha\cdot\beta)'\equiv\alpha'+\beta'$, $(\alpha+\beta)'\equiv(\alpha'\cdot\beta')$ (lois de de Morgan), $(\alpha\rightarrow\beta)\equiv(\alpha'+\beta)$, $\alpha\cdot(\beta+\gamma)\equiv\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

Chaque proposition admet l'une des deux valeurs 0 (le „faux") ou 1 (le „vrai"). On a $\alpha\cdot\alpha'\equiv 0$ (principe de contradiction), $\alpha+\alpha'\equiv 1$ (principe du tiers exclu).

II. Algèbre de la Théorie des ensembles. Soit 1 un ensemble donné (ce sera dans la suite l'*espace* considéré). Les éléments de cet ensemble (les *points*) seront désignés par des minuscules latines $a, b, x, y, \ldots$; les sous-ensembles de l'ensemble 1 seront désignés par des majuscules $A, B, X, \ldots$; les familles de sous-ensembles (ensembles du deuxième rang) par $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}, \ldots$ [1]).

$x \in X$ signifie que x est un élément de l'ensemble X. On désigne respectivement par $X+Y$, $X \cdot Y$ (ou XY), $X-Y$: l'ensemble composé des éléments qui appartiennent soit à X, soit à Y, l'ensemble formé par la partie commune de X et Y, l'ensemble des éléments qui appartiennent à X, mais non à Y. L'ensemble vide est désigné par 0. On écrit $X \subset Y$, lorsque X est un sous-ensemble de Y. Le „complémentaire de X" $= X' = 1 - X$.

On a ainsi les équivalences suivantes:

$$(x \in A)' \equiv (x \in A'), \quad (x \in A) + (x \in B) \equiv x \in (A+B),$$

$$(x \in A) \cdot (x \in B) \equiv (x \in A \cdot B), \quad 1 \equiv (x \in 1), \quad 0 \equiv (x \in 0),$$

$$(A \subset B) \equiv [(x \in A) \rightarrow (x \in B)], \quad (A = B) \equiv [(x \in A) \equiv (x \in B)],$$

les symboles $'$, $+$, $\cdot$, 1, 0, ayant dans le membre gauche leur sens logique et dans le membre droit leur sens en Théorie des ensembles.

Citons les formules suivantes:

$$A = AB + (A-B),\ AB \subset A \subset A+B,\ (A+B)' = A'B',\ (AB)' = A' + B',$$

$$(A=B) \equiv [(A \subset B) \cdot (B \subset A)],$$

$$(A \subset B) \equiv (A+B=B) \equiv (AB=A) \equiv (A-B=0).$$

Deux ensembles A et B sont dits *disjoints*, lorsque $AB = 0$.
On a $A(B-A) = AA' = 0$ (quel que soit B).
L'ensemble composé d'un seul élément a est désigné par (a).

III. Fonctions propositionnelles. Soit $\varphi(x)$ une fonction propositionnelle dont la variable x parcourt l'espace 1, supposé $\neq 0$. $\varphi(x)$ exprime une condition; elle devient une proposition vraie pour toute valeur de x satisfaisant à cette condition; elle devient une proposition fausse dans le cas contraire; si, par ex. dans l'espace des nombres réels, on considère la propriété d'être un nombre positif, on a $\varphi(x) \equiv (x > 0)$.

[1]) Les différents caractères mettent en évidence les différents *types logiques* de variables.

$\sum\limits_x \varphi(x)$ veut dire: il existe un x tel que $\varphi(x)$ (c. à d. un x satisfaisant à la condition considérée).

$\prod\limits_x \varphi(x)$ veut dire: quel que soit x, on a $\varphi(x)$ (c. à d. que la condition est vérifiée par chaque x).

Par exemple: $\prod\limits_x (x+2>x)$, $\sum\limits_x (x^2 = x)$.

On a les formules suivantes, faciles à vérifier:

$$(\sum_x \varphi(x))' \equiv \prod_x \varphi'(x) \text{ (formule de de Morgan généralisée),}$$

$$(\prod_x \varphi(x)) \rightarrow (\sum_x \varphi(x)), \quad [\sum_x \varphi(x) + \sum_x \psi(x)] \equiv \sum_x [\varphi(x) + \psi(x)],$$

$$\prod_x \varphi(x) \cdot \prod_x \psi(x) \equiv \prod_x [\varphi(x) \cdot \psi(x)], \quad \sum_x [\varphi(x) \cdot \psi(x)] \rightarrow \sum_x \varphi(x) \cdot \sum_x \psi(x),$$

$$[\prod_x \varphi(x) + \prod_x \psi(x)] \rightarrow \prod_x [\varphi(x) + \psi(x)].$$

Rien n'empêche de considérer toute proposition α comme une fonction propositionnelle (qui est soit identiquement vraie, soit identiquement fausse). On a

$$\sum_x \alpha \equiv \alpha \equiv \prod_x \alpha, \quad \sum_x [\alpha \cdot \varphi(x)] \equiv \alpha \cdot \sum_x \varphi(x), \quad \alpha + \prod_x \varphi(x) \equiv \prod_x [\alpha + \varphi(x)].$$

IV. Opérateur $\underset{x}{E}\, \varphi(x)$. L'ensemble des x qui satisfont à la condition φ est désigné par $\underset{x}{E}\, \varphi(x)$. Par ex. $\underset{x}{E}\,(x>0)$ est l'ensemble des nombres positifs. $\underset{x}{E}\,(x^2 = x)$ se compose de deux nombres: 0 et 1.

On a l'identité

1. $$t \in \underset{x}{E}\, \varphi(x) \equiv \varphi(t),$$

d'où on déduit facilement en vertu des équivalences du N° II les formules:

2. $$\underset{x}{E}\, [\varphi(x)]' = [\underset{x}{E}\, \varphi(x)]'$$

3. $$\underset{x}{E}\, [\varphi(x) + \psi(x)] = \underset{x}{E}\, \varphi(x) + \underset{x}{E}\, \psi(x)$$

4. $$\underset{x}{E}\, [\varphi(x) \cdot \psi(x)] = \underset{x}{E}\, \varphi(x) \cdot \underset{x}{E}\, \psi(x).$$

Ainsi, par ex., on prouve la dernière égalité comme suit:

$$t \in \underset{x}{E}[\varphi(x)\cdot\psi(x)] \equiv \varphi(t)\cdot\psi(t) \equiv [t \in \underset{x}{E}\,\varphi(x)]\cdot[t \in \underset{x}{E}\,\psi(x)] \equiv$$
$$\equiv t \in \underset{x}{E}\,\varphi(x)\cdot\underset{x}{E}\,\psi(x).$$

En outre, $\underset{x}{E}\,0 = 0$, $\underset{x}{E}\,1 = 1$, les symboles du membre gauche ayant, comme toujours, le sens logique et ceux du membre droit le sens mathématique.

