

5. Sprawdzić, że dla każdej zasady $g > 2$ mamy

$$\frac{1}{(g-1)^2} = (0, \overline{0123} \dots \overline{g-5} \overline{g-1})_g^{-1}.$$

Dowód. Prawa strona tego wzoru jest równa

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{g^2} + \frac{2}{g^3} + \frac{3}{g^4} + \dots + \frac{g-5}{g^{g-2}} + \frac{g-1}{g^{g-1}} \right) \left(1 + \frac{1}{g^{g-1}} + \frac{1}{g^{2(g-1)}} + \dots \right) = \\ & = \left[\frac{g^{g-5}-1}{g^{g-5}(g-1)^2} - \frac{g-5}{g^{g-2}(g-1)} + \frac{g-1}{g^{g-1}} \right] \frac{g^{g-1}}{g^{g-1}-1} = \frac{1}{(g-1)^2}. \end{aligned}$$

Por. ćwiczenie 4 ze str. 224.

6. Którą cyfrą po przecinku jest ostatnia różna od zera cyfra rozwinięcia dziesiętnego normalnego liczby 2^{-n} (gdzie n jest liczbą naturalną), a którą liczby 5^{-n} ?

Odpowiedź: n -tą w obu przypadkach.

7. Którą cyfrą po przecinku jest pierwsza różna od zera cyfra rozwinięcia dziesiętnego normalnego liczby 2^{-10} ? 2^{-100} ? 2^{-1000} ? 5^{-10} ? 5^{-100} ? 5^{-1000} ?

Odpowiedź. Jak łatwo obliczyć, pierwsza różna od zera cyfra rozwinięcia dziesiętnego normalnego liczby 2^{-n} (gdzie n jest liczbą naturalną) występuje na miejscu $n - E(n \log_{10} 2)$ po przecinku, a liczby 5^{-n} — na miejscu $n - E(n \log_{10} 5)$ po przecinku. Ponieważ $\log_{10} 2 = 0,30103\dots$, a $\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2$, więc dla liczb:

2^{-10}	2^{-100}	2^{-1000}	5^{-10}	5^{-100}	5^{-1000}
są to miejsca:					
4.	31.	302.	7.	70.	699.

¹⁾ J. W. L. Glaisher, Messenger of Mathematics, tom 2 (1873), str. 188.

ROZDZIAŁ X

RÓWNANIE PYTAGORASA I JEGO UOGÓLNIENIA

§ 1. Równanie $x^2 + y^2 = z^2$ w liczbach całkowitych. Zajmiemy się rozwiązywaniem w liczbach całkowitych równania

$$(1) \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

zwanego *równaniem Pytagorasa*.

Równanie to gra — jak wiadomo — podstawową rolę w trygonometrii i w geometrii analitycznej, a jego szczególny przypadek dla $x=y$ wiąże się z istnieniem liczb niewymiernych.

Wyłączmy rozwiązania oczywiste, w których jedna z liczb x, y jest zerem; z pozostałych możemy ograniczyć się do rozwiązań w liczbach naturalnych, gdyż zmiana znaku przy niewiadomych nie zmienia samego równania.

Nazywać będziemy *rozwiązaniem właściwym* każde takie rozwiązanie równania (1), w którym liczby x, y, z są naturalne i nie mają wspólnego dzielnika większego od jedności.

Jeżeli ξ, η, ζ jest rozwiązaniem właściwym, d zaś — jakąkolwiek liczbą naturalną, to

$$(2) \quad x = d\xi, \quad y = d\eta, \quad z = d\zeta$$

też jest rozwiązaniem x, y, z równania (1).

Istotnie, jeżeli $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$, to mnożąc obie strony przez d^2 , otrzymamy w myśl (2) równanie (1).

Na odwrót, jeżeli x, y, z jest rozwiązaniem równania (1), to istnieje taka liczba naturalna d i takie rozwiązanie właściwe ξ, η, ζ , że zachodzą wzory (2).

Istotnie, niech liczby naturalne x, y, z spełniają równanie (1); oznaczmy przez d ich największy wspólny dzielnik i przyjmijmy:

$$(3) \quad \xi = x/d, \quad \eta = y/d, \quad \zeta = z/d;$$

są to liczby naturalne. Z równania (1), po podzieleniu obu stron przez d^2 , wynika w jednej chwili wobec (3), że $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$, co

dowodzi, że ξ, η, ζ jest rozwiązaniem naturalnym równania (1). Trzeba jeszcze tylko okazać, że jest to rozwiązanie właściwe. Gdyby było inaczej, to liczby ξ, η, ζ miałyby wspólny dzielnik większy od jednośc, lecz jest to niemożliwe, gdyż w myśl wzoru (3) liczby te otrzymaliśmy z liczb x, y, z , dzieląc je przez ich największy wspólny dzielnik.

Podzielmy rozwiązania naturalne równania Pytagorasa na klasy, zaliczając do d -tej klasy wszystkie te, w których liczby x, y, z mają jeden i ten sam największy wspólny dzielnik d . Z dowiedzionej własności rozwiązań właściwych wynika od razu, że dla otrzymania wszystkich rozwiązań d -tej klasy trzeba tylko pomnożyć przez d wszystkie rozwiązania właściwe. Wobec tego możemy się przy rozwiązywaniu równania Pytagorasa ograniczyć do rozwiązań właściwych, nie uszczuplając przez to ogólności rozważań.

