ROZDZIAŁ XI

RÓWNANIE PELLA

§ 1. Dowód istnienia rozwiązań równania Pella. Przez równanie Pella rozumiemy (ob. str. 234) równanie

$$x^2 - Dy^2 = 1, \tag{1}$$

gdzie D jest liczbą naturalną [1]).

Prócz rozwiązań oczywistych $x=1, y=0$ oraz $x=-1, y=0$ wszystkie inne rozwiązania równania (1) w liczbach całkowitych (w których zatem $x \neq 0$ i $y \neq 0$) mogą być podzielone na czwórki, różniące się jedynie znakami przy x i y. W każdej takiej czwórce znajdzie się oczywiście zawsze jedno i tylko jedno rozwiązanie x, y, w którym obie liczby są dodatnie.

Będziemy je nazywali krótko *rozwiązaniem dodatnim*.

Mając wszystkie rozwiązania dodatnie równania (1), można z łatwością otrzymać i wszystkie inne jego rozwiązania. Poprzestaniemy więc na rozważaniu rozwiązań dodatnich (w liczbach całkowitych).

Przypadek, kiedy D jest kwadratem liczby naturalnej, $D=n^2$, może być rozstrzygnięty natychmiast. Wówczas bowiem możemy napisać równanie (1) w postaci

$$(x-ny)(x+ny)=1,$$

skąd $x+ny=1$, co przy x i y dodatnich jest oczywiście niemożliwe. A więc:

Jeżeli D jest kwadratem liczby naturalnej, to równanie Pella nie ma rozwiązań dodatnich w liczbach całkowitych.

[1]) Niektórzy nazywają to równanie *równaniem Fermata*, twierdząc, że Pell się nim wcale nie zajmował.

Udowodnimy teraz

Lemat. *Jeżeli liczba naturalna D nie jest kwadratem liczby naturalnej, to istnieje nieskończenie wiele różnych układów liczb całkowitych x, y, dla których zachodzą nierówności:*

$$y \neq 0, \quad |x^2 - Dy^2| < 2\sqrt{D}+1. \tag{2}$$

Dowód. Niech n będzie liczbą naturalną. Wyznaczmy dla każdej z wartości

$$y = 0, 1, 2, \ldots, n$$

wartość

$$x = \mathrm{E}(y\sqrt{D})+1.$$

Oczywiście

$$x - y\sqrt{D} = \mathrm{E}(y\sqrt{D}) - y\sqrt{D} + 1, \tag{3}$$

a że zawsze $t-1 < \mathrm{E}(t) \leqslant t$, skąd $0 < \mathrm{E}(t) - t + 1 \leqslant 1$, więc

$$0 < x - y\sqrt{D} \leqslant 1. \tag{4}$$

Otrzymane w ten sposób $n+1$ wartości (3) są wszystkie różne, ponieważ w razie równości $x - y\sqrt{D} = x' - y'\sqrt{D}$ byłoby

$$x - x' = (y-y')\sqrt{D},$$

co przy $y \neq y'$ nie jest możliwe, gdyż wtedy liczba $\sqrt{D}$ byłaby wymierna wbrew założeniu, że D nie jest kwadratem liczby naturalnej, a więc i liczby wymiernej (ob. twierdzenie 7 Rozdziału I (§ 7, str. 6). Każda z tych $n+1$ różnych wartości

$$u = x - y\sqrt{D} \tag{5}$$

musi spełniać na mocy (4) jedną z n nierówności

$$0 < u \leqslant \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n} < u \leqslant \frac{2}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{n-1}{n} < u \leqslant \frac{n}{n},$$

skąd wynika, że co najmniej dwie różne wartości, u' i u'', spełniają jedną i tę samą nierówność:

$$\frac{k-1}{n} < u' \leqslant \frac{k}{n}, \quad \frac{k-1}{n} < u'' \leqslant \frac{k}{n},$$

gdzie k jest jedną z liczb $1, 2, \ldots, n$. Wobec założenia, że $u' \neq u''$, możemy przyjąć, że np. $u' > u''$. Z nierówności $u' \leqslant k/n$ i nierówności $u'' > (k-1)/n$ czyli $-u'' < (1-k)/n$ znajdujemy

