MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

TOM XIX

Dr WACŁAW SIERPIŃSKI
PROFESOR UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO
CZŁONEK POLSKIEJ AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI

TEORIA LICZB

WYDANIE TRZECIE, POWIĘKSZONE

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA OŚWIATY

WARSZAWA — WROCŁAW 1950

Printed in Poland

Nakład 2.100 egz. Stronic VI+544. Papier bezdrz. sat. 80 g. 70 × 100 cm. Kwiecień 1950.

ZAM. 386 — 6. IX. 47 — DRUKARNIA UNIWERSYTETU I POLITECHNIKI WE WROCŁAWIU — F 17396

PRZEDMOWA

Matematyka dzisiejsza rozpada się na szereg działów, których nazwy są zazwyczaj krótkie, często ustalone od stulleci i nie dające wyobrażenia o tym, czym się dany dział zajmuje. Tak jest i z *Teorią liczb*, która zresztą, zarówno ze względu na swą treść i metody jak ze względu na swój stosunek do innych nauk, zajmuje pewne odrębne stanowisko wśród różnych działów Matematyki. Sądząc z nazwy, można by przypuszczać, że jest to jakaś ogólna nauka o pojęciu liczby i jego stopniowych uogólnieniach, a więc zajmująca się kolejno liczbami naturalnymi, całkowitymi, wymiernymi, rzeczywistymi, zespolonymi i może jeszcze innymi rodzajami liczb, oraz rozwijająca teorię działań na tych liczbach. Nauka taka rzeczywiście istnieje, ale nosi nazwę *Arytmetyki teoretycznej*.

Przedmiot *Teorii liczb* jest natomiast bardziej specjalny: zajmuje się ona badaniem *własności liczb całkowitych*, samo zaś pojęcie liczby całkowitej, jak również teorię działań arytmetycznych na liczbach całkowitych, bierze gotowe z Arytmetyki i Algebry.

Nie znaczy to jednak, by Teoria liczb nie posługiwała się innymi liczbami jak tylko całkowitymi. Wiele własności liczb całkowitych wykryto przy pomocy liczb niewymiernych lub zespolonych, a wiele twierdzeń o liczbach całkowitych łatwiej jest dowieść, nie tylko posługując się liczbami niewymiernymi lub zespolonymi, lecz stosując też nieraz rachunek różniczkowy i całkowy lub nawet teorię funkcji analitycznych. Ten dział Teorii liczb, który posługuje się Rachunkiem nieskończonościowym lub innymi działami Analizy Matematycznej, nazywamy *Analityczną teorią liczb*, w odróżnieniu od *Elementarnej teorii liczb*, nie posługującej się pojęciem granicy.

Treścią niniejszej książki jest Elementarna teoria liczb, jakkolwiek niejednokrotnie nawiązujemy w niej do Analitycznej teorii liczb, dając dostępniejsze jej zastosowania.

Niniejsze wydanie tej książki jest jej wydaniem trzecim. Pierwsze [1]) ukazało się w 1914 r., przed pierwszą wojną światową, jako tom X serii III Biblioteki Matematyczno-Fizycznej, wydawanej przez A. Czajewicza i S. Dicksteina. Drugie, z 1925 r., wydane przez Kasę im. Mianowskiego, było odbiciem fotomechanicznym pierwszego, z wyjątkiem pierwszych dwu arkuszy, które zostały zmienione.

Od czasu pierwszego wydania tej książki minęło przeszło 35 lat. Przez ten czas Teoria liczb uczyniła wielkie postępy. Wprawdzie część jej wyników klasycznych pozostała w postaci niezmienionej, a część zachowała trwałą wartość historyczną, ale wykryto też w ostatnich dziesiątkach lat szereg nowych twierdzeń oraz uproszczono dowody wielu dawniejszych. W tym też czasie ukazało się w różnych krajach wiele podręczników Teorii liczb oraz monografii poświęconych różnym jej działom, nie mówiąc już o wielkiej ilości rozpraw poświęconych różnym zagadnieniom tak Elementarnej, jak i Analitycznej teorii liczb. Ukazała się też w latach 1918-1934 trzytomowa *Historia Teorii Liczb* Dicksona [2]).