Załóżmy, że x, y, z jest rozwiązaniem właściwym równania (1). Okażemy, że jedna z liczb x, y jest parzysta, a druga nieparzysta. Istotnie, gdyby było inaczej, to obie byłyby parzyste lub obie nieparzyste. W pierwszym przypadku liczba $x^2 + y^2 = z^2$, a więc i liczba z , wypadłaby parzysta; liczby x, y, z miałyby zatem wspólny dzielnik 2, co przeczy założeniu, że są rozwiązaniem właściwym. W drugim przypadku każdy z kwadratów x^2, y^2 dawałby przy dzieleniu przez 4 resztę 1, a więc liczba z^2 — resztę 2; tymczasem kwadrat każdej liczby parzystej jest podzielny przez 4.

Ostatecznie więc możemy poprzestać na wyznaczeniu tylko tych rozwiązań właściwych, dla których liczba x jest nieparzysta, a liczba y parzysta, gdyż pozostałe rozwiązania właściwe otrzymamy przez prostą zamianę liter x i y .

Załóżmy wobec tego, że x, y, z jest rozwiązaniem właściwym, w którym liczba x jest nieparzysta, a liczba y parzysta; liczba z wypadnie wówczas z równania (1) nieparzysta. Równanie (1) możemy napisać w postaci

$$(4) \quad y^2 = (z+x)(z-x).$$

Liczby $z+x$ i $z-x$ są obie parzyste; możemy więc przyjąć, że

$$(5) \quad z+x=2a, \quad z-x=2b,$$

gdzie a i b są liczbami naturalnymi.

Stąd

$$z = a + b, \quad x = a - b.$$

Z równości tych wynika, że liczby a i b muszą być względnie pierwsze. Istotnie, gdyby posiadały wspólny dzielnik $\delta > 1$, to byłoby

$$z = k\delta, \quad x = l\delta,$$

skąd

$$y^2 = z^2 - x^2 = (k^2 - l^2)\delta^2;$$

liczba y^2 byłaby zatem podzielna przez δ^2 , a więc y przez δ , i liczba $\delta > 1$ byłaby wspólnym dzielnikiem liczb x, y, z , co przeczy założeniu, że są one rozwiązaniem właściwym.

Liczba y jest — jak założyliśmy — parzysta, możemy więc przyjąć $y = 2c$. Wobec (5) równanie (4) daje $4c^2 = 4ab$ czyli

$$(6) \quad c^2 = ab.$$

Rozwijając liczby a i b na czynniki pierwsze, stwierdzamy, że każdy czynnik pierwszy wchodzi do tych rozwinięć w potęgę nieparzystą.

Istotnie, gdyby czynnik p wchodził np. do rozwinięcia liczby a w potęgę nieparzystą, to wchodziłby też w potęgę nieparzystą do rozwinięcia iloczynu ab , gdyż liczba b , jako pierwsza względem a , czynnika p nie posiada. Jest to jednak niemożliwe, ponieważ wobec (6) wszystkie czynniki pierwsze wchodzi do rozwinięcia iloczynu ab w potęgach parzystych.

Skoro wszystkie czynniki pierwsze rozwinięcia liczby a są — jak okazaliśmy — w potęgach parzystych, to a jest kwadratem czyli $a = m^2$. Podobnie $b = n^2$. Stąd

$$z = a + b = m^2 + n^2, \quad x = a - b = m^2 - n^2,$$

a z równości $c^2 = ab = m^2 n^2$ i $y = 2c$ wynika, że

$$y = 2mn.$$

Dowiedliśmy więc, że jeżeli x, y, z jest rozwiązaniem właściwym równania (1) i jeżeli x jest liczbą nieparzystą, to musi być

$$(7) \quad x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2,$$

gdzie m i n są liczbami naturalnymi. Liczby m i n są względnie pierwsze, gdyż takimi są liczby $a = m^2$ i $b = n^2$. Jedna z nich jest parzysta, a druga nieparzysta: istotnie, nie mogą być obie parzyste,

bo nie byłyby względnie pierwsze, nie mogą też być obie nieparzyste, bo wówczas liczby x, y, z byłyby wszystkie trzy parzyste. Przy tym $m > n$, gdyż x jest liczbą dodatnią.

Na odwrót, jeżeli m i n (gdzie $m > n$) są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, z których jedna (którakolwiek) jest parzysta, a druga nieparzysta, to wyznaczając x, y, z ze wzorów (7), otrzymamy rozwiązanie właściwe równania (1).

Istotnie, po pierwsze, liczby x, y, z wyznaczone ze wzorów (7) są przy wszelkich całkowitych m i n rozwiązaniem równania (1), gdyż zachodzi tożsamość

$$(8) \quad (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2;$$

po drugie, wobec $m > n > 0$ wartości liczb x, y, z wypadną ze wzorów (7) naturalne; wreszcie po trzecie, jeżeli m i n są względnie pierwsze, to x, y, z nie mają wspólnego dzielnika większego od jedności, ponieważ gdyby liczby x i z miały wspólny dzielnik $\delta > 1$, oczywiście nieparzysty (co wynika ze wzorów $x = m^2 - n^2$ i $z = m^2 + n^2$), to z uwagi na wynikające z (7) równości

$$(9) \quad 2m^2 = x + z, \quad 2n^2 = z - x$$

liczby m^2 i n^2 musiałyby być jednocześnie podzielne przez δ , co niemożliwe, skoro m i n są względnie pierwsze.

Wzory (9) wskazują nadto, że różnym układom m, n odpowiadają różne rozwiązania x, y, z .

Uzyskane wyniki możemy wypowiedzieć jako następujące

Twierdzenie 1. Wszystkie rozwiązania właściwe równania

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

w których x jest liczbą nieparzystą, otrzymujemy ze wzorów

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2,$$

biorąc za m, n wszystkie pary liczb naturalnych względnie pierwszych, w których jedna (którakolwiek) z liczb m, n jest parzysta, a druga nieparzysta oraz $m > n$.