$$0 < u' - u'' < 1/n,$$

czyli po podstawieniu wartości u' i u'' według (5)

$$0<(x'-x'')-(y'-y'')\sqrt{D}<\frac{1}{n},$$

skąd dla $x=x'-x''$ i $y=y'-y''$

(6) $$0<x-y\sqrt{D}<\frac{1}{n}.$$

Liczba $y=y'-y''$, jako różnica dwu różnych liczb ciągu $0,1,2,\ldots,n$, jest różna od 0 i nie większa co do wartości bezwzględnej od n:

(7) $$0<|y|\leqslant n.$$

Nierówność (6) daje zaś $x<y\sqrt{D}+\frac{1}{n}$, skąd wobec (7)

$$|x|\leqslant|y|\sqrt{D}+\frac{1}{n}\leqslant n\sqrt{D}+\frac{1}{n},$$

a zatem

$$|x+y\sqrt{D}|\leqslant|x|+|y|\sqrt{D}\leqslant 2n\sqrt{D}+\frac{1}{n}$$

i przeto po pomnożeniu przez liczbę $|x-y\sqrt{D}|$, która wobec (6) jest mniejsza od $1/n$,

$$|x^2-Dy^2|<2\sqrt{D}+1.$$

Okazaliśmy w ten sposób, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje układ liczb całkowitych x,y, spełniający nierówności (2) i (6).

Opierając się na tym, udowodnimy teraz, że istnieje nieskończenie wiele układów liczb całkowitych x,y, spełniających nierówności (2) i

(8) $$0<x-y\sqrt{D}.$$

Przypuśćmy bowiem, że wszystkich takich układów jest skończenie wiele, mianowicie że są to układy:

(9) $$(x_1,y_1),\quad (x_2,y_2),\quad \ldots,\quad (x_s,y_s).$$

Każda więc z liczb

(10) $$x_1-y_1\sqrt{D},\quad x_2-y_2\sqrt{D},\quad \ldots,\quad x_s-y_s\sqrt{D}$$

jest dodatnia. Oznaczmy przez a najmniejszą z nich.

Niech n będzie taką liczbą naturalną, że

(11) $$1/n<a.$$

Jak dowiedliśmy, istnieje układ liczb całkowitych x,y, spełniający nierówności (2) i (6). Wobec nierówności (6) i (11) jest $0<x-y\sqrt{D}<a$, a że a jest najmniejszą z liczb (10), więc liczba $x-y\sqrt{D}$ nie jest żadną z nich. Układ x,y byłby więc różny od każdego z układów (9), a jednak spełniałby nierówności (2) i (6), a więc też nierówności (8), wbrew określeniu ciągu układów (9).

Udowodniliśmy zatem, że nieskończenie wiele układów liczb całkowitych x,y spełnia nierówności (2) i (8), tym bardziej więc same nierówności (2), c. b. d. o.

Twierdzenie 1. *Jeżeli liczba naturalna D nie jest kwadratem żadnej liczby naturalnej, to równanie Pella ma co najmniej jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych*[1]).

Dowód. Ponieważ różnych liczb całkowitych mniejszych co do wartości bezwzględnej od $2\sqrt{D}+1$ jest skończenie wiele, a układów liczb całkowitych x,y, spełniających nierówności (2), jest w myśl lematu nieskończenie wiele, więc musi istnieć nieskończenie wiele układów liczb całkowitych x,y, dla których wyrażenie x^2-Dy^2 przybiera jedną i tę samą wartość k (oczywiście różną od 0, skoro — jak dowiedliśmy — nie może zachodzić przypadek $D=x^2/y^2$).

Oznaczmy przez Z zbiór wszystkich takich układów.

Niech ogólnie $r(t)$ będzie resztą z dzielenia liczby t przez k. Każdy układ x,y, należący do zbioru Z, wyznacza układ dwu liczb całkowitych $r(x),r(y)$. Różnych układów takich liczb jest nie więcej niż k^2, ponieważ liczby te, jako reszty z dzielenia przez k, są wyrazami ciągu $0,1,2,\ldots,k-1$.

