

ROZDZIAŁ XII

UŁAMKI ŁAŃCUCHOWE

§ 1. Ułamki łańcuchowe i ich redukty. Zajmiemy się w tym rozdziale uławkami postaci

$$(1) \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

gdzie a_0 jest dowolną liczbą rzeczywistą, liczby zaś a_i dla $i=1, 2, \dots, n$ są dodatnie.

Ułamki takie nazywamy *ciągłymi* albo *łańcuchowymi*.

Wyrażenie (1) piszemy dla zaoszczędzenia miejsca w postaci

$$(2) \quad a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Liczbę

$$R_k = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k},$$

gdzie k jest jedną z liczb $1, 2, \dots, n$, nazywamy *redukt* k -tego rzędu ułamka (1); za redukt rzędu 0 uważamy liczbę $R_0 = a_0$.

Ze wzoru (2) widać, że redukt R_k jest funkcją $k+1$ zmiennych $a_0, a_1, \dots, a_k$ oraz że dla $k < n$ redukt R_k przechodzi w redukt R_{k+1} , jeżeli zastąpić w nim a_k przez $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$.

Niech:

$$(3) \quad \begin{aligned} P_0 &= a_0, & Q_0 &= 1, \\ P_1 &= a_0 a_1 + 1, & Q_1 &= a_1, \\ P_k^* &= P_{k-1} a_k + P_{k-2}, & Q_k &= Q_{k-1} a_k + Q_{k-2} \end{aligned} \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, n.$$

Wynika stąd łatwo przez indukcję, że P_k jest funkcją zmiennych $a_0, a_1, \dots, a_k$, Q_k zaś — funkcją zmiennych $a_1, a_2, \dots, a_k$; mia-
nowicie P_k i Q_k są wielomianami całkowitymi tych zmiennych.

Przy tym jest stale $Q_k > 0$ dla $a_1, a_2, \dots, a_k$ dodatnich.

Sprawdzamy też bezpośrednio, że:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1} = R_0, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = R_1.$$

Okazemy, że przy wszelkich dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest

$$(4) \quad \frac{P_k}{Q_k} = R_k \quad \text{dla } k=0, 1, 2, \dots, n.$$

Zachodzi to dla $k=1$. Załóżmy, że jest to prawdziwe dla pewnego $k=m$, gdzie $1 \leq m < n$. Zatem przy wszelkich $a_1, a_2, \dots, a_m$ dodatnich jest

$$R_m = P_m / Q_m.$$

W myśl (5) przy wszelkich dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_m$ zachodzi też równość

$$(5) \quad R_m = \frac{P_{m-1} a_m + P_{m-2}}{Q_{m-1} a_m + Q_{m-2}}.$$

Równość ta pozostanie więc prawdziwa, jeżeli po obu stronach zastąpić a_m przez $a_m + \frac{1}{a_{m+1}}$ (skoro $a_{m+1} > 0$). Lecz przy zastąpieniu a_m przez $a_m + \frac{1}{a_{m+1}}$ R_m przechodzi w R_{m+1} , po prawej zaś stronie $P_{m-1}, P_{m-2}, Q_{m-1}$ i Q_{m-2} nie zależą od a_m . W ten sposób wzór (5) daje więc

$$R_{m+1} = \frac{P_{m-1} \left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}} \right) + P_{m-2}}{Q_{m-1} \left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}} \right) + Q_{m-2}} = \frac{(P_{m-1} a_m + P_{m-2}) a_{m+1} + P_{m-1}}{(Q_{m-1} a_m + Q_{m-2}) a_{m+1} + Q_{m-1}},$$

czyli w myśl (5)

$$R_{m+1} = \frac{P_m a_{m+1} + P_{m-1}}{Q_m a_{m+1} + Q_{m-1}} = \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}},$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (4) dla $k=m+1$. Przez indukcję wynika stąd prawdziwość wzoru (4) dla $k=0, 1, \dots, n$.

Określmy ogólnie przez indukcję ciąg funkcji $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, jak następuje. Niech

$$(6) \quad \begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1, & f_2(x_1, x_2) &= x_1 x_2 + 1, \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) &= x_k f_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) + f_{k-2}(x_1, x_2, \dots, x_{k-2}) \end{aligned}$$

dla $k=3, 4, \dots$. Okażemy, że

$$(7) \quad P_k = f_{k+1}(a_0, a_1, \dots, a_k) \quad \text{dla } k=0, 1, 2, \dots, n,$$

$$(8) \quad Q_k = f_k(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

Istotnie, jak łatwo widzieć,

$$P_0 = a_0 = f_1(a_0), \quad P_1 = a_0 a_1 + 1 = f_2(a_0, a_1).$$

Wzór (7) jest więc prawdziwy dla $k=0$ i $k=1$. Wobec (3) i (6) wnosimy stąd, że jeżeli wzór (7) jest prawdziwy dla pewnego naturalnego $k < n$ i dla $k-1$, to jest też prawdziwy dla $k+1$. Jest dalej:

$$Q_1 = a_1 = f_1(a_1), \quad Q_2 = a_1 a_2 + 1 = f_2(a_1, a_2).$$

Wzór (8) jest więc prawdziwy dla $k=1$ i $k=2$, skąd wnosimy na mocy (3) i (6), że jeżeli jest on prawdziwy dla pewnego naturalnego $k < n$ i dla $k-1$, to jest też prawdziwy dla $k+1$.

Wzory (7) i (8) zostały więc udowodnione przez indukcję.

Udowodnimy teraz przez indukcję, że przy wszelkich wartościach $x_1, x_2, \dots, x_k$ jest:

$$(9) \quad f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = f_k(x_k, x_{k-1}, \dots, x_1) \quad \text{dla } k=1, 2, \dots$$

$$(10) \quad f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 f_{k-1}(x_2, x_3, \dots, x_k) + f_{k-2}(x_3, x_4, \dots, x_k) \quad \text{dla } k=3, 4, \dots$$

Istotnie, na mocy definicji funkcji f_1, f_2 i f_3 wzór (9) jest prawdziwy dla $k=1, 2$ i 3 , a wzór (10) dla $k=3$ i 4 .

Żałóżmy, że wzory (9) i (10) są prawdziwe dla $k < n$, gdzie $n > 4$. Na mocy (6) wzory (9) i (10) dają dla $k=n-1$ i $k=n-2$

$$(11) \quad \begin{aligned} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_n [x_1 f_{n-2}(x_2, \dots, x_{n-1}) + f_{n-3}(x_3, \dots, x_{n-1})] + \\ &+ x_1 f_{n-3}(x_2, \dots, x_{n-2}) + f_{n-4}(x_3, \dots, x_{n-2}). \end{aligned}$$

Z drugiej strony, zastępując $x_1, \dots, x_n$ przez $x_n, \dots, x_1$ we wzorze (6) dla $k=n$, otrzymujemy

$$(12) \quad f_n(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) = x_1 f_{n-1}(x_n, \dots, x_2) + f_{n-2}(x_n, \dots, x_2),$$

a na mocy (9) dla $k=n-1$ i $k=n-2$

$$f_{n-1}(x_n, \dots, x_2) = f_{n-1}(x_2, \dots, x_n),$$

$$f_{n-2}(x_n, \dots, x_2) = f_{n-2}(x_2, \dots, x_n).$$

Lecz wobec (6) jest

$$f_{n-1}(x_2, \dots, x_n) = x_n f_{n-2}(x_2, \dots, x_{n-1}) + f_{n-3}(x_2, \dots, x_{n-2}),$$

$$f_{n-2}(x_2, \dots, x_n) = x_n f_{n-3}(x_2, \dots, x_{n-1}) + f_{n-4}(x_2, \dots, x_{n-2}).$$

Wzór (12) daje więc

$$\begin{aligned} f_n(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) &= x_1 [x_n f_{n-2}(x_2, \dots, x_{n-1}) + f_{n-3}(x_2, \dots, x_{n-2})] + \\ &+ x_n f_{n-3}(x_2, \dots, x_{n-1}) + f_{n-4}(x_2, \dots, x_{n-2}), \end{aligned}$$

skąd na mocy (11)

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_n(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$$

czyli wzór (9) dla $k=n$. Wzór (12) daje zatem na mocy (9) dla $k=n-1$ i $k=n-2$:

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 f_{n-1}(x_2, \dots, x_n) + f_{n-2}(x_3, \dots, x_n),$$

czyli wzór (10) dla $k=n$.

Tym samym wzory (9) i (10) zostały udowodnione przez indukcję.

Ze wzorów (8) i (9) wynika natychmiast, że

Ułamki łańcuchowe

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \quad \text{ i } \quad \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_1}$$

mają zarosze ten sam mianownik Q_n .

Ze wzorów zaś (7) i (10) wynika z łatwością, że licznikiem pierwszego z tych ułamków łańcuchowych jest $f_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n)$, drugiego zaś, na mocy (9), $f_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

W związku z (12) zauważmy, że zachodzi też wzór

$$(13) \quad \begin{aligned} f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_i) f_{k-i}(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k) + \\ &+ f_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) f_{k-i-1}(x_{i+2}, x_{i+3}, \dots, x_k), \end{aligned}$$

który Tannery wyprowadza w następujący sposób¹⁾:

¹⁾ J. Tannery, *Introduction à l'étude de la Théorie des Nombres et de l'Algèbre Supérieure* (par E. Borel et J. Drach, d'après les conférences de J. Tannery), Paryż 1895, str. 111-112.

Dla danych z_0 i z_1 oraz ciągu liczb $x_1, x_2, \dots, x_k$ wyznaczmy liczby $z_2, z_3, \dots, z_{k+1}$ kolejno ze wzorów

$$z_2 = x_1 z_1 + z_0, \quad z_3 = x_2 z_2 + z_1, \quad \dots, \quad z_{k+1} = x_k z_k + z_{k-1}.$$

Jak łatwo widzieć, jest na mocy (6)

$$(14) \quad z_{k+1} = z_1 f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) + z_0 f_{k-1}(x_2, x_3, \dots, x_k).$$

Obliczając z_{n+1} z liczb z_i i z_{i+1} w ten sam sposób, jak z liczb z_0 i z_1 , otrzymujemy

$$(15) \quad z_{k+1} = z_{i+1} f_{k-i}(x_{i+1}, \dots, x_k) + z_i f_{k-i-1}(x_{i+2}, \dots, x_k).$$

Lecz

$$z_i = z_1 f_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}) + z_0 f_{i-2}(x_2, \dots, x_{i-1}),$$

$$z_{i+1} = z_1 f_i(x_1, \dots, x_i) + z_0 f_{i-1}(x_2, \dots, x_i).$$

Wstawiając te wartości do wzoru (15) i porównując współczynnik przy z_1 z tym, który jest we wzorze (14), otrzymujemy wzór (15).

§ 2. Liczby Δ_k . Wzór $\Delta_k = (-1)^k$. Zachowując poprzednie znakowanie, przyjmijmy

$$\Delta_k = P_{k-1} Q_k - Q_{k-1} P_k \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, n.$$

Wobec (3) mamy dla $k > 1$

$$\begin{aligned} \Delta_k &= P_{k-1}(Q_{k-1} a_k + Q_{k-2}) - Q_{k-1}(P_{k-1} a_k + P_{k-2}) \\ &= P_{k-1} Q_{k-2} - Q_{k-1} P_{k-2} = -\Delta_{k-1}. \end{aligned}$$

Obliczamy bezpośrednio

$$\Delta_1 = P_0 Q_1 - Q_0 P_1 = a_0 a_1 - 1 \cdot (a_0 a_1 + 1) = -1.$$

Okażemy, że

$$(16) \quad \Delta_k = (-1)^k \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, n.$$

Wzór ten jest prawdziwy dla $k=1$; założmy, że jest on prawdziwy dla $k=m < n$. Zatem $\Delta_m = (-1)^m$, a że, jak dowiedliśmy, $\Delta_k = -\Delta_{k-1}$ dla $k=1, 2, \dots, n$, więc

$$\Delta_{m+1} = -\Delta_m = -(-1)^m = (-1)^{m+1},$$

czyli $\Delta_{m+1} = (-1)^{m+1}$, co dowodzi prawdziwości wzoru dla $k=m+1$. Stąd przez indukcję wynika prawdziwość wzoru

$$(17) \quad \Delta_k = P_{k-1} Q_k - Q_{k-1} P_k = (-1)^k \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, n.$$

§ 3. Ułamki łańcuchowe arytmetyczne. Rozwijanie liczb wymiernych na ułamki łańcuchowe. Ułamki (1), w których liczba a_0 jest całkowita, a liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ — naturalne, nazywamy uławkami łańcuchowymi arytmetycznymi (skończonymi).

Jeżeli (1) jest ułamkiem łańcuchowym arytmetycznym, to ułamki

$$P_k/Q_k \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, n$$

(gdzie liczby P_k i Q_k są wyznaczone z wzorów (3)) są uławkami nieprzywiedlnymi o mianownikach naturalnych.