Każde rozwiązanie właściwe otrzymujemy w ten sposób tylko jeden raz.

Aby więc wszystkie te rozwiązania wypisać systematycznie, możemy brać za m kolejne wartości 2, 3, 4, ... i dla każdej z nich brać za n kolejno wszystkie liczby naturalne pierwsze względem m , mniejsze od m i w razie nieparzystego m — tylko parzyste.

Oto tabliczka dwunastu pierwszych rozwiązań, ułożonych w ten sposób:

m	n	x	y	z
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
8	1	63	16	65

Godne uwagi jest rozwiązanie pierwsze, dające trzy kolejne liczby 3, 4, 5. Jest to jedyne rozwiązanie w trzech kolejnych liczbach naturalnych.

Istotnie, niech trzy kolejne liczby naturalne:

$$n-1, \quad n, \quad n+1,$$

spełniają równanie

$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2,$$

skąd po łatwej redukcji

$$n = 4n.$$

Ponieważ n jest — jak zakładamy — liczbą naturalną, więc możemy obie strony tej równości podzielić przez n . Dostajemy w ten sposób $n = 4$, czyli właśnie rozwiązanie 3, 4, 5.

§ 2. Rozwiązania naturalne o dwu liczbach kolejnych. Wszystkie takie rozwiązania równania (1) są właściwe, gdyż dwie liczby naturalne kolejne są zawsze względnie pierwsze.

Możliwe są cztery tylko przypadki:

$$z - x = 1, \quad z - y = 1, \quad x - y = 1, \quad y - x = 1,$$

w których dwie spośród trzech liczb naturalnych x, y, z , spełniających równanie (1), są kolejne — jak to czytelnik sprawdzi w jednej chwili.

Ze wzorów (7) wynika, że przypadek $z-x=1$ nie daje rozwiązań równania (1), gdyż byłoby wówczas $m^2+n^2-(m^2-n^2)=1$ czyli $2n^2=1$, co niemożliwe.

W przypadku $z-y=1$ jest

$$m^2+n^2-2mn=1 \quad \text{czyli} \quad (m-n)^2=1,$$

skąd wobec $m>n$ musi być

$$m-n=1 \quad \text{czyli} \quad m=n+1.$$

Zatem:

$$x=m^2-n^2=(n+1)^2-n^2=2n+1,$$

$$y=2n(n+1),$$

$$z=y+1=2n(n+1)+1,$$

a przeto wszystkie rozwiązania w przypadku $z-y=1$ zawarte są we wzorach:

$$x=2n+1, \quad y=2n(n+1), \quad z=2n(n+1)+1,$$

gdzie $n=1, 2, 3, \dots$

Oto dziesięć pierwszych takich rozwiązań:

n	x	y	z
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
6	13	84	85
7	15	112	113
8	17	144	145
9	19	180	181
10	21	220	221

W przypadku, gdy $x-y=1$, mamy $m^2-n^2-2mn=1$ czyli

$$(m-n)^2-2n^2=1.$$

Niech

$$(10) \quad u=m-n, \quad v=n;$$

są to dwie liczby naturalne, spełniające tzw. równanie Pella:

$$(11) \quad u^2-2v^2=1.$$

Z równań (10) znajdujemy

$$m=u+v, \quad n=v,$$

skąd:

$$x=m^2-n^2=u^2+2uv,$$

$$y=2mn=2uv+2v^2,$$

$$z=m^2+n^2=u^2+2uv+2v^2,$$

a przeto wszystkie rozwiązania x, y, z w przypadku $x-y=1$ objęte są wzorami:

$$(12) \quad x=u^2+2uv, \quad y=2uv+v^2, \quad z=u^2+2uv+2v^2,$$

gdzie u i v są liczbami naturalnymi, spełniającymi równanie Pella.

Wreszcie, w przypadku $y-x=1$ mamy $2mn-m^2+n^2=1$ czyli

$$(m+n)^2-2m^2=1.$$

Niech

$$(13) \quad u=m+n, \quad v=m.$$

Widzimy, że znów otrzymujemy równanie Pella, a ze wzorów (13) znajdujemy

$$m=v, \quad n=u-v,$$

skąd

$$x=-u^2+2uv,$$

$$y=2uv-2v^2,$$

$$z=u^2-2uv+2v^2.$$

Tymi wzorami są więc objęte wszystkie rozwiązania w przypadku $y-x=1$.

Łącząc oba ostatnie przypadki, możemy zatem powiedzieć, że rozwiązania naturalne równania (1), dla których $x-y=\pm 1$, są zawarte we wzorach:

$$(14) \quad x=\pm u^2+2uv, \quad y=2uv\pm 2v^2, \quad z=u^2\pm 2uv+2v^2,$$

gdzie należy roziać rozszedzie znaki jednocześnie górne lub jednocześnie dolne i gdzie u, v są liczbami naturalnymi, spełniającymi równanie Pella.

Najmniejszym rozwiązaniem równania Pella w liczbach naturalnych jest, jak łatwo wiedzieć,

$$u=3, \quad v=2;$$

biorąc we wzorach (14) znak dolny, otrzymamy:

$$x=3, \quad y=4, \quad z=5,$$

biorąc zaś znak górny, otrzymamy:

$$x=21, \quad y=20, \quad z=29.$$

Następnym rozwiązaniem równania Pella jest

$$u=17, \quad v=12,$$

któremu w myśl wzorów (14) odpowiadają przy znaku dolnym wartości:

$$x=119, \quad y=120, \quad z=169,$$

a przy znaku górnym wartości:

$$x=697, \quad y=696, \quad z=985.$$

W § 2 udowodnimy (p. str. 257), że równanie Pella ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych. Wynika stąd, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań równania $x^2 + y^2 = z^2$ w kolejnych liczbach naturalnych x i z .

