

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y :

K. BORSUK, B. KNASTER, K. KURATOWSKI, W. SIERPIŃSKI,
W. ŚLEBODZIŃSKI, H. STEINHAUS i A. ZYGMUND

TOM XIX

DR WACŁAW SIERPIŃSKI

PROFESOR UNIwersYTETU WARSZAWSKIEGO
CZŁONEK POLSKIEJ AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI

TEORIA LICZB

WYDANIE TRZECIE, POWIĘKSZONE

B. 11.

10503

Z SUBWENCJI MINISTERSTWA OŚWIATY

W A R S Z A W A — W R O C Ł A W 1950

COPYRIGHT, 1950, by MONOGRAFIE MATEMATYCZNE
WARSZAWA (Poland) WROCLAW
Seminarium Matematyczne Uniwersytetu.

ALL RIGHTS RESERVED.

NO PART OF THIS BOOK MAY BE TRANSLATED OR
REPRODUCED IN ANY FORM, BY MIMEOGRAPH
OR ANY OTHER MEANS, WITHOUT PERMISSION IN
WRITING FROM THE PUBLISHERS.



III. 569.845

Printed in Poland

Nakład 2.100 egz. Stronic VI+544. Papier bezdrz. sat. 80 g. 70 × 100 cm. Kwiecień 1950.

ZAM. 386 — 6. IX. 47 — DRUKARNIA UNIwersYTETU I POLITECHNIKI WE WROCLAWIU — F 17396

1950es 2429/1

PRZEDMOWA

Matematyka dzisiejsza rozpada się na szereg działów, których nazwy są zazwyczaj krótkie, często ustalone od stuleci i nie dające wyobrażenia o tym, czym się dany dział zajmuje. Tak jest i z *Teorią liczb*, która zresztą, zarówno ze względu na swą treść i metody jak ze względu na swój stosunek do innych nauk, zajmuje pewne odrębne stanowisko wśród różnych działów Matematyki. Sądząc z nazwy, można by przypuszczać, że jest to jakaś ogólna nauka o pojęciu liczby i jego stopniowych uogólnieniach, a więc zajmująca się kolejno liczbami naturalnymi, całkowitymi, wymiernymi, rzeczywistymi, zespolonymi i może jeszcze innymi rodzajami liczb, oraz rozwijająca teorię działań na tych liczbach. Nauka taka rzeczywiście istnieje, ale nosi nazwę *Arytmetyki teoretycznej*.

Przedmiot *Teorii liczb* jest natomiast bardziej specjalny: zajmuje się ona badaniem *własności liczb całkowitych*, samo zaś pojęcie liczby całkowitej, jak również teorię działań arytmetycznych na liczbach całkowitych, bierze gotowe z Arytmetyki i Algebry.

Nie znaczy to jednak, by Teoria liczb nie posługiwała się innymi liczbami jak tylko całkowitymi. Wiele własności liczb całkowitych wykryto przy pomocy liczb niewymiernych lub zespolonych, a wiele twierdzeń o liczbach całkowitych łatwiej jest dowieść, nie tylko posługując się liczbami niewymiernymi lub zespolonymi, lecz stosując też nieraz rachunek różniczkowy i całkowy lub nawet teorię funkcji analitycznych. Ten dział *Teorii liczb*, który posługuje się Rachunkiem nieskończonościowym lub innymi działami Analizy Matematycznej, nazywamy *Analityczną teorią liczb*, w odróżnieniu od *Elementarnej teorii liczb*, nie posługującej się pojęciem granicy.

Treścią niniejszej książki jest Elementarna teoria liczb, jakkolwiek niejednokrotnie nawiązujemy w niej do Analitycznej teorii liczb, dając dostępniejsze jej zastosowania.

Niniejsze wydanie tej książki jest jej wydaniem trzecim. Pierwsze¹⁾ ukazało się w 1914 r., przed pierwszą wojną światową, jako tom X serii III Biblioteki Matematyczno-Fizycznej, wydanej przez A. Czajewicza i S. Dicksteina. Drugie, z 1925 r., wydane przez Kasę im. Mianowskiego, było odbiciem fotomechanicznym pierwszego, z wyjątkiem pierwszych dwu arkuszy, które zostały zmienione.

Od czasu pierwszego wydania tej książki minęło przeszło 35 lat. Przez ten czas Teoria liczb uczyniła wielkie postępy. Wprawdzie część jej wyników klasycznych pozostała w postaci niezmienionej, a część zachowała trwałą wartość historyczną, ale wykryto też w ostatnich dziesiątkach lat szereg nowych twierdzeń oraz uproszczono dowody wielu dawniejszych. W tym też czasie ukazało się w różnych krajach wiele podręczników Teorii liczb oraz monografii poświęconych różnym jej działom, nie mówiąc już o wielkiej ilości rozpraw poświęconych różnym zagadnieniom tak Elementarnej, jak i Analitycznej teorii liczb. Ukazała się też w latach 1918-1934 trzytomowa *Historia Teorii Liczb* Dicksona²⁾.

Toteż niniejsze wydanie tej książki znacznie się różni od poprzednich. Poza uwzględnieniem ważniejszych nowych wyników, różnica polega na wprowadzeniu licznych ćwiczeń, których celem jest z jednej strony danie czytelnikowi pola do sprawdzenia przyswojonych wiadomości i nabycia wprawy w operowaniu wyłożonym materiałem naukowym, z drugiej zaś strony — zapoznanie go z wynikami, które nie znalazły miejsca w tekście, ale są ciekawe. Celem tej książki jest więc nie tylko wyłożenie Elementarnej teorii liczb, ale i przygotowanie czytelnika do ewentualnej samodzielnej pracy w tej dziedzinie. Liczne cytaty ułatwią mu pogłębienie interesujących go kwestii.

Do zrozumienia tekstu książki wystarcza znajomość Arytmetyki i Algebry elementarnej; niektóre tylko miejsca, które zresztą w pierwszym czytaniu mogą być pominięte, wymagają podstawowych wiadomości z Analizy. Książka może być zatem rozumiana nie tylko przez studentów pierwszego roku matematyki,

¹⁾ Było ono poprzedzone przez dwa wydania litografowane moich wykładów uniwersyteckich z lat 1908 i 1912, które ukazały się nakładem Kółka Matematyczno-Fizycznego Uczniów Uniwersytetu Jana Kazimierza.

²⁾ L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, New York 1934.

ale również przez nauczycieli lub kandydatów na nauczycieli, jako też przez nie-matematyków, których interesują pewne zagadnienia Teorii liczb.

Teoria liczb, jakkolwiek jest działem matematyki dosyć specjalnym, stanowi nieodzowne uzupełnienie ogólnego wykształcenia matematycznego (nie mówiąc już o tym, że pewne wiadomości z Teorii liczb konieczne są w innych działach Matematyki, zwłaszcza w Algebrze wyższej).

Dla osób, pragnących poprzestać na początkowych tylko wiadomościach z Teorii liczb, wydałem w 1933 r. (wyczerpany już) kilkudziesięciostronicowy *Wstęp do Teorii Liczb*, nakładem Książnicy-Atlas we Lwowie.

Spełniam miły obowiązek, wyrażając na tym miejscu podziękowanie Komitetowi Redakcyjnemu „Monografii Matematycznych” za umożliwienie ukazania się tej książki, a w szczególności członkowi tego Komitetu panu profesorowi dr Bronisławowi Knasterowi za trud, którego nie szczędził podczas jej druku.