Istotnie, na mocy wzorów (3) liczby P_k i Q_k są całkowite, przy tym $Q_k > 0$, a ze wzoru (17) wynika, że liczby P_k i Q_k są względnie pierwsze.

Liczbę (1), czyli n -ty redukt ułamka (1), nazywamy wartością tego ułamka łańcuchowego.

Jasne jest, że wartość każdego ułamka łańcuchowego arytmetycznego skończonego jest liczbą wymierną.

Twierdzenia odwrotnego, tj. że każda liczba wymierna daje się rozwinąć na ułamek łańcuchowy (skończony), dowiedliśmy w Rozdziale II (§ 4, str. 34); metodę otrzymania rozwinięcia daje algorytm Euklidesa.

Zbadamy teraz, ile rozwinięć na ułamek łańcuchowy arytmetyczny ma liczba wymierna. Łatwo widzieć, że każda liczba wymierna ma co najmniej dwa różne takie rozwinięcia. Niech bowiem

$$(18) \quad w = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

będzie rozwinięciem liczby wymiernej w na ułamek ciągły, otrzymanym za pomocą algorytmu Euklidesa. Z algorytmu tego wynika natychmiast (jak to czytelnik może bliżej zbadać), że $a_n > 1$; liczba $a_n - 1$ jest zatem jeszcze naturalna i

$$a_n = a_n - 1 + \frac{1}{1}.$$

Możemy więc napisać dla liczby w jeszcze drugie rozwinięcie:

$$w = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n - 1} + \frac{1}{1},$$

mające o jedno ogniwo więcej niż rozwinięcie (18).

Np.
$$\frac{4}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}.$$

Rozwinięcie, w którym ostatni mianownik (czyli a_n) jest większy od jedności, nazywamy *normalnym*.

Udowodnimy, że każda liczba wymierna ma tylko jedno rozwinięcie normalne na ułamek łańcuchowy arytmetyczny.

Niech (18) będzie rozwinięciem normalnym liczby wymiernej r i niech

$$(19) \quad x_k = a_k + \frac{1}{a_{k+1}} + \dots + \frac{1}{a_n} \quad \text{dla } k=0, 1, \dots, n.$$

Oczywiście $x_0 = r$, przez x_n zaś należy rozumieć a_n .

W myśl (19) jest oczywiście $a_k < x_k$ dla $k < n$; ponieważ zaś liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są naturalne i $x_n = a_n > 1$, więc

$$x_k > 1 \quad \text{dla } k=0, 1, \dots, n.$$

Ze wzoru (19) widać dalej, że

$$(20) \quad x_k = a_k + \frac{1}{x_{k+1}} \quad \text{dla } k=0, 1, \dots, n-1,$$

skąd $a_k < x_k < a_k + 1$ wobec $x_{k+1} > 1$, a zatem

$$(21) \quad a_k = E(x_k) \quad \text{dla } k=0, 1, \dots, n-1,$$

co jest też prawdziwe dla $k=n$, gdyż $x_n = a_n$. Wobec tego wzór (20) daje

$$x_k = E(x_k) + \frac{1}{x_{k+1}} \quad \text{dla } k=0, 1, \dots, n-1,$$

skąd

$$(22) \quad x_{k+1} = \frac{1}{x_k - E(x_k)} \quad \text{dla } k=0, 1, \dots, n-1.$$

Na mocy (22) wynika, że liczby x_k dla $k=1, 2, \dots, n$ są wyznaczone jednoznacznie przez liczbę $x_0 = r$; na mocy (21) dotyczy to więc także liczb a_k dla $k=0, 1, \dots, n$. Rozwinięcie normalne jest zatem dla każdej liczby wymiernej tylko jedno, c. b. d. d.

Dla wyznaczenia go możemy zamiast algorytmu Euklidesa posilkować się wzorami (21) i (22); wartość całkowita, otrzymana dla x_i , jest dowodem, że ogniwo, zawierające mianownik a_i , jest ostatnie.

§ 4. Zastosowanie ułamków łańcuchowych do rozwiązywania równań nieoznaczonych 1-go stopnia. Wiemy z Rozdziału II (str. 36), że rozwiązanie równania nieoznaczonego liniowego o dwu niewiadomych w najogólniejszym przypadku sprowadza się do wyznaczenia jednego rozwiązania równania typu

$$(23) \quad ax + by = 1.$$

Żałóżmy, że a i b są liczbami całkowitymi i zajmijmy się rozwiązaniem równania (23) w liczbach całkowitych. Rozwińmy liczbę wymierną a/b na ułamek łańcuchowy. Ułamek a/b musi być nieprzywiedlny, skoro równanie (23) ma być rozwiązalne w liczbach całkowitych. Niech P_{n-1}/Q_{n-1} i P_n/Q_n będą przedostatnim i ostatnim reduktem tego rozwinięcia.

Zatem

$$P_n/Q_n = a/b,$$

skąd wobec nieprzywiedlności obu ułamków:

$$(24) \quad P_n = \pm a, \quad Q_n = \pm b,$$

gdzie znak jest górny lub dolny zależny od tego, czy b jest dodatnie, czy ujemne. Wobec (17) jest

$$P_{n-1}Q_n - Q_{n-1}P_n = (-1)^n,$$

skąd na mocy (24)

$$(25) \quad \pm (-1)^n P_{n-1}b \mp (-1)^n Q_{n-1}a = 1.$$

Wzór (25) dowodzi, że

$$x = \mp (-1)^n Q_{n-1}, \quad y = \pm (-1)^n P_{n-1},$$

(ze znakiem górnym lub dolnym zależnie od tego, czy b jest dodatnie, czy ujemne) jest rozwiązaniem równania (23) w liczbach całkowitych.

PRZYKŁAD. Niech będzie dane równanie nieoznaczone

$$96x + 65y = 1.$$

Za pomocą algorytmu Euklidesa znajdujemy kolejno:

$$96 = 1 \cdot 65 + 31,$$

$$65 = 2 \cdot 31 + 3,$$

$$31 = 10 \cdot 3 + 1,$$

$$3 = 3 \cdot 1,$$

skąd $\frac{96}{65} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}$ i przeto $n=3$.

Ze wzorów (3) znajdujemy z łatwością:

$$P_1=3, \quad P_2=31, \quad Q_1=2, \quad Q_2=21$$

i przeto

$$x = -(-1)^3 Q_2 = 21, \quad y = (-1)^3 P_2 = -31.$$

Jakoż sprawdzamy:

$$96 \cdot 21 - 65 \cdot 31 = 1.$$

§ 5. Rozwijanie liczb niewymiernych na ułamki łańcuchowe nieskończone. W końcu § 3 wyprowadziliśmy następujący algorytm dla rozwijania liczb wymiernych na ułamki łańcuchowe, równoważny algorytmowi Euklidesa. Wyznaczamy kolejno:

$x_0 = m$, $a_0 = E(x_0)$. Jeżeli $a_0 \neq x_0$, to wyznaczamy dalej:

$x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}$, $a_1 = E(x_1)$. Jeżeli $a_1 \neq x_1$, to wyznaczamy dalej:

$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$, $a_2 = E(x_2)$ itd., aż dojdziemy do $a_n = x_n$, co

musi w każdym razie nastąpić.

Powyższy algorytm wyznacza ciąg liczb $a_0, a_1, a_2, \dots$, który tylko wtedy jest skończony, gdy liczba x_0 jest wymierna (p. str. 267). Ciągi $\{a_n\}$ i $\{x_n\}$ są więc przy niewymiernym x_0 nieskończone. Wobec $a_k = E(x_k)$ i $0 < x_k - E(x_k) < 1$ widać, że stale

$$x_{k+1} > 1 \quad \text{dla } k=0, 1, 2, \dots$$

Z równości

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}, \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}},$$

znajdujemy w jednej chwili:

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n},$$

skąd

$$(26) \quad x_0 = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{x_n}$$

przy wszelkim naturalnym n . Niech

$$(27) \quad R_n = a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Przez porównanie wzorów (26) i (27) dochodzimy do wniosku, że R_n przechodzi w x_0 , jeżeli a_n zastąpić przez x_n .

Określając liczby P_k i Q_k wzorami (3), będziemy mieli dla a_0 dowolnych i $a_1, a_2, \dots, a_n$ dodatnich

$$R_n = \frac{P_{n-1}a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}}.$$

Ponieważ $P_{n-1}, P_{n-2}, Q_{n-1}, Q_{n-2}$ nie zależą od a_n , więc zastępując po obu stronach a_n przez x_n , otrzymamy

$$(28) \quad x_0 = \frac{P_{n-1}x_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}x_n + Q_{n-2}}.$$

Wzór (28) zachodzi dla wszelkiego n naturalnego; zastępując w nim n przez $n+1$, otrzymamy

$$x_0 = \frac{P_n x_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n x_{n+1} + Q_{n-1}},$$

skąd

$$x_0 - R_n = \frac{P_n x_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n x_{n+1} + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}Q_n - Q_{n-1}P_n}{(Q_n x_{n+1} + Q_{n-1})Q_n}$$

i przeto wobec (7)

$$(29) \quad x_0 - R_n = \frac{(-1)^n}{(Q_n x_{n+1} + Q_{n-1})Q_n}.$$

Wobec nierówności $x_{n+1} > a_{n+1}$ wnosimy stąd, że

$$(30) \quad |x_0 - R_0| < \frac{1}{(Q_n a_{n+1} + Q_{n-1})Q_n} = \frac{1}{Q_{n+1}Q_n}.$$

Okazemy, że $Q_k \geq k$ przy wszelkim naturalnym k . Jest to prawdziwe dla $k=1$, gdyż $Q_1 = a_1$ jest liczbą naturalną. Załóżmy, że $Q_k \geq k$ dla $k=n$, gdzie n jest liczbą naturalną. Zatem $Q_n \geq n$, a że Q_{n-1} i a_{n+1} są liczbami naturalnymi, więc

$$Q_{n+1} = Q_n a_{n+1} + Q_{n-1} \geq Q_n + 1 \geq n+1,$$

co dowodzi, że jest też $Q_k \geq k$ dla $k=n+1$. Stąd wnosimy przez indukcję o prawdziwości tej nierówności dla każdego k naturalnego.

Wynika stąd na mocy (30), że

$$|x_0 - R_n| < \frac{1}{n(n+1)}$$

dla wszelkich n naturalnych, co dowodzi, że ciąg reduktów $\{R_n\}$ zmierza do x_0 , gdy n wzrasta nieograniczenie.

Ponieważ $a_{n+1} = E(x_{n+1}) > x_{n+1} - 1$, skąd $x_{n+1} < a_{n+1} + 1$, więc wzór (29) daje

$$|x_0 - R_n| > \frac{1}{[Q_n(a_{n+1} + 1) + Q_{n-1}]Q_n} = \frac{1}{(Q_{n+1} + Q_n)Q_n},$$

a ponieważ $a_{n+2} \geq 1$, więc otrzymujemy w myśl (30)

$$|x_0 - R_{n+1}| < \frac{1}{(Q_{n+1}a_{n+2} + Q_n)Q_{n+1}} \leq \frac{1}{(Q_{n+1} + Q_n)Q_{n+1}};$$

wobec $Q_{n+1} = Q_n a_{n+1} + Q_{n-1} \geq Q_n$ wynika stąd, że

$$(31) \quad |x_0 - R_{n+1}| < |x_0 - R_n|,$$

co dowodzi, że każdy następny redukt daje lepsze przybliżenie liczby x_0 niż redukt poprzedzający.

Ze wzoru (29) znajdujemy też

$$x_0 - R_n \begin{cases} > 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ < 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \end{cases}$$

co dowodzi, że redukty parzystego rzędu mają wartości mniejsze od x_0 , a redukty nieparzystego rzędu mają wartości większe od x_0 .

W połączeniu z nierównością (31) wnosimy stąd z łatwością, że redukty parzystego rzędu zmierzają do x_0 stale wzrastając, redukty zaś nieparzystego rzędu — stale malejąc.

§ 6. Prawo najlepszego przybliżenia. Udowodnimy obecnie twierdzenie, które świadczy o doniosłości teorii ułamków łańcuchowych dla wyznaczania przybliżonych wartości liczb niewymiernych.