CWICZENIA. 1. Dowieść, że jeżeli liczby całkowite x, y, z spełniają równanie $x^2 + y^2 = z^2$, to co najmniej jedna z nich jest podzielna przez 3, co najmniej jedna przez 4 i co najmniej jedna przez 5, zatem że $60 | xyz$.

Dowód. Oczywiście można założyć, że x, y, z jest rozwiązaniem właściwym i że x jest liczbą nieparzystą. Na mocy twierdzenia 1 zachodzą wówczas wzory (7) i jedna z liczb m, n jest parzysta. Zatem liczba $y = 2mn$ jest podzielna przez 4.

Zarazem na mocy (7) jest

$$(*) \quad xyz = 2mn(m^4 - n^4).$$

Jeżeli m nie jest podzielne przez 3, to w myśl małego twierdzenia Fermata jest $m^2 \equiv 1 \pmod{3}$, skąd $m^4 \equiv 1 \pmod{3}$, czyli $m^4 - 1$ jest podzielne przez 3. Jeżeli m nie jest podzielne przez 5, to w myśl tegoż twierdzenia jest $m^4 \equiv 1 \pmod{5}$ czyli $m^4 - 1$ jest podzielne przez 5. To samo dotyczy liczby $n^4 - 1$. Wynika stąd, że jeżeli ani $3 | m$, ani $3 | n$, to $3 | m^4 - n^4$; tak samo jest z liczbą 5. Wobec $4 | y$ i $(*)$ iloczyn xyz jest więc podzielny przez 60, c. b. d. o.

2. Dowieść, że jeżeli liczby naturalne x, y, z spełniają równanie $x^2 + y^2 = z^2$, to dla

$$a = x(4y^2 - z^2), \quad b = y(4x^2 - z^2), \quad c = 4xyz$$

każda z liczb

$$(*) \quad a^2 + b^2, \quad a^2 + c^2, \quad b^2 + c^2$$

jest kwadratem liczby naturalnej.

Dowód. Jak łatwo sprawdzić, jest

$$a^2 + b^2 = z^6, \quad a^2 + c^2 = x^2(4y^2 + z^2)^2, \quad b^2 + c^2 = y^2(4x^2 + z^2)^2.$$

W szczególności dla

$$x=3, \quad y=4, \quad z=5$$

jest

$$a=117, \quad b=44, \quad c=240$$

—liczby, znalezione przez P. Halcke'go w 1719 r.

3. Dowieść, że jeżeli dla a, b, c naturalnych liczby $\left(\frac{x}{2}\right)$ są kwadratami, to jest tak również dla liczb ab, ac, bc .

4. Dowieść, że równanie $x^2 + y^2 = z^4$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych względnie pierwszych.

Odpowiedź. Np.

$$x = 8n(n^2 - 4), \quad y = n^4 - 24n^2 + 16, \quad z = n^2 + 4$$

dla $n = 3, 5, \dots$ Gdyby dla liczby pierwszej p było $p | y$ i $p | z$, to byłaby ona nieparzysta, gdyż liczba z jest nieparzysta, a zarazem byłoby $p | z^2 - y$, skąd $p | n$, gdyż $z^2 - y = 32n^2$. Jest to jednak niemożliwe wobec $p | z$, gdyż $z = n^2 + 4$.

5. Dowieść, że najogólniejszym rozwiązaniem równania $x^2 - y^2 = z^5$ w liczbach wymiernych różnych od zera jest

$$(**) \quad x = a^8 b^{10} (a - b)^{-2}, \quad y = a^5 b^7 (a - b)^{-2}, \quad z = a^2 b^4 (a - b)^{-1},$$

gdzie a i b są liczbami wymiernymi oraz $0 \neq a \neq b \neq 0$.

Dowód. Łatwo sprawdzić, że tak określone liczby x, y, z spełniają równanie, są wymierne i różne od zera. Jeżeli liczby x', y', z' też czynią zadość tym warunkom, to liczby

$$a = x' y'^{-2} z', \quad b = x'^{-1} y' z'$$

są — jak łatwo widzieć — różne od zera i

$$a - b = (x'^2 - y'^3) y'^{-2} x'^{-1} z' = z'^6 y'^{-2} x'^{-1} \neq 0;$$

podstawiając je za a i b do wzorów (**), otrzymujemy

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

6. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n równanie $x^2 - y^2 = z^n$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych.

Dowód. Wynika łatwo z równości $2^2 - 1^2 = 3$ i z tożsamości

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2.$$

§ 3. Uogólnienia równania Pytagorasa. Równanie (1) możemy uogólniać w dwu różnych kierunkach. Możemy, pozostawiając stopień równania, zwiększać liczbę niewiadomych, otrzymując równanie $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ itd., ogólnie

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x_{n+1}^2,$$

albo, pozostawiając liczbę niewiadomych, zwiększać stopień równania, otrzymując równanie $x^3 + y^3 = z^3$ itd., ogólnie

$$x^n + y^n = z^n$$

czyli tzw. *równanie Fermata*.