Dziękuję wreszcie Drukarni Uniwersytetu i Politechniki we Wrocławiu za staranne wykonanie roboty drukarskiej.

Wacław Sierpiński

Warszawa, w kwietniu 1950 r.

ERRATA

Stronica i wiersz:	jest:	ma być:
3 ¹⁸	jeżeli a i b są dwiema różnymi liczbami	żadna
3 ¹⁹⁻²¹	to $2 \leq (a, b) \leq 13$. Po i 2197).	nie jest pierwsza względem każdej z pozostałych.
22 ⁸	pierwszych nieparzystych	nieparzystych pierwszych
25 ³⁰	$10^4 + 1$	$10^4 - 1$
37 ⁸	(5)	(8)
57 ₃	Ob. X.	Ob.
79 ¹⁸	Twierdzenia	§ 6. Twierdzenie Lejeune- -Dirichleta. Twierdzenia
79 ₁₅	a $a + 2b$	b $2a + b$
109 ₁₅	wymiernych	wymiernych różnych od 0
109 ₃	W przypadku, gdy $t = -1$,	Nadto
201 ⁹	12	11
271 ₁₈	R_0	R_n
303 ₁₀	$2x^2 + 1$	$x^2 + Dy^2$
325 ¹⁴	$\left(\frac{D}{p}\right)$	$\left(\frac{D}{p}\right)$
335 ₈	$\left(\frac{D}{p}\right)$	$\left(\frac{D}{p}\right)$
443 ¹¹	$K\sqrt{D}$	$K(\sqrt{D})$
478 ₃	Lebesgue	Le Besgue

Otóż jest ono liczbą różną od p_1, p_2, \dots, p_n , gdyż wobec (*) liczba $2p_1 p_2 \dots p_n = a$ nie jest podzielna przez q . Liczb pierwszych postaci $2pk+1$ jest więc nieskończenie wiele.

Jako natychmiastowy wniosek stąd otrzymujemy:

Każdy z postępów arytmetycznych

$$6k+1, \quad 10k+1, \quad 14k+1, \quad 22k+1, \quad 26k+1,$$

tym bardziej więc każdy z postępów arytmetycznych

$$3k+1, \quad 5k+1, \quad 7k+1, \quad 11k+1, \quad 13k+1$$

zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

135. Dowieść, że jeżeli liczba a należy według modułu m do wykładnika $\delta_1 \delta_2$, to liczba a^{δ_1} należy według modułu m do wykładnika δ_2 ²⁾.

136. Dowieść, że jeżeli $(\delta_1, \delta_2) = 1$ i liczba a_1 należy według modułu m do wykładnika δ_1 , a liczba a_2 do wykładnika δ_2 , to liczba $a_1 a_2$ należy do wykładnika $\delta_1 \delta_2$.

²⁾ Ob. tamże, str. 93.

PRZYPISY

Do str. 19. Pełny tytuł pracy Kulika jest następujący: *Magnus Canon Divisorum pro omnibus numeris per 2, 3, 5 non divisilibus et numerorum primorum interjacentium ad Millies centum millia accuratius ad 100.330.201 usque*. Authore Jacobo Philippo Kulik, Galiciano Leopoliensi, in Universitate Pragensi Matheseos sublimioris Prof. publ. ac ord.

Rękopis ten, któremu Kulik poświęcił 20 lat życia, składa się z 6 tomów in 4^o.

Jakub Filip Kulik urodził się w 1793 r. we Lwowie i tam ukończył gimnazjum. Od 1826 r. aż do śmierci w 1863 r. był profesorem astronomii i matematyki na Uniwersytecie w Pradze. Bliższe szczegóły o jego życiu i dziełach podaje Z. Krygowski w Sprawozdaniach z czynności i posiedzeń Polskiej Akademii Umiejętności, tom 48 (1947), str. 237.

Do str. 21. Jak zauważył A. Bermant ¹⁾, wzór $\frac{2^p+1}{3}$ daje same liczby pierwsze dla liczb pierwszych $p < 37$; natomiast dla $p = 37$ wzór ten daje liczbę złożoną, podzielną przez 1777.

Do str. 22. W pierwszym tysiącu jest tylko 5 dekad zawierających po 4 liczby pierwsze, mianowicie 2, 3, 5, 7 oraz czwórki $k+1, k+3, k+7, k+9$ dla $k=10, 100, 190$ i 820; poniżej zaś 10 tysięcy są jeszcze tylko takie dekady dla $k=1480, 1870, 2080, 3250, 3460, 5650$ i 9430. Ob. Scripta Mathematica, tom 13 (1947), str. 230.

Do str. 52. Rozwiązywanie kongruencji 1-go stopnia *metodą C. Sardięgo*.

Niech będzie dana kongruencja $ax \equiv b \pmod{m}$, gdzie $a > 1$ i $(a, m) = 1$. Niech $a_1 = m - aE\left(\frac{m}{a}\right)$. Jak łatwo widzieć, jest

¹⁾ Ob. G. Berman, *Czysto i nauka o niom*, Moskwa 1948.

$0 < a_1 < a$, gdyż m nie jest podzielne przez a . Mnożąc daną kongruencję przez $-E\left(\frac{m}{a}\right)$, otrzymujemy

$$a_1 x \equiv -bE\left(\frac{m}{a}\right) \pmod{m},$$

zatem kongruencję, w której $a_1 < a$. Postępując w ten sposób dalej, dojdziemy do $a_n = 1$, więc do kongruencji $x \equiv c \pmod{m}$.

Do str. 61 i 62. Tablicę liczb złożonych $n \leq 10^6$, spełniających kongruencję $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ podał P. Poulet; ob. jego *Table des nombres composés vérifiant le théorème de Fermat pour le module 2 jusqu'à 100.000.000*, Sphinx, tom 8 (Bruksela 1958), str. 42-52.

Do str. 79. Twierdzenie Lejeune-Dirichleta o postępie arytmetycznym można z łatwością wyprowadzić ze słabszego (jakby się zdawało) twierdzenia następującego:

(*) W każdym postępie arytmetycznym $ak + b$, gdzie a i b są liczbami naturalnymi, $k = 0, 1, 2, \dots$ oraz $(a, b) = 1$, istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza.

Istotnie, załóżmy twierdzenie (*) i przypuśćmy, że w postępie $ak + b$ jest tylko skończenie wiele liczb pierwszych. Istniałaby więc taka liczba naturalna m , że wszystkie liczby $a(m+k) + b$, gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$, byłyby złożone. Ale $a(m+k) + b = ak + (am+b)$ oraz $(a, am+b) = 1$ wobec założenia, że $(a, b) = 1$. Dla $b' = am + b$ postęp arytmetyczny $ak + b'$ składałby się zatem z samych liczb złożonych, mimo że $(a, b') = 1$. Przeczy to twierdzeniu (*). Tak więc z twierdzenia (*) wynika twierdzenie Lejeune-Dirichleta o postępie arytmetycznym, c. b. d. o.

Do str. 105. Elementarny dowód twierdzenia Waringa, podany przez J. Linnika i oparty na pomysły L. Schnirelmana, wyłożony jest w książeczce A. Chinczina, *Trzy perły teorii liczb* (po rosyjsku), Moskwa-Leningrad 1948, str. 54-65.