V. Opérations infinies. Soit A_ι un ensemble dépendant d'un paramètre ι (qui parcourt un ensemble donné)[1]. Les ensembles $\sum_\iota A_\iota$ („somme des ensembles A_ι") et $\prod_\iota A_\iota$ („produit des ensembles A_ι") sont définis par les identités:

$$\sum_\iota (t \in A_\iota) \equiv [t \in \sum_\iota A_\iota], \qquad \prod_\iota (t \in A_\iota) \equiv [t \in \prod_\iota A_\iota].$$

En remplaçant dans les formules du N⁰ III les fonctions propositionnelles $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ par A_ι et B_ι, x par ι et $\rightarrow$ par $\subset$, on obtient des formules concernant les opérations $\sum_\iota A_\iota$ et $\prod_\iota A_\iota$ de la Théorie des ensembles; citons comme exemple la règle de de Morgan généralisée: $(\sum_\iota A_\iota)' = \prod_\iota A'_\iota$.

Dans le cas où le paramètre n parcourt l'ensemble des nombres naturels, on emploie les symboles $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ et $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ par analogie avec les séries et les produits infinis de l'Analyse.

VI[2]. **Opération** $(\mathcal{A})$[3]. Supposons qu'on ait fait correspondre à chaque système fini d'entiers positifs $k_1, \dots, k_n$ un ensemble $A_{k_1 \dots k_n}$. L'ensemble-somme de tous les produits de la forme $\prod_{n=1}^{\infty} A_{k_1 \dots k_n}$ est dit „résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur le système des ensembles $A_{k_1 \dots k_n}$".

[1]) En général l'indice ι parcourra un ensemble arbitraire, dénombrable ou non; cependant i, k, n etc. désigneront un nombre naturel variable.

[2]) La lecture du N⁰ VI peut être remise jusqu'à celle du § 11.

[3]) Voir les notes de MM. Souslin et Lusin dans les Comptes Rendus Paris, t. **164** (1917), p. 88 ss.; voir aussi F. Hausdorff, *Mengenlehre*, § 19.

L'importance de l'opération $(\mathcal{A})$ tient surtout au fait que, malgré sa généralité, il y a des propriétés importantes (telles que la mesurabilité, la propriété de Baire, cf. § 11) qui en sont des invariants.

L'opération $(\mathcal{A})$ est une opération indénombrable (la sommation étant indénombrable). Les opérations dénombrables $\sum_{n=1}^{\infty}$ et $\prod_{n=1}^{\infty}$ en sont des cas particuliers, cas, où l'on pose soit $A_{k_1 \dots k_n} = B_{k_1}$, soit $A_{k_1 \dots k_n} = B_n$.

Soit $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \dots, \mathfrak{z}^n, \dots]$ une suite variable de nombres naturels (on peut considérer $\mathfrak{z}$ comme le nombre irrationnel dont le développement en fraction continue est $\frac{1|}{|\mathfrak{z}^1} + \frac{1|}{|\mathfrak{z}^2} + \dots + \frac{1|}{|\mathfrak{z}^n} + \dots$).

Le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ s'exprime alors par la formule

$$R = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{n=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n}.$$

Le système d'ensembles $\{A_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n}\}$ est dit *régulier* lorsque

$$A_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n \mathfrak{z}^{n+1}} \subset A_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n}.$$

Chaque système $\{A_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n}\}$ peut être „régularisé": en posant

(1) $$A^*_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n} = A_{\mathfrak{z}^1} \cdot A_{\mathfrak{z}^1 \mathfrak{z}^2} \cdot \dots \cdot A_{\mathfrak{z}^1 \mathfrak{z}^2 \dots \mathfrak{z}^n}$$

on constate aussitôt que l'on n'altère pas le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ en remplaçant le système $\{A_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n}\}$ par le système régulier $\{A^*_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^n}\}$.

Citons les formules suivantes concernant l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur un système régulier[1]):

1. $$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} A_{m\,\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k}$$

et d'une façon plus générale:

1a. $$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^i\, m\, \mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k} = \sum_{\mathfrak{z}} \prod_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{y}^1 \dots \mathfrak{y}^i\, \mathfrak{z}^1 \dots \mathfrak{z}^k};$$

[1]) Cf. N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur quelques propriétés des ensembles* (A), Bull. Acad. Sc. Cracovie 1918, p. 35.

2. $A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k} \subset B_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k}$ *entraîne* $\sum\limits_{\mathfrak{z}}\prod\limits_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k} \subset \sum\limits_{\mathfrak{z}}\prod\limits_{k=1}^{\infty} B_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k}$;

3. *la sommation* $\sum\limits_{\mathfrak{z}}\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k}$ *est dénombrable*

(l'ensemble des systèmes finis de nombres naturels étant dénombrable);

4. $$A-\sum_{\mathfrak{z}}\prod_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k} \subset \sum_{\mathfrak{z}}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k}-\sum_{m=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k m}\Big),$$

où l'on pose $A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k}=A$ pour $k=0$.

Pour prouver cette dernière inclusion, supposons que $p\in A$ et que p n'appartienne pas au membre droit de l'inclusion; donc en symboles logiques:

$$\prod_{\mathfrak{z}}\prod_{k=0}^{\infty}\Big[(p\in A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k})\rightarrow\sum_{m=1}^{\infty}(p\in A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k m})\Big],$$

ce qui veut dire que, $m_1\dots m_k$ étant un système fini ($k\geqslant 0$) d'indices tels que $p\in A_{m_1\dots m_k}$, il existe un indice m tel que $p\in A_{m_1\dots m_k m}$. Or, comme $p\in A$, on en conclut que, pour un certain indice m_1 $p\in A_{m_1}$; d'où pour la même raison $p\in A_{m_1 m_2}$ etc. Il existe par conséquent une suite infinie d'indices $m_1, m_2, \dots$ telle que

$$p\in\prod_{k=1}^{\infty} A_{m_1\dots m_k}, \quad \text{donc} \quad p\in\sum_{\mathfrak{z}}\prod_{k=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k},$$

ce qui prouve que p n'appartient pas au membre gauche de l'inclusion 4, c. q. f. d.