Zajmiemy się naprzód pierwszym uogólnieniem. Wyznamy wszystkie rozwiązania naturalne równania

$$(15) \quad x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

Zauważmy przede wszystkim, że przynajmniej dwie spośród liczb x, y, z muszą być parzyste. Gdyby bowiem wszystkie trzy były nieparzyste, to suma t^2 wypadłaby — jak łatwo widzieć — formy $4k+3$, gdy tymczasem — jak wykazaliśmy na str. 90 w dowodzie twierdzenia 14 Rozdziału IV — kwadrat liczby nieparzystej zawsze przystaje do 1 modulo 8. Gdyby zaś jedna tylko z liczb x, y, z była parzysta, to suma t^2 wypadłaby formy $4k+2$, gdy tymczasem kwadrat liczby parzystej jest zawsze formy $4k$.

Ponieważ porządek składników nie gra roli, więc możemy założyć, że parzyste są liczby y i z :

$$y = 2l, \quad z = 2m,$$

gdzie l i m są liczbami naturalnymi. Liczba t musi być oczywiście (dla każdego rozwiązania naturalnego) większa od x ; możemy więc napisać

$$(16) \quad t - x = u,$$

gdzie u jest liczbą naturalną. Będziemy wobec tego mieli

$$(x+u)^2 = x^2 + 4l^2 + 4m^2,$$

skąd, po redukcji, $2xu + u^2 = 4l^2 + 4m^2$ czyli

$$(17) \quad u^2 = 4l^2 + 4m^2 - 2xu.$$

Równanie (17), w którym po prawej stronie mamy same liczby parzyste, wskazuje, że u^2 , a więc i u , jest liczbą parzystą. Niech

$$u = 2n.$$

Równanie (17) przyjmie wówczas, po podzieleniu przez 4, kształt

$$n^2 = l^2 + m^2 - xn.$$

Przepisując je w postaci $l^2 + m^2 = n(n+x)$, widzimy, że n musi być dzielnikiem sumy $l^2 + m^2$. Przepisując je zaś w postaci

$$(18) \quad x = \frac{l^2 + m^2 - n^2}{n},$$

dostajemy na mocy (16)

$$t = x + u = x + 2n = \frac{l^2 + m^2 + n^2}{n}.$$

Wzór (18) wskazuje ponadto, że $n^2 < l^2 + m^2$.

Dowiedliśmy więc, że wszystkie rozwiązania naturalne równania (15) dla y i z parzystych są zawarte we wzorach:

$$(19) \quad x = \frac{l^2 + m^2 - n^2}{n}, \quad y = 2l, \quad z = 2m, \quad t = \frac{l^2 + m^2 + n^2}{n},$$

w których l, m, n są liczbami naturalnymi, przy czym n jest dzielnikiem sumy $l^2 + m^2$ mniejszym od $\sqrt{l^2 + m^2}$.

Z łatwością możemy dowieść, że i odwrotnie, jeżeli tylko liczby l, m, n spełniają powyższe warunki, to liczby x, y, z, t , wyznaczone ze wzorów (19), stanowią rozwiązanie naturalne równania (15). Że liczby x, y, z, t są naturalne, jest rzeczą oczywistą na mocy wzorów (19) i warunków dla l, m, n . Że zaś liczby te spełniają równanie (15), wynika to z tożsamości

$$\left(\frac{l^2 + m^2 - n^2}{n}\right)^2 + (2l)^2 + (2m)^2 = \left(\frac{l^2 + m^2 + n^2}{n}\right)^2.$$

Wreszcie, każde rozwiązanie naturalne równania (15) otrzymuje się ze wzorów (19) tylko jeden raz. Istotnie, liczby l, m, n są przez liczby x, y, z, t określone jednoznacznie, gdyż w myśl wzorów (19) mamy:

$$l = \frac{y}{2}, \quad m = \frac{z}{2}, \quad n = \frac{t-z}{2},$$

a zatem równości

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2, \quad t_1 = t_2$$

pociągają za sobą równości

$$l_1 = l_2, \quad m_1 = m_2, \quad n_1 = n_2.$$

Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 2. *Wszystkie rozwiązania naturalne równania*

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2,$$

w których y i z są liczbami parzystymi, otrzymujemy ze wzorów:

$$x = \frac{l^2 + m^2 - n^2}{n}, \quad y = 2l, \quad z = 2m, \quad t = \frac{l^2 + m^2 + n^2}{n},$$

biorąc za l, m wszystkie pary liczb naturalnych, a za n wszystkie dzielniki sumy $l^2 + m^2$, mniejsze od swych dopełniających. Każde rozwiązanie otrzymujemy w ten sposób tylko raz jeden.

Twierdzenie to zawiera zarazem sposób kolejnego wyznaczania tych rozwiązań.

Łatwo widzieć, że jeżeli nie chcemy otrzymywać rozwiązań, które różnią się tylko порядkiem niewiadomych, to możemy to osiągnąć, biorąc stale $m \leq l$, a n dobierając tak, by liczba x wypadła nieparzysta. W ten sposób pominiemy tylko te rozwiązania, w których wszystkie niewiadome są parzyste.

Oto dziesięć pierwszych rozwiązań, wyznaczonych w ten sposób:

l	m	$l^2 + m^2$	n	x	y	z	t
1	1	2	1	1	2	2	3
2	2	8	1	7	4	4	9
3	1	10	2	3	6	2	7
			1	17	6	6	19
3	3	18	2	7	6	6	11
			3	3	6	6	9
4	2	20	4	1	8	4	9
4	4	32	1	31	8	8	33
5	1	26	1	25	10	2	27

Zbadanie analogiczną drogą równań o większej liczbie niewiadomych pozostawiamy czytelnikowi.

Nieco odmiennym uogólnieniem równania Pytagorasa jest równanie

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

(o współczynnikach a, b i c całkowitych), którym zajmowali się Lagrange, Legendre, Gauss i Dedekind. Ogólne rozwiązanie tego równania podał Dickson¹⁾.