Niech r/s będzie liczbą wymierną o mianowniku naturalnym, stanowiącą lepsze przybliżenie liczby x_0 , niż redukt R_n (gdzie $n \geq 1$); innymi słowy, załóżmy, że

$$(32) \quad \left| x_0 - \frac{r}{s} \right| < |x_0 - R_n|.$$

Ponieważ wyrazy ciągu $\{|x_0 - R_n|\}$ stale maleją, więc wobec (32) mamy też

$$(33) \quad \left| x_0 - \frac{r}{s} \right| < |x_0 - R_{n-1}|.$$

Dla n parzystych jest — jak widzieliśmy:

$$(34) \quad x_0 - R_n > 0, \quad x_0 - R_{n-1} < 0.$$

Jeżeli przy tym $r/s < x_0$, to wzory (32) i (34) dają

$$x_0 - r/s < x_0 - R_n,$$

skąd $R_n < r/s$, a że wobec (34) i nierówności $r/s < x_0$ jest $r/s < x_0 < R_{n-1}$, więc

$$(35) \quad R_n < r/s < R_{n-1}.$$

Jeżeli zaś $r/s > x_0$, to wzory (33) i (34) dają $r/s - x_0 < R_{n-1} - x_0$, skąd $r/s < R_{n-1}$, a że wobec (34) i nierówności $r/s > x_0$ jest $r/s > x_0 > R_n$, więc znowu dostajemy wzór (35).

Dla n nieparzystego jest — jak widzieliśmy:

$$(36) \quad x_0 - R_n < 0, \quad x_0 - R_{n-1} > 0.$$

Jeżeli przy tym $r/s < x_0$, to wzory (35) i (36) dają

$$x_0 - r/s < x_0 - R_{n-1},$$

skąd $R_{n-1} < r/s$, a że wobec (36) jest $x_0 < R_n$, więc wobec $r/s < x_0$ jest $r/s < R_n$. Mamy tu więc

$$(37) \quad R_{n-1} < r/s < R_n.$$

Jeżeli zaś $r/s > x_0$, to wzory (35) i (36) dają $r/s - x_0 < R_n - x_0$, skąd $r/s < R_n$, a że wobec (36) jest $x_0 > R_{n-1}$, więc wobec $r/s > x_0$ jest $r/s > R_{n-1}$ i znowu dostajemy wzór (37).

Tak więc w każdym razie zachodzi albo wzór (35), albo wzór (37), skąd

$$\left| \frac{r}{s} - R_{n-1} \right| < |R_{n-1} - R_n|.$$

Ponieważ zaś

$$R_{n-1} - R_n = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}Q_n - Q_{n-1}P_n}{Q_{n-1}Q_n} = \frac{(-1)^n}{Q_{n-1}Q_n},$$

więc

$$(38) \quad \left| \frac{r}{s} - R_{n-1} \right| < \frac{1}{Q_{n-1}Q_n}.$$

Lecz

$$(39) \quad \left| \frac{r}{s} - R_{n-1} \right| = \left| \frac{r}{s} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| = \left| \frac{rQ_{n-1} - sP_{n-1}}{sQ_{n-1}} \right| \geq \frac{1}{sQ_{n-1}},$$

gdyż $rQ_{n-1} - sP_{n-1}$ jest liczbą całkowitą, a zerem być nie może, bo byłoby wówczas $r/s = P_{n-1}/Q_{n-1} = R_{n-1}$ wbrew (33). Ze wzorów (38) i (39) wynika, że $1/Q_{n-1}Q_n > 1/sQ_{n-1}$. skąd

$$s > Q_n.$$

Udowodniliśmy zatem

Twierdzenie 1. *Jeżeli liczba wymierna r/s o mianowniku naturalnym jest lepszym przybliżeniem liczby x_0 niż redukt R_n (gdzie $n \geq 1$), to mianownik s tej liczby jest większy od mianownika reduktu R_n .*

Twierdzenie to wyraża tzw. *prawo najlepszego przybliżenia*.

§ 7. Jednoznaczność rozwinięcia liczby niewymiernej na ułamek łańcuchowy arytmetyczny. Niech $a_0, a_1, a_2, \dots$ będzie ciągiem nieskończonym, gdzie a_0 jest liczbą całkowitą, a a_k dla $k \geq 1$ są liczbami naturalnymi.

Niech

$$R_0 = a_0, \quad R_n = a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Jeżeli ciąg $\{R_n\}$ zmierza do liczby x przy nieograniczonym wzrastaniu wskaźnika n , to piszemy

$$(40) \quad x = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots$$

i mówimy, że liczba x rozwija się na ułamek łańcuchowy nieskończony (40). Nie przesądzając na razie, czy takie rozwinięcie jest tylko jedno, możemy powiedzieć już teraz, że algorytm z § 5 pozwala każdą liczbę rzeczywistą niewymierną rozwinąć na ułamek łańcuchowy nieskończony.

Załóżmy teraz, że liczba rzeczywista x daje rozwinięcie na ułamek łańcuchowy nieskończony (40), gdzie a_0 jest liczbą całkowitą, a $a_1, a_2, \dots$ są liczbami naturalnymi. Niech dla każdego n naturalnego

$$(41) \quad R_n = a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}, \quad R'_n = a_1 + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Oczywiście

$$(42) \quad R_{n+1} = a_0 + \frac{1}{R'_n},$$

skąd

$$(43) \quad R'_n = \frac{1}{R_{n+1} - a_0} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wobec (41) jest oczywiście dla $n \geq 1$

$$R'_n \leq a_1 + \frac{1}{a_2},$$

a zatem wobec (42)

$$R_{n+1} \geq a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}};$$

ponieważ zaś ciąg $\{R_n\}$ zmierza do x , więc

$$x \geq a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$$

i przeto

$$x > a_0.$$

Z uwagi na to, że ciąg $\{R_{n+1}\}$ zmierza do x , wnosimy stąd, że różnica $R_{n+1} - a_0$ zmierza do granicy $x - a_0$ dodatniej i przeto, wobec (43), że ciąg R'_n zmierza do liczby dodatniej

$$(44) \quad x_1 = \frac{1}{x - a_0}.$$

Wobec (41) otrzymujemy więc rozwinięcie liczby x_1 na ułamek nieskończony:

$$(45) \quad x_1 = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots$$

Dowiedliśmy zatem, że jeżeli liczba rzeczywista x ma rozwinięcie (40), to $x > a_0$ i liczba x_1 wyznaczona ze wzoru (44) ma rozwinięcie (45).

Dla liczby x_1 znaleźlibyśmy, wychodząc z (45), zupełnie tak samo jak dla liczby x_0 , wychodząc z (40), nierówność $x_1 > a_1$, a zatem $x_1 > 1$, i przeto na mocy wzoru (44) nierówność $\frac{1}{x - a_0} > 1$, skąd $x < a_0 + 1$.

A więc $a_0 < x < a_0 + 1$, skąd $a_0 = E(x)$.

Zupełnie tak samo, opierając się na (45), znaleźlibyśmy

$$(46) \quad a_1 = E(x_1)$$

i dowiedlibyśmy, że $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$ ma rozwinięcie na ułamek nieskończony

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots,$$

gdzie znowu $a_2 = E(x_2)$.

Podobnie dla $x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2}$ otrzymalibyśmy $x_3 = E(x_3)$ itd.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli zachodzi wzór (40), to

$$a_0 = E(x) < x;$$

dalej, jeżeli przyjmiemy $x_1 = \frac{1}{x - a_0}$, to $a_1 = E(x_1) < x_1$, podobnie, jeżeli przyjmiemy $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$, to $a_2 = E(x_2) < x_2$ itd.; ogólnie, przyjmując

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}},$$

będziemy mieli

$$a_n = E(x_n).$$

Wynika stąd, że dla rozwinięcia (1) liczby a_n mogą być wyznaczone podług algorytmu podanego w § 5. Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 2. *Każda liczba niewymierna ma jedno i tylko jedno rozwinięcie na ułamek łańcuchowy nieskończony, mianowicie to, które otrzymujemy za pomocą algorytmu z § 5.*

Z drugiej strony, każda liczba rzeczywista x , dla której zachodzi wzór (40), musi być niewymierna, gdyż dla liczby wymiernej ten algorytm doprowadza — jak wiemy (p. str. 267) — do rozwinięcia skończonego.

Zapytajmy obecnie, jaki jest warunek konieczny i wystarczający na to, by w rozwinięciu liczby rzeczywistej niecałkowitej x na ułamek łańcuchowy arytmetyczny (skończony lub nieskończony) pierwszy mianownik a_1 był z góry daną liczbą naturalną m .

Ponieważ na mocy (44) i (46) jest

$$a_1 = E\left(\frac{1}{x - a_0}\right),$$

więc na to, by $a_1 = m$, potrzeba i wystarcza, żeby $E\left(\frac{1}{x - a_0}\right) = m$ czyli żeby

$$m \leq \frac{1}{x - a_0} < m + 1,$$

co jest równoważne nierównościom

$$a_0 + \frac{1}{m+1} < x \leq a_0 + \frac{1}{m}.$$

W szczególności więc na to, żeby liczba x , gdy $0 < x < 1$, miała rozwinięcie na ułamek łańcuchowy, w którym pierwszy mianownik jest równy m , potrzeba i wystarcza, żeby było

$$\frac{1}{m+1} < x \leq \frac{1}{m}.$$

Liczba x musi więc leżeć w pewnym przedziale o długości

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m(m+1)}.$$

Wnosimy stąd, że prawdopodobieństwo, że pierwszym mianownikiem rozwinięcia liczby rzeczywistej x na ułamek łańcuchowy jest liczba m , wynosi $\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m(m+1)}$. Dla $m=1$ prawdopodobieństwo to jest więc $\frac{1}{2}$, dla $m=2$ jest ono równe $\frac{1}{6}$, dla $m=3$ tylko $\frac{1}{12}$ itd., a zatem maleje ono przy wzrastającym m . Łatwo obliczyć, że prawdopodobieństwo, iż w rozwinięciu liczby rzeczywistej x na ułamek łańcuchowy arytmetyczny pierwszy mianownik jest większy od 10, wynosi $\frac{1}{11}$; tym się tłumaczy, że na ogół przy rozwijaniu liczb rzeczywistych na ułamki łańcuchowe pierwszy mianownik jest małą liczbą.

Trudniej jest obliczyć prawdopodobieństwo, że drugi mianownik rozwinięcia liczby rzeczywistej na ułamek łańcuchowy arytmetyczny jest z góry daną liczbą naturalną m (prawdopodobieństwo, że w rozwinięciu liczby rzeczywistej na ułamek dziesiętny k -tą cyfrą po przecinku jest m , wynosi oczywiście $\frac{1}{10}$ dla wszelkich naturalnych k i dla każdej z cyfr).

Można dowieść za pomocą teorii miary, że prawdopodobieństwo, by wśród mianowników rozwinięcia liczby niewymiernej na ułamek łańcuchowy wystąpiło tylko skończenie wiele jedynek (lub żadna), jest nieskończenie małe¹⁾. Takie jest też prawdopodobieństwo, że wśród mianowników rozwinięcia wystąpi tylko skończenie wiele różnych liczb.

Badano także rozwinięcia liczb niewymiernych na ułamki łańcuchowe tzw. *półnormalne*, w których zamiast wzoru

$$x = E(x) + \frac{1}{x_1}$$

¹⁾ F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Lipsk 1914, str. 426.

wychodzi się ze wzoru $x = E(x) + 1 - \frac{1}{x_1}$ albo ze wzoru

$$x = G(x) \pm \frac{1}{x_1},$$

gdzie $G(x)$ oznacza najbliższą do x liczbę całkowitą — a więc dla x niewymiernego $G(x) = E(x + \frac{1}{2})$ — przy czym znak przed $1/x_1$ należy wziąć taki, by $x_1 > 0$.

Jako ćwiczenie czytelnik zechce rozwinąć w ten sposób liczby:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{5}, \quad \sqrt[5]{5}, \quad \sqrt[6]{6}, \quad \sqrt[7]{7}, \quad \sqrt[8]{8}, \quad \sqrt[10]{10}$$

i przekonać się, że rozwinięcia będą okresowe. Dla liczb $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[7]{7}$ i $\sqrt[8]{8}$ wynika to ze wzorów:

$$\sqrt[3]{5} = 2 - \frac{1}{2 + \sqrt[3]{5}}, \quad \sqrt[7]{7} = 3 - \frac{1}{3 - \frac{1}{3 + \sqrt[7]{7}}}, \quad \sqrt[8]{8} = 3 - \frac{1}{3 + \sqrt[8]{8}}.$$

Można dowieść¹⁾, że rozwinięcia takie są okresowe dla wszystkich liczb niewymiernych $\sqrt[D]{D}$, gdzie D jest liczbą naturalną.

Perron poświęcił ułamkom łańcuchowym obszerną książkę²⁾.

§ 8. Rozwinięcie liczby $\sqrt[D]{D}$ na ułamek łańcuchowy. Niech D będzie liczbą naturalną, która nie jest kwadratem liczby naturalnej, i niech

$$(47) \quad a_0 = E(\sqrt[D]{D}), \quad \sqrt[D]{D} = a_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Zatem

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt[D]{D} - a_0} = \frac{\sqrt[D]{D} + a_0}{D - a_0^2} = \frac{\sqrt[D]{D} + b_1}{c_1},$$

gdzie $b_1 = a_0$, $c_1 = D - a_0^2$ i $c_1 > 0$ (ponieważ $a_0 = E(\sqrt[D]{D}) < \sqrt[D]{D}$, skoro D nie jest kwadratem). Jest tu więc

$$(48) \quad D - b_1^2 = c_1.$$

Niech dalej $a_1 = E(x_1)$ i $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$.