Toteż niniejsze wydanie tej książki znacznie się różni od poprzednich. Poza uwzględnieniem ważniejszych nowych wyników, różnica polega na wprowadzeniu licznych ćwiczeń, których celem jest z jednej strony danie czytelnikowi pola do sprawdzenia przyswojonych wiadomości i nabycia wprawy w operowaniu wyłożonym materiałem naukowym, z drugiej zaś strony — zapoznanie go z wynikami, które nie znalazły miejsca w tekście, ale są ciekawe. Celem tej książki jest więc nie tylko wyłożenie Elementarnej teorii liczb, ale i przygotowanie czytelnika do ewentualnej samodzielnej pracy w tej dziedzinie. Liczne cytaty ułatwią mu pogłębienie interesujących go kwestii.

Do zrozumienia tekstu książki wystarcza znajomość Arytmetyki i Algebry elementarnej; niektóre tylko miejsca, które zresztą w pierwszym czytaniu mogą być pominięte, wymagają podstawowych wiadomości z Analizy. Książka może być zatem rozumiana nie tylko przez studentów pierwszego roku matematyki,

[1]) Było ono poprzedzone przez dwa wydania litografowane moich wykładów uniwersyteckich z lat 1908 i 1912, które ukazały się nakładem Kółka Matematyczno-Fizycznego Uczniów Uniwersytetu Jana Kazimierza.

[2]) L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, New York 1934.

ale również przez nauczycieli lub kandydatów na nauczycieli, jako też przez nie-matematyków, których interesują pewne zagadnienia Teorii liczb.

Teoria liczb, jakkolwiek jest działem matematyki dosyć specjalnym, stanowi nieodzowne uzupełnienie ogólnego wykształcenia matematycznego (nie mówiąc już o tym, że pewne wiadomości z Teorii liczb konieczne są w innych działach Matematyki, zwłaszcza w Algebrze wyższej).

Dla osób, pragnących poprzestać na początkowych tylko wiadomościach z Teorii liczb, wydałem w 1933 r. (wyczerpany już) kilkudziesięciostronicowy *Wstęp do Teorii Liczb*, nakładem Książnicy-Atlas we Lwowie.

Spełniam miły obowiązek, wyrażając na tym miejscu podziękowanie Komitetowi Redakcyjnemu „Monografii Matematycznych" za umożliwienie ukazania się tej książki, a w szczególności członkowi tego Komitetu panu profesorowi dr Bronisławowi Knasterowi za trud, którego nie szczędził podczas jej druku.

Dziękuję wreszcie Drukarni Uniwersytetu i Politechniki we Wrocławiu za staranne wykonanie roboty drukarskiej.

Wacław Sierpiński

Warszawa, w kwietniu 1950 r.

ERRATA

Stronica i wiersz:	jest:	ma być:
3^{18}	jeżeli a i b są dwiema różnymi liczbami	żadna
$3^{19\text{-}21}$	, to $2 \leqslant (a, b) \leqslant 13$. Po . . . . i 2197).	nie jest pierwsza względem każdej z pozostałych.
22^{8}	pierwszych nieparzystych	nieparzystych pierwszych
25^{20}	$10^{1}+1$	$10^{4}+1$
37^{8}	(5)	(8)
57_{2}	Ob. X.	Ob.
79^{18}	Twierdzenia	**§ 6. Twierdzenie Lejeune--Dirichleta.** Twierdzenia
79_{15}	a $a+2b$	b $2a+b$
109_{15}	wymiernych	wymiernych różnych od 0
109_{2}	W przypadku, gdy $t=-1$,	Nadto
201^{9}	**12**	**11**
271_{18}	R_0	R_n
303_{10}	$2x^2+1$	x^2+Dy^2
325^{14}	$\left(\begin{matrix}D\\p\end{matrix}\right)$	$\left(\frac{D}{p}\right)$
335_{8}	$\left(\begin{matrix}D\\p\end{matrix}\right)$	$\left(\frac{D}{p}\right)$
443^{8}	$\boldsymbol{K\sqrt{D}}$	$\boldsymbol{K(\sqrt{D})}$
478_{2}	Lebesgue	Le Besgue