Do str. 109. Z tożsamości

$$4^4 \cdot 255^4 x = [8(255 + 2x)]^4 - [8(255 - 2x)]^4 + (52x - 255)^4 - (52x + 255)^4$$

wynika natychmiast, że każda liczba wymierna jest sumą algebraiczną czterech bikwadratów liczb wymiernych.

Do str. 110. Można dowieść drogą elementarną, że do każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna s_n , iż każda liczba całkowita jest sumą algebraiczną s_n n -tych potęg liczb całkowitych.

Wynika to z łatwością z następującej tożsamości Boutina ¹⁾:

$$\sum \pm (\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n)^n = n! 2^n x_1 x_2 \dots x_n,$$

gdzie po lewej stronie sumowanie należy rozciągnąć na wszystkie 2^n kombinacji znaków wewnątrz nawiasu, biorąc jako znak przed nawiasem iloczyn wszystkich znaków wewnątrz nawiasu. Innymi słowy, jest to tożsamość

$$\sum_{a_1 a_2 \dots a_n} (-1)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} [(-1)^{a_1} x_1 + (-1)^{a_2} x_2 + \dots + (-1)^{a_n} x_n]^n = n! 2^n x_1 x_2 \dots x_n,$$

gdzie sumowanie po lewej stronie należy rozciągnąć na wszystkie 2^n układów a_1, a_2, \dots, a_n utworzonych liczb 0 i 1.

Otóż z tożsamości Boutina wynika (dla $x_0 = x_1 = \dots = x_n = 1$), że każda liczba całkowita podzielna przez $n! 2^n$ jest sumą algebraiczną 2^n n -tych potęg liczb całkowitych. Ponieważ zaś każda liczba całkowita jest postaci $n! 2^n x \pm r$, gdzie x i r są liczbami całkowitymi oraz $0 \leq r < n! 2^{n-1}$, więc każda liczba całkowita jest sumą algebraiczną $2^n + n! 2^{n-1}$ n -tych potęg liczb całkowitych.

Do str. 135. Już Leibnitz i Bernouilli, a później Euler zajmowali się zagadnieniem, zwanym *partitio numerorum*, mianowicie wyznaczeniem dla liczby naturalnej n liczby g_n wszystkich różnych jej rozkładów na sumę liczb naturalnych niemających.

Oto kolejne wartości funkcji g_n :

$$\begin{array}{cccccc} g_1 = 1, & g_2 = 2, & g_3 = 3, & g_4 = 5, & g_5 = 7, \\ g_6 = 11, & g_7 = 15, & g_8 = 22, & g_9 = 30, & g_{10} = 42. \end{array}$$

Można dowieść, że liczby g_n występują jako współczynniki pewnego rozwinięcia na szereg potęgowy, mianowicie że dla $|x| < 1$ jest

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n.$$

Oznaczając przez h_n liczbę wszystkich różnych rozkładów liczby naturalnej n na sumę liczb naturalnych rosnących, mamy — jak łatwo dowieść — dla $|x| < 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n \quad (\text{Euler}).$$

¹⁾ A. Boutin, *L'intermédiaire des Mathématicques*, tom 17 (1910), str. 122-125 i 236-237. Por. też P. Tardy, *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*, tom 2 (1851), str. 287, oraz *Nouvelles Annales de Mathématique*, tom 2 (1845), str. 454. Ob. również L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, tom 2, New York 1934, str. 723 i 728.

Oto kolejne wartości funkcji h_n :

$$\begin{array}{cccccc} h_1=1, & h_2=1, & h_3=2, & h_4=2, & h_5=3, & \\ h_6=4, & h_7=5, & h_8=6, & h_9=8, & h_{10}=10. & \end{array}$$

Oznaczmy przez k_n liczbę wszystkich różnych rozkładów liczby n na sumę liczb naturalnych, uważając za różne rozkłady różniące się choćby tylko порядkiem składników. Tutaj łatwo dowieść przez indukcję (co pozostawiamy czytelnikowi), że

$$k_n = 2^{n-1} \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

Tak np. liczba 4 rozkłada się ośmioma różnymi sposobami na sumę liczb naturalnych:

$$\begin{aligned} 4 &= 3+1 = 1+3 = 2+2 = 2+1+1 = \\ &= 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1. \end{aligned}$$

Oznaczmy jeszcze przez l_n liczbę wszystkich różnych rozkładów liczby naturalnej n na sumę niemalejących liczb naturalnych nieparzystych. Jest tu dla $|x| < 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2n-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} l_n x^n.$$

Godne uwagi jest, że — jak można dowieść —

$$l_n = h_n \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

Badano też funkcję liczbową q_n , oznaczającą liczbę rozkładów zbioru o n elementach na sumę zbiorów niepustych bez elementów wspólnych, gdzie nie uważa się za różne rozkłady, różniących się tylko порядkiem składników.

Pierwszymi wartościami tej funkcji są:

$$q_1=1, \quad q_2=2, \quad q_3=5, \quad q_4=15, \quad q_5=52.$$

Dla q_n można wyprowadzić wzór zwrotny¹⁾

$$q_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} q_k,$$

jako też wzór²⁾

$$e^{e^x-1} = \sum q_n x^n / n!$$

¹⁾ O. Ore, Duke Mathematical Journal, tom 9 (1941), str. 575.

²⁾ G. Birkhoff, *Lattice Theory*, New York 1948, str. 17; por. G. Williams, American Mathematical Monthly, tom 52 (1945), str. 323-327.

Zajmowano się także liczbą różnych rozkładów liczb całkowitych na sumę liczb ciągu 1, 2, ..., $m-1$ według modułu m . Stern dowiódł¹⁾, że jeżeli p jest liczbą pierwszą nieparzystą, to każda liczba całkowita daje modulo p dokładnie $(2^{p-1}-1)/p$ różnych rozkładów na sumę różnych liczb z ciągu 1, 2, ..., $p-1$.

Tak np. dla $p=5$ jest:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 1+4 \equiv 2+3 \equiv 1+2+5 \equiv 4 \pmod{5}, \\ 1 &\equiv 1 \equiv 2+4 \equiv 1+2+3 \pmod{5}, \\ 2 &\equiv 2 \equiv 3+4 \equiv 1+2+4 \pmod{5}, \\ 3 &\equiv 3 \equiv 1+2 \equiv 1+5+4 \pmod{5}, \\ 4 &\equiv 4 \equiv 1+5 \equiv 2+5+4 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Do str. 142. Istnieją takie liczby naturalne n , że $\varphi(n) = \varphi(n+1)$. Dla $n < 1000$ jest 10 takich liczb, mianowicie

$$n = 1, 3, 15, 104, 164, 194, 255, 495, 584 \text{ i } 975.$$

Do str. 208. Działania na liczbach w układzie dwójkowym mają zastosowanie przy budowaniu maszyn rachunkowych. Ob. L. Couffignal, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tom 229, Paryż 1949, str. 488 i 489.

Do str. 227. Liczbą niewymierną, której rozwinięcie na ułamek dziesiętny nieskończony zostało obliczone z największą liczbą cyfr po przecinku, jest liczba $\sqrt[2]{2}$. Coustal²⁾ podał jej rozwinięcie z 1052 znakami po przecinku.