5. *Si les ensembles* $A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}$ *et* $A_{\mathfrak{y}^1\dots\mathfrak{y}^n}$ *sont disjoints dès que leur systèmes d'indices, sont distincts, on a*

$$\sum_{\mathfrak{z}}\prod_{n=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{\mathfrak{z}} A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}.$$

En effet, l'inclusion $\sum\limits_{\mathfrak{z}}\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}\subset\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{\mathfrak{z}} A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}$ a toujours lieu (même si le système n'est pas régulier; voir d'ailleurs § 2, IV). Supposons donc que p appartienne au membre droit. Il existe alors un et un seul indice m_1 tel que $p\in A_{m_1}$; d'une façon analogue il existe un couple d'indices l_1, m_2 tel que $p\in A_{l_1 m_2}$. Comme $A_{l_1 m_2}\subset A_{l_1}$, il vient $p\in A_{l_1}$ et on en conclut que $l_1=m_1$. On démontre de la même façon qu'il existe un indice m_3 tel que $p\in A_{m_1 m_2 m_3}$ etc. En désignant par $\mathfrak{z}$ la suite infinie $m_1, m_2, m_3, \dots$, on voit bien que pour chaque n on a $p\in A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}$. Donc $p\in\sum\limits_{\mathfrak{z}}\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}$.

6 [1]). *E étant le résultat de l'opération ($\mathcal{A}$) effectuée sur le système (régulier ou irrégulier) $\{A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^k}\}$, posons pour $\alpha<\Omega$ (où Ω désigne le plus petit nombre ordinal indénombrable):*

(2) $$A^0_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}=A_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n},$$

(3) $$A^{\alpha+1}_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}=A^{\alpha}_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}A^{\alpha}_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n k},$$

(4) $$A^{\lambda}_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}=\prod_{\xi<\lambda}A^{\xi}_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n} \quad \textit{pour } \lambda \textit{ limite.}$$

Posons, en outre:

(5) $$E_{\alpha}=\sum_{k=1}^{\infty}A^{\alpha}_{k},$$

(6) $$T_{\alpha}=\sum_{\mathfrak{z}}\sum_{n=1}^{\infty}\big(A^{\alpha}_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}-A^{\alpha+1}_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}\big),$$

(7) $$K_{\alpha}=E_{\alpha}-T_{\alpha}.$$

On a alors

(8) $$\sum_{\alpha<\Omega}K_{\alpha}=E=\prod_{\alpha<\Omega}E_{\alpha}.$$

Soit d'abord $x\in K_\alpha$. On a donc $x\in E_\alpha$ et x *non*-$\in T_\alpha$. La première de ces formules implique (d'après (5)) l'existence d'un indice k_1 tel que $x\in A^{\alpha}_{k_1}$; en vertu de la deuxième on a: x *non*-$\in(A^{\alpha}_{k_1}-A^{\alpha+1}_{k_1})$ (ce qui résulte de (6) en posant $\mathfrak{z}=[k_1,1,1,\dots]$ et $n=1$); d'où $x\in A^{\alpha+1}_{k_1}$. On en conclut en vertu de (3) qu'il existe un indice k_2 tel que $x\in A^{\alpha}_{k_1 k_2}$. De là (en posant dans (6) $\mathfrak{z}=[k_1,k_2,1,1,\dots]$ et $n=2$) on déduit que x *non*-$\in(A^{\alpha}_{k_1 k_2}-A^{\alpha+1}_{k_1 k_2})$, donc $x\in A^{\alpha+1}_{k_1 k_2}$.

Ainsi, on définit de proche en proche une suite infinie d'entiers positifs $k_1, k_2, \dots$ telle que $x\in A^{\alpha}_{k_1\dots k_n}$ quel que soit n. Autrement dit, en posant $\mathfrak{z}=[k_1,k_2,\dots]$, on a

(9) $$x\in\prod_{n=1}^{\infty}A^{\alpha}_{\mathfrak{z}^1\dots\mathfrak{z}^n}.$$

[1]) W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles* (A), Fund. Math. **8** (1926), p. 362. On y trouve quelques autres citations sur ce sujet.

D'autre part, on constate facilement par l'induction transfinie que

$$A^{\alpha}_{k_1\ldots k_n} \supset A^{\beta}_{k_1\ldots k_n} \quad \text{pour } \alpha<\beta. \tag{10}$$

Il vient

$$x \in \prod_{n=1}^{\infty} A^{0}_{k_1\ldots k_n} = \prod_{n=1}^{\infty} A_{k_1\ldots k_n}, \quad \text{d'où } x\in E.$$

Il est ainsi établi que

$$\sum_{\alpha<\Omega} K_\alpha \subset E. \tag{11}$$

Afin d'en déduire (8), nous allons démontrer que

$$(12) \quad E \subset \prod_{\alpha<\Omega} E_\alpha \qquad \text{et} \qquad (13) \quad \prod_{\alpha<\Omega} T_\alpha = 0.$$

On a, pour chaque α et m:

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_{k_1\ldots k_n} \subset A^{\alpha}_{k_1\ldots k_m}. \tag{14}$$

Cela se démontre par l'induction transfinie en tenant compte de (2), (4) et de la formule

$$A^{\alpha}_{k_1\ldots k_n}\cdot A^{\alpha}_{k_1\ldots k_n k_{n+1}} \subset A^{\alpha}_{k_1\ldots k_n}\cdot \sum_{k=1}^{\infty} A^{\alpha}_{k_1\ldots k_n k} = A^{\alpha+1}_{k_1\ldots k_n},$$

qui prouve que, si l'inclusion (14) est supposée réalisée pour α (et pour chaque m), elle est réalisée aussi pour $\alpha+1$.

En substituant dans (14) $m=1$, il vient

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_{k_1\ldots k_n} \subset A^{\alpha}_{k_1} \subset \sum_{k=1}^{\infty} A^{\alpha}_{k} = E_\alpha,$$

d'où l'inclusion (12).

Pour établir (13), supposons par impossible que $x\in T_\alpha$, quel que soit $\alpha<\Omega$. A chaque α correspond par conséquent un système d'indices $k_1,\ldots,k_n$ tel que

$$x\in (A^{\alpha}_{k_1\ldots k_n} - A^{\alpha+1}_{k_1\ldots k_n}). \tag{15}$$

L'ensemble de tous les systèmes finis d'entiers positifs étant dénombrable et l'ensemble des nombres ordinaux $<\Omega$ étant indé-

nombrable, il existe deux nombres ordinaux différents α et β auxquels correspond le même système d'indices; à côté de (15), on a donc

$$x\in (A^{\beta}_{k_1\ldots k_n} - A^{\beta+1}_{k_1\ldots k_n}). \tag{16}$$

Il est légitime d'admettre que $\alpha<\beta$, donc que $\alpha+1\leqslant\beta$. Il vient, en vertu de (16) et (10): $x\in A^{\alpha+1}_{k_1\ldots k_n}$, contrairement à (15).