¹⁾ Ob. np. F. Blumer, Acta Arithmetica, tom 3 (1938), zeszyt 1, str. 52, przypadki c_1 i c_3 .

²⁾ O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Lipsk-Berlin 1913.

Zatem

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{x_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt[D]{D} + b_1}{c_1} - a_1} = \frac{c_1}{\sqrt[D]{D} + b_1 - a_1 c_1} = \\ &= \frac{c_1(\sqrt[D]{D} + a_1 c_1 - b_1)}{D - (a_1 c_1 - b_1)^2} = \frac{c_1(\sqrt[D]{D} + a_1 c_1 - b_1)}{D - b_1^2 - a_1^2 c_1^2 + 2a_1 b_1 c_1} = \\ &= \frac{\sqrt[D]{D} + a_1 c_1 - b_1}{1 - a_1^2 c_1 + 2a_1 b_1} = \frac{\sqrt[D]{D} + b_2}{c_2} \end{aligned}$$

na mocy (48). Jest tu więc $b_2 = a_1 c_1 - b_1$ i $c_2 = 1 - a_1^2 c_1 + 2a_1 b_1$.

Niech teraz ogólnie dla naturalnych $n > 1$

$$(49) \quad b_{n+1} = a_n c_n - b_n, \quad c_{n+1} = c_{n-1} - a_n^2 c_n + 2a_n b_n.$$

Udowodnimy, że dla naturalnych $n > 1$ jest

$$(50) \quad D - b_n^2 = c_{n-1} c_n.$$

Istotnie:

$$\begin{aligned} D - b_n^2 &= D - (a_n c_n - b_n)^2 = D - b_n^2 - a_n^2 c_n^2 + 2a_n b_n c_n = \\ &= c_n - a_n^2 c_n^2 + 2a_n b_n c_n = c_n(1 - a_n^2 c_n + 2a_n b_n) = c_n c_{n+1}, \end{aligned}$$

jeżeli zaś przy pewnym naturalnym $n > 1$ jest $D - b_n^2 = c_{n-1} c_n$, to

$$\begin{aligned} D - b_{n+1}^2 &= D - (a_n c_n - b_n)^2 = D - b_n^2 - a_n^2 c_n^2 + 2a_n b_n c_n = \\ &= c_{n-1} c_n - a_n^2 c_n^2 + 2a_n b_n c_n = c_n(c_{n-1} - a_n^2 c_n + 2a_n b_n) = c_n c_{n+1}. \end{aligned}$$

Stąd wynika (50) przez indukcję.

Udowodnimy teraz, że dla każdego naturalnego n jest

$$(51) \quad x_n = \frac{\sqrt[D]{D} + b_n}{c_n}.$$

Widzieliśmy, że jest tak dla $n=1$ i $n=2$. Otóż założmy, że zachodzi to dla pewnego naturalnego n . Stąd

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{x_n - a_n} = \frac{1}{\frac{\sqrt[D]{D} + b_n}{c_n} - a_n} = \\ &= \frac{c_n}{\sqrt[D]{D} + b_n - a_n c_n} = \frac{c_n(\sqrt[D]{D} + a_n c_n - b_n)}{D - (a_n c_n - b_n)^2} = \frac{\sqrt[D]{D} + b_{n+1}}{c_{n+1}} \end{aligned}$$

na mocy (49) i (50). Wzór (51) został więc dowiedziony przez indukcję.

Ponieważ $0 < \sqrt{D} - a_0 < 1$, więc $\sqrt{D} > a_0, D > a_0^2$ i $c_1 > 0$, a że liczba c_1 jest całkowita, więc $c_1 \geq 1$; zarazem wobec $b_1 = a_0$ jest $0 < \frac{\sqrt{D} - b_1}{c_1} < 1$, a wobec $x_1 > 1$ jest $\frac{\sqrt{D} + b_1}{c_1} > 1$. Zatem

$$0 < \frac{\sqrt{D} - b_1}{c_1} < 1 < \frac{\sqrt{D} + b_1}{c_1}.$$

Udowodnimy, że dla każdego naturalnego n jest

$$(52) \quad 0 < \frac{\sqrt{D} - b_n}{c_n} < 1 < \frac{\sqrt{D} + b_n}{c_n}.$$

Założmy, że jest tak dla pewnego naturalnego n . Na mocy (51) jest oczywiście

$$\frac{\sqrt{D} + b_{n+1}}{c_{n+1}} = x_{n+1} > 1,$$

a na mocy (49) i (50)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{D} - b_{n+1}}{c_{n+1}} &= \frac{D - b_{n+1}^2}{c_{n+1}(\sqrt{D} + b_{n+1})} = \frac{c_n}{\sqrt{D} + b_{n+1}} = \\ &= \frac{c_n}{\sqrt{D} + a_n c_n - b_n} = \frac{1}{\frac{\sqrt{D} - b_n}{c_n} + a_n}; \end{aligned}$$

zatem $0 < \frac{\sqrt{D} - b_{n+1}}{c_{n+1}} < 1$, gdyż wobec (52) jest $0 < \frac{\sqrt{D} - b_n}{c_n}$ i prze-

to $\frac{\sqrt{D} - b_n}{c_n} + a_n > 1$. Zatem

$$0 < \frac{\sqrt{D} - b_{n+1}}{c_{n+1}} < 1 < \frac{\sqrt{D} + b_{n+1}}{c_{n+1}}.$$

Ponieważ — jak widzieliśmy — jest tak dla $n=1$, więc wnosimy stąd przez indukcję, że wzór (52) zachodzi dla wszelkich n naturalnych.

Gdyby dla pewnego n było $c_n < 0$, to wobec (52) mielibyśmy $\sqrt{D} - b_n < 0$ i $\sqrt{D} + b_n < 0$, skąd $2\sqrt{D} < 0$, co niemożliwe. Jest więc $c_n > 0$ dla $n=1, 2, \dots$, a zatem $\sqrt{D} - b_n < c_n < \sqrt{D} + b_n$, skąd $\sqrt{D} - b_n < \sqrt{D} + b_n$ i przeto $b_n > 0$. Jest więc $b_n > 0$ dla $n=1, 2, \dots$

Z (52) wynika zatem, że $b_n < \sqrt{D}$ i $c_n < \sqrt{D} + b_n < 2\sqrt{D}$.

Wnosimy stąd, że różnych układów dwu liczb naturalnych b_n i c_n (dla $n=1, 2, \dots$) jest liczba skończona. Innymi słowy, wyrazy ciągu (51) mogą przybierać dla $n=1, 2, \dots$ tylko skończoną liczbę różnych wartości. Istnieją przeto takie liczby naturalne p i q , że

$$(53) \quad x_p = x_{p+q}.$$

Ponieważ

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - E(x_n)} \quad \text{dla } n=1, 2, \dots,$$

więc ze wzoru (53) wynika, że $x_{p+1} = x_{p+q+1}$ i ogólnie $x_{p+k} = x_{p+q+k}$ dla $k=1, 2, \dots$. Ciąg $\{x_n\}$, a przeto i ciąg $\{a_n\}$, gdzie $a_n = E(x_n)$, jest więc okresowy. Niech

$$(54) \quad x'_n = \frac{\sqrt{D} - b_n}{c_n} \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

Przy zmianie znaku przed $\sqrt{D}$ liczba x_n przechodzi na $-x'_n$, a więc równość $x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$ na równość $-x'_n = a_n - \frac{1}{x'_{n+1}}$ czyli

$\frac{1}{x'_{n+1}} = a_n + x'_n$. Ponieważ zaś $0 < x'_n < 1$ na mocy (52), więc

$$(55) \quad a_n = E\left(\frac{1}{x'_{n+1}}\right),$$

a że x_n przechodzi na $-x'_n$, więc $x'_p = x'_{p+q}$ na mocy (53), a zatem $a_{p-1} = a_{p+q-1}$ na mocy (55), skąd wnosimy wobec $x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$ i (53), że

$$x_{p-1} = x_{p+q-1}$$

Rozumując jak wyżej, dostajemy $x_{p-2} = x_{p+q-2}$ itd.

Okres w ciągu $x_1, x_2, \dots$, a przeto i w ciągu $a_1, a_2, \dots$, jest zatem czysty, tj. rozpoczyna się od pierwszego wyrazu (od a_1 , lecz nie od a_0).

Udowodniliśmy więc, że

$$(56) \quad x_{q+k} = x_k \quad \text{i} \quad a_{q+k} = a_k \quad \text{dla } k=1, 2, \dots$$

Ciągi wzorów

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad \dots, \quad x_q = a_q + \frac{1}{x_{q+1}} = a_q + \frac{1}{x_1}$$

oraz

$$-x'_1 = a_1 - \frac{1}{x'_2}, \quad -x'_2 = a_2 - \frac{1}{x'_3}, \quad \dots, \quad -x'_q = a_q - \frac{1}{x'_{q+1}} = a_q - \frac{1}{x'_1}$$

czyli

$$\frac{1}{x'_2} = a_1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{x'_1}\right)}, \quad \frac{1}{x'_3} = a_2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{x'_2}\right)}, \quad \dots, \quad \frac{1}{x'_1} = a_q + \frac{1}{\left(\frac{1}{x'_q}\right)}$$

dają w jednej chwili

$$(57) \quad \begin{aligned} x_1 &= a_1 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_q} + \frac{1}{x_1}, \\ \frac{1}{x'_1} &= a_q + \frac{1}{a_{q-1}} + \dots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{x'_1}\right)}. \end{aligned}$$

Lecz w myśl (47) jest $\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{x_1}$ oraz $-\sqrt{D} = a_0 - \frac{1}{x'_1}$ czyli $\sqrt{D} = -a_0 + \frac{1}{x'_1}$, a zatem wobec (57)

$$\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_q} + \frac{1}{x_1},$$

$$\sqrt{D} = a_q - a_0 + \frac{1}{a_{q-1}} + \frac{1}{a_{q-2}} + \dots + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{x_1}\right)},$$

skąd $a_0 = a_q - a_0$ czyli

$$(58) \quad a_q = 2a_0 = 2E\sqrt{D}$$

oraz

$$a_1 = a_{q-1}, \quad a_2 = a_{q-2}, \quad \dots, \quad a_{q-1} = a_1.$$

Ciąg $a_1, a_2, \dots, a_{q-1}$ jest więc symetryczny.

Lemat. Jeżeli k jest liczbą naturalną, a x — liczbą rzeczywistą, to

$$(59) \quad E\left(\frac{x}{k}\right) = E\left(\frac{E(x)}{k}\right).$$

Dowód. Wobec $E(x) \leq x$ mamy $\frac{E(x)}{k} \leq \frac{x}{k}$, skąd

$$(60) \quad E\left(\frac{E(x)}{k}\right) \leq E\left(\frac{x}{k}\right).$$

Wobec zaś nierówności $t - E(t) < 1$ dla $t = E(x)/k$ mamy $\frac{E(x)}{k} - E\left(\frac{E(x)}{k}\right) < 1$, skąd $E(x) < kE\left(\frac{E(x)}{k}\right) + k$, a zatem

$$E(x) \leq kE\left(\frac{E(x)}{k}\right) + k - 1.$$

Wobec $x < E(x) + 1$ wynika stąd, że $x < kE\left(\frac{E(x)}{k}\right) + k$, a więc $x/k < E\left(\frac{E(x)}{k}\right) + 1$, skąd

$$(61) \quad E\left(\frac{x}{k}\right) \leq E\frac{Ex}{k}.$$

Z (60) i (61) wynika równość (59), c. b. d. o.

Na mocy tego lematu mamy wobec (51)

$$a_n = E(x_n) = E\left(\frac{\sqrt{D} + b_n}{c_n}\right) = E\left(\frac{E(\sqrt{D} + b_n)}{c_n}\right) = E\left(\frac{a_0 + b_n}{c_n}\right)$$

czyli

$$(62) \quad a_n = E\left(\frac{a_0 + b_n}{c_n}\right) \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Otrzymaliśmy więc, w myśl (49) i (50), następujący algorytm rozwijania liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy:

Pisząc $a_0 = E(\sqrt{D})$, $b_1 = a_0$ i $c_1 = D - a_0^2$, wyznaczamy kolejno a_{n-1} , b_n i c_n dla $n = 2, 3, \dots$ ze wzorów:

$$a_{n-1} = E\left(\frac{a_0 + b_{n-1}}{c_{n-1}}\right), \quad b_n = a_{n-1}c_{n-1} - b_{n-1} \quad \text{i} \quad c_n = \frac{D - b_n^2}{c_{n-1}}.$$

Gdy układ (b_1, c_1) powtórzy się w ciągu układów

$$(b_1, c_1), \quad (b_2, c_2), \quad \dots$$

po raz pierwszy, np. gdy $b_{q+1} = b_1$ i $c_{q+1} = c_1$, to rozwinięcie liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy jest

$$(63) \quad \sqrt{D} = (a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_q})$$

czyli

$$\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_q} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_q} + \dots$$

W ten sposób wszystkie rachunki sprowadzają się do działań wymiernych na liczbach wymiernych.