Otóż jest ono liczbą różną od $p_1, p_2, \ldots, p_n$, gdyż wobec (*) liczba $2p_1p_2\ldots p_n = a$ nie jest podzielna przez q. Liczb pierwszych postaci $2pk+1$ jest więc nieskończenie wiele.

Jako natychmiastowy wniosek stąd otrzymujemy:

Każdy z postępów arytmetycznych

$$6k+1, \quad 10k+1, \quad 14k+1, \quad 22k+1, \quad 26k+1,$$

tym bardziej więc *każdy z postępów arytmetycznych*

$$3k+1, \quad 5k+1, \quad 7k+1, \quad 11k+1, \quad 13k+1$$

zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

135. Dowieść, że jeżeli liczba a należy według modułu m do wykładnika $\delta_1\delta_2$, to liczba a^{δ_1} należy według modułu m do wykładnika δ_2 [2]).

136. Dowieść, że jeżeli $(\delta_1, \delta_2) = 1$ i liczba a_1 należy według modułu m do wykładnika δ_1, a liczba a_2 do wykładnika δ_2, to liczba a_1a_2 należy do wykładnika $\delta_1\delta_2$.

[2]) Ob. tamże, str. 93.

PRZYPISY

Do str. 19. Pełny tytuł pracy Kulika jest następujący: *Magnus Canon Divisorum pro omnibus numeris per 2, 3, 5 non divisilibus et numerorum primorum interjacentium ad Millies centum millia accuratius ad 100.330.201 usque.* Authore Jacobo Philippo Kulik, Galiciano Leopoliensi, in Universitate Pragensi Matheseos sublimioris Prof. publ. ac ord.

Rękopis ten, któremu Kulik poświęcił 20 lat życia, składa się z 6 tomów in 4⁰.

Jakub Filip Kulik urodził się w 1793 r. we Lwowie i tam ukończył gimnazjum. Od 1826 r. aż do śmierci w 1863 r. był profesorem astronomii i matematyki na Uniwersytecie w Pradze. Bliższe szczegóły o jego życiu i dziełach podaje Z. Krygowski w Sprawozdaniach z czynności i posiedzeń Polskiej Akademii Umiejętności, tom 48 (1947), str. 237.

Do str. 21. Jak zauważył A. Bermant [1]), wzór $\frac{2^p+1}{3}$ daje same liczby pierwsze dla liczb pierwszych $p<37$; natomiast dla $p=37$ wzór ten daje liczbę złożoną, podzielną przez 1777.

Do str. 22. W pierwszym tysiącu jest tylko 5 dekad zawierających po 4 liczby pierwsze, mianowicie 2, 3, 5, 7 oraz czwórki $k+1$, $k+3$, $k+7$, $k+9$ dla $k=10$, 100, 190 i 820; poniżej zaś 10 tysięcy są jeszcze tylko takie dekady dla $k=1480$, 1870, 2080, 3250, 3460, 5650 i 9430. Ob. Scripta Mathematica, tom 13 (1947), str. 230.

Do str. 52. Rozwiązywanie kongruencji 1-go stopnia *metodą C. Sardiego.*

Niech będzie dana kongruencja $ax \equiv b \pmod{m}$, gdzie $a>1$ i $(a,m)=1$. Niech $a_1 = m - aE\left(\frac{m}{a}\right)$. Jak łatwo widzieć, jest

[1]) Ob. G. Berman, *Czisło i nauka o niom*, Moskwa 1948.