Les formules (12) et (13) établies, passons à (8). En tenant compte de (12) et (11), il reste à prouver que

$$\prod_{\alpha<\Omega} E_\alpha \subset \sum_{\alpha<\Omega} K_\alpha.$$

Or cela résulte aussitôt de (13): si $x\in E_\alpha$ pour chaque α, il en existe un α tel que

$$x\in (E_\alpha - T_\alpha) = K_\alpha \subset \sum_{\alpha<\Omega} K_\alpha.$$

VII[1]**. Crible.** Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des fractions binaires finies $0<r<1$:

$$r=\frac{1}{2^{m_1}}+\ldots+\frac{1}{2^{m_n}}, \quad \text{où} \quad 1\leqslant m_1<\ldots<m_n. \tag{1}$$

Toute fonction qui fait correspondre à chaque $r\in\mathcal{R}$ un ensemble W_r est nommée un *crible*. L'ensemble A des x pour lesquels il existe une suite infinie de nombres $r_1, r_2, \ldots$ de $\mathcal{R}$ tels que

$$r_1<r_2<\ldots \quad \text{et} \quad x\in W_{r_1}\cdot W_{r_2}\cdot\ldots \tag{2}$$

est dit *criblé* par le crible W_r.

En d'autres termes: posons

$$(3) \quad M_x = \underset{r}{E}(x\in W_r), \qquad \text{c. à d.} \qquad (4) \quad W_r = \underset{x}{E}(r\in M_x).$$

A est l'ensemble des x pour lesquels l'ensemble M_x n'est pas bien ordonné selon la grandeur décroissante de ses éléments[2].

---

[1]) La lecture des N$^{\text{os}}$ VII et VIII peut être remise (sauf la définition de l'ensemble de Cantor) jusqu'à celle des §§ 26 et 34.

[2]) Ces notions sont dues à M. Lusin. Cf. Fund. Math. **10** (1927), p. 9. Dans le cas où les ensembles W_r sont contenus dans l'espace des nombres réels, on peut imaginer l'ensemble W_r placé sur la droite $y=r$. L'ensemble M_x coïncide alors avec l'intersection de l'ensemble-somme des W_r (où $r\in\mathcal{R}$) par la droite verticale d'abscisse x.

Désignons par A_α, pour $\alpha < \Omega$, l'ensemble des x pour lesquels le type d'ordre de l'ensemble M_x est α. On a donc

$$A' = \sum_{\alpha<\Omega} A_\alpha. \tag{5}$$

C'est la décomposition de A' en *constituantes* (relatives au crible W_r). Elle joue un grand rôle dans l'étude des ensembles projectifs.

Nous allons démontrer à présent que l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur un système d'ensembles $A_{k_1\ldots k_n}$ peut être remplacée par l'opération du crible, en définissant les ensembles W_r d'une façon convenable.

Nous allons considérer, dans ce but, les systèmes finis d'entiers positifs $k_1, \ldots, k_n$ comme des fractions binaires finies (d'une façon analogue, les suites infinies d'entiers positifs ont été conçues dans le N° VI, p. 5 comme des nombres irrationnels). Plus précisément, nous faisons correspondre au système $k_1, \ldots, k_n$ le nombre

$$r = \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{k_1+\ldots+k_n}}. \tag{6}$$

Autrement dit, au nombre r donné par la formule (1), correspond le système $I(r) = [m_1, m_2 - m_1, \ldots, m_n - m_{n-1}]$. On a ainsi une correspondance biunivoque entre la famille de tous les systèmes d'entiers positifs et l'ensemble $\mathcal{R}$.

Théorème[1]. *A étant le résultat de l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur le système régulier $\{A_{k_1\ldots k_n}\}$, A est criblé par le crible $A_{I(r)}$.*

Posons, en effet, $W_r = A_{I(r)}$. Si $x \in A$, il existe une suite infinie $k_1, k_2, \ldots$ telle que $x \in A_{k_1} \cdot A_{k_1k_2} \cdot \ldots$ Les nombres r_n donnés par la formule (6), où $n = 1, 2, \ldots$, satisfont donc à (2).

Admettons, inversement, que la formule (2) soit remplie. Posons $\lim_{n=\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_n}}$ où $1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots$ Soient $k_1 = m_1$ et $k_n = m_n - m_{n-1}$ pour $n > 1$. Il existe un r_{j_n} tel que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{m_i}} < r_{j_n} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_i}}$. Dans le développement de $r_{j_n} = \frac{1}{2^{l_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{l_s}}$ où $1 \leqslant l_1 < \ldots < l_s$, on a donc $l_1 = m_1, \ldots, l_n = m_n$. Il en résulte que les n premiers termes du système $I(r_{j_n})$ coïncident respectivement avec les nombres $k_1, \ldots, k_n$. Le système d'ensembles $\{A_{k_1\ldots k_n}\}$ étant régulier, on a l'inclusion $A_{I(r_{j_n})} \subset A_{k_1\ldots k_n}$, d'où $x \in A_{k_1\ldots k_n}$ quel que soit n. Donc $x \in A$.

[1]) Voir N. Lusin et W. Sierpiński, Journ. de Math. II (1923), p. 65—68. Cf. W. Sierpiński, *Le crible de M. Lusin et l'opération $(\mathcal{A})$ dans les espaces abstraits*, Fund. Math. **11** (1928), p. 16, N. Lusin, Fund. Math. **10** (1927), p. 20 et E. Sélivanowski, C. R. Paris t. **184** (1927), p. 1311.

VIII. L'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor[1]. On appelle ainsi l'ensemble de tous les nombres t de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ qui s'écrivent dans le système de numération triadique sans le chiffre 1; c. à d. que

$$t = \frac{t^{(1)}}{3} + \frac{t^{(2)}}{9} + \frac{t^{(3)}}{27} + \ldots, \quad \text{où} \quad t^{(n)} = 0 \text{ ou } 2. \tag{1}$$

L'ensemble $\mathcal{C}$ s'obtient aussi comme suit. Partageons l'intervalle 01 en 3 intervalles égaux et enlevons l'intervalle (ouvert) central: $1/3 < t < 2/3$; il se compose évidemment des nombres t dont le premier terme du développement triadique est nécessairement égal à 1. Procédons d'une façon analogue avec les deux intervalles $0, 1/3$ et $2/3, 1$; partageons-les en 3 intervalles égaux et enlevons-en les intervalles ouverts centraux (ils se composent des t tels que $t^{(2)}$ est nécessairement $=1$). En procédant ainsi de proche en proche on obtient l'ensemble $\mathcal{C}$.