PRZYKŁADY. 1. Niech $D=19$. Mamy tu:

$$a_0 = E(\sqrt{D}) = E(\sqrt{19}) = 4, \quad b_1 = a_0 = 4, \quad c_1 = D - a_0^2 = 19 - 16 = 3, \text{ skąd}$$

$$a_1 = E\left(\frac{a_0 + b_1}{c_1}\right) = E\left(\frac{4+4}{3}\right) = 2, \quad b_2 = a_1 c_1 - b_1 = 2 \cdot 3 - 4 = 2,$$

$$c_2 = \frac{D - b_1^2}{c_1} = \frac{19 - 4}{3} = 5,$$

a stąd dalej:

$$a_2 = E\left(\frac{4+2}{5}\right) = 1, \quad b_3 = 1 \cdot 5 - 2 = 3, \quad c_3 = \frac{19 - 9}{5} = 2,$$

$$a_3 = E\left(\frac{4+3}{2}\right) = 3, \quad b_4 = 3 \cdot 2 - 3 = 3, \quad c_4 = \frac{19 - 9}{2} = 5,$$

$$a_4 = E\left(\frac{4+3}{5}\right) = 1, \quad b_5 = 1 \cdot 5 - 3 = 2, \quad c_5 = \frac{19 - 4}{5} = 3,$$

$$a_5 = E\left(\frac{4+2}{3}\right) = 2, \quad b_6 = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \quad c_6 = \frac{19 - 16}{3} = 1,$$

$$a_6 = E\left(\frac{4+4}{1}\right) = 8, \quad b_7 = 8 \cdot 1 - 4 = 4, \quad c_7 = \frac{19 - 16}{1} = 3.$$

Stwierdzamy, że $b_7 = b_1$ i $c_7 = c_1$, skąd $q=6$. Otrzymujemy więc rozwinięcie

$$\sqrt{19} = (4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}).$$

Jakoż po odrzuceniu ostatniego wyrazu okresu, otrzymujemy ciąg symetryczny 2, 1, 3, 1, 2.

W danym razie okres składa się z parzystej liczby ogniów i w części symetrycznej jest jeden wyraz środkowy.

2. Niech $D=53$. Mamy tu:

$$a_0 = E(\sqrt{53}) = 7, \quad b_1 = 7, \quad c_1 = 53 - 49 = 4,$$

$$a_1 = E\left(\frac{7+7}{4}\right) = 3, \quad b_2 = 3 \cdot 4 - 7 = 5, \quad c_2 = \frac{53 - 25}{4} = 7,$$

$$a_2 = E\left(\frac{7+5}{7}\right) = 1, \quad b_3 = 1 \cdot 7 - 5 = 2, \quad c_3 = \frac{53 - 4}{7} = 7,$$

$$a_3 = E\left(\frac{7+2}{7}\right) = 1, \quad b_4 = 1 \cdot 7 - 2 = 5, \quad c_4 = \frac{53 - 25}{7} = 4,$$

$$a_4 = E\left(\frac{7+5}{4}\right) = 3, \quad b_5 = 3 \cdot 4 - 5 = 7, \quad c_5 = \frac{53 - 49}{4} = 1,$$

$$a_5 = E\left(\frac{7+7}{1}\right) = 14, \quad b_6 = 14 \cdot 1 - 7 = 7, \quad c_6 = \frac{53 - 49}{1} = 4.$$

Stwierdzamy, że $b_6 = b_1$ i $c_6 = c_1$, skąd $q=5$. Otrzymujemy więc rozwinięcie

$$\sqrt{53} = (7; \overline{3, 1, 1, 3, 14}).$$

Okres składa się tu z nieparzystej liczby wyrazów; jego część symetryczna 3, 1, 1, 3 ma więc dwa równe wyrazy środkowe.

Uwaga. Wobec symetrii okresu pozbawionego ostatniego wyrazu wystarczy, dla jego wyznaczenia, obliczyć co najmniej połowę wyrazów. Przy obliczaniu trzeba więc rozpoznać, kiedy co najmniej połowa wyrazów okresu została już obliczona.

Otóż można dowieść, że jeżeli liczba s wszystkich wyrazów okresu jest parzysta, to $s/2$ jest najmniejszym wskaźnikiem k , dla którego $b_{k+1} = b_k$, jeżeli zaś liczba s jest nieparzysta, to $(s-1)/2$ jest najmniejszym wskaźnikiem k , dla którego $c_{k+1} = c_k$ ¹⁾.

Czytelnik zechce to sprawdzić na przytoczonych przykładach, jako też zastosować do uzyskania rozwinięć liczb $\sqrt{585}$ i $\sqrt{610}$.

Nie tylko jednak pierwiastki kwadratowe z liczb naturalnych, nie będących kwadratami, dają rozwinięcia na ułamek łańcuchowy okresowy, o okresie $a_1, a_2, \dots, a_q = 2a_0$, w którym ciąg $a_1, a_2, \dots, a_{q-1}$ jest symetryczny. Można mianowicie dowieść, że

¹⁾ Jest to twierdzenie T. Muira; ob. O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Lipsk-Berlin 1913, str. 91.

na to, by liczba niewymierna dodatnia miała takie rozwinięcie, potrzeba i mystarcza, żeby była ona pierwiastkiem kwadratowym z liczby wymiernej większej od jedności¹⁾.

Inne więc niewymierności drugiego stopnia nie mają tej własności. Tak np. łatwo obliczyć, że

$$\sqrt{\frac{13}{2}} = (2; \overline{1, 1, 4}), \quad \sqrt{\frac{5}{3}} = (1; \overline{3, 2}),$$

(okres składa się tu więc z jednego tylko wyrazu 3) oraz

$$\sqrt{\frac{13}{2}} = (2; \overline{3, 1, 1, 3, 4}).$$

Natomiast:

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{4} = (0; \overline{1, 6, 1, 1, 1}), \quad \frac{2 + \sqrt{19}}{5} = (0; \overline{1, 3, 1, 2, 8, 2}),$$

$$\frac{1 + \sqrt{365}}{14} = (1; \overline{2, 3, 2}), \quad \sqrt{\frac{1}{2}} = (0; \overline{1, 2}), \quad \frac{1 + \sqrt{17}}{2} = (2; \overline{1, 1, 3}).$$

Pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie rozwinięć następujących pierwiastków kwadratowych niewymiernych:

$$\sqrt{46} = (6; \overline{1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12}), \quad \sqrt{58} = (7; \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 14}),$$

$$\sqrt{61} = (7; \overline{1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14}), \quad \sqrt{89} = (9; \overline{2, 3, 3, 2, 18}),$$

Patz obliczył tablice rozwinięć liczb $\sqrt{D}$ na ułamki łańcuchowe dla liczb naturalnych $D \leq 10000$ ²⁾. Oto kilka rozwinięć, zaczerpniętych z tych tablic:

$$\sqrt{1000} = (31; \overline{1, 1, 1, 1, 1, 6, 2, 2, 15, 2, 2, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 2}),$$

$$\sqrt{9000} = (94; \overline{1, 6, 1, 1, 2, 7, 5, 7, 2, 1, 1, 6, 1, 188}).$$

Pośród pierwszej setki najdłuższy okres, bo złożony z 16 ogniw, ma rozwinięcie liczby 94, mianowicie:

$$\sqrt{94} = (9; \overline{1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18}).$$

¹⁾ Ob. np. poprzednie (drugie) wydanie mojej *Teorii liczb*, Warszawa 1925, str. 205-208.

²⁾ W. Patz, *Tafel der regelmässigen Kettenbrüche für die Quadratrourzeln aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 10000*, Lipsk 1941, stron 14+282.

Przykładem rozwinięcia o bardzo długim okresie, złożonym z 60 ogniw, może służyć następujące:

$$\sqrt{991} = (31; \overline{2, 12, 10, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 8, 4, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 20, 6, 4, 31, 4, 6, 20, 1, 4, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 4, 8, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 6, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 10, 12, 2, 62}).$$

Rozwinięcie liczby $\sqrt{9739}$ ma okres złożony z 210 ogniw.

A oto kilka wzorów ogólnych³⁾:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{a^2+1} &= (a; \overline{2a}) \\ \sqrt{a^2+2} &= (a; \overline{a, 2a}) \end{aligned} \right\} \quad \text{dla } a=1, 2, \dots,$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{a^2-1} &= (a-1; \overline{1, 2a-2}) \\ \sqrt{a^2-2} &= (a-1; \overline{1, a-2, 1, 2a-2}) \\ \sqrt{a^2-a} &= (a-1; \overline{2, 2a-2}) \end{aligned} \right\} \quad \text{dla } a=2, 3, \dots,$$

$$\sqrt{a^2+4} = (a; \overline{\frac{a-1}{2}, 1, 1, \frac{a-1}{2}, 2a}) \quad \text{dla } a > 1 \text{ nieparzystych,}$$

$$\sqrt{a^2-4} = (a-1; \overline{1, \frac{a-3}{2}, 2, \frac{a-3}{2}, 1, 2a-2}) \quad \text{dla } a > 3 \text{ nieparzystych.}$$

Wyprowadzimy tu trzeci z tych wzorów.

Dla a naturalnych jest $2a \geq 2$, więc

$$(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 \leq a^2 - 1, \quad a-1 = \sqrt{a^2-1} < a,$$

skąd

$$a_0 = E(\sqrt{a^2-1}) = a-1,$$

$$b_1 = a_0 = a-1, \quad c_1 = D - a_0^2 = a^2 - 1 - (a-1)^2 = 2(a-1),$$

$$a_1 = E\left(\frac{a_0 + b_1}{c_1}\right) = E(1) = 1.$$

Dalej:

$$b_2 = a_1 c_1 - b_1 = 1 \cdot a - 1, \quad c_2 = \frac{D - b_2^2}{c_1} = \frac{2(a-1)}{2(a-1)} = 1,$$

$$a_2 = E\left(\frac{a_0 + b_2}{c_2}\right) = 2a - 2,$$

$$b_3 = a_2 c_2 - b_2 = a - 1 = b_1, \quad c_3 = \frac{D - b_3^2}{c_2} = 2(a-1) = c_1.$$

³⁾ F. Tano, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, tom 14 (1890), str. 215.

Stwierdzamy więc, że $b_3 = b_1$ i $c_3 = c_1$, skąd $q=2$, a zatem

$$\sqrt{a^2-1} = (a-1; \overline{1, 2a-2}), \quad \text{c. b. d. o.}$$

Czytelnik wyprowadzi bez trudu pozostałe z podanych wzorów.

Wyznamy teraz wszystkie liczby naturalne D , dla których rozwinięcie liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy ma okres złożony z jednego tylko ogniwa.

Z własności (58) rozwinięcie liczby $\sqrt{D}$ wynika, że wówczas $\sqrt{D} = (a; \overline{2a})$, skąd znajdujemy z łatwością $\sqrt{D} = a + \frac{1}{a + \sqrt{D}}$, a więc $D = a^2 + 1$. Stąd łatwy wniosek, że na to, by dla liczby naturalnej D liczba $\sqrt{D}$ miała rozwinięcie na ułamek łańcuchowy o okresie złożonym z jednego tylko ogniwa, potrzeba i wystarczy, żeby było $D = a^2 + 1$ dla pewnej liczby naturalnej a .

Nietrudno też wyznaczyć wszystkie liczby naturalne D , dla których rozwinięcie liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy ma okres złożony z dwu różnych ogniw. Z własności (58) rozwinięcie liczby $\sqrt{D}$ wynika, że wówczas jest $\sqrt{D} = (a; \overline{b, 2a})$, gdzie $b \neq 2a$, skąd $\sqrt{D} = a + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a + \sqrt{D}}}$, a więc $D = a^2 + \frac{2a}{b}$. Widzimy, że musi tu być $2a = kb$, gdzie k jest liczbą naturalną i $k \neq 1$ (gdyż $b \neq 2a$). Stąd wnosimy z łatwością, że na to, by dla liczby naturalnej D liczba $\sqrt{D}$ miała rozwinięcie na ułamek łańcuchowy o okresie składającym się z dwu różnych ogniw, potrzeba i wystarczy, żeby było $D = a^2 + k$, gdzie k jest różnym od jedności dzielnikiem naturalnym liczby $2a$.

Można dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych D , dla których rozwinięcie liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy arytmetyczny ma okres złożony z dowolnie danej liczby wyrazów ¹⁾.