W związku z badaniem równania Pytagorasa pozostają tożsamości:

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

i ogólnie

$$(2n^2 + n)^2 + (2n^2 + n + 1)^2 + \dots + (2n^2 + 2n)^2 = \\ = (2n^2 + 2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n + 2)^2 + \dots + (2n^2 + 3n)^2$$

dla wszelkich n naturalnych. Sprawdzenie ich nie nastręcza trudności.

Uogólnieniami tożsamości (8) są tożsamości:

$$(m^2 - n^2 - p^2)^2 + (2mn)^2 + (2np)^2 = (m^2 + n^2 + p^2)^2, \\ (m^2 - n^2 - p^2 - q^2)^2 + (2mn)^2 + (2mp)^2 + (2mq)^2 = (m^2 + n^2 + p^2 + q^2)^2, \\ (m^2 - n^2 + p^2 - q^2)^2 + (2mn)^2 + (2mq)^2 + (2np)^2 + (2pq)^2 = \\ = (m^2 + n^2 + p^2 + q^2)^2 \quad \text{itd.}$$

Należy tu także tożsamość Matsunago:

$$(m^4 - n^4)^2 + (4m^2n^2)^2 + [2mn(m^2 - n^2)]^2 = (m^2 + n^2)^4,$$

z której wynika, że równanie $x^2 + y^2 + z^2 = t^4$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych.

ĆWICZENIA. 1²⁾. Dowieść, że dla x nieparzystych liczb

$$y = \frac{x^2 - 1}{2}, \quad z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2}, \quad t = z + 1$$

są całkowite i spełniają równanie $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$.

Dowód wynika z tożsamości

$$n^2 + \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n^2 - 3}{8}\right)^2 = \left(\frac{n^4 + 5}{8}\right)^2.$$

¹⁾ L. E. Dickson, *Einführung in die Zahlentheorie*, Lipsk-Berlin 1931, str. 112 i następne.

²⁾ Ćwiczenie to jest zaczerpnięte z książki niewiadomego autora *Les amusements mathématiques*, Lille 1749, str. 168 (Problème 36).

2. Dowieść, że przy wszelkim naturalnym D istnieje nieskończenie wiele rozwiązań równania $x^2 - Dy^2 = z^2$ w liczbach x, y, z całkowitych.

Dowód oprzeć można na tym, że dla m i n naturalnych liczby

$$x = m^2 + Dn^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 - Dn^2,$$

tworzą układ, będący rozwiązaniem tego równania.

3. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ równanie

$$(*) \quad t^n = u^{n-1} + v^{n-2} + \dots + y^3 + z^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych $t, u, v, \dots, y, z$.

Dowód. Jest

$$4^3 = 8^2, \quad 9^4 = 18^3 + 27^2, \quad 2^5 = 1^4 + 3^3 + 2^2, \quad 2^6 = 2^5 + 1^4 + 3^3 + 2^2$$

i ogólnie dla $n > 5$

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^5 + 1^4 + 3^3 + 2^2,$$

co dowodzi, że dla każdego naturalnego $n > 2$ równanie $(*)$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych. Ale z jednego rozwiązania otrzymuje się nieskończenie wiele, mnożąc wartości $t, u, v, \dots, y, z$ odpowiednio przez liczby

naturalne $\frac{n!}{k^n}, \frac{n!}{k^{n-1}}, \frac{n!}{k^{n-2}}, \dots, \frac{n!}{k^3}, \frac{n!}{k^2}$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną.

§ 4. Równanie Fermata. Innym uogólnieniem równania Pytagorasa jest równanie

$$(20) \quad x^n + y^n = z^n$$

gdzie n jest liczbą naturalną (por. str. 238).

Jeszcze w XVII wieku Fermat wypowiedział bez dowodu twierdzenie, że dla wykładników naturalnych $n > 2$ równanie (20) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z . Dotychczas twierdzenie to zostało dowiedzione tylko dla poszczególnych wykładników, np. dla wszystkich wykładników $n > 2$ nie większych od 7000, z czego dla $n = 6887$ dopiero w 1938 r. przez Gottschalka¹⁾.

Ogólnego dowodu (tj. dla wszystkich $n > 2$ naturalnych) dotąd nie posiadamy²⁾.

Przed kilkudziesięciu laty matematyk P. Wolfskehl z Darmstadtu zapisał Towarzystwu Naukowemu w Getyndze sto tysięcy marek, które miały być wypłacone jako nagroda temu, kto bądź znajdzie ogólny dowód twierdzenia Fermata, bądź wykaże

¹⁾ E. Gottschalk, *Mathematische Annalen*, tom 115 (1938), str. 157.

²⁾ R. Noguès poświęcił wielkiemu twierdzeniu Fermata całą książkę *Théorème de Fermat. Son histoire*, Paryż 1932, stronic 179.

jego fałszywość na jednym choćby przykładzie. Mimo że po 1918 r. nagroda ta uległa dewaluacji, wiele osób (przeważnie nie matematyków) ogłaszało własnym nakładem coraz to nowe, a stale błędne dowody tego twierdzenia.

Zrozumienie, o co idzie w twierdzeniu Fermata, wymaga zaledwie elementarnych wiadomości matematycznych. Nie wynika stąd jednak, aby miał istnieć dowód elementarny tego twierdzenia.