On constate aussitôt que la formule (1) établit une correspondance biunivoque entre la famille des suites infinies formées de deux nombres: 0 et 2, et les points de l'ensemble de Cantor. Ces deux notions seront souvent identifiées.

A chaque $t \in \mathcal{C}$ nous allons attacher un *type d'ordre* $\bar{t}$. Rangeons, en effet, l'ensemble $\mathcal{R}$ du N° VII en une suite infinie: $r_1, r_2, \ldots$ et désignons par R_t l'ensemble des r_n tels que $t^{(n)} = 2$; $\bar{t}$ désigne *le type d'ordre* de l'ensemble R_t ordonné suivant la grandeur décroissante de ses éléments.

L'ensemble $\mathcal{R}$ étant dense, chaque ensemble ordonné dénombrable est semblable à un sous-ensemble de $\mathcal{R}$. Chaque sous-ensemble de $\mathcal{R}$ étant une valeur de la fonction R_t, où $t \in \mathcal{C}$, $\bar{t}$ *parcourt donc tous les types d'ordre dénombrable.* Autrement dit,

$$\text{en posant } L_\tau = \underset{t}{E}(\bar{t} = \tau), \text{ on a } L_\tau \neq 0, \tag{2}$$

quel que soit le type d'ordre dénombrable τ.

[1]) G. Cantor, Math. Ann. **21** (1883), p. 590.

En particulier, α désignant un nombre ordinal et

(3) $$L = \underset{t}{E}(\bar{t} < \Omega), \text{ on a } L = \sum_{\alpha < \Omega} L_\alpha,$$

décomposition en ensembles non vides.

Les ensembles L_α sont les *constituantes* de L déterminées par le crible $C_r = \underset{t}{E}(r \in R_t)$. En tenant compte des équivalences

(4) $$(t \in C_{r_n}) \equiv (r_n \in R_t) \equiv (t^{(n)} = 2),$$

on constate, en effet, que l'ensemble $\mathcal{C} - L$ est criblé par le crible C_r.

§ 2. Produit cartésien.

I. Définitions[1]. *Le produit cartésien* (qu'il ne faut pas confondre avec le produit = partie commune) des ensembles A et B est l'ensemble $A \times B$ composé de tous les couples ordonnés a, b où $a \in A$ et $b \in B$. D'une façon analogue, étant donnée une suite finie ou infinie d'ensembles $A_1, \dots, A_n, \dots$, leur produit cartésien se compose de toutes les suites finies (formées de n termes) ou infinies dont les termes sont extraits successivement des ensembles donnés. On désigne ce produit par $\overset{n}{\underset{k=1}{P}} A_k$ et $\overset{\infty}{\underset{n=1}{P}} A_n$ respectivement.

Dans le cas où $A_1 = \dots = A_n = A$, on pose $A_1 \times \dots \times A_n = A^n$. Si tous les termes du produit cartésien infini $\overset{\infty}{\underset{n=1}{P}} A_n$ sont identiques à A, on écrit

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{P}} A_n = A^{\aleph_0}.$$

Ainsi, par ex., le plan des nombres complexes est le „carré" de l'espace des nombres réels; $\mathcal{J}$ désignant l'intervalle 01, $\mathcal{J}^2$ désigne un carré, $\mathcal{J}^3$ un cube, $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ le „cube fondamental" de Hilbert (voir § 14). Dans le cas où A se compose de deux éléments, $A^{\aleph_0}$ peut être conçu comme l'ensemble $\mathcal{C}$ de Cantor (cf. § 1, VIII); si A désigne l'ensemble des nombres naturels, $A^{\aleph_0}$ est l'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres irrationnels de l'intervalle 01 (voir § 1, VI, p. 5).

II. Formules de calcul. En s'appuyant sur les équivalences:

$$\{(xy) \in A \times B\} \equiv \{(x \in A) \cdot (y \in B)\}, \qquad \{(x_1, x_2, \dots) \in \underset{n}{P} A_n\} \equiv \prod_n (x_n \in A_n),$$

on prouve facilement que

1. $(A + B) \times (C + D) = A \times C + A \times D + B \times C + B \times D$

et d'une façon générale:

[1]) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, p. 37.

1 a. $$(\sum_\iota A_\iota) \times (\sum_\varkappa B_\varkappa) = \sum_{\iota\varkappa} (A_\iota \times B_\varkappa);$$

2. $$(AC) \times (BD) = (A \times B) \cdot (C \times D),$$

2 a. $$(\prod_\iota A_\iota) \times (\prod_\varkappa B_\varkappa) = \prod_{\iota\varkappa} (A_\iota \times B_\varkappa),$$

2 b. $$\prod_\iota \underset{n}{P} A_{\iota,n} = \underset{n}{P} \prod_\iota A_{\iota,n};$$

3. $$(A - B) \times C = A \times C - B \times C;$$

4. $$[A \subset B \text{ et } C \subset D] \equiv [A \times C \subset B \times D] \qquad (\text{si } A \neq 0 \neq C),$$

4 a. *Si* $A \times C = B \times D$, *on a* $A = B$ *et* $C = D$ (à moins qu'un de ces ensembles ne soit vide),

4 b. *Si* $\underset{n}{P} A_n = \underset{n}{P} B_n$, *on a* $A_n = B_n$ (si $A_k \neq 0 \neq B_k$ pour chaque k).

Si A est un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{X}$ et B de l'espace $\mathcal{Y}$ (ou, plus généralement, si $A_n \subset \mathcal{X}_n$), on a les formules suivantes:

5. $$(A \times B)' = A' \times \mathcal{Y} + \mathcal{X} \times B',$$

5 a. $$(\underset{n}{P} A_n)' = \sum_n \mathfrak{A}_n^*$$

où $$\mathfrak{A}_n^* = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots \times \mathcal{X}_{n-1} \times (\mathcal{X}_n - A_n) \times \mathcal{X}_{n+1} \times \dots;$$

6. $$A \times B = (A \times \mathcal{Y}) \cdot (\mathcal{X} \times B),$$

6 a. $$\underset{n}{P} A_n = \prod_n \mathfrak{A}_n$$

où $$\mathfrak{A}_n = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \dots \times \mathcal{X}_{n-1} \times A_n \times \mathcal{X}_{n+1} \times \dots$$

III. Axes, coordonnées, projections. $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ étant deux espaces donnés, nous les appelons (par analogie à la Géométrie analytique) *axes* du produit cartésien $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Chaque point $\mathfrak{z}$ du produit $\mathfrak{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ étant de la forme (x, y), on appelle x et y les *coordonnées* de $\mathfrak{z}$ (l'abscisse et l'ordonnée). La projection „parallèle à l'axe $\mathcal{Y}$" d'un ensemble $\mathfrak{E}$ contenu dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ est l'ensemble des abscisses des points de $\mathfrak{E}$; c'est donc l'ensemble $\underset{x}{E} \sum_y [(x, y) \in \mathfrak{E}]$.