Podzielmy teraz wszystkie układy, należące do zbioru Z, na klasy, zaliczając dwa układy x,y i x',y' do tej samej klasy wtedy i tylko wtedy, gdy $r(x)=r(x')$ i $r(y)=r(y')$. Ponieważ różnych układów $r(x),r(y)$ jest tylko skończenie wiele, a zbiór Z jest nieskończony, więc w jednej co najmniej z tych klas jest nieskończenie wiele układów ze zbioru Z. W klasie takiej istnieją zatem takie dwa układy a,b i c,d, dla których nie jest jednocześnie $|a|=|c|$ i $|b|=|d|$, ponieważ układów, dla których obie te równości zachodzą jednocześnie, jest oczywiście co najwyżej cztery.

Różnice a^2-Db^2 i c^2-Dd^2, jako należące do zbioru Z, mają tę samą wartość k, a że a,b i c,d są układami tej samej klasy, więc

[1]) W § 2 okażemy, że istnieje nieskończenie wiele takich rozwiązań (p. twierdzenie 3, str. 257).

$r(a)=r(c)$ i $r(b)=r(d)$. Skoro jednak liczba a daje przy dzieleniu przez k tę samą resztę co liczba c, to przy pewnym całkowitym k jest $a-c=kt$. Podobnie $b-d=kv$. Możemy więc napisać:

(12) $$a=c+kt, \quad b=d+kv,$$

gdzie t i v są liczbami całkowitymi. Mnożąc stronami równości

(13) $$a^2-Db^2=k, \quad c^2-Dd^2=k,$$

otrzymamy na mocy tożsamości

$$(a^2-Db^2)(c^2-Dd^2)=(ac-Dbd)^2-D(ad-cb)^2$$

równość

(14) $$(ac-Dbd)^2-D(ad-cb)^2=k^2.$$

Lecz wobec (12) jest:

$$ac-Dbd=(c+kt)c-D(d+kv)d=c^2-Dd^2+k(ct-Ddv)=$$
$$=k(1+ct-Ddv),$$

$$ad-cb=(c+kt)d-(d+kv)c=k(dt-cv)$$

i wzór (14) daje po podzieleniu obu stron przez k^2

$$(1+ct-Ddv)^2-D(dt-cv)^2=1,$$

skąd dla

$$x=|1+ct-Ddv|, \quad y=dt-cv$$

otrzymujemy

$$x^2-Dy^2=1.$$

Okażemy, że $y\neq 0$. Istotnie, w przeciwnym razie byłoby $x=1$, a zatem:

$$1+ct-Ddv=\pm 1, \quad dt-cv=0.$$

Mnożąc pierwszą równość przez c, a drugą przez $-Dd$ i dodając, otrzymalibyśmy

$$c+(c^2-Dd^2)t=\pm c,$$

skąd na mocy (12) i (13) byłoby $a=\pm c$ czyli $|a|=|c|$.

Mnożąc zaś pierwszą równość przez d, a drugą przez c i dodając, otrzymalibyśmy

$$d+(c^2-Dd^2)u=\pm d,$$

skąd na mocy (12) i (13) byłoby $b=\pm d$ czyli $|b|=|d|$.

Byłoby więc jednocześnie $|a|=|c|$ i $|b|=|d|$, wbrew określeniu układów a,b i c,d.

Dowiedliśmy zatem istnienia co najmniej jednego takiego układu x,y liczb całkowitych, że $x^2-Dy^2=1$ i $y\neq 0$, co oczywiście pociąga za sobą także nierówność $x\neq 0$. Zmieniając ewentualnie znaki przy x i y, dostajemy stąd rozwiązanie dodatnie równania (1), c. b. d. d.

W celu efektywnego wyznaczenia dodatniego rozwiązania równania (1) można postępować, jak następuje.