ĆWICZENIA. 1. Obliczyć rozwinięcia liczb:

$$a = \sqrt{2632}, \quad b = \sqrt{2670}, \quad c = \sqrt{9490}$$

na ułamki łańcuchowe.

Odpowiedź: $a = (51; \overline{3, 3, 3, 102})$, $b = (51; \overline{1, 2, 20, 2, 1, 102})$, $c = (97; \overline{2, 2, 2, 194})$

¹⁾ Ob. M. Kraitchik, *Théorie des nombres*, tom 2, Paryż 1926, str. 60.

2. Obliczyć rozwinięcia liczb:

$$a = \sqrt{458}, \quad b = \sqrt{2567}, \quad c = \sqrt{7330}, \quad d = \sqrt{9143}$$

na ułamki łańcuchowe.

Odpowiedź: $a = (21; \overline{2, 2, 42})$, $b = (50; \overline{1, 1, 1, 100})$,
 $c = (85; \overline{1, 1, 1, 1, 1, 170})$, $d = (95; \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 190})$.

3. Dowieść, że jeżeli okres rozwinięcia na ułamek łańcuchowy liczby $\sqrt{D}$ dla D naturalnych składa się z trzech ogniw, to pierwsze dwa ogniwa okresu są równe i parzyste.

4. Znaleźć wszystkie liczby naturalne D , dla których $\sqrt{D}$ ma rozwinięcie na ułamek łańcuchowy o okresie złożonym z trzech ogniw, z których pierwsze dwa są równe 2.

Odpowiedź: $D = 25k^2 + 14k + 2$ dla $k = 1, 2, \dots$. Mamy tu

$$D = (5k + 1; \overline{2, 2, 10k + 2}).$$

5. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną D , dla której $\sqrt{D}$ ma rozwinięcie na ułamek łańcuchowy okresowy o okresie złożonym z 11 ogniw, z których 10 pierwszych jest równych 1.

Rozwiązanie. Ma być $\sqrt{D} = a + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} + \frac{1}{a + \sqrt{D}}$. Oznaczając n -ty redukt ułamka $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$ przez P_n/Q_n , będziemy więc mieli

$$\sqrt{D} = \frac{P_{10}(a + \sqrt{D}) + P_9}{Q_{10}(a + \sqrt{D}) + Q_9} = \frac{55(a + \sqrt{D}) + 34}{89(a + \sqrt{D}) + 55},$$

skąd $D = a^2 + \frac{110a + 34}{89}$. Musi zatem być $110a + 34 = 89b$, gdzie b jest całkowite. Rozwiązując to równanie w liczbach całkowitych a i b , znajdujemy

$$a = 89k + 45, \quad b = 110k + 56,$$

gdzie k jest całkowite. Najmniejszą naturalną wartością liczby a jest więc $a = 45$, skąd $D = 45^2 + 56 = 2081$.

6. Dowieść, że nie istnieje liczba naturalna D , dla której $\sqrt{D}$ ma rozwinięcie na ułamek łańcuchowy okresowy o okresie złożonym z 6 ogniw, z których 5 pierwszych jest równych 1.

Dowód. Rozumując jak w ćwiczeniu 3, mielibyśmy

$$\sqrt{D} = \frac{P_5(a + \sqrt{D}) + P_4}{Q_5(a + \sqrt{D}) + Q_4} = \frac{5(a + \sqrt{D}) + 3}{8(a + \sqrt{D}) + 5},$$

skąd

$$D = a^2 + \frac{10a + 3}{8},$$

co niemożliwe, gdyż dla żadnego a naturalnego liczba $10a + 3$, jako nieparzysta, nie jest podzielna przez 8.

§ 9. Twierdzenie Lagrange'a o ułamkach łańcuchowych.
Przez *nierówności drugiego stopnia* rozumiemy liczbę niewymierną, spełniającą równanie drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych.

Zbadamy rozwinięcia takich liczb niewymiernych na ułamki łańcuchowe.

Niech x będzie liczbą rzeczywistą niewymierną, spełniającą równanie

$$(64) \quad Ax^2 + Bx + C = 0,$$

gdzie A , B i C są liczbami całkowitymi. Jest tu $A \neq 0$, skoro równanie (64) nie jest tożsamością i ma pierwiastek niewymierny; ponadto

$$B^2 - 4AC > 0,$$

gdyż w przeciwnym razie równanie (64) nie miałoby pierwiastków niewymiernych rzeczywistych. Niech

$$(65) \quad x = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots$$

będzie rozwinięciem liczby x na ułamek łańcuchowy nieskończony; oznaczając przez $R_n = P_n/Q_n$ jego redukty, a przez x_n liczby wyznaczone kolejno ze wzorów

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}, \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}, \quad \dots,$$

mamy w myśl wzoru (28) z § 5 (str. 271)

$$(66) \quad x = \frac{P_{n-1}x_n + Q_{n-2}}{Q_{n-1}x_n + Q_{n-2}},$$

przy tym w myśl wzoru (30) z § 5 (tamże):

$$|x - R_{n-1}| < \frac{1}{Q_{n-1}Q_n}, \quad |x - R_{n-2}| < \frac{1}{Q_{n-2}Q_{n-1}},$$

skąd dla $n \geq 2$:

$$\left| \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x \right| < \frac{1}{Q_{n-1}^2}, \quad \left| \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} - x \right| < \frac{1}{Q_{n-2}Q_{n-1}}.$$

Przyjmując więc oznaczenia:

$$(67) \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x = \frac{\varepsilon}{Q_{n-1}^2}, \quad \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} - x = \frac{\eta}{Q_{n-2}Q_{n-1}},$$

będziemy mieli:

$$(68) \quad |\varepsilon| < 1, \quad |\eta| < 1.$$

Przez podstawienie (66) do (65) otrzymujemy po łatwej redukcji równanie

$$(69) \quad A_n x_n^2 + B_n x_n + C_n = 0,$$

gdzie:

$$(70) \quad A_n = AP_{n-1}^2 + BP_{n-1}Q_{n-1} + CQ_{n-1}^2,$$

$$(71) \quad B_n = 2AP_{n-1}P_{n-2} + B(P_{n-1}Q_{n-2} + Q_{n-1}P_{n-2}) + 2CQ_{n-1}Q_{n-2},$$

$$(72) \quad C_n = AP_{n-2}^2 + BP_{n-2}Q_{n-2} + CQ_{n-2}^2.$$

Równanie (69) nie jest tożsamością (względem x_n), gdyż $A_n \neq 0$. Gdyby bowiem było $A_n = 0$, to z (70) wynikałoby po podzieleniu obu stron przez Q_{n-1}^2 , że liczba wymierna R_{n-1} jest pierwiastkiem równania (64), a w takim razie oba pierwiastki tego równania byłyby wymierne wbrew założeniu.

Wobec (67) jest

$$P_{n-1} = xQ_{n-1} + \frac{\varepsilon}{Q_{n-1}},$$

a więc na mocy (70)

$$\begin{aligned} A_n &= A \left(xQ_{n-1} + \frac{\varepsilon}{Q_{n-1}} \right)^2 + B \left(xQ_{n-1} + \frac{\varepsilon}{Q_{n-1}} \right) Q_{n-1} + CQ_{n-1}^2 = \\ &= (Ax^2 + Bx + C)Q_{n-1}^2 + (2Ax + B)\varepsilon + A\frac{\varepsilon^2}{Q_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ Q_{n-1} jest liczbą naturalną, więc na mocy wzorów (65) i (68) otrzymujemy stąd natychmiast

$$(73) \quad |A_n| < |2Ax| + |A| + |B|.$$

Wobec (72) i (70) jest oczywiście

$$C_n = A_{n-1} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

a zatem na podstawie nierówności (73) również

$$(74) \quad |C_n| < |2Ax| + |A| + |B|.$$

Ze wzorów (67) wynika, że

$$P_{n-1} = x Q_{n-1} + \frac{\varepsilon}{Q_{n-1}}, \quad P_{n-2} = x Q_{n-2} + \frac{\eta}{Q_{n-1}},$$

wobec czego wzór (71) daje

$$\begin{aligned} B_n &= 2A \left(x Q_{n-1} + \frac{\varepsilon}{Q_{n-1}} \right) \left(x Q_{n-2} + \frac{\eta}{Q_{n-1}} \right) + \\ &+ B \left(x Q_{n-1} + \frac{\varepsilon}{Q_{n-1}} \right) Q_{n-2} + B Q_{n-1} \left(x Q_{n-2} + \frac{\eta}{Q_{n-1}} \right) + 2C Q_{n-1} Q_{n-2} = \\ &= 2(Ax^2 + Bx + C) Q_{n-1} Q_{n-2} + (2Ax + B) \left(\frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}} \varepsilon + \eta \right) + 2A \frac{\varepsilon \eta}{Q_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

co wobec $Q_{n-2} \leq Q_{n-1}$ i $Q_{n-1} > 1$ pociąga za sobą

$$(75) \quad |B_n| < 2(|2Ax| + |A| + |B|)$$

na mocy wzorów (65) i (68).

Nierówności (73), (74) i (75) wskazują, że liczba

$$M = |2Ax| + |A| + |B|$$

jest dodatnia, niezależna od n i

$$(76) \quad |A_n| < M, \quad |B_n| < 2M, \quad |C_n| < M \quad \text{dla } n=2,3,\dots$$

Otóż wzory (70), (71) i (72) dowodzą, że liczby A_n, B_n i C_n są całkowite. Różnych układów liczb całkowitych A_n, B_n, C_n , spełniających nierówności (76), jest oczywiście skończenie wiele. Skończona więc musi być też liczba różnych równań (69), które spełniają liczby x_n . Każdemu takiemu równaniu (nie będącemu — jak widzieliśmy — tożsamością) odpowiadają co najwyżej dwa różne pierwiastki. Stąd natychmiastowy wniosek, że liczba różnych wartości wyrazów ciągu nieskończonego $\{x_n\}$ jest skończona. W ciągu tym znajdziemy więc dla dwu różnych wskaźników p i $q > p$ dwa równe wyrazy: $x_p = x_q$. Wnosimy stąd wobec $a_p = E(x_p)$ i $a_q = E(x_q)$, że $a_p = a_q$, oraz wobec $x_{p+1} = \frac{1}{x_p - a_p}$ i $x_{q+1} = \frac{1}{x_q - a_q}$, że $x_{p+1} = x_{q+1}$. Pisząc dla skrócenia $s = q - p$, otrzymujemy stąd przez łatwą indukcję

$$a_{n+s} = a_n \quad \text{dla } n = p, p+1, \dots,$$

co dowodzi, że rozwinięcie liczby x na ułamek łańcuchowy jest okresowe.

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie Lagrange'a o ułamkach łańcuchowych:

Twierdzenie 1. Każda niewymierność 'drugiego stopnia' rozkłada się na ułamek łańcuchowy okresowy.

Udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Lagrange'a, mianowicie

Twierdzenie 2. Każdy ułamek łańcuchowy okresowy (arytmetyczny) jest rozwinięciem pewnej niewymierności drugiego stopnia.

Dowód. Niech

$$(77) \quad a_0 + \frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|} + \dots$$

będzie ułamkiem łańcuchowym (arytmetycznym) okresowym. Zajmiemy się najpierw przypadkiem, gdy jest to ułamek o okresie czystym, tj. gdy istnieje taka liczba naturalna s , że

$$(78) \quad a_{n+s} = a_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Możemy oczywiście zawsze założyć, że $s > 1$, łącząc ewentualnie dwa okresy w jeden.

Oznaczając przez R_n n -ty redukt ułamka (77), będziemy oczywiście mieli wobec (78)

$$R_{n+s} = a_0 + \frac{1}{|a_1|} + \dots + \frac{1}{|a_{s-1}|} + \frac{1}{|R_n|},$$

skąd

$$(79) \quad R_{n+s} = \frac{P_{s-1} R_n + P_{s-2}}{Q_{s-1} R_n + Q_{s-2}}.$$

Jeżeli ciąg reduktów R_n zmierza do granicy x , to to x jest pewną liczbą dodatnią, gdyż $a_0 = a_s$ jest z założenia liczbą naturalną. Zarazem liczba x byłaby granicą ciągu R_{n+s} , skąd na mocy wzoru (79)

$$(80) \quad x = \frac{P_{s-1} x + P_{s-2}}{Q_{s-1} x + Q_{s-2}};$$

x byłoby więc dodatnim pierwiastkiem równania

$$(81) \quad Q_{s-1} x^2 + (Q_{s-2} - P_{s-1}) x - P_{s-2} = 0,$$

którego drugi pierwiastek jest ujemny, gdyż współczynnik przy x^2 oraz wyraz wolny mają znaki przeciwne.

Otóż okażemy, że pierwiastek dodatni równania (81) ma właśnie rozwinięcie (77) na ułamek łańcuchowy.