Les définitions précédentes se généralisent aussitôt au cas du produit d'un nombre arbitraire de termes. En particulier, $\mathfrak{z}$ étant un point de l'ensemble $\underset{n}{P} \mathcal{X}_n$, la n-ème coordonnée de $\mathfrak{z}$ est désignée par $\mathfrak{z}^{(n)}$; de sorte que

$$\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \dots, \mathfrak{z}^{(n)}, \dots]$$

(les parenthèses seront, d'ailleurs, souvent omises).

IV. Fonctions propositionnelles de plusieurs variables.

Une fonction propositionnelle $\varphi(x,y)$ de deux variables dont l'une parcourt l'espace $\mathfrak{X}$ et l'autre l'espace $\mathcal{Y}$ peut être considérée comme fonction d'une seule variable $\mathfrak{z}$ qui parcourt le produit cartésien $\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}$. Les formules du § 1, III restent donc valables lorsqu'on considère des fonctions de plusieurs variables et qu'on remplace la variable x par le système des variables. On a en outre:

$$\sum_{xy}\varphi(x,y)=\sum_{x}\sum_{y}\varphi(x,y)=\sum_{y}\sum_{x}\varphi(x,y),$$

$$\prod_{xy}\varphi(x,y)=\prod_{x}\prod_{y}\varphi(x,y)=\prod_{y}\prod_{x}\varphi(x,y),$$

$$\sum_{x}\varphi(x)\cdot\sum_{x}\psi(x)=\sum_{xx^*}[\varphi(x)\cdot\psi(x^*)],$$

$$\prod_{x}\varphi(x)+\prod_{x}\psi(x)=\prod_{xx^*}[\varphi(x)+\psi(x^*)],$$

$$\sum_{x}\varphi(x)+\prod_{x}\psi(x)=\sum_{x}\prod_{x^*}[\varphi(x)+\psi(x^*)]=\prod_{x^*}\sum_{x}[\varphi(x)+\psi(x^*)]$$

$$\sum_{x}\varphi(x)\cdot\prod_{x}\psi(x)=\sum_{x}\prod_{x^*}[\varphi(x)\cdot\psi(x^*)]=\prod_{x^*}\sum_{x}[\varphi(x)\cdot\psi(x^*)]$$

$$\sum_{x}\prod_{y}\varphi(x,y)\rightarrow\prod_{y}\sum_{x}\varphi(x,y).$$

Si les variables x et y parcourent le même espace $\mathfrak{X}=\mathcal{Y}$, on a la table suivante d'inclusions:

$$\begin{tikzcd}
 & \sum_{x}\prod_{y}\varphi(x,y) \arrow[r] \arrow[dr] & \prod_{y}\sum_{x}\varphi(x,y) \arrow[dr] & \\
\prod_{xy}\varphi(x,y) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \prod_{x}\varphi(x,x) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \sum_{x}\varphi(x,x) \arrow[r] & \sum_{xy}\varphi(x,y). \\
 & \sum_{y}\prod_{x}\varphi(x,y) \arrow[r] \arrow[ur] & \prod_{x}\sum_{y}\varphi(x,y) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Exemple. Le fait qu'une fonction f de variable réelle est continue en chaque point s'exprime de cette façon:

$$\prod_{\varepsilon}\prod_{x}\sum_{\delta}\prod_{h}\{[|h|<\delta]\rightarrow[|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon]\},$$

où x et h parcourent l'ensemble des nombres réels et ε et δ sont >0.

En renversant l'ordre des opérateurs $\prod_{x}$ et $\sum_{\delta}$, on obtient la définition de la continuité uniforme.

V. Relations entre les opérateurs $\mathop{E}_{x}$ et $\sum_{x}$.

1. $$\mathop{E}_{x}\sum_{y}\varphi(x,y)=\sum_{y}\mathop{E}_{x}\varphi(x,y).$$

En effet, d'après § 1, IV, 1, $t\in\mathop{E}_{x}\sum_{y}\varphi(x,y)\equiv\sum_{y}\varphi(t,y)$. En désignant par A_y l'ensemble $\mathop{E}_{x}\varphi(x,y)$, on a $\varphi(t,y)\equiv t\in\mathop{E}_{x}\varphi(x,y)\equiv t\in A_y$, d'où selon § 1, V:

$$\sum_{y}\varphi(t,y)\equiv\sum_{y}(t\in A_y)\equiv t\in\sum_{y}A_y\equiv t\in\sum_{y}\mathop{E}_{x}\varphi(x,y).$$

D'une façon analogue:

2. $$\mathop{E}_{x}\prod_{y}\varphi(x,y)=\prod_{y}\mathop{E}_{x}\varphi(x,y).$$

3. *L'ensemble* $\mathop{E}_{x}\sum_{y}\varphi(x,y)$ *est la projection de l'ensemble* $\mathop{E}_{xy}\varphi(x,y)$ *parallèle à l'axe* $\mathcal{Y}$ [1]).

En effet, si l'on pose $\mathfrak{E}=\mathop{E}_{xy}\varphi(x,y)$, on a l'équivalence $\varphi(x,y)\equiv\{(x,y)\in\mathfrak{E}\}$; donc l'ensemble $\mathop{E}_{x}\sum_{y}\varphi(x,y)$, en tant qu'identique à $\mathop{E}_{x}\sum_{y}\{(x,y)\in\mathfrak{E}\}$, est la projection de $\mathfrak{E}$ (voir III).