W wyrażeniu $1+Dy^2$ podstawiamy za y kolejno wartości $1,2,3,\ldots$ i sprawdzamy, czy wyrażenie to jest kwadratem liczby naturalnej. Jeżeli zajdzie to po raz pierwszy dla wartości $y=u$, to $1+Du^2=t^2$, gdzie t jest liczbą naturalną. Układ t,u jest więc rozwiązaniem równania (1) w najmniejszych liczbach naturalnych, dla każdego bowiem innego dodatniego rozwiązania równania (1) będzie już $y>u$, a zatem $x=\sqrt{1+Dy^2}>\sqrt{1+Du^2}=t$ czyli $x>t$.

PRZYKŁADY. 1. Dla $D=2$ równanie (1) przybiera postać $x^2-2y^2=1$. Podstawiając w wyrażeniu $1+2y^2$ kolejno $y=1$ i 2, otrzymujemy wartości 3 i 9, z których druga jest już kwadratem. Najmniejszym rozwiązaniem dodatnim jest tu więc $x=2$, $y=3$.

2. Dla $D=3$ równanie (1) ma postać $x^2-3y^2=1$. Wstawiając do $1+3y^2$ wartość $y=1$, otrzymujemy już kwadrat (liczby 2). Najmniejszym rozwiązaniem dodatnim jest tu więc $t=2$, $u=1$.

3. Dla $D=5$, czyli dla równania $x^2-5y^2=1$, podstawiając kolejno $y=1,2,3,4$, otrzymujemy dla $1+5y^2$ wartości $6,21,46,81$, z których ostatnia jest kwadratem. Najmniejszym rozwiązaniem dodatnim jest tu więc $t=9$, $u=4$.

4. Dla $D=11$, czyli dla równania $x^2-11y^2=1$, podstawiając kolejno $y=1,2,3$, otrzymujemy tu dla $1+11y^2$ wartości $12,45,100$, skąd wnosimy, że najmniejszym rozwiązaniem dodatnim jest tu $t=10$, $u=3$.

Jednakże taka metoda wyznaczania najmniejszych rozwiązań dodatnich, choć w zasadzie niezmiernie prosta, nie jest dogodna w praktyce, ponieważ nawet dla niewielkich wartości liczby D wymaga ona niekiedy znacznej ilości prób. Tak np. dla rozwiązania tą drogą równania $x^2-13y^2=1$ potrzeba by aż 180 prób, po których znaleźlibyśmy $t=649$, $u=180$. Jako curiosum podajemy, że najmniejszym rozwiązaniem dodatnim równania

(15) $$x^2-991y^2=1$$

jest układ:

$$t = 379\,516\,400\,906\,811\,930\,638\,014\,896\,080,$$

$$u = 120\,557\,357\,903\,313\,359\,447\,442\,538\,767.$$

Mamy tu pouczający przykład, jak zawodna może być indukcja, oparta nawet na wielkiej liczbie prób. Podstawiając za y wartości $1, 2, 3, \ldots$ aż do 10^{28}, nie otrzymujemy rozwiązania równania (15), a jednak uznanie tego równania za nierozwiązalne w liczbach naturalnych byłoby błędem.

W Rozdziale XII (§ 11) poznamy inny, dogodniejszy sposób wyznaczania najmniejszego dodatniego rozwiązania równania (1), który pozwala w szczególności wyznaczyć rozwiązanie równania (15) za pomocą niezbyt długich rachunków.

§ 2. Wyznaczanie wszystkich rozwiązań równania Pella. Okażemy obecnie, w jaki sposób z rozwiązania równania (1) w najmniejszych liczbach naturalnych można otrzymać wszystkie inne rozwiązania tego równania. Udowodnimy w tym celu najpierw

Twierdzenie 2. *Jeżeli t, u jest najmniejszym rozwiązaniem dodatnim równania Pella, to na to, by układ liczb naturalnych x, y był rozwiązaniem tegoż równania, potrzeba i wystarcza, żeby przy pewnym naturalnym n było*

$$x + y\sqrt{D} = (t + u\sqrt{D})^n. \tag{16}$$

Dowód. Niech t, u będzie rozwiązaniem równania (1) w najmniejszych liczbach naturalnych, a x, y — układem liczb naturalnych, dla których zachodzi równość (16) przy pewnym naturalnym n. Z równości tej, zmieniając znak przy $\sqrt{D}$, otrzymujemy natychmiast równość

$$x - y\sqrt{D} = (t - u\sqrt{D})^n, \tag{17}$$

mnożąc zaś stronami równości (16) i (17), otrzymujemy

$$x^2 - Dy^2 = (t^2 - Du^2)^n = 1,$$

gdyż t, u jest z założenia rozwiązaniem równania (1). Układ x, y jest więc rozwiązaniem tego równania. Zatem warunek jest wystarczający.