Do str. 245. W związku z twierdzeniem 5 zauważmy, że równanie $x^4 + y^4 + z^4 = t^2$ jest rozwiązywalne w liczbach naturalnych, gdyż np.

$$12^4 + 15^4 + 20^4 = 481^2.$$

Do str. 245. W związku z przypuszczeniem Eulera co do nierozwiązalności równania $x^4 + y^4 + z^4 = t^4$ w liczbach naturalnych zauważmy, że układ równań

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2t^4, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2t^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych. Wynika to z tożsamości:

$$\begin{aligned} (n^2-1)^4 + (2n\pm 1)^4 + (n^2\pm 2n)^4 &= 2(n^2\pm n+1)^4, \\ (n^2-1)^2 + (2n\pm 1)^2 + (n^2\pm 2n)^2 &= 2(n^2\pm n+1)^2, \end{aligned}$$

¹⁾ M. A. Stern, Journal für Mathematik, tom 61 (1865), str. 66.

²⁾ Ob. R. Coustal, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tom 250, Paryż 1950, str. 451. Por. uwagi E. Borela co do tego rozwinięcia, tamże, str. 591-595.

jak również z tożsamości:

$$(4n)^4 + (5n^2 + 2n - 1)^4 + (3n^2 - 2n - 1)^4 = 2(5n^2 + 1)^4,$$

$$(4n)^2 + (5n^2 + 2n - 1)^2 + (3n^2 - 2n - 1)^2 = 2(5n^2 + 1)^2.$$

Tak np.

$$3^4 + 5^4 + 8^4 = 2 \cdot 7^4, \quad 3^2 + 5^2 + 8^2 = 2 \cdot 7^2,$$

$$7^4 + 8^4 + 15^4 = 2 \cdot 13^4, \quad 7^2 + 8^2 + 15^2 = 2 \cdot 13^2.$$

Do str. 297. Ciąg *Fibonacciego* nazywamy ciąg nieskończony u_1, u_2, \dots , określony przez warunki:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1 \quad \text{i} \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \text{dla } n = 3, 4, 5, \dots$$

Pierwszymi 10 wyrazami tego ciągu są więc:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = 5,$$

$$u_6 = 8, \quad u_7 = 13, \quad u_8 = 21, \quad u_9 = 34, \quad u_{10} = 55.$$

Zatem

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

skąd wnosimy, że dla $n = 0, 1, 2, \dots$ liczba $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$ jest n -tym redukcją rozwinięcia na ułamek łańcuchowy nieskończony tzw. *liczby złotej*

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

Łatwo też dowiedzieć przez indukcję, że

$$2^n \sqrt{5} u_n = (1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Ze wzoru tego można wyprowadzić wniosek, że

$$u_n | u_m \quad \text{dla } m \text{ i } n \text{ naturalnych.}$$

Wobec $u_3 = 2$ wnosimy stąd na przykład, że dla $k = 1, 2, \dots$ wszystkie wyrazy u_{3k} są liczbami parzystymi.

Łatwo również dowiedzieć, że

$$u_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Wreszcie, można dowiedzieć, że dla x dostatecznie małych co do wartości bezwzględnej mamy rozwinięcie

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} x^n.$$

Jako ćwiczenie pozostawiamy czytelnikowi do udowodnienia następujące wzory dla $n = 1, 2, \dots$:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1 \quad (\text{Lucas}),$$

$$u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n},$$

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1,$$

$$u_1 + u_4 + \dots + u_{3n-2} = u_{3n} / 2,$$

$$u_2 + u_6 + \dots + u_{4n-2} = u_{2n}^2,$$

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1}.$$

¹⁾ Ob. S. M. Plotnick, Scripta Mathematica, tom 9 (1939), str. 197; I. Sanders, Scripta Mathematica, tom 14 (1948), str. 162 oraz J. Ginsburg i Ch. W. Raine, tamże, str. 164.

SKOROWIDZ NAZW

Liczby oznaczają stronicę.