VI. Multiplication cartésienne par un axe. On a l'identité:

1. $$\mathop{E}_{xy}\varphi(y)=\mathfrak{X}\times\mathop{E}_{y}\varphi(y).$$

Ainsi, par exemple (cf. § 1, IV, 3),

$$\mathop{E}_{xy}[\varphi(x)+\psi(y)]=\mathop{E}_{xy}\varphi(x)+\mathop{E}_{xy}\psi(y)=[\mathop{E}_{x}\varphi(x)]\times\mathcal{Y}+\mathfrak{X}\times\mathop{E}_{y}\varphi(y).$$

De même (cf. II, 6):

$$\mathop{E}_{xy}[\varphi(x)\cdot\psi(y)]=\{[\mathop{E}_{x}\varphi(x)]\times\mathcal{Y}\}\cdot\{\mathfrak{X}\times\mathop{E}_{y}\psi(y)\}=\mathop{E}_{x}\varphi(x)\times\mathop{E}_{y}\psi(y).$$

Exemples. 1. Soient A l'ensemble des nombres entiers et R celui des nombres rationnels. On a, par définition:

$$R=\mathop{E}_{x}\sum_{y}\sum_{z}\{(y\in A)\cdot(z\in A)\cdot(xz=y)\cdot(z\neq 0)\}.$$

---

[1]) Ces énoncés se trouvent dans la note de M. A. Tarski et de moi-même, *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fund. Math. **17** (1931), p. 243. Cf. E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, t. III. p. 52.

L'importance de la proposition 3 tient au fait que la projection est une opération continue.

Posons $\mathfrak{C}=\mathop{E}_{xyz}\{(y\in A)\cdot(z\in A)\cdot(xz=y)\cdot(z\neq 0)\}$. D'après § 1, IV, 4, cet ensemble est la partie commune de quatre ensembles: 1° de l'ensemble $\mathop{E}_{xyz}(y\in A)=\mathcal{X}\times\mathop{E}_{y}(y\in A)\times\mathcal{Z}$, c. à d. de l'ensemble des plans parallèles au plan $\mathcal{X}\times\mathcal{Z}$ et passant par les points entiers de l'axe $\mathcal{Y}$, 2° de l'ensemble $\mathop{E}_{xyz}(z\in A)$, qui est également un ensemble constitué par des plans, 3° du paraboloïde hyperbolique défini par l'équation $y=xz$, 4° de l'ensemble $\mathop{E}_{xyz}(z\neq 0)$, c. à d. de l'espace $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\times\mathcal{Z}$ diminué du plan $z=0$.

D'après V, 3, l'ensemble R s'obtient à partir de $\mathfrak{C}$, en le projetant d'abord sur le plan $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ et puis, en projetant cette projection sur l'axe $\mathcal{X}$.

2. Soit $f_1(x), f_2(x), \dots$ une suite de fonctions continues. L'ensemble des points de convergence de cette suite est par définition:

$$C=\mathop{E}_{x}\prod_{k}\sum_{n}\prod_{m}\left\{|f_{n+m}(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{1}{k}\right\}.$$

En posant $A_{n,m,k}=\mathop{E}_{x}\left\{|f_{n+m}(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{1}{k}\right\}$, on a donc $C=\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}A_{n,m,k}$. L'ensemble $A_{n,m,k}$ étant fermé, on en conclut que C est un $F_{\sigma\delta}$ (cf. § 26, III).

§ 3. Fonctions.

I. Notations. Soit f une fonction définie par la relation $y=f(x)$ et dont les arguments appartiennent à l'espace $\mathcal{X}$ et les valeurs à l'espace $\mathcal{Y}$. Posons:

A = *l'ensemble des arguments*, V = *l'ensemble des valeurs*.

On a donc $A\subset\mathcal{X}$ et $V\subset\mathcal{Y}$.

X étant un sous-ensemble de $\mathcal{X}$, $f(X)$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{Y}$ qui correspondent aux éléments de X. En symbole:

$$\{y\in f(X)\}\equiv\sum_{x}(x\in X)[y=f(x)].$$

Inversement, si $Y\subset\mathcal{Y}$, on désigne par $f^{-1}(Y)$ l'ensemble de tous les x dont les valeurs appartiennent à Y. En symbole:

$$\{x\in f^{-1}(Y)\}\equiv\{f(x)\in Y\},\qquad \text{d'où}\qquad f^{-1}(Y)=\mathop{E}_{x}\{f(x)\in Y\}.$$

D'une façon analogue, $\boldsymbol{X}$ étant une *famille* d'ensembles (ensemble du deuxième rang), $f(\boldsymbol{X})$ désigne la famille qui s'en déduit en remplaçant les ensembles X qui lui appartiennent par $f(X)$.

II. Formules de calcul. On prouve facilement que:

1. $f(X_1+X_2)=f(X_1)+f(X_2)$ 1a. $f(\sum_\iota X_\iota)=\sum_\iota f(X_\iota)$

2. $f(X_1\cdot X_2)\subset f(X_1)\cdot f(X_2)$ 2a. $f(\prod_\iota X_\iota)\subset\prod_\iota f(X_\iota)$

3. $f(X_1)-f(X_2)\subset f(X_1-X_2)$ 4. *si* $X_1\subset X_2$, $f(X_1)\subset f(X_2)$

5. $\{f(X)=0\}\equiv\{XA=0\}$

6. $f^{-1}(Y_1+Y_2)=f^{-1}(Y_1)+f^{-1}(Y_2)$ 6a. $f^{-1}(\sum_\iota Y_\iota)=\sum_\iota f^{-1}(Y_\iota)$

7. $f^{-1}(Y_1\cdot Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cdot f^{-1}(Y_2)$ 7a. $f^{-1}(\prod_\iota Y_\iota)=\prod_\iota f^{-1}(Y_\iota)$

8. $f^{-1}(Y_1-Y_2)=f^{-1}(Y_1)-f^{-1}(Y_2)$

9. $Y_1\subset Y_2$ *entraîne* $f^{-1}(Y_1)\subset f^{-1}(Y_2)$

10. $\{f^{-1}(Y)=0\}\equiv\{YV=0\}$

11. $XA\subset f^{-1}f(X)$ 12. $ff^{-1}(Y)=YV$

13. $f(X)\cdot Y=f[X\cdot f^{-1}(Y)]$.

A titre d'exemple, nous établirons la formule 13. Supposons que $y\in f(X)\cdot Y$, c. à d. qu'il existe un $x\in X$ tel que $y=f(x)\in Y$, donc que $x\in f^{-1}(Y)$. Par conséquent $y\in f[X\cdot f^{-1}(Y)]$. Ainsi, $f(X)\cdot Y\subset f[X\cdot f^{-1}(Y)]$. Inversement, d'après les formules 2 et 12, on a $f[X\cdot f^{-1}(Y)]\subset f(X)\cdot ff^{-1}(Y)=f(X)\cdot Y$, d'où la formule 13.