Aby dowieść, że jest on zarazem konieczny, zauważmy, że na to, by liczby całkowite x, y, spełniające równanie (1), były dodatnie, potrzeba i wystarcza, żeby zachodziła nierówność

$$x + y\sqrt{D} > 1. \tag{18}$$

Konieczność jej jest oczywista. Jeżeli zaś zachodzi ona dla x, y całkowitych, spełniających równanie (1), to z

$$x^2 - Dy^2 = (x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D}) = 1$$

wynika $0 < x - y\sqrt{D} < 1$ na mocy (18), a zatem zachodzą nierówności:

$$x - y\sqrt{D} > 0, \qquad y\sqrt{D} - x > -1.$$

Otóż dodając stronami (18) i pierwszą z nich, otrzymujemy $2x > 1$, skąd $x > 0$; dodając zaś stronami (18) i drugą z nich, otrzymujemy $2y\sqrt{D} > 0$, skąd $y > 0$.

Zauważmy dalej, że jeżeli dwa rozwiązania równania (1) w liczbach naturalnych x, y i x', y' spełniają nierówność

$$x + y\sqrt{D} < x' + y'\sqrt{D}, \tag{19}$$

to

$$x < x' \quad \text{i} \quad y < y'.$$

Istotnie, gdyby było $y \geqslant y'$, to wobec

$$x = \sqrt{1 + Dy^2}, \qquad x' = \sqrt{1 + Dy'^2}$$

byłoby też $x \geqslant x'$, a zatem $x + y\sqrt{D} \geqslant x' + y'\sqrt{D}$ wbrew (19). Jest więc $y < y'$, skąd $\sqrt{1 + Dy^2} < \sqrt{1 + Dy'^2}$ czyli również $x < x'$.

Niech teraz x, y będzie rozwiązaniem równania (1) w liczbach naturalnych i przypuśćmy, że nie ma liczby naturalnej n, dla której zachodziłby wzór (16). Nie może tu być $x + y\sqrt{D} < t + u\sqrt{D}$, gdyż stąd — jak okazaliśmy przed chwilą — wynikałoby, że $x < t$ i $y < u$, wbrew założeniu, że t, u jest najmniejszym rozwiązaniem dodatnim równania (1). Ponieważ na mocy nierówności (18), dowiedzionej dla wszelkich rozwiązań naturalnych równania (1), jest $t + u\sqrt{D} > 1$, więc wyrażenie $(t + u\sqrt{D})^n$ rośnie nieograniczenie wraz z n. Zatem liczba $x + y\sqrt{D}$, która nie jest — jak przypuściliśmy — żadnym z wyrazów ciągu rosnącego $(t + u\sqrt{D})^n$ dla $n = 1, 2 \ldots$ i — jak dowiedliśmy — nie jest mniejsza od jego pierw-

szego wyrazu $t+u\sqrt{D}$, musi być zawarta między dwoma kolejnymi wyrazami tego ciągu, czyli

$$(t+u\sqrt{D})^n < x+y\sqrt{D} < (t+u\sqrt{D})^{n+1} \tag{20}$$

dla pewnego n naturalnego. Rozwijając dwumian $(t+u\sqrt{D})^n$ i zbierając osobno składniki wymierne i niewymierne, otrzymujemy

$$(t+u\sqrt{D})^n = t_n + u_n\sqrt{D}, \tag{21}$$

gdzie t_n i u_n są liczbami naturalnymi, które — jak okazaliśmy w dowodzie dostateczności rozważanego warunku — spełniają równanie