Istotnie, niech x będzie pierwiastkiem dodatnim równania (81). Zachodzi więc wzór (80) czyli

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{s-1}} + \frac{1}{x},$$

skąd w jednej chwili wobec (78)

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{s-1}} + \frac{1}{a_s} + \dots + \frac{1}{a_{2s-1}} + \frac{1}{x}$$

i ogólnie przy wszelkim naturalnym k

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{ks-1}} + \frac{1}{x}.$$

Stąd zaś

$$x = \frac{P_{ks-1}x + P_{ks-2}}{Q_{ks-1}x + Q_{ks-2}}$$

i przeto

$$|x - R_{ks-1}| = \left| \frac{P_{ks-1}x + P_{ks-2}}{Q_{ks-1}x + Q_{ks-2}} - \frac{P_{ks-1}}{Q_{ks-1}} \right| = \frac{1}{(Q_{ks-1}x + Q_{ks-2})Q_{ks-1}},$$

skąd wnosimy wobec $x > 0$, że poczynając od pewnego dostatecznie wielkiego $k > m$, jest stale

$$(82) \quad |x - R_{ks-1}| < \varepsilon,$$

gdzie ε jest liczbą dodatnią dowolnie małą, daną z góry.

Niech teraz n będzie dowolną liczbą naturalną. Możemy zawsze dobrać k tak wielkie, aby było równocześnie $k \geq m$ i $ks-1 > n$; liczbę R_n możemy uważać za n -ty redukt rozwinięcia liczby R_{ks-1} . Pisząc

$$\xi = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}} + \dots + \frac{1}{a_{ks-1}},$$

mamy

$$R_{ks-1} = \frac{P_n \xi + P_{n-1}}{Q_n \xi + Q_{n-1}},$$

skąd wobec $\xi \geq 1$

$$|R_{ks-1} - R_n| = \frac{1}{(Q_n \xi + Q_{n-1})Q_n} < \frac{1}{Q_n^2}$$

i przeto wobec (82)

$$|x - R_n| \leq |x - R_{ks-1}| + |R_{ks-1} - R_n| < \frac{1}{Q_n} + \varepsilon,$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest dowolnie małe. Wynika stąd, że

$$|x - R_n| \leq \frac{1}{Q_n^2}.$$

Dowodzi to, że ciąg $\{R_n\}$ zmierza do x , a tym samym twierdzenie zostało dowiedzione w przypadku ułamków łańcuchowych okresowych o okresie czystym.

Przejdźmy z kolei do przypadku, gdy ułamek (77) jest okresowy, ale o okresie mieszanym, rozpoczynającym się od wyrazu a_h . Ułamek

$$a_h + \frac{1}{a_{h+1}} + \frac{1}{a_{h+2}} + \dots$$

ma więc okres czysty. Oznaczmy przez R'_n jego n -ty redukt. Granicą tych reduktów jest — jak widzieliśmy — pewna liczba $\xi > 0$, oczywiście niewymierna, skoro się rozwija na ułamek łańcuchowy nieskończony, i spełniająca równanie drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych. Jest oczywiście przy wszelkim $n \geq h$

$$R_n = a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{h-1}} + \frac{1}{R'_{n-h}},$$

a zatem

$$R_n = \frac{P_{h-1}R'_{n-h} + P_{h-2}}{Q_{h-1}R'_{n-h} + Q_{h-2}},$$

skąd wnosimy wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} R'_{n-h} = \xi$, że ciąg $\{R'_n\}$ zmierza do granicy

$$(83) \quad x = \frac{P_{h-1}\xi + P_{h-2}}{Q_{h-1}\xi + Q_{h-2}}.$$

Wzór (83) pozwala zarazem obliczyć wartość badanego ułamka łańcuchowego. Niech

$$(84) \quad A\xi^2 + B\xi + C = 0$$

będzie równaniem drugiego stopnia, które spełnia liczba ξ . Aby utworzyć równanie dla liczby x , zauważmy, że wobec (83) mamy

$$(85) \quad (Q_{h-1}x - P_{h-1})\xi = P_{h-2} - Q_{h-2}x.$$

Nie może tu być $Q_{h-1}x - P_{h-1} = 0$, gdyż wtedy mielibyśmy też $P_{h-2} - Q_{h-2}x = 0$ wobec (81), skąd $\frac{P_{h-1}}{Q_{h-1}} = \frac{P_{h-2}}{Q_{h-2}}$, co oczywiście

jest niemożliwe. Ponieważ zatem $Q_{h-1}x - P_{h-1} \neq 0$, więc na mocy wzoru (85) jest

$$\xi = \frac{P_{h-2} - Q_{h-2}x}{Q_{h-1}x - P_{h-1}},$$

co po podstawieniu do równania (84) daje równanie dla x

$$A(P_{h-2} - Q_{h-2}x)^2 + B(P_{h-2} - Q_{h-2}x)(Q_{h-1}x - P_{h-1}) + C(Q_{h-1}x - P_{h-1})^2 = 0.$$

Równanie to nie jest tożsamością, bo gdyby współczynnik przy x^2 był w nim zerem, mielibyśmy

$$AQ_{h-2}^2 - BQ_{h-1}Q_{h-2} + CQ_{h-1}^2 = 0$$

i liczba wymierna $-Q_{h-2}/Q_{h-1}$ spełniałaby równanie (84), co niemożliwe, skoro jeden z pierwiastków tego równania jest liczbą niewymierną ξ . Okazaliśmy więc, że liczba x spełnia pewne równanie drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych, a ponieważ $x = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$, więc x jest wartością ułamka łańcuchowego (77).

Tym samym dowód twierdzenia został zakończony.

W pierwszej części dowodu twierdzenia 2 nie tylko okazaliśmy, że każdy ułamek łańcuchowy o okresie czystym jest rozwinięciem pierwiastka dodatniego pewnego równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych, którego drugi pierwiastek jest ujemny, ale zarazem znaleźliśmy metodę wyznaczania wartości takiego ułamka. W tym celu wystarczy mianowicie zbudować równanie (81) i obliczyć jego pierwiastek dodatni.

PRZYKŁADY. 1. Znaleźć wartość ułamka okresowego

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots,$$

gdzie a i b są liczbami naturalnymi. Jest $s=2$ oraz:

$$P_{s-2} = P_0 = a, \quad Q_{s-2} = Q_0 = 1, \quad P_{s-1} = P_1 = ab + 1, \quad Q_{s-1} = Q_1 = b.$$

Równanie (81) jest więc postaci

$$bx^2 - abx - a = 0$$

i ma pierwiastek dodatni

$$x = ab + \frac{\sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2b},$$

skąd

$$\frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2b} = a + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots$$

W szczególności dla $a=2$ i $b=1$, otrzymujemy

$$1 + \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \dots$$

2. Obliczyć wartość ułamka o okresie czystym $\overline{1, 2, 3, 4}$. Jest tu $s=4$ i, jak łatwo obliczyć:

$$P_{s-2} = P_2 = 10, \quad Q_{s-2} = Q_2 = 7, \quad P_{s-1} = P_3 = 43, \quad Q_{s-1} = Q_3 = 30.$$

Równanie (81) jest więc postaci $30x^2 - 36x - 10 = 0$ czyli po podzieleniu przez 2

$$15x^2 - 18x - 5 = 0$$

i ma pierwiastek dodatni

$$x = \frac{9 + 2\sqrt{59}}{15}.$$

ĆWICZENIA. 1. Porównać rozwinięcia liczb $\sqrt{5}$ i $\sqrt{5} + \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $\sqrt{5} = (2; \overline{4})$ i $\sqrt{5} + \frac{1}{2} = (2; \overline{1, 2, 1, 5})$.

2. Porównać rozwinięcia liczb $\frac{\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $\frac{\sqrt{5}}{2} = (1; \overline{8, 2})$ i $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = (1; \overline{1})$.

3. Dowieść, że rozwinięcia liczb $\frac{\sqrt{13}-1}{6}$ i $\frac{\sqrt{13}-1}{6} + \frac{1}{3}$ różnią się tylko w pierwszym ogniwie.

Dowód wynika stąd, że $\frac{\sqrt{13}-1}{6} = \frac{1}{2+a}$ i $\frac{\sqrt{13}-1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{1+a}$, gdzie $a = \frac{\sqrt{13}-5}{2}$.

§ 10. Rozwinięcia liczb e i π na ułamki łańcuchowe. niewiele wiemy o rozwinięciach na ułamki łańcuchowe liczb niewymiernych innych niż niewymierności drugiego stopnia. Nie znamy np. następstwa ogniw w rozwinięciu łańcuchowym liczby π , którego szósty redukt jest następujący:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

J. Wallis obliczył 33 pierwsze ogniwa rozwinięcia liczby π , mianowicie:

3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1.

Natomiast znamy prawo następstwa ogniów rozwinięcia liczby e na ułamek łańcuchowy; jest mianowicie

$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{1} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{1} + \dots^1).$$

Mamy też

$$\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots^2).$$

Znamy także prawo następstwa ogniów w rozwinięciu liczby e^2 mianowicie:

7; 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, 6, 30, ..., $2 + 3k, 1, 1, 5 + 5k, 18 + 12k, \dots$

§ 11. Zastosowanie rozwinięcia $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy do równania Pella. Ze wzoru (63), str. 284, znajdujemy z łatwością

$$\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{q-1}} + \frac{1}{a_q + \sqrt{D} - a_0},$$

a że redukty ułamka łańcuchowego skończonego po prawej stronie aż do rzędu $k = q - 1$ pokrywają się z odpowiednimi reduktami P_k/Q_k ułamka łańcuchowego nieskończonego (65), więc

$$\sqrt{D} = \frac{P_{q-1}(a_q + \sqrt{D} - a_0) + P_{q-2}}{Q_{q-1}(a_q + \sqrt{D} - a_0) + Q_{q-2}}$$

i ogólnie, wobec tego, że $a_q - a_0 = a_0$,

$$\sqrt{D} = \frac{P_{kq-1}(\sqrt{D} + a_0) + Q_{kq-2}}{Q_{kq-1}(\sqrt{D} + a_0) + Q_{kq-2}} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots,$$

skąd wobec niewymierności liczby $\sqrt{D}$:

$$a_0 Q_{kq-1} - P_{kq-1} = -Q_{kq-2}, \quad D Q_{kq-1} - a_0 P_{kq-1} = P_{kq-2}.$$

¹⁾ Dowód tego wzoru znajduje się np. w mojej *Analizie*, tom I, część 2, wyd. 2-e, Warszawa 1925 (przedruk p.t. *Działania nieskończone*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1948), § 104, str. 166.

²⁾ Tamże str. 157.

Mnożąc pierwszą z tych równości przez $-P_{kq-1}$, a drugą przez $-Q_{kq-1}$ i dodając, otrzymujemy

$$P_{kq-1}^2 - D Q_{kq-1}^2 = Q_{kq-2} P_{kq-1} - P_{kq-2} Q_{kq-1} = (-1)^{kq}.$$

Jeżeli q jest liczbą nieparzystą, to wynika stąd:

$$(86) \quad P_{kq-1}^2 - D Q_{kq-1}^2 = \begin{cases} -1 & \text{dla } k=1, 3, 5, \dots \\ 1 & \text{dla } k=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

jeżeli zaś q jest liczbą parzystą, to

$$(87) \quad P_{kq-1}^2 - D Q_{kq-1}^2 = 1 \quad \text{dla } k=1, 2, 3, \dots$$

Pewne redukty rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy dają więc rozwiązanie równania $x^2 - Dy^2 = 1$ w liczbach naturalnych. Okażemy teraz, że i na odwrót, każde rozwiązanie tego równania w liczbach naturalnych daje licznik i mianownik pewnego reduktu rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy.

Niech t, u będzie rozwiązaniem równania Pella w liczbach naturalnych. Mamy tu więc $t > u$. Niech

$$(88) \quad \frac{t}{u} = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{s-1}}$$

będzie rozwinięciem liczby t/u na ułamek łańcuchowy o nieparzystej liczbie ogniów, a więc o s parzystym. Niech wreszcie t'/u' będzie przedostatnim reduktem tego rozwinięcia:

$$t'/u' = a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{s-2}}.$$

Jest tu więc $u' < u$.