En restreignant les arguments de la fonction f à un sous-ensemble E de A, on obtient une *fonction partielle*, désignée par $f|E$ [1]). On a les propositions suivantes:

14. $g=f|E$ *entraîne* $g^{-1}(Y)=E\cdot f^{-1}(Y)$

15. *si* $A=\sum_\iota E_\iota$ *et* $f_\iota=f|E_\iota$, *on a* $f^{-1}(Y)=\sum_\iota f_\iota(Y^{-1})$.

En effet, 14 résulte des équivalences:

$$[x\in g^{-1}(Y)]\equiv[g(x)\in Y]\equiv[x\in E]\cdot[f(x)\in Y]\equiv[x\in E\cdot f^{-1}(Y)]$$

et, quant à 15, on a $f^{-1}(Y)=\sum_\iota f^{-1}(Y)\cdot E_\iota=\sum_\iota f_\iota^{-1}(Y)$.

[1]) Voir F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 194.

III. Fonctions biunivoques. Lorsque la condition $f(x_1)=f(x_2)$ entraîne l'égalité $x_1=x_2$, la fonction f est dite *biunivoque*. La fonction inverse $x=f^{-1}(y)$ transforme alors d'une façon biunivoque l'ensemble V en A. On a évidemment:

$$f^{-1}f(x)=x \quad pour \quad x\in A, \quad ff^{-1}(y)=y \quad pour \quad y\in V,$$
$$\{x_1=x_2\}\equiv\{f(x_1)=f(x_2)\} \; pour \; x_1,x_2\in A, \; \{x\in X\}\equiv\{f(x)\in f(X)\} \; pour \; X\subset A.$$

Dans les formules, 2, 2a, 3 et 11, le signe d'inclusion peut être remplacé par celui d'identité.

IV. Fonctions topologiques. Dans la suite, nous emploierons, outre les fonctions propositionnelles primitives de la Logique et de la Théorie des ensembles: $x=y$, $x\in X$ (étendues à tous les types d'ordre des variables: $\mathcal{X}\in\mathcal{X}$ etc.), la fonction propositionnelle primitive *topologique* $x\in\overline{X}$ (où $\overline{X}$, nommé *fermeture* de l'ensemble X, est un sous-ensemble de l'espace). Les trois opérations logiques $+$, $'$ et Σ, effectuées sur ces fonctions primitives, *suffisent à construire la Topologie toute entière*; toute fonction propositionnelle ainsi obtenue sera dite *topologique*.

On a vu au N° précédent que, $f(x)$ étant une transformation biunivoque de l'espace $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, la relation $x_1=x_2$ équivaut à $f(x_1)=f(x_2)$ et la relation $x\in X$ à $f(x)\in f(X)$. Supposons, en outre, que la relation $x\in\overline{X}$ équivale à $f(x)\in\overline{f(X)}$. La transformation f est dite alors une *homéomorphie*[1].

On vérifie que, *f étant une homéomorphie, toute fonction propositionnelle topologique concernant l'espace $\mathcal{X}$ équivaut à la fonction propositionnelle qui s'en obtient en substituant $f(x)$ à x, $f(X)$ à X etc.*

En d'autres termes: *tout ce qui se laisse exprimer à l'aide de fonctions propositionnelles topologiques est un invariant de l'homéomorphie.*

Ainsi par ex., considérons la propriété de l'espace $\mathcal{X}$ d'être dense en soi. Elle s'exprime par la condition $\prod_x x\in\overline{\mathcal{X}-(x)}$. Posons $y=f(x)$. La fonction f étant supposée une homéomorphie, on en conclut que $\prod_y y\in\overline{f(\mathcal{X})-(y)}$, donc $\prod_y y\in\overline{\mathcal{Y}-(y)}$, ce qui signifie que l'espace $\mathcal{Y}$ est dense en soi.

La condition que l'ensemble X, situé dans l'espace $\mathcal{X}$, soit fermé s'exprime par l'égalité $X=\overline{X}$. Il vient $f(X)=\overline{f(X)}$, ce qui signifie que l'ensemble qui correspond à X est, dans l'espace $\mathcal{Y}$, fermé.

V. Notations auxiliaires. Les notations dont il a été question jusqu'à présent suffisent théoriquement — comme nous l'avons dit — pour fonder la Topologie. Mais pour des raisons pratiques on se sert en outre d'autres notations, qui ont un caractère auxiliaire[2].

[1]) Nous reviendrons sur cette notion au § 13, VIII.

[2]) Bien que, du point de vue logique, les notations auxiliaires ne soient pas indispensables, elles sont très utiles dans le développement d'un système mathématique.

C'est ainsi, par exemple, que l'on pourrait se passer de la notation $f(x)$ qui est employée pour désigner une fonction variable. Toute fonction est, en effet, un ensemble de *paires ordonnées* (satisfaisant à certaines conditions) et la paire ordonnée ab est par définition identique à l'ensemble $[(a,b),(a)]$; une fonction est donc un *ensemble* du 3-me ordre.

Le cas des notations des *nombres naturels* (ou réels) est analogue. Si l'on suppose que l'espace considéré est infini[1]) (ce qui est, en général, légitime), les nombres naturels se laissent définir dans cet espace de façon *intrinsèque*. A savoir, en classant les sous-ensembles finis de l'espace selon leur puissance, on définit une suite de classes qui peut être considérée comme la suite des „nombres naturels". A l'aide de l'ensemble des nombres naturels (ainsi conçus), on définit par des procédés classiques l'ensemble des nombres rationnels, réels, complexes etc. (ainsi, par exemple, la propriété d'un espace topologique d'être une image continue de l'intervalle 01 des nombres réels est—de ce point de vue—une propriété intrinsèque; pour être formulée sans variables auxiliaires, elle demanderait, bien entendu, l'emploi de variables d'ordre très élevé).

Quant à l'emploi des *nombres transfinis*, ils interviennent toujours en Topologie de façon telle qu'on peut les éliminer à l'aide de la méthode générale d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques[2]).

[1]) Cette hypothèse peut s'exprimer ainsi: il existe une famille d'ensembles $\mathcal{X}\neq 0$ telle que, pour chaque $X\in\mathcal{X}$, il existe un ensemble Y satisfaisant aux conditions: $Y\in\mathcal{X}$, $Y\subset X$, $Y\neq X$. Voir A. Tarski, Fund. Math. **6** (1924), p. 49.

[2]) exposée dans mon ouvrâge de Fund. Math. **3** (1922), p. 76—108.