$$t_n^2 - Du_n^2 = 1. \tag{22}$$

Na mocy (20) i (21) jest

$$t_n + u_n\sqrt{D} < x+y\sqrt{D} < (t_n+u_n\sqrt{D})(t+u\sqrt{D}), \tag{23}$$

a ponieważ $t_n+u_n\sqrt{D}>1$ i $t_n^2-Du_n^2=1$, więc liczba $t_n-u_n\sqrt{D}$ jest dodatnia. Mnożąc przez nią wszystkie trzy części nierówności (23), otrzymujemy z uwagi na (22)

$$1 < (x+y\sqrt{D})(t_n-u_n\sqrt{D}) < t+u\sqrt{D}. \tag{24}$$

Niech

$$a = xt_n - yu_nD, \qquad b = yt_n - xu_n.$$

Liczby a i b są więc całkowite oraz

$$(x+y\sqrt{D})(t_n-u_n\sqrt{D}) = a+b\sqrt{D}, \tag{25}$$

skąd, zmieniając znak przy $\sqrt{D}$, otrzymujemy

$$(x-y\sqrt{D})(t_n+u_n\sqrt{D}) = a-b\sqrt{D}.$$

Mnożąc ostatnie dwie równości stronami, dostajemy

$$(x^2-Dy^2)(t_n^2-Du_n^2) = a^2-Db^2,$$

co wobec (1) i (22) daje $a^2-Db^2=1$. Układ a, b jest więc rozwiązaniem równania (1) w liczbach całkowitych, a ponadto

$$1 < a+b\sqrt{D} < t+u\sqrt{D}$$

na mocy (24) i (25). Lewa część tej nierówności — jak widzieliśmy — dowodzi, że $a>0$ i $b>0$, prawa zaś — że $a<t$ i $b<u$, co jednak przeczy założeniu, że t, u jest najmniejszym rozwiązaniem dodatnim równania (1).

Istnienie liczby naturalnej n, dla której zachodzi wzór (16), tzn. konieczność rozważanego warunku, jest więc dowiedziona.

Twierdzenie 2 pozwala otrzymać wszystkie rozwiązania równania (1) w liczbach naturalnych z rozwiązania tego równania w liczbach naturalnych najmniejszych. Są to mianowicie układy liczb t_n, u_n (dla $n=1,2\ldots$), otrzymane ze wzoru (21). Liczby t_n i u_n są oczywiście tym większe, im większe jest n.

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 3. *Rozwiązań równania* (1) *w liczbach naturalnych jest nieskończenie wiele.*

Można podać proste wzory zwrotne dla t_n i u_n, pozwalające uniknąć liczb niewymiernych w rachunkach. Mianowicie

$$t_{n+1}+u_{n+1}\sqrt{D} = (t_n+u_n\sqrt{D})(t+u\sqrt{D}),$$

skąd wobec niewymierności liczby $\sqrt{D}$:

$$t_{n+1} = tt_n + Duu_n, \qquad u_{n+1} = ut_n + tu_n, \tag{26}$$

gdzie oczywiście

$$t_1 = t, \qquad u_1 = u.$$

PRZYKŁAD. Wyznaczmy kilka kolejnych rozwiązań dodatnich równania $x^2-2y^2=1$. Znaleźliśmy (p. str. 253), że najmniejszym rozwiązaniem dodatnim tego równania jest układ liczb 3, 2. Podstawiając $t=3$ i $u=2$ do (26), otrzymujemy wzory zwrotne:

$$t_{n+1} = 3t_n + 4u_n, \qquad u_{n+1} = 2t_n + 3u_n.$$

Dla $n=1$, znajdujemy z nich (wobec $t=t_1=3$ i $u=u_1=2$):

$$t_2 = 3\cdot 3 + 4\cdot 2 = 17, \qquad u_2 = 2\cdot 3 + 3\cdot 2 = 12,$$

a stąd dalej:

$$t_3 = 3t_2 + 4u_2 = 3\cdot 17 + 4\cdot 12 = 99, \qquad u_3 = 2t_2 + 3u_2 = 2\cdot 17 + 3\cdot 12 = 70,$$

$$t_4 = 3\cdot 99 + 4\cdot 70 = 577, \qquad u_4 = 2\cdot 99 + 3\cdot 70 = 408 \qquad \text{itd.}$$

Pierwsze 4 rozwiązania równania $x^2-2y^2=1$ w liczbach naturalnych są więc następujące:

3, 2, 17, 12, 99, 70, 577, 408.