- Algebraiczna** podzielność 496.
Algorytm Euklidesa 31, 268, 384, 429, rozwinięcia normalnego 213, ułamka ciągłego 31, — w ciele liczbowym 429.
Arytmetyczna podzielność 496, -e ułamki łańcuchowe 267.
Arytmetyki twierdzenie zasadnicze 6.
- Bertranda** postulat 14.
 Bezwzględnie najmniejsza reszta 65.
 Bliźniacze liczby 21.
 Boutina tożsamość 527.
- Catalana** tożsamość 102.
 Całkowita liczba 1, — ciała 422.
 Cechy podzielności 11, 46, 48.
 Charakterystyczna własność funkcji Gaussa 152, — liczb pierwszych 57 -y warunek dla funkcji Möbiusa 152.
 Ciało liczbowe 416, — najprostsze 416, — nieprzywiedne 417, — utworzone przez dołączenie liczby 417.
 Ciąg Fibonacciego 530, okresowy 217.
 Ciągłe ułamki 262.
 Cyfry (przy zasadzie *g*) 205, — nieregularne 219.
 Czysty okres 219 (281).
- Descartes'a** twierdzenie 123.
 Długość okresu 217.
 Dodatnia forma 368, -e rozwiązanie równania 248.
 Dołączenie liczby do ciała 417.
 Doskonałe liczby 116, — drugiego rodzaju 123.
 Dwójkowa jednorodna forma 351.
 Dwumienna kongruencja 311.
 Dyskryminanta czyli wyróżnik 351.
 Dzielnik 1, 451, największy wspólny 2, — ideałów 456, podstawowy 453, wspólny 2.
- Eisensteina** prawidło 341.
 Entier (*z x*) 49.
 Eratostenesa sito 16.
 Eulera tożsamość 96.
- Fermata** twierdzenie małe 59, — o liczbach pierwszych 73, — wielkie 242 (426), równanie 238 (248).
 Forma dwójkowa jednorodna 351, kanoniczna ideału 445, kwadratowa dodatnia 368, liniowa (największego wspólnego dzielnika) 27, 386, równoważna niewłaściwie, właściwie 355, zredukowana 368, -y równoważne 354.
 Funkcja ζ 151, Gaussa 140, Liouville'a 154, Mertensa, Möbiusa 156.
- Gaussa** funkcja 140, lemat 324.
 Gęsty zbiór liczb 419.
 Główny ideał 447.
 Grupa przedstawień 358.
- Hermite'a** tożsamość 134.
 Hipoteza Goldbacha 22.
 Hurwitza tożsamość 519.
- Ideał** 445, główny 447, najprostszy 447, pierwszego, drugiego stopnia 461, pierwszy 458, sprzężony 451, -y równe 448, względnie pierwsze 457.
 Iloczyn ideałów 450.
 Indeks czyli reszka 174 (196).
 Izolowana liczba pierwsza 79.
- Jacobiego** twierdzenie 399, 401, 519, symbol 335.
 Jednorodna forma dwójkowa 351.
- Kanoniczna** forma ideału 445.
 Klasy form kwadratowych 356.
- Kongruencja** 41, dwumienna 311, sprzężona 51, tożsamościowa 51, -i pierwiastek 49.
 Kwadratowa dodatnia forma 368, niereszta 54, reszta 54.
- Lagrange'a** tożsamość 97, twierdzenie 93, 177, — o ułamkach łańcuchowych 295.
 Lamberta szereg 151.
 Legendre'a symbol 62.
 Lemat Gaussa 324.
 Liczba całkowita 1, — zespolona 379, ciała 422, doskonała 116, — drugiego rodzaju 123, najbardziej złożona 114, naturalna 1, nierozkładalna 456, pierwsza 8, — izolowana 79, pseudo-pierwsza 60, 389, rodna 225, sprzężona 365, 420, wyrazów okresu 217, zespolona pierwsza 389, — sprzężona 380, złota 530, złożona 9, zredukowana 365, -y bliźniacze 21, całkowite 1, naturalnej rozwinięcia 205, niewymierne równoważne 365, odpowiednie 53, przystające 41, stowarzyszone 382, 455, trójkątne 92, względnie pierwsze 2, 537, zaprzyjaźnione 125.
 Liniowa forma 27, 386.
 Lionneta twierdzenie 520.
 Liouville'a funkcja 154, tożsamość 147, 400.
 Lucasa tożsamość 103.
- Łańcuchowe** ułamki 262.
- Małe** twierdzenie Fermata 59.
 Matsunago równanie 241.
 Mertensa funkcja 156.
 Metoda kolejnych dzieleń 31, Sardiiego 525, wyznaczania liczb doskonałych 119.
 Mnożenie Dirichleta 151.
 Moduł kongruencji 41.
 Möbiusa funkcja 156.
 Muira twierdzenie 285.
- Najbardziej złożone** liczby 114.
 Najmniejsza wspólna wielokrotność 3, 389, — ideałów 458.
 Najprostsze ciało liczbowe 416, -y ideał 447.
 Największy wspólny dzielnik 2, 385, — ideałów 456.
 Należenie liczby do wykładnika 172.
 Naturalne liczby 1.
 Nieoznaczone równanie 55.
 Niepozostalność kwadratowa 54.
- Nieprzywiedne** ciało liczbowe 417.
 Nieregularne cyfry, wyrazy 219.
 Nierozkładalna kwadratowa 54.
 Nierozkładalna liczba 456.
 Niewymierność drugiego stopnia 290.
 Norma liczby zespolonej 381 (421), — ciała 421, ideału 451.
 Normalne rozwinięcie 210.
- Obraz** rozkładu 87.
 Odpowiednie liczby 55.
 Odzorowanie rozkładu 87.
 Okres czysty 219 (281), zasadniczy 217.
 Okresowe rozwinięcie 217, -y ciąg 217.
 Osie 87.
- Partitio numerorum** 527.
 Periodyczne rozwinięcie 217.
 Pierwiastek kongruencji 49, pierwotny 172 (173).
 Pierwsza liczba 8, -y ideał 458.
 Podstawowy dzielnik 453.
 Podzielność 1, ideałów 454, liczb całkowitych ciała 451, zespolonych 381, wielomianów algebraiczna, arytmetyczna 496.
 Postulat Bertranda 14.
 Pozostalność kwadratowa 54.
 Półnormalne rozwinięcie 277.
 Prawidło Eisensteina 341.
 Prawo najlepszego przybliżenia 274, przechodności 42, symetrii 41, tożsamości 41, wzajemności liczb pierwszych (326) 351.
 Próba mnożenia za pomocą liczby 9 47.
 Przechodność podzielności 2.
 Przedstawienie właściwe 352.
 Przystawanie liczb 41.
 Pseudo-pierwsza liczba 60.
 Punkty sieciowe 87.
- Ramanujana** tożsamość 247.
 Redukt rozwinięcia (przy zasadzie *g*) 210, ułamka łańcuchowego 262.
 Regularne cyfry, wyrazy 219.
 Reguła związania ułamków okresowych 225.
 Reszta 50, bezwzględnie najmniejsza 65, kwadratowa 54.
 Rodna liczba 225.
 Równanie Fermata 238 (248), Matsunago 241, nieoznaczone 35 (269), Pella 274, 248, Pytagorasa 229, — uogólnione 257.
 Równość ideałów 448.
 Równoważne formy 354, liczby niewymierne 365.

Równoważność niewłaściwa, właściwa 363.

Rozwiązanie dodatnie 248, właściwe 229.

Rozwinięcie liczby na czynniki pierwsze 10, — naturalnej 205, — rzeczywistej 210, — ujemnej 208, — na ułamek skończony 214, — normalne 210, 268, — okresowe czyli periodyczne 217, — półnormalne 277.

Rzadki zbiór liczb 13.

Schiffera-Zarankiewicza twierdzenie 101.

Stożone punkty 87.

Sito Eratostenesa 16.

Sprzężona kongruencja 51.

Sprzężona liczba ciała 365, 420, — zespolona 380, — ideal 451.

Średnia wartość 89.

Średnioboczne trójkąty wymierne 259.

Stowarzyszone liczby 382, 435.

Symbol Jacobiego 335, Legendrea 62.

Symetrii prawo 41.

Szereg Lamberta 131.

Tożsamość Boutina 527, Catalana 102, Eulera 96, Hermite'a 134,

Hurwitza 519, Lagrange'a 97,

Liouville'a 147, 400, Lucasa 103,

Ramanujana 247, *i* prawo 41,

-owa kongruencja 51.

Trójkąt indyjski, pytagorejski 260, *-y*

wymierne średnioboczne 259.

Trójkątne liczby 92.

Trójkąty wymierne średnioboczne 259.

Twierdzenie Descartes'a 123, Eulera 59, 169, Fermata małe 59,

o liczbach pierwszych 73, — wielkie 242 (426), Gaussa 321, Goldbacha-Winogradowa 23, Jacobiego 399, 401, 519, Lagrange'a 93, 177, — o ułamkach łańcuchowych 293, Leibniza 57, Lejeune-Dirichleta 79, Lionneta 520, Muira 285, Waringa 102, 519, Wilsona 57 (58, 321), Woska 123, Zarankiewicza 517, Zarankiewicza-Schiffera 101, zasadnicze arytmetyki 6 (388), — teorii ideałów 461.

Ułamki ciągle czyli łańcuchowe (54)

262, — arytmetyczne 267, — nieskończone (przy zasadzie *g*) 210, — okresowe 225.

Wallisa wzór dla π 400.

Waringa twierdzenie 519.

Wartość średnia 89, ułamka łańcuchowego 267.

Warunek charakterystyczny dla funkcji Möbiusa 152.

Wielkie twierdzenie Fermata 242 (426).

Wielokrotność 1, najmniejsza wspólna 3, 389, 458.

Wielomian podzielny algebraicznie, arytmetycznie 496.

Właściwe przedstawienie liczby 352,

rozwiązanie równania 229.

Własność charakterystyczna funkcji Gaussa (144) 152, — liczb pierwszych 57.

Wskaźnik 174 (196).

Wspólna najmniejsza wielokrotność 3,

389, 458, *-y* największy dzielnik 2,

385, 456.

Wymierne trójkąty średnioboczne 259,

Wyrazy regularne, nieregularne 219.

Wyróżnik 351.

Wyznaczenie rozwinięcia normalnego 214.

Względnie pierwsze ideały 457, — liczby 2, — całkowite zespolone 387.

Wzór Brunckera 401, Eulera dla π 400, 401, 415, Lejeune-Dirichleta 130, Wallisa dla π 400.

Zaprzyżnione liczby 125.

Zarankiewicza twierdzenie 517.

Zasada numeracji 205, — zmienna 226.

Zasadnicze twierdzenie arytmetyki 6 (388), — teorii ideałów 461, *-y* okres 217.