Gdyby było $s=2$, mielibyśmy zatem $t'/u' = a_0$. Wobec parzystości s jest więc $tu' - ut' = 1$ oraz, skoro t, u jest rozwiązaniem równania Pella,

$$(89) \quad t^2 - Du^2 = 1.$$

Odejmując drugą równość od pierwszej, otrzymujemy

$$(90) \quad t(u' - t) = u(t' - Du).$$

Wobec (1) jest $0 < \frac{t}{u} - a_0 < 1$, skąd

$$(91) \quad 0 < t - a_0 u < u.$$

Ponieważ liczby t i u są z założenia względnie pierwsze, wnosimy z (90), że przy pewnym całkowitym k jest

$$(92) \quad u' - t = ku, \quad t' - Du = kt,$$

skąd

$$(93) \quad u' - (t - a_0 u) = (k + a_0) u.$$

Wobec $0 < u' < u$ wnosimy z (91), że $|u' - (t - a_0 u)| < u$ i wzór (93) daje $k + a_0 = 0$ czyli $k = -a_0$, skąd na mocy (92) i (93)

$$u' = t - a_0 u, \quad t' = Du - a_0 t,$$

a przeto

$$\frac{t(a_0 + \sqrt{D}) + t'}{u(a_0 + \sqrt{D}) + u'} = \frac{t\sqrt{D} + Du}{t + u\sqrt{D}} = \sqrt{D}.$$

Ponieważ na mocy (88) lewa strona tego wzoru przedstawia ułamek łańcuchowy

$$a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{s-1}} + \frac{1}{a_s + \sqrt{D}},$$

po prawej zaś stronie tegoż wzoru jest $\sqrt{D}$, więc liczba (88) jest $(s-1)$ -ym reduktom rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy. Z rozwinięcia tego wynika natychmiast, że s jest jego okresem. Oznaczając zatem przez q liczbę wyrazów okresu najmniejszego, mamy $s = kq$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Każde więc rozwiązanie równania Pella w liczbach naturalnych jest pewnym reduktom rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy, mianowicie reduktom rzędu $kq-1$, gdzie q jest liczbą wyrazów najmniejszego okresu tego rozwinięcia, a k — liczbą naturalną. Lecz wyżej dowiedliśmy, że jeżeli q jest liczbą parzystą, to każdy redukt rzędu $kq-1$ daje rozwiązanie równania Pella w liczbach naturalnych. Mamy zatem

Twierdzenie 3. Jeżeli okres rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy ma liczbę ogólną q parzystą, to reduktu rzędu $kq-1$, gdzie $k=1, 2, \dots$, dają rozwiązania równania $x^2 - Dy^2 = 1$ w liczbach naturalnych i przy tym rozszyskie takie rozwiązania.

Rozwiązanie w liczbach naturalnych najmniejszych daje więc redukt rzędu $q-1$.

Jeżeli zaś q jest liczbą nieparzystą, to redukt rzędu $kq-1$ daje — jak dowiedliśmy — wtedy i — jak wskazuje wzór (86) — tylko wtedy rozwiązanie równania Pella, gdy k jest parzyste. Mamy więc

Twierdzenie 4. Jeżeli okres rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy ma liczbę ogólną q nieparzystą, to reduktu rzędu $2kq-1$, gdzie $k=1, 2, \dots$, dają rozwiązania równania $x^2 - Dy^2 = 1$ w liczbach naturalnych i przy tym rozszyskie takie rozwiązania.

Rozwiązanie w liczbach naturalnych najmniejszych daje więc redukt rzędu $2q-1$.

ĆWICZENIE. Znaleźć w najmniejszych liczbach naturalnych rozwiązanie równania $x^2 - Dy^2 = 1$, gdzie $D = a^2 - 2$ i a jest liczbą naturalną większą od 1.

Odpowiedź. Ze wzoru $\sqrt{a^2 - 2} = (a-1; 1, a-2, 1, 2a-2)$ znajdujemy z łatwością, że $q=4$ i $R_3 = \frac{a^2-1}{a}$. Rozwiązaniem jest więc $x = a^2 - 1$, $y = a$.

Tak np. dla $D=34$ mamy $a=6$, skąd $x=35$ i $y=6$.

Niech teraz t, u będzie rozwiązaniem równania

$$(94) \quad x^2 - Dy^2 = -1$$

w liczbach naturalnych. Mamy tu więc $t > u$ (wobec $D > 1$). Gdyby było $u=1$, mielibyśmy $t^2 - D = -1$, skąd $D = t^2 - 1$, a że (p. wzór dla $\sqrt{a^2 - 1}$, str. 287) jest $\sqrt{t^2 - 1} = (t-1; 1, 2t-2)$, więc t/u byłoby reduktom rzędu 1 rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy. Możemy więc dalej założyć, że $u > 1$.

Niech (88) będzie rozwinięciem liczby t/u na ułamek łańcuchowy o parzystej liczbie ogólnych (nie równej 0, bo $u > 1$), a więc o s nieparzystym. Niech wreszcie t'/u' będzie — jak poprzednio — przedostatnim reduktom tego rozwinięcia. Wobec nieparzystości liczby s jest zatem $tu' - ut' = -1$ oraz, skoro t, u jest rozwiązaniem równania (94), otrzymujemy znowu wzór (90). Rozumując dalej, jak poprzednio dla równania Pella, wnosimy, że liczba (88) jest $(s-1)$ -ym reduktom rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy oraz że $s = kq$, gdzie k jest pewną liczbą naturalną. Każde rozwiązanie równania (94) w liczbach naturalnych jest więc pewnym reduktom rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy, mianowicie reduktom rzędu $kq-1$, gdzie k jest liczbą naturalną. Lecz — jak wiemy ze wzorów (86) i (87) — jeżeli q jest liczbą parzystą, to żaden redukt rzędu $kq-1$ nie jest rozwiązaniem równania (94), jeżeli zaś q jest liczbą nieparzystą, to reduktu rzędu $kq-1$ dają rozwiązanie tego równania, ale tylko dla k nieparzystych. Mamy zatem

Twierdzenie 5. Jeżeli okres rozwinięcia liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy ma liczbę ogniw parzystą, to równanie $x^2 - Dy^2 = -1$ nie jest rozwiązywalne w liczbach naturalnych, jeżeli zaś jego liczba ogniw q jest nieparzysta, to redukt rzędu $(2k-1)q-1$, gdzie $k=1,2,\dots$, dają rozwiązania tego równania w liczbach naturalnych i przy tym wszystkie takie rozwiązania.

PRZYKŁADY. 1. Niech $D=2$. Wobec rozwinięcia $\sqrt{2}=(1;\bar{2})$ mamy $q=1$, skąd wnosimy na mocy twierdzenia 4, że redukt rzędu $2k-1$, gdzie $k=1,2,\dots$, dają wszystkie rozwiązania równania $x^2-2y^2=1$ w liczbach naturalnych.

Redukt rzędu 1, czyli liczba $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, jest więc rozwiązaniem tego równania w liczbach naturalnych najmniejszych.

Redukty zaś rzędu $2k-2$, gdzie $k=1,2,\dots$, dają na mocy twierdzenia 5 wszystkie rozwiązania równania $x^2-2y^2=-1$ w liczbach naturalnych.

Redukt rzędu 0, czyli liczba $1=\frac{1}{1}$, daje więc rozwiązanie tego równania w liczbach najmniejszych: 1, 1.

2. Niech $D=5$. Wobec rozwinięcia $\sqrt{5}=(1,\bar{1},2)$ mamy $q=2$; zatem redukt rzędu $2k-1$, gdzie $k=1,2,\dots$, dają wszystkie rozwiązania równania $x^2-5y^2=1$ w liczbach naturalnych.

Najmniejsze rozwiązanie tego równania daje redukt rzędu 1, czyli $1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}$; rozwiązaniem tym jest tu więc 2, 1.

Natomiast równanie $x^2-5y^2=-1$ nie jest rozwiązywalne w liczbach naturalnych.

3. Niech $D=13$. Wobec $\sqrt{13}=(3,1,\bar{1},1,6)$ mamy $q=5$; zatem redukt rzędu $10k-1$, gdzie $k=1,2,\dots$, dają wszystkie rozwiązania równania $x^2-13y^2=1$ w liczbach naturalnych.

Najmniejsze rozwiązanie daje tu redukt rzędu 9 czyli (por. str. 253) liczba

$$3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{649}{180}.$$

Redukty zaś rzędów $10k-6$, gdzie $k=1,2,\dots$, dają wszystkie rozwiązania równania $x^2-13y^2=-1$ w liczbach naturalnych.

Najmniejsze daje redukt rzędu 4 czyli liczba

$$3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{18}{5}.$$

Znajdowanie najmniejszych rozwiązań równań $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ za pomocą rozwijania liczby $\sqrt{D}$ na ułamek łańcuchowy nie przedstawia większych trudności rachunkowych dla $D \leq 100^1$.

Oto najmniejsze rozwiązania dla $D \leq 50$:

D	x	y	D	x	y	D	x	y	D	x	y
2	3	2	15	4	1	28	127	24	40	19	3
3	2	1	17	33	8	29	4901	1820	41	1025	520
5	9	4	18	17	4	30	11	2	42	13	2
6	5	2	19	170	39	31	1520	273	43	5482	531
7	8	3	20	9	2	32	17	3	44	199	30
8	3	1	21	55	12	33	23	4	45	141	24
10	19	6	22	197	42	34	35	6	46	24535	3588
11	10	3	23	24	5	35	6	1	47	48	7
12	7	2	24	5	1	37	73	12	48	7	1
13	525	180	26	51	10	38	37	6	50	99	14
14	15	4	27	26	5	39	25	4			

Równanie zaś $x^2 - Dy^2 = -1$ jest rozwiązywalne tylko dla następujących wartości $D < 100$:

2, 5, 10, 13, 17, 26, 29, 37, 41, 50,

53, 58, 61, 65, 73, 74, 82, 85, 89, 97.

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć najmniejsze rozwiązania w liczbach naturalnych równania $x^2 - Dy^2 = 1$ dla $D=59$ i 103.

Odpowiedź: $x=530, y=69$ i $x=227528, y=22419$.

2. Znaleźć najmniejsze rozwiązania w liczbach naturalnych równania $x^2 - Dy^2 = -1$ dla $D=29, 53$ i 74.

Odpowiedź: $x=70, y=13$, $x=182, y=25$ i $x=43, y=5$.

3. Dowieść, że jeżeli $x^2 - Dy^2 = -1$, to dla $u=2x^2+1$ i $v=2xy$ jest $u^2 - Dv^2 = 1$.

4. Dowieść, że równanie $x^2 - 2y^2 = 17$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych.

Dowód. Jest $7^2 - 2 \cdot 4^2 = 17$, jeżeli zaś $t^2 - 2u^2 = 1$ (a równanie to ma — na mocy twierdzenia 3 Rozdziału XI (§ 2, str. 257) — nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych), to

$$(7t+8u)^2 - 2(4t+7u)^2 = 17.$$

¹⁾ Tablica rozwiązań dla wszystkich $D \leq 1003$ znajduje się już w dziele A. M. Legendre, *Théorie des Nombres*, wydanym w Paryżu w 1798 r.

5. Dowieść, że jeżeli liczby całkowite t i u spełniają równanie $t^2 - 2u^2 = 1$, to liczby:

$$x_1 = \frac{t-1}{2}, \quad x_2 = -\frac{t+1}{2}, \quad x_3 = \frac{u}{2} + 1, \quad x_4 = 1 - \frac{u}{2}$$

są całkowite i spełniają równanie $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 1$.

6. Zważywszy, że równanie $t^2 - 5u^2 = 1$ jest równoważne równaniu

$$(t+1)^2 + (u-5)^2 + 7^2 = (t-1)^2 + (u+5)^2 + 1^2,$$

dowieść, że równanie $x^2 + y^2 + 7^2 = z^2 + w^2 + 1^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z, w , i znaleźć rozwiązanie tego równania w liczbach naturalnych najmniejszych.

Odpowiedź: $162^2 + 67^2 + 7^2 = 160^2 + 77^2 + 1^2$.

ROZDZIAŁ XIII

TEORIA KONGRUENCJI PIERWSZEGO I DRUGIEGO STOPNIA

§ 1. Kongruencje pierwszego stopnia o dowolnym module.
W Rozdziale III (§ 5) zajmowaliśmy się kongruencjami pierwszego stopnia przy założeniu, że moduł jest liczbą pierwszą. Zajmiemy się obecnie kongruencjami pierwszego stopnia dla jakiegokolwiek modułu.

Weźmy więc pod uwagę kongruencję

$$(1) \quad ax \equiv b \pmod{m},$$

gdzie a, b i m są liczbami całkowitymi.

Założmy, że istnieje liczba całkowita x , spełniająca kongruencję (1). Jest więc przy pewnym y całkowitym $ax = b + my$, skąd

$$(2) \quad ax - my = b.$$

Niech $d = (a, m)$, $a = da_1$ i $m = dm_1$. Zatem wobec (2):

$$b = d(a_1x - m_1y),$$

gdzie a_1 i m_1 są liczbami całkowitymi. Stąd wniosek:

Jeżeli kongruencja (1) jest rozwiązalna, to liczba b jest podzielna przez największy wspólny dzielnik liczb a i m .

Przypuśćmy, na odwrót, że warunek ten jest spełniony. Skoro d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i m , to (ob. Rozdział II, § 1, twierdzenie 1) istnieją liczby całkowite ξ i η , spełniające równanie

$$a\xi + m\eta = d.$$