„Innego zdania — pisał F. Klein — jest w tym względzie szersza publiczność. Skoro się tylko wiadomość o nagrodzie rozeszła za pośrednictwem dzienników — zostaliśmy zasypani «dowodami». Brali w tym udział ludzie wszelkich zawodów: inżynierowie, nauczyciele ludowi, duchowni, bankier, wiele pań itd. Wspólne im wszystkim było tylko to, że nie mieli żadnego pojęcia o poważnym matematycznym znaczeniu zagadnienia, ani też nie starali się o nim poinformować, licząc jedynie na to, że szczęśliwym trafem wpadną na dowód, co oczywiście wychodziło bez wyjątku wręcz na opak”.

F. Lindemann (ten sam, który w 1882 r. udowodnił przestępność liczby π) opublikował w 1901 r. 17-stronicową rozprawę, mającą zawierać długo poszukiwany dowód „ostatniego twierdzenia” Fermata. Gdy mu wskazano zasadniczy błąd, Lindemann niezrażony spędził większą część następnych siedmiu lat na próbach usunięcia błędnej przesłanki, nie dającej się naprawić, i w 1907 r. ogłosił 63 stronicę dowodu, który jednak był pozorny wskutek drobnej omyłki na samym początku¹⁾.

Dowód twierdzenia Fermata jest trudny już dla najmniejszego wykładnika, mianowicie dla $n = 3$, to też wszystkie podawane dotychczas „dowody” tego twierdzenia zawodzą już dla $n = 3$. Najłatwiejszy jest dowód dla $n = 4$; podajemy go tutaj. Dowody dla innych wykładników $n < 10$, które są znacznie trudniejsze, podamy dopiero w Rozdziałach XVII i XIX.

Udowodnimy tu nawet nieco ogólniejsze

Twierdzenie 3. Równanie

$$(21) \quad x^4 + y^4 = z^2$$

nie może zachodzić dla x, y, z naturalnych.

¹⁾ Ob. *The Mathematical Student*, tom 12, Madras 1944, str. 6.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją liczby naturalne x, y, z , spełniające równanie (21); innymi słowy, że istnieją liczby naturalne z , których kwadraty są sumami czwartych potęg dwu liczb naturalnych. Wśród takich liczb z musi istnieć najmniejsza. Oznaczmy ją przez c i niech

$$(22) \quad c^2 = a^4 + b^4$$

będzie rozkładem jej kwadratu na sumę czwartych potęg liczb naturalnych a i b .

Gdyby a i b miały wspólny dzielnik $d > 1$, byłoby $a = da_1$ i $b = db_1$ dla pewnych liczb naturalnych a_1 i b_1 , skąd na mocy (22) $d^4 | c^2$, a zatem $c = d^2 c_1$ dla pewnej liczby naturalnej $c_1 < c$. Zrazem byłoby $a_1^4 + b_1^4 = c_1^2$, wbrew określeniu liczby c .

Jest więc $(a, b) = 1$, skąd $(a^2, b^2) = 1$. Wobec (22) liczby a^2, b^2, c są zatem rozwiązaniem właściwym równania Pytagorasa, skąd wynika na mocy twierdzenia 1, że

$$(23) \quad a^2 = m^2 - n^2, \quad b^2 = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

(o ile założyć, że b jest parzyste, co jest tylko kwestią znakowania), gdzie $(m, n) = 1$ i gdzie jedna z liczb m, n jest parzysta, a druga nieparzysta.

Gdyby parzyste było m , a nieparzyste n , to liczba a^2 byłaby na mocy (23) postaci $4k - 1$, co jest niemożliwe.

Jest więc m nieparzyste, a n parzyste, skąd wynika wobec $(m, n) = 1$, że $(m, 2n) = 1$, a w takim razie na mocy drugiego ze wzorów (23) liczby m i $2n$ są kwadratami:

$$(24) \quad m = m_1^2, \quad 2n = (2n_1)^2$$

dla pewnych m_1 i n_1 naturalnych.

Ponieważ na mocy (23) liczby a, m i n spełniają równanie Pytagorasa

$$a^2 + n^2 = m^2,$$

więc wnosimy z parzystości liczby n , że

$$(25) \quad a = a^2 - \beta^2, \quad n = 2a\beta, \quad m = a^2 + \beta^2,$$

gdzie a i β są liczbami naturalnymi oraz

$$(26) \quad (a, \beta) = 1.$$

Z (24) i (25) znajdujemy $n_1^2 = a\beta$, skąd wobec (26)

$$(27) \quad a = a_1^2, \quad \beta = \beta_1^2,$$

gdzie a_1 i β_1 są liczbami naturalnymi. Ale na mocy (24), (25) i (27) jest

$$a_1^4 + \beta_1^4 = m_1^2,$$

na mocy zaś (23) i (24) jest zarazem

$$m_1 \leq m_1^4 = m^2 < m^2 + n^2 = c,$$

czyli $m_1 < c$, wbrew określeniu liczby c .

Przypuszczenie, że równanie (21) jest rozwiązywalne w liczbach naturalnych, prowadzi więc do sprzeczności.

Z dowiedzonego twierdzenia 5 wynika natychmiast, że wielkie twierdzenie Fermata jest prawdziwe dla wykładnika $n = 4$ oraz dla wszystkich wykładników podzielnych przez 4.

Natomiast istnieją rozwiązania równania

$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = (z^2 - 1)^2$$

w liczbach naturalnych x, y, z , np.

$$x = 10, \quad y = 15, \quad z = 14; \quad x = 265, \quad y = 287, \quad z = 329.$$

Istnieją też rozwiązania w różnych liczbach naturalnych równania

$$x^4 + y^4 = z^4 + u^4,$$

np. $153^4 + 134^4 = 59^4 + 158^4$.