Zbiór liczb gęsty 419, — rzadki 13.

Zespolone liczby całkowite 379, — sprzężone 380.

Złota liczba 530.

Złożona liczba 9.

Zmienna zasada numeracji 226.

Zredukowana forma 368, liczba 365.

SKOROWIDZ ZNAKÓW

Liczby oznaczają strony.

(a, b)	2	p_n	18
$[a, b]$	3	$\text{sign } z$	329
$b \mid a$	1	$S(x)$	132
$(c_1 c_2 \dots c_m)_z$	205	$\gamma(p)$	185
$\left(\frac{D}{p}\right)$	62	Δ_k	266
$\left(\frac{D}{P}\right)$	356	$\zeta(s)$	131
$E(x)$	49	$\Theta(n)$	113
i	443	$\mu(n)$	136
$i = [g_1, g_2, \dots, g_n]$	447	$\pi(x)$	18
$\text{ind}_a n$	174	$\sigma(n)$	115
$K(\sqrt{D})$	417	$\tau(n)$	84
$N(z)$	381	$\varphi(n)$	140
$N(i)$	451	$\varphi(p_1, p_2, \dots, p_n; x)$	138
$\mathfrak{N}(i)$	459	$\frac{1}{ a_1 } + \frac{1}{ a_2 } + \dots$	266
		\equiv	41

SKOROWIDZ NAZWISK

Liczby oznaczają stronicę.

Arnold 20, 24, 109.
Aubry 26.
Axer 417.

Bachet 93.
Bachmann 60, 331, 407.
Banachiewicz 61.
Bang 108.
Barbilian 100.
Berger 186, 498.
Berman 525.
Bermant 525.
Bernouilli 527.
Bertelsen 508.
Birkhoff 528.
Bertrand 14, 18, 19, 24, 141, 143, 503, 504.
Blumer 278.
Boll 490.
Boncler 67.
Bonse 141.
Borel 13, 167, 265, 529.
Boutin 527.
Brauer 3, 429.
Breusch 14.
Brioschi 97.
Brouncker 401.
Brown 125.
Brun 18, 21, 22.

Cantor 227, 491.
Catalan 102.
Chinczin 526.
Chrystal 114.
Clement 502.
Couffignal 529.
Coustal 529.
Czebyszew 14.

Davenport 103, 105.
Dedekind 241.
Degen 97.

De la Vallée-Poussin 165.
Descartes 123, 125.
Dickson 104, 110, 111, 241, 246, 429, 500, 527.
Dirichlet 79, 91, 130, 131, 146, 407.

Eisenstein 341, 345.
Eratosthenes 15, 16, 17.
Erdős 429.
Escott 125.
Estermann 103.
Euklides 14, 51, 119, 267, 384, 428, 429, 430.
Euler 19-23, 59, 96, 97, 110, 122, 125, 150, 169, 171, 172, 175, 186, 245, 334, 347, 400, 401, 415, 500, 507, 517, 518, 527, 529.

Faber 227.
Fauquembergue 19, 122.
Fermat 20, 59-62, 66, 67, 73, 76, 81, 84, 93, 109, 110, 120, 123, 125, 169, 172, 258, 242, 248, 547, 392, 398, 426, 428, 458, 465, 488, 495, 496, 507, 513, 518.
Ferrier 19, 58.
Fibonacci 530.
Fitz-Patrick 8, 17, 31, 182.
Fraenkel 23.

Gauss 41, 44, 58, 91, 101, 140, 144, 152, 176, 183, 241, 321, 331, 410, 520.
Genocchi 98.
Gérardin 246.
Ginsburg 531.
Glaisher 228.
Goldbach 22, 23.
Gottschalk 242.

Hadamard 165.
Halcke 237.
Hardy 103, 167.

Hausdorff 277.
Heilbronn 23, 103.
Hermite 154.
Hilbert 102.
Hua 430.
Hunter 105.
Hurwitz 519.

Jacobi 335, 336, 345, 599, 401, 407, 519.

Kaván 20.
Klein 243.
Ko 108, 429.
Kraitchik 20, 45, 68, 122, 172, 288.
Krygowski 525.
Kulik 19, 525.
Kummer 140.

Lagrange 92, 93, 97, 100, 101, 103, 177, 241, 293, 410, 519.
Lambert 131.
Landau 22, 23, 91, 161, 165, 166.
Landry 20.
Le Besgue 97, 478.
Legendre 49, 62, 199, 200, 241, 503, 325, 346.
Lehmer 19, 62, 122.
Leibniz 57, 400, 527.
Lejeune-Dirichlet 79, 91, 130, 526.
Le Lonnais 167, 490.
Lietzmann 44.
Lindemann 243.
Linnik 526.
Lionnet 520.
Liouville 104, 147, 154, 400.
Littlewood 103.
Lubelski 31, 108.
Lucas 103, 531.

Łojasiewicz 134.

Mangoldt 150.
Matsunago 241.
Matulewicz 506.
Meisel 508.
Mertens 136.
Min 430.
Möbius 136, 137, 159, 146, 149, 152.
Muir 285.

Newton 67, 518.
Niewęglowski 6.
Noguès 242.
Norrie 245.

Ore 490, 505, 508, 518, 528.

Paganini 125.
Pascal 20.
Paferson 245.
Patz 286.
Peano 97, 227.
Pell 234, 248, 251, 470.
Perron 278, 285.
Pillai 3.
Pizà 247, 426.
Plotnick 531.
Poletti 19.
Pólya 45, 143, 147, 170, 208.
Pompeiu 489.
Porges 521.
Poulet 123, 526.
Powers 122.
Poznański 186.
Pythagoras 87, 125, 229, 241, 242, 244.

Rademacher 141.
Raine 531.
Ramanathan 116.
Ramanujan 98, 111, 246, 247.
Rédei 429.
Reinhart 490.
Remak 141.
Richmond 109.
Rosser 167.
Roth 100.
Ruziewicz 15.

Sanders 531.
Sardi 525.
Scherk 23.
Schiffer 101.
Schnirelman 23, 526.
Scott 162.
Seelhoff 122.
Sierpiński 18, 131, 200, 208, 225, 298, 380, 400, 401, 414, 501, 515.
Sispanov 60, 61.
Skolem 89.
Smitgoud 57.
Sommer 435.
Stéphanos 227.
Stern 529.
Stieltjes 4.
Stirling 401.
Storchi 334.
Stożek 506.
Strauss 227.
Szegő 45, 143, 147, 170, 208.

Tannery 265.
Tano 287.
Tardy 527.
Tchudakoff 23.
Thue 505.
Toeplitz 141.
Trost 498.
Turski 100, 101.

Van den Broeck 511.

Wallis 246, 298, 400.
Waring 68, 102, 105, 108, 519, 526.

Wertheim 186.
Wieferich 102, 106, 108.
Williams 528.
Wilson 57-59, 68, 74, 180, 321, 495, 502.
Winogradow 23, 24, 114, 522.
Wolfskehl 242.
Wolstenholme 45.
Wosk 123.

Zahlen 505.
Zarankiewicz 101, 516, 517, 518.
Zaremba 217.
Zeit 18.