$0 < a_1 < a$, gdyż m nie jest podzielne przez a. Mnożąc daną kongruencję przez $-\mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right)$, otrzymujemy

$$a_1 x \equiv -b\mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) (\mathrm{mod}\, m),$$

zatem kongruencję, w której $a_1 < a$. Postępując w ten sposób dalej, dojdziemy do $a_n = 1$, więc do kongruencji $x \equiv c\, (\mathrm{mod}\, m)$.

Do str. 61 i 62. Tablicę liczb złożonych $n \leqslant 10^8$, spełniających kongruencję $2^{n-1} \equiv 1\, (\mathrm{mod}\, n)$ podał P. Poulet; ob. jego *Table des nombres composés vérifiant le théorème de Fermat pour le module 2 jusqu'à 100.000.000,* Sphinx, tom 8 (Bruksela 1938), str. 42-52.

Do str. 79. Twierdzenie Lejeune-Dirichleta o postępie arytmetycznym można z łatwością wyprowadzić ze słabszego (jakby się zdawało) twierdzenia następującego:

(*) *W każdym postępie arytmetycznym $ak+b$, gdzie a i b są liczbami naturalnymi, $k=0,1,2,\ldots$ oraz $(a,b)=1$, istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza.*

Istotnie, załóżmy twierdzenie (*) i przypuśćmy, że w postępie $ak+b$ jest tylko skończenie wiele liczb pierwszych. Istniałaby więc taka liczba naturalna m, że wszystkie liczby $a(m+k)+b$, gdzie $k=0,1,2,\ldots$, byłyby złożone. Ale $a(m+k)+b = ak+(am+b)$ oraz $(a, am+b)=1$ wobec założenia, że $(a,b)=1$. Dla $b'=am+b$ postęp arytmetyczny $ak+b'$ składałby się zatem z samych liczb złożonych, mimo że $(a,b')=1$. Przeczy to twierdzeniu (*). Tak więc z twierdzenia (*) wynika twierdzenie Lejeune-Dirichleta o postępie arytmetycznym, c. b. d. o.

Do str. 105. Elementarny dowód twierdzenia Waringa, podany przez J. Linnika i oparty na pomyśle L. Schnirelmana, wyłożony jest w książeczce A. Chinczina, *Trzy perły teorii liczb* (po rosyjsku), Moskwa-Leningrad 1948, str. 34-63.

Do str. 109. Z tożsamości

$$4^4 \cdot 255^4 x = [8(255+2x)]^4 - [8(255-2x)]^4 + (32x-255)^4 - (32x+255)^4$$

wynika natychmiast, że każda liczba wymierna jest sumą algebraiczną czterech bikwadratów liczb wymiernych.

Do str 110. Można dowieść drogą elementarną, że do każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna s_n, iż każda liczba całkowita jest sumą algebraiczną s_n n-tych potęg liczb całkowitych.

Wynika to z łatwością z następującej tożsamości Boutina [1]):

$$\sum \pm (\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n)^n = n!\, 2^n x_1 x_2 \ldots x_n,$$

gdzie po lewej stronie sumowanie należy rozciągnąć na wszystkie 2^n kombinacyj znaków wewnątrz nawiasu, biorąc jako znak przed nawiasem iloczyn wszystkich znaków wewnątrz nawiasu. Innymi słowy, jest to tożsamość

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} [(-1)^{\alpha_1} x_1 + (-1)^{\alpha_2} x_2 + \ldots + (-1)^{\alpha_n} x_n]^n =$$
$$= n!\, 2^n x_1 x_2 \ldots x_n,$$

gdzie sumowanie po lewej stronie należy rozciągnąć na wszystkie 2^n układów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ utworzonych liczb 0 i 1.