Rozwiązania równania Pella mogą służyć do przybliżonego obliczania drugiego pierwiastka z liczb naturalnych. Mianowicie z równania tego wynika, że

$$x-y\sqrt{D} = 1:(x+y\sqrt{D}),$$

skąd

$$\frac{x}{y}-\sqrt{D} = \frac{1}{y(x+y\sqrt{D})} < \frac{1}{y^2\sqrt{D}} < \frac{1}{y^2}.$$

A więc: *jeżeli x, y jest rozwiązaniem dodatnim równania* (1), *to ułamek x/y przedstawia liczbę $\sqrt{D}$ z błędem mniejszym od odwrotności kwadratu mianownika* (z równania (1) wynika też w jednej chwili, że ułamek ten jest nieprzywiedlny).

Tak np. czwarte ze znalezionych rozwiązań dodatnich równania $x^2-2y^2=1$ daje ułamek 577/408, przedstawiający liczbę $\sqrt{2}$ z dokładnością do pięciu znaków dziesiętnych (gdyż $408^2>10^5$).

Aby przy tej metodzie obliczania pierwiastków szybciej osiągnąć większą dokładność, możemy przejść od razu od rozwiązania t_n, u_n do rozwiązania t_{2n}, u_{2n} za pomocą bardzo prostych wzorów zwrotnych. Mianowicie na mocy (21) jest

$$t_{2n}+u_{2n}\sqrt{D}=(t+u\sqrt{D})^{2n}=(t_n+u_n\sqrt{D})^2,$$

skąd na mocy (22)

$$t_{2n}=t_n^2+Du_n^2=t_n^2+(t_n^2-1)=2t_n^2-1, \qquad u_{2n}=2t_n u_n.$$

Od ułamka $\frac{t_n}{u_n}$ możemy więc przejść do ułamka

$$\frac{t_{2n}}{u_{2n}}=\frac{2t_n^2-1}{2t_n u_n}.$$

Tak np. z ułamka $t_3/u_3=99/70$, jako przybliżonej wartości liczby $\sqrt{2}$, otrzymujemy od razu ułamek $t_6/u_6=17601/13860$, dający tę liczbę już z dokładnością ośmiu znaków dziesiętnych.

Zauważmy jeszcze, że ze wzoru (21), dającego rozwiązania równania (1) w liczbach naturalnych, otrzymuje się z łatwością wzór, dający rozwiązania tego równania w liczbach całkowitych.

Jeżeli bowiem x, y jest rozwiązaniem równania (1) w liczbach naturalnych, to na mocy twierdzenia 2 zachodzi dla pewnego naturalnego n równość (16), która wobec równości

$$x-y\sqrt{D}=1/(x+y\sqrt{D})$$

daje

$$x-y\sqrt{D}=(t+u\sqrt{D})^{-n}.$$

Ponieważ zaś z rozwiązań x, y i $x, -y$ otrzymujemy przez zmianę znaków pozostałe dwa rozwiązania, należące do tejże czwórki, więc możemy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 4. *Każde rozwiązanie równania* (1) *w liczbach całkowitych x, y otrzymuje się ze wzoru*

$$x+y\sqrt{D}=\pm(t+u\sqrt{D})^n$$

dla odpowiedniej wartości całkowitej n.

Nawet bowiem rozwiązania $x=\pm 1, y=0$ są objęte tym wzorem (mianowicie dla $n=0$).

§ 3. Zastosowanie równania Pella. Wyznaczymy wszystkie trójkąty, których boki są kolejnymi liczbami naturalnymi, pole zaś — liczbą wymierną.