SPIS RZECZY

	Str.
PRZEDMOWA	III
ERRATA	VI
ROZDZIAŁ I. PODZIELNOŚĆ LICZB I ROZKŁAD NA CZYNNIKI PIERWSZE.	
§ 1. Podzielność jednej liczby przez drugą	1
§ 2. Wspólne dzielniki dwu liczb	2
§ 3. Największy wspólny dzielnik	2
§ 4. Najmniejsza wspólna wielokrotność	3
§ 5. Własność największego wspólnego dzielnika	4
§ 6. Zależność między największym wspólnym dzielnikiem a najmniejszą wspólną wielokrotnością dwu liczb	4
§ 7. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki	5
§ 8. Liczby pierwsze i ich ważniejsze własności. Liczby złożone i ich roz- kład na czynniki pierwsze	8
§ 9. Dowód, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele	14
ROZDZIAŁ II. RÓWNIANIA NIEOZNACZONE PIERWSZEGO STOPNIA.	
§ 1. Forma liniowa dla największego wspólnego dzielnika	27
§ 2. Warunek na to, by dwie liczby były względnie pierwsze	29
§ 3. Wyznaczanie największego wspólnego dzielnika za pomocą algorytmu Euklidesa	29
§ 4. Rozwijanie liczby na ułamek łańcuchowy	33
§ 5. Równania nieoznaczone 1-go stopnia o 2 niewiadomych	35
§ 6. Równania nieoznaczone 1-go stopnia o n niewiadomych	37
§ 7. Wyznaczanie największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspól- nej wielokrotności n liczb	39
ROZDZIAŁ III. ZASADNICZE WŁASNOŚCI, KONGRUENCJI, KONGRUENCJE 1-go STOPNIA O MODULE PIERWSZYM.	
§ 1. Kongruencje i ich ważniejsze własności	41
§ 2. Zastosowanie kongruencji do otrzymania cech podzielności przez 9, 11, 7, 13, 27 i 37	46
§ 3. Pierwiastki kongruencji. Reszty według danego modułu	49
§ 4. Związek między kongruencjami a pewną klasą równań nieoznaczonych. Kongruencje tożsamościowe i kongruencje sprzeczne	50
§ 5. Kongruencje 1-go stopnia o module pierwszym	51

ROZDZIAŁ IV. TWIERDZENIA WILSONA, EULERA I FERMATA. TWIERDZENIA O ROZKŁADACH NA SUMĘ KWADRATÓW.		Str.
§ 1. Reszty i niereszy kwadratowe. Dowód twierdzeń Wilsona, Eulera i małego twierdzenia Fermata. Symbol Legendre'a		53
§ 2. Reszty bezwzględnie najmniejsze. Symbol Legendre'a $\left(\frac{D}{p}\right)$ jako reszta bezwzględnie najmniejsza liczby $D^{\frac{p-1}{2}}$ według modułu p		65
§ 3. Reszty kwadratowe dla modułu pierwszego. Ich wyznaczenie i liczba		68
§ 4. Dowód twierdzenia Fermata o rozkładzie liczb pierwszych formy $4k+1$ na sumę dwu kwadratów		71
§ 5. Ilość liczb pierwszych formy $4k+1$, $4k+3$, $5k+2$ i $8k+1$		76
§ 6. Twierdzenie Lejeune-Dirichleta		79
§ 7. Warunki rozkładalności na sumę dwu kwadratów		80
§ 8. Wyznaczanie rozkładów na sumę dwu kwadratów i średnia ich ilość		85
§ 9. Rozkłady liczb naturalnych na sumę trzech kwadratów		90
§ 10. Rozkłady liczb naturalnych na sumę czterech kwadratów. Twierdzenie Lagrange'a		95
§ 11. Twierdzenie Waringa		102
ROZDZIAŁ V. LICZBA I SUMA DZIELNIKÓW, LICZBY DOSKONAŁE, WZORY SUMACYJNE.		
§ 1. Liczba dzielników liczby naturalnej		112
§ 2. Suma dzielników liczby naturalnej		115
§ 3. Liczby doskonałe. Metoda Euklidesa. Wyznaczanie pierwszych dziesięciu liczb doskonałych parzystych		116
§ 4. Liczby doskonałe drugiego rodzaju		123
§ 5. Liczby zaprzyjaźnione		125
§ 6. Wzory sumacyjne dla liczby dzielników liczby naturalnej		126
§ 7. Wzory sumacyjne dla sumy dzielników liczby naturalnej		132
§ 8. Tożsamość Hermite'a dla funkcji $E(x)$		134
ROZDZIAŁ VI. FUNKCJA MÖBIUSA, FUNKCJA GAUSSA, ZALEŻNOŚĆ $F(n) = \sum_{d n} f(d)$ I JEJ ODWRÓCENIE.		
§ 1. Funkcja Möbiusa i jej własności		136
§ 2. Liczba niewiększych od x liczb pierwszych względem liczb pierwszych p_1, p_2, \dots, p_m		138
§ 3. Funkcja Gaussa $g(n)$		140
§ 4. Własności funkcji Gaussa i jej zastosowania		143
§ 5. Wzory sumacyjne dla funkcji Gaussa i Möbiusa		148
§ 6. Odwrócenie wzoru $F(n) = \sum_{d n} f(d)$		150
§ 7. Funkcja Liouville'a		154

ROZDZIAŁ VII. GĘSTOŚĆ ROZMIESZCZENIA LICZB PIERWSZYCH W CIĄGU LICZB NATURALNYCH.		Str.
§ 1. Poczyn $\Pi\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ rozciągnięty na kolejne liczby pierwsze		156
§ 2. Dowód wzoru $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$		160
§ 3. Ograniczoność stosunku $\pi(x) : (x/\log x)$		161
ROZDZIAŁ VIII. TWIERDZENIE EULERA, TWIERDZENIE LAGRANGE'A, PIERWIĄTKI PIERWOTNE I WSKAŹNIKI.		
§ 1. Dowód twierdzenia Eulera		168
§ 2. Wnioski z twierdzenia Eulera		172
§ 3. Warunek konieczny istnienia pierwiastków pierwotnych liczby m		175
§ 4. Twierdzenie Lagrange'a i wnioski z niego		177
§ 5. Dowód istnienia pierwiastków pierwotnych liczb pierwszych		183
§ 6. Pierwiastki pierwotne dla modułów p^α i $2p^\alpha$		187
§ 7. Liczba pierwiastków pierwotnych według jakiegokolwiek modułu		191
§ 8. Moduł 2^α dla $\alpha \geq 5$. Własność liczby 5		193
§ 9. Własności wskaźników		196
§ 10. Zastosowanie wskaźników. Własności charakterystyczne symbolu Legendre'a		198
§ 11. Zastosowania wskaźników do rozwiązywania kongruencji		201
ROZDZIAŁ IX. ROZWIŃCIEŁA SYSTEMATYCZNE PRZY DOWOLNEJ ZASADZIE NUMERACJI.		
§ 1. Rozwińcienia liczb całkowitych przy danej zasadzie		205
§ 2. Ułamki nieskończone przy zasadzie g . Wzór na n -tą cyfrę		210
§ 3. Algorytm dla wyznaczania rozwińcienia normalnego		213
§ 4. Warunek konieczny i wystarczający rozwijalności na ułamek skończony		214
§ 5. Rozwińcienia liczb wymiernych; ich okresowość		216
§ 6. Ciągi okresowe. Okres zasadniczy		217
§ 7. Liczba cyfr nierównych i liczba cyfr okresu zasadniczego		219
§ 8. Wyznaczanie liczby rodnej		224
§ 9. Ułamki przy zmiennej zasadzie numeracji		226
ROZDZIAŁ X. RÓWNANIE PYTAGORASA I JEGO UOGÓLNIENIA.		
§ 1. Równanie $x^2 + y^2 = z^2$ w liczbach całkowitych		229
§ 2. Rozwiązania naturalne o dwu liczbach kolejnych		235
§ 3. Uogólnienia równania Pytagorasa		237
§ 4. Równanie Fermata		242