Otóż z tożsamości Boutina wynika (dla $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$), że każda liczba całkowita podzielna przez $n!\,2^n$ jest sumą algebraiczną 2^n n-tych potęg liczb całkowitych. Ponieważ zaś każda liczba całkowita jest postaci $n!\,2^n x \pm r$, gdzie x i r są liczbami całkowitymi oraz $0 \leqslant r \leqslant n!\,2^{n-1}$, więc każda liczba całkowita jest sumą algebraiczną $2^n + n!\,2^{n-1}$ n-tych potęg liczb całkowitych.

Do str. 135. Już Leibnitz i Bernouilli, a później Euler zajmowali się zagadnieniem, zwanym *partitio numerorum*, mianowicie wyznaczeniem dla liczby naturalnej n liczby g_n wszystkich różnych jej rozkładów na sumę liczb naturalnych niemalejących.

Oto kolejne wartości funkcji g_n:

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 2, \quad g_3 = 3, \quad g_4 = 5, \quad g_5 = 7,$$
$$g_6 = 11, \quad g_7 = 15, \quad g_8 = 22, \quad g_9 = 30, \quad g_{10} = 42.$$

Można dowieść, że liczby g_n występują jako współczynniki pewnego rozwinięcia na szereg potęgowy, mianowicie że dla $|x| < 1$ jest

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n.$$

Oznaczając przez h_n liczbę wszystkich różnych rozkładów liczby naturalnej n na sumę liczb naturalnych rosnących, mamy — jak łatwo dowieść — dla $|x| < 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n \qquad \text{(Euler).}$$

[1]) A. Boutin, L'intermédiaire des Mathématiques, tom 17 (1910), str. 122-123 i 236-237. Por. też P. Tardy, Annali di Scienze Mathematiche e Fisiche, tom 2 (1851), str. 287, oraz Nouvelles Annales de Mathématique, tom 2 (1843), str. 454. Ob. również L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers,* tom 2, New York 1934, str. 723 i 728.

Oto kolejne wartości funkcji h_n:

$$h_1=1,\quad h_2=1,\quad h_3=2,\quad h_4=2,\quad h_5=3,$$
$$h_6=4,\quad h_7=5,\quad h_8=6,\quad h_9=8,\quad h_{10}=10.$$

Oznaczmy przez k_n liczbę wszystkich różnych rozkładów liczby n na sumę liczb naturalnych, uważając za różne rozkłady różniące się choćby tylko porządkiem składników. Tutaj łatwo dowieść przez indukcję (co pozostawiamy czytelnikowi), że

$$k_n=2^{n-1}\qquad \text{dla } n=1,2,\ldots$$

Tak np. liczba 4 rozkłada się ośmioma różnymi sposobami na sumę liczb naturalnych:

$$4=3+1=1+3=2+2=2+1+1=$$
$$=1+2+1=1+1+2=1+1+1+1.$$

Oznaczmy jeszcze przez l_n liczbę wszystkich różnych rozkładów liczby naturalnej n na sumę niemalejących liczb naturalnych nieparzystych. Jest tu dla $|x|<1$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2n-1}}=1+\sum_{k=1}^{n} l_n x^n.$$

Godne uwagi jest, że — jak można dowieść —

$$l_n=h_n\qquad \text{dla } n=1,2,\ldots$$

Badano też funkcję liczbową q_n, oznaczającą liczbę rozkładów zbioru o n elementach na sumę zbiorów niepustych bez elementów wspólnych, gdzie nie uważa się za różne rozkładów, różniących się tylko porządkiem składników.

Pierwszymi wartościami tej funkcji są:

$$q_1=1,\quad q_2=2,\quad q_3=5,\quad q_4=15,\quad q_5=52.$$

Dla q_n można wyprowadzić wzór zwrotny [1])

$$q_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}q_k,$$

jako też wzór [2])

$$e^{e^x-1}=\sum q_n x^n/n!$$

[1]) O. Ore, Duke Mathematical Journal, tom 9 (1941), str. 575.
[2]) G. Birkhoff, *Lattice Theory*, New York 1948, str. 17; por. G. Williams, American Mathematical Monthly, tom 52 (1945), str. 323-327.