Są to tzw. *trójkąty wymierne średnioboczne.*

Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta, s — jego polem, a p — połową obwodu. Jak wiadomo,

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Oznaczając w danym razie długość średniego boku przez m, możemy przyjąć, że

$$a=m-1, \qquad b=m, \qquad c=m+1,$$

skąd $p=3m/2$ i

$$s=\sqrt{\frac{3m^2(m^2-4)}{16}}.$$

Pole ma być według założenia liczbą wymierną. Niech $s=a_1/b_1$ będzie ułamkiem nieprzywiedlnym. Zatem

$$\frac{3m^2(m^2-4)}{16}=\frac{a_1^2}{b_1^2}$$

czyli

$$3b_1^2m^2(m^2-4)=16a_1^2.$$

Ostatnia równość wskazuje, że $16a_1^2$ jest podzielne przez $b_1^2m^2$, a więc $4a_1$ jest podzielne przez b_1m, czyli $4a_1=kb_1m$, gdzie k jest liczbą naturalną; zatem

$$3(m^2-4)=k^2. \tag{27}$$

Wynika stąd, że k^2, a więc i k, jest podzielne przez 3, czyli że $k=3l$, gdzie l jest liczbą całkowitą. Z (27) otrzymujemy więc

$$m^2-4=3l^2. \tag{28}$$

Gdyby liczba m była nieparzysta, to liczba m^2-4 przy dzieleniu przez 4 dawałaby resztę 1, gdy tymczasem liczba $3l^2$ przy dzieleniu przez 4 reszty 1 dawać nie może, ponieważ dla l nieparzystego l^2 daje przy dzieleniu przez 4 resztę 1, a więc $3l^2$ resztę 3. Liczba m jest więc parzysta, czyli $m=2x$, gdzie x jest liczbą naturalną. Równość (28) daje zatem

$$4x^2-4=3l^2, \tag{29}$$

co dowodzi, że l jest liczbą parzystą, czyli $l=2y$ dla pewnego y naturalnego. Po podstawieniu i podzieleniu przez 4 obu stron równości (29) otrzymujemy $x^2-1=3y^2$ czyli

$$x^2-3y^2=1. \tag{30}$$

A więc: *jeżeli długości a, b, c boków trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi, pole zaś — liczbą wymierną, to*

$$a=2x-1, \quad b=2x, \quad c=2x+1,$$

gdzie x jest liczbą naturalną, spełniającą równanie (30) *przy pewnym naturalnym y.*

Pole trójkąta wynosi wówczas

$$s=\sqrt{3x^2(x^2-1)}=\sqrt{3x^2\cdot 3y^2}=3xy,$$

jest zatem liczbą nietylko wymierną, ale i naturalną.

Wyznaczymy teraz kolejno kilka takich trójkątów średniobocznych.

Najmniejszym rozwiązaniem dodatnim równania (30) jest układ $t=2$, $u=1$ (p. str. 253), skąd jako pierwszy trójkąt średnioboczny otrzymujemy tzw. *trójkąt pytagorejski* o bokach

3, 4, 5.

Dla rozwiązania równania (30) mamy dalej w myśl (26) wzory zwrotne:

$$t_{n+1}=2t_n+3u_n, \quad u_{n+1}=t_n+2u_n.$$

Dla $n=1$ otrzymujemy tu wobec $t_1=2$ i $u_1=1$

$$t_2=2\cdot 2+3\cdot 1=7, \quad u_2=2+2\cdot 1=4,$$

skąd jako drugi trójkąt średnioboczny otrzymujemy tzw. *trójkąt indyjski* o bokach

13, 14, 15.

Dalej znajdujemy podobnie $t_3=2\cdot 7+3\cdot 4=26$, skąd jako trzeci trójkąt średnioboczny otrzymujemy trójkąt o bokach

51, 52, 53.

Następne trzy trójkąty mają boki średnie 194, 724 i 2702. Pola pierwszych sześciu trójkątów wynoszą kolejno

6, 84, 2370, 16296, 226974 i 3161340.

Z twierdzenia 3 o równaniu Pella wynika, że istnieje nieskończenie wiele trójkątów o polu wymiernym, których boki są kolejnymi liczbami naturalnymi.