ROZDZIAŁ XI. RÓWNANIE PELLA.	Str.
§ 1. Dowód istnienia rozwiązań równania Pella	251
§ 2. Wyznaczanie wszystkich rozwiązań równania Pella	254
§ 3. Zastosowanie równania Pella	259
ROZDZIAŁ XII. UŁAMKI ŁAŃCUCHOWE.	
§ 1. Ułamki łańcuchowe i ich redukty	262
§ 2. Liczby Δ_k . Wzór $\Delta_k = (-1)^k$	266
§ 3. Ułamki łańcuchowe arytmetyczne. Rozwijanie liczb wymiernych na ułamki łańcuchowe	267
§ 4. Zastosowanie ułamków łańcuchowych do rozwiązywania równań nieoznaczonych 1-go stopnia	269
§ 5. Rozwijanie liczb niewymiernych na ułamki łańcuchowe nieskończone	270
§ 6. Prawo, najlepszego przybliżenia	272
§ 7. Jednoznaczność rozwinięcia liczby niewymiernej na ułamek łańcuchowy arytmetyczny	274
§ 8. Rozwinięcie liczby \sqrt{D} na ułamek łańcuchowy	278
§ 9. Twierdzenie Lagrange'a o ułamkach łańcuchowych	290
§ 10. Rozwinięcie liczb e i π na ułamki łańcuchowe	297
§ 11. Zastosowanie rozwinięcia \sqrt{D} na ułamek łańcuchowy do równania Pella	298
ROZDZIAŁ XIII. TEORIA KONGRUENCJI PIERWSZEGO I DRUGIEGO STOPNIA.	
§ 1. Kongruencje pierwszego stopnia o dowolnym module	305
§ 2. Rozwiązywanie układu kongruencji pierwszego stopnia o jednej niewiadomej	308
§ 3. Kongruencje drugiego stopnia; sprowadzanie ich do kongruencji pierwszego stopnia i kongruencji dwumiennych	310
§ 4. Liczba pierwiastków kongruencji, której moduł jest iloczynem dwu czynników względnie pierwszych	312
§ 5. Rozwiązywanie kongruencji dwumiennych drugiego stopnia	314
ROZDZIAŁ XIV. TEORIA SYMBOLU LEGENDRE'A I SYMBOLU JACOBIEGO.	
§ 1. Lemat Gaussa	323
§ 2. Wartość symbolu $\left(\frac{2}{p}\right)$	325
§ 3. Prawo wzajemności liczb pierwszych	326
§ 4. Obliczanie wartości symbolu Legendre'a na podstawie jego zasadniczych własności	331
§ 5. Symbol Jacobiego i jego zasadnicze własności	335
§ 6. Prawidło Eisensteina	341
§ 7. Dowód istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych w postęпах arytmetycznych $5k-1$, $8k-1$ i $12k-1$	346

ROZDZIAŁ XV. ZARYS TEORII FORM KWADRATOWYCH.	Str.
§ 1. Formy kwadratowe dwójkowe jednorodne i ich wyróżnik. Zagadnienie podstawowe teorii form kwadratowych	351
§ 2. Równoważność właściwa i niewłaściwa dwu form kwadratowych. Klasy form kwadratowych	353
§ 3. Grupy przedstawień liczby m przez formę (a, b, c)	357
§ 4. Wyznaczanie wszystkich przedstawień należących do danej grupy	359
§ 5. Kryterium równoważności dwu form kwadratowych. Formy zredukowane dla $D > 0$	363
§ 6. Formy dodatnie i formy zredukowane dla $D < 0$. Przypadek $D = -4$	367
§ 7. Badanie równoważności właściwej dwu form zredukowanych o wyróżniku $D < 0$	370
§ 8. Badanie równoważności właściwej dwu niewymierności 2-go stopnia	372
ROZDZIAŁ XVI. TEORIA LICZB CAŁKOWITYCH ZESPOLONYCH.	
§ 1. Liczby całkowite zespolone i ich norma. Liczby stowarzyszone	379
§ 2. Algorytm kolejnych dzieleni i największy wspólny dzielnik liczb całkowitych zespolonych	385
§ 3. Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb całkowitych zespolonych	388
§ 4. Liczby zespolone pierwsze	389
§ 5. Rozkład liczb całkowitych zespolonych na czynniki pierwsze	394
§ 6. Ilość liczb całkowitych zespolonych o danej normie	396
§ 7. Twierdzenie Jacobiego o rozkładach na sumę czterech kwadratów	401
ROZDZIAŁ XVII. WSTĘP DO TEORII CIAŁ LICZBOWYCH.	
§ 1. Ciało liczbowe. Najprostsze ciało liczbowe, zawierające liczbę μ	416
§ 2. Ciało liczbowe drugiego stopnia; sprowadzenie go do postaci $K(\sqrt{D})$	417
§ 3. Forma ogólna liczb ciała $K(\sqrt{D})$. Liczby sprzężone. Norma	419
§ 4. Liczby całkowite ciała $K(\sqrt{D})$	421
§ 5. Twierdzenie o sumie, różnicy i iloczynie liczb całkowitych	430
§ 6. Podzielność liczb całkowitych. Dzielniki jedności	431
§ 7. Wyznaczanie wszystkich dzielników jedności	431
§ 8. Liczby nierozkładalne. Przykład niejednoznaczności rozkładu na czynniki nierozkładalne	435
§ 9. Dowód wielkiego twierdzenia Fermata dla $n=5$	438
ROZDZIAŁ XVIII. WSTĘP DO TEORII IDEALÓW.	
§ 1. Ideały w ciele $K(\sqrt{D})$. Forma kanoniczna idealów	443
§ 2. Ideały główne. Ideały jako uogólnienie liczb całkowitych	446
§ 3. Iloczyn idealów	449
§ 4. Dowód, że norma idealu jest ideałem głównym	450
§ 5. Dzielenie idealów. Ideały względnie pierwsze	454
§ 6. Ideały pierwsze	458
§ 7. Rozkład idealu na czynniki pierwsze	459
§ 8. Ideały pierwsze 1-go i 2-go stopnia. Rozkład na czynniki pierwsze idealów głównych, utworzonych przez liczby pierwsze	461

ROZDZIAŁ XIX. WIELKIE TWIERDZENIE FERMATA DLA WYKŁADNI-

	Str.
KÓW 5 i 7.	
§ 1. Ciała liczbowe, w których każdy ideał jest główny.	463
§ 2. Twierdzenie Fermata dla potęgi $n=5$	464
§ 3. Twierdzenie Fermata dla potęgi $n=7$	478
ĆWICZENIA DO RÓŻNYCH ROZDZIAŁÓW	489
PRZYPISY	525
SKOROWIDZ NAZW	532
SKOROWIDZ ZNAKÓW	535
SKOROWIDZ NAZWISK	536