Zajmowano się także liczbą różnych rozkładów liczb całkowitych na sumę liczb ciągu $1, 2, \ldots, m-1$ według modułu m. Stern dowiódł [1]), że jeżeli p jest liczbą pierwszą nieparzystą, to każda liczba całkowita daje modulo p dokładnie $(2^{p-1}-1)/p$ różnych rozkładów na sumę różnych liczb z ciągu $1, 2, \ldots, p-1$.

Tak np. dla $p=5$ jest:

$$0\equiv 1+4\equiv 2+3\equiv 1+2+3+4 \pmod 5,$$
$$1\equiv 1\equiv 2+4\equiv 1+2+3 \pmod 5,$$
$$2\equiv 2\equiv 3+4\equiv 1+2+4 \pmod 5,$$
$$3\equiv 3\equiv 1+2\equiv 1+3+4 \pmod 5,$$
$$4\equiv 4\equiv 1+3\equiv 2+3+4 \pmod 5.$$

Do str. 142. Istnieją takie liczby naturalne n, że $\varphi(n)=\varphi(n+1)$. Dla $n<1000$ jest 10 takich liczb, mianowicie

$$n=1,\ 3,\ 15,\ 104,\ 164,\ 194,\ 255,\ 495,\ 584 \text{ i } 975.$$

Do str. 208. Działania na liczbach w układzie dwójkowym mają zastosowanie przy budowaniu maszyn rachunkowych. Ob. L. Couffignal, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tom 229, Paryż 1949, str. 488 i 489.

Do str. 227. Liczbą niewymierną, której rozwinięcie na ułamek dziesiętny nieskończony zostało obliczone z największą liczbą cyfr po przecinku, jest liczba $\sqrt{2}$. Coustal [2]) podał jej rozwinięcie z 1032 znakami po przecinku.

Do str. 243. W związku z twierdzeniem 3 zauważmy, że równanie $x^4+y^4+z^4=t^2$ jest rozwiązalne w liczbach naturalnych, gdyż np.

$$12^4+15^4+20^4=481^2.$$

Do str. 245. W związku z przypuszczeniem Eulera co do nierozwiązalności równania $x^4+y^4+z^4=t^4$ w liczbach naturalnych zauważmy, że układ równań

$$x^4+y^4+z^4=2t^4,\qquad x^2+y^2+z^2=2t^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych. Wynika to z tożsamości:

$$(n^2-1)^4+(2n\pm 1)^4+(n^2\pm 2n)^4=2(n^2\pm n+1)^4,$$
$$(n^2-1)^2+(2n\pm 1)^2+(n^2\pm 2n)^2=2(n^2\pm n+1)^2,$$

[1]) M. A. Stern, Journal für Mathematik, tom 61 (1863), str. 66.
[2]) Ob. R. Coustal, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tom 230, Paryż 1950, str. 431. Por. uwagi E. Borela co do tego rozwinięcia, tamże, str. 591-593.

jak również z tożsamości:

$$(4n)^4+(3n^2+2n-1)^4+(3n^2-2n-1)^4=2(3n^2+1)^4,$$
$$(4n)^2+(3n^2+2n-1)^2+(3n^2-2n-1)^2=2(3n^2+1)^2.$$

Tak np.

$$3^4+5^4+8^4=2\cdot 7^4, \qquad 3^2+5^2+8^2=2\cdot 7^2,$$
$$7^4+8^4+15^4=2\cdot 13^4, \qquad 7^2+8^2+15^2=2\cdot 13^2.$$

Do str. 297. *Ciągiem Fibonacciego* nazywamy ciąg nieskończony $u_1, u_2, \ldots$, określony przez warunki:

$$u_1=1, \quad u_2=1 \quad \text{i} \quad u_n=u_{n-1}+u_{n-2} \qquad \text{dla } n=3,4,5,\ldots$$