Euler wyraził przypuszczenie, że dla k i n naturalnych, spełniających nierówność $2 < k < n$, równanie

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n = x_{k+1}^n,$$

a więc w szczególności np. równanie

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^4,$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Istnieją natomiast rozwiązania w liczbach naturalnych równania

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = x_5^4,$$

z których znamy dwa:

$$50^4 + 120^4 + 272^4 + 515^4 = 555^4 \quad (\text{Norrie})$$

oraz

$$240^4 + 340^4 + 430^4 + 599^4 = 651^4 \quad (\text{J. O. Paterson}).$$

Istnieją też rozwiązania równania

$$x^3 + y^3 = z^3 + t^3$$

w różnych liczbach naturalnych (podane przez J. Wallisa, S. Ramanujana i innych), np.:

$$\begin{array}{ll} 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3, & 8^3 + 53^3 = 29^3 + 50^3, \\ 1^3 + 103^3 = 64^3 + 94^3, & 9^3 + 34^3 = 16^3 + 33^3, \\ 1^3 + 150^3 = 73^3 + 144^3, & 9^3 + 58^3 = 22^3 + 57^3, \\ 1^3 + 14258^3 = 11161^3 + 11468^3, & 10^3 + 27^3 = 19^3 + 24^3, \\ 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3, & 12^3 + 40^3 = 31^3 + 33^3, \\ 2^3 + 34^3 = 15^3 + 33^3, & 12^3 + 51^3 = 38^3 + 43^3, \\ 3^3 + 60^3 = 22^3 + 59^3, & 17^3 + 39^3 = 26^3 + 30^3, \\ 5^3 + 76^3 = 48^3 + 69^3, & 17^3 + 55^3 = 24^3 + 54^3. \end{array}$$

Wielkie twierdzenie Fermata dla $n=3$ jest oczywiście równoważne twierdzeniu, że liczba 0 nie jest sumą sześciątów trzech liczb całkowitych różnych od zera.

Inaczej ma się rzecz z liczbami 1, 2 i 3, gdyż

$$1 = 9^3 + 10^3 + (-12)^3, \quad 2 = (-5)^3 + (-6)^3 + 7^3, \quad 3 = 1^3 + 1^3 + 1^3.$$

Natomiast — jak łatwo widzieć — liczby 4 i 5 nie są sumami sześciątów trzech liczb całkowitych (ponieważ sześciąt liczby całkowitej przy dzieleniu przez 9 może dawać tylko reszty 0, 1 lub -1), ale już

$$6 = (-1)^3 + (-1)^3 + 2^3.$$

Zachodzi też tożsamość

$$1^3 + (9k^4 + 3k)^3 = (9k^4)^3 + (9k^3 + 1)^3 \quad (\text{Gérardin}).$$

Równanie

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

jest rozwiązalne w liczbach naturalnych, np.:

$$\begin{array}{ll} 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3, & 1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3, \\ 7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3, & 11^3 + 15^3 + 27^3 = 29^3, \\ 1^3 + 135^3 + 138^3 = 172^3, & 1^3 + 791^3 + 812^3 = 1010^3, \\ & 71^3 + 73^3 + 138^3 = 150^3. \end{array}$$

Ogólne rozwiązanie tego równania w liczbach wymiernych podał Dickson¹⁾.

Zachodzi też tożsamość Ramanujana:

$$(3a^3 + 5ab - 5b^3)^3 + (4a^3 - 4ab + 6b^3)^3 + (5a^3 - 5ab - 3b^3)^3 = \\ = (6a^3 - 4ab - 3b^3)^3.$$

Podobnie równanie

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = u^3$$

jest rozwiązalne w liczbach naturalnych, gdyż np.

$$11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3, \quad 1^3 + 5^3 + 7^3 + 12^3 = 13^3.$$

Zachodzą też wzory:

$$1^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = 9^3, \quad 4^3 + 6^3 + 7^3 + 9^3 + 14^3 = 16^3, \\ 5^3 + 19^3 + 22^3 = 10^3 + 15^3 + 23^3.$$

Zauważymy wreszcie, że wielkie twierdzenie Fermata nie zachodzi dla wykładników ułamkowych, np. dla odwrotności liczb naturalnych. Istotnie, mamy np., jak łatwo sprawdzić:

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{50}, \quad \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{54}.$$

Pizà zajmuje się rozwiązaniami równania (20) w liczbach, dających się zbudować z danej jednostki długości za pomocą cyrkla i liniału, tj. dających się wyrazić za pomocą pierwiastków drugiego stopnia²⁾. Oto kilka z jego rozwiązań:

$$\begin{aligned} 12^3 + (\sqrt[3]{93} - 3)^3 &= (\sqrt[3]{93} + 3)^3, & 12^3 &= (9 + \sqrt[3]{5})^3 + (9 - \sqrt[3]{5})^3 \\ 8^3 + (\sqrt[3]{85} - 1)^3 &= (\sqrt[3]{85} + 1)^3, & 10^3 + (\sqrt[3]{82} - 2)^3 &= (\sqrt[3]{82} + 2)^3, \\ 4^3 &= (\sqrt[3]{136} - 3 + 1)^3 + (\sqrt[3]{136} - 3 - 1)^3, \\ 30^3 &= (5 + \sqrt[3]{486500} - 25)^3 + (5 - \sqrt[3]{486500} - 25)^3 = \\ &= (\sqrt[3]{251000} - 100 + 10)^3 + (\sqrt[3]{251000} - 100 - 10)^3. \end{aligned}$$

¹⁾ L. E. Dickson, *Einführung in die Zahlentheorie*, Lipsk - Berlin 1931, str. 52-53.

²⁾ Pedro A. Pizà, *Fermagoric Triangles*, Publications n° 1 of the Polytechnical Institute of Puerto Rico, San Germán 1945, stronic 155.