Pierwszymi 10 wyrazami tego ciągu są więc:

$$u_1=1, \quad u_2=1, \quad u_3=2, \quad u_4=3, \quad u_5=5,$$
$$u_6=8, \quad u_7=13, \quad u_8=21, \quad u_9=34, \quad u_{10}=55.$$

Zatem

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}=1+\frac{1}{\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)} \qquad \text{dla } n=1,2,\ldots,$$

skąd wnosimy, że dla $n=0,1,2,\ldots$ liczba $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$ jest n-tym reduktem rozwinięcia na ułamek łańcuchowy nieskończony tzw. *liczby złotej*

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\ldots$$

Łatwo też dowieść przez indukcję, że

$$2^n\sqrt{5}\,u_n=(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n \qquad \text{dla } n=1,2,\ldots$$

Ze wzoru tego można wyprowadzić wniosek, że

$$u_n \mid u_{mn} \qquad \text{dla } m \text{ i } n \text{ naturalnych.}$$

Wobec $u_3=2$ wnosimy stąd naprzykład, że dla $k=1,2,\ldots$ wszystkie wyrazy u_{3k} są liczbami parzystymi.

Łatwo również dowieść, że

$$u_{n+1}=\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\ldots \qquad \text{dla } n=1,2,\ldots$$

Wreszcie, można dowieść, że dla x dostatecznie małych co do wartości bezwzględnej mamy rozwinięcie

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}x^n.$$

Jako ćwiczenie pozostawiamy czytelnikowi do udowodnienia następujące wzory dla $n=1,2,\ldots$:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n=u_{n+2}-1 \qquad \text{(Lucas)},$$
$$u_1+u_3+\ldots+u_{2n-1}=u_{2n},$$
$$u_2+u_4+\ldots+u_{2n}=u_{2n+1}-1,$$
$$u_1+u_4+\ldots+u_{3n-2}=u_{3n}/2,$$
$$u_2+u_6+\ldots+u_{4n-2}=u_{2n}^2,$$
$$u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2=u_n u_{n+1}\ ^{1)}.$$

[1]) Ob. S. M, Plotnick, Scripta Mathematica, tom 9 (1939), str. 197; I. Sanders, Scripta Mathematica, tom 14 (1948), str. 162 oraz J. Ginsburg i Ch. W. Raine, tamże, str. 164.

SKOROWIDZ NAZW

Liczby oznaczają stronice.

SKOROWIDZ ZNAKÓW

Liczby oznaczają stronice.

SKOROWIDZ NAZWISK

Liczby oznaczają stronice.

SPIS RZECZY

ROZDZIAŁ IV. **TWIERDZENIA WILSONA, EULERA I FERMATA. TWIERDZENIA O ROZKŁADACH NA SUMĘ KWADRATÓW.**

ROZDZIAŁ V. **LICZBA I SUMA DZIELNIKÓW, LICZBY DOSKONAŁE, WZORY SUMACYJNE.**

ROZDZIAŁ VI. **FUNKCJA MÖBIUSA, FUNKCJA GAUSSA, ZALEŻNOŚĆ $F(n)=\sum_{d|n} f(d)$ I JEJ ODWRÓCENIE.**

ROZDZIAŁ VII. **GĘSTOŚĆ ROZMIESZCZENIA LICZB PIERWSZYCH W CIĄGU LICZB NATURALNYCH.**

ROZDZIAŁ VIII. **TWIERDZENIE EULERA, TWIERDZENIE LAGRANGE'A, PIERWIASTKI PIERWOTNE I WSKAŹNIKI.**

ROZDZIAŁ IX. **ROZWINIĘCIA SYSTEMATYCZNE PRZY DOWOLNEJ ZASADZIE NUMERACJI.**

ROZDZIAŁ X. **RÓWNANIE PYTAGORASA I JEGO UOGÓLNIENIA.**