

$\delta < p-1$ i — jak wiemy, ze str. 173 — jest $\delta | p-1$. Iloraz $(p-1)/\delta$ jest zatem większy od 1 i przeto zawiera czynnik pierwszy q . Jest więc $p-1 = \delta q t$, skąd

$$g^{\frac{p-1}{q}} \equiv (g^{\delta})^t \equiv 1 \pmod{p}$$

wbrew założeniu. Warunek jest więc dostateczny.

3. Dowieść, że liczba 4 nie jest pierwiastkiem pierwotnym żadnej liczby pierwszej.

Dowód. W myśl małego twierdzenia Fermata, dla p pierwszych nieparzystych zachodzi kongruencja $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; zatem $4^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.

ROZDZIAŁ IX

ROZWINIĘCIA SYSTEMATYCZNE PRZY DOWOLNEJ ZASADZIE NUMERACJI

§ 1. Rozwinięcia liczb całkowitych przy danej zasadzie. Niech g będzie liczbą naturalną większą od 1. Rozwinięciem liczby naturalnej N przy zasadzie numeracji g nazywamy szereg

$$(1) \quad N = c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \dots + c_1 g + c_0,$$

gdzie m jest liczbą całkowitą nieujemną, a c_n dla $n=0, 1, 2, \dots, m$ są liczbami całkowitymi, spełniającymi nierówności

$$(2) \quad 0 \leq c_n \leq g-1 \quad \text{ i } \quad c_m > 0.$$

Jeżeli dla liczb ciągu

$$(3) \quad 0, 1, 2, \dots, g-1$$

przyjęto osobne symbole, które nazywają się wówczas *cyframi* przy zasadzie numeracji g , to wzór (1) piszemy w postaci

$$N = (\gamma_m \gamma_{m-1} \dots \gamma_1 \gamma_0)_g,$$

gdzie γ_n jest cyfrą, oznaczającą liczbę c_n .

Jeżeli $g \leq 10$, to za symbole liczb ciągu (3) przyjmujemy odpowiednie cyfry z ciągu

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Np.:

$$N = (10010)_2 \quad \text{znaczy} \quad N = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 18,$$

$$N = (5603)_7 \quad \text{znaczy} \quad N = 5 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 3 = 2012.$$

Twierdzenie 1. Każda liczba naturalna daje się, i to w jeden tylko sposób, przedstawić przy danej zasadzie g w postaci szeregu (1), gdzie liczby całkowite c_n dla $n=0, 1, 2, \dots, m$ spełniają nierówności (2).

Dowód. Przypuśćmy, że liczba N ma dwa różne rozwinięcia przy zasadzie g :

$$(4) \quad \begin{aligned} N &= c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \dots + c_1 g + c_0, \\ N &= c'_m g^{m'} + c'_{m'-1} g^{m'-1} + \dots + c'_1 g + c'_0. \end{aligned}$$

Wobec nierówności (2) jest

$$\begin{aligned} g^m &\leq c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \dots + c_1 g + c_0 \leq \\ &\leq (g-1)(g^m + g^{m-1} + \dots + g + 1) = g^{m+1} - 1 < g^{m+1}, \end{aligned}$$

czyli wobec (4):

$$g^m \leq N < g^{m+1} \quad \text{ i } \quad g^{m'} \leq N < g^{m'+1},$$

skąd $g^m < g^{m'+1}$, a więc $m < m' + 1$ czyli $m \leq m'$ i podobnie $g^{m'} < g^{m+1}$, a więc $m' < m + 1$ czyli $m' \leq m$.

Nierówności $m \leq m'$ i $m' \leq m$ dają $m' = m$. Wzory (4) możemy zatem przepisać w postaci

$$\begin{aligned} N &= c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \dots + c_1 g + c_0 = \\ &= c'_m g^m + c'_{m-1} g^{m-1} + \dots + c'_1 g + c'_0. \end{aligned}$$

Ale w myśl przypuszczenia ciąg

$$c_m, c_{m-1}, \dots, c_1, c_0 \quad \text{ i } \quad c'_m, c'_{m-1}, \dots, c'_1, c'_0$$

nie są identyczne; niech więc c_k i c'_k będą pierwszymi różnymi wyrazami tych ciągów (tak, iż $c_i = c'_i$ dla $k < i \leq m$); nie może tu być oczywiście $k=0$, gdyż wtedy prawe strony wzorów (4) byłyby różne. Liczba k jest więc naturalna. Wobec $c_k \neq c'_k$ mamy $c_k < c'_k$ lub $c'_k < c_k$. Wystarczy oczywiście rozpatrzeć jeden z tych przypadków. Niech np. $c'_k < c_k$.

W myśl (2) mamy

$$\begin{aligned} c'_{k-1} g^{k-1} + c_{k-2} g^{k-2} + \dots + c'_1 g + c'_0 &\leq \\ &\leq (g-1)(g^{k-1} + g^{k-2} + \dots + 1) = g^k - 1 < g^k, \end{aligned}$$

zatem

$$N < c'_m g^m + \dots + c'_{k+1} g^{k+1} + c'_k g^k + g^k,$$

a że z drugiej strony jest oczywiście

$$N \geq c_m g^m + \dots + c_{k+1} g^{k+1} + c_k g^k,$$

więc

$$c'_m g^m + \dots + c'_{k+1} g^{k+1} + (c'_k + 1) g^k > c_m g^m + \dots + c_{k+1} g^{k+1} + c_k g^k,$$

skąd $(c'_k + 1) g^k > c_k g^k$ czyli $c'_k + 1 > c_k$, co jest równoważne nierówności $c'_k \geq c_k$ wbrew założeniu, że $c'_k < c_k$.

Każda liczba naturalna N daje więc co najwyżej jedno rozwinięcie przy zasadzie g . Pozostaje do okazania, że takie rozwinięcie istnieje zawsze co najmniej jedno.

Oznaczmy przez N_1 i c_0 odpowiednio iloraz i resztę z dzielenia N przez g :

$$N = c_0 + g N_1.$$

Z liczbą N_1 postąpmy jak z liczbą N , wyznaczając nowy iloraz N_2 i nową resztę c_1 z dzielenia N_1 przez g :

$$N_1 = c_1 + g N_2.$$

Z liczbą N_2 postąpmy podobnie itd.

Jasne jest, że kolejne ilorazy N_n , póki są dodatnie, stale maleją, gdyż $N_{n+1} \leq N_n/g$, a że są to liczby całkowite nieujemne, więc przy pewnym $k \geq 1$ musi być $N_k = 0$.

Niech m oznacza największy wskaźnik, przy którym $N_m \neq 0$. Mamy więc ciąg równości:

$$N = c_0 + g N_1,$$

$$N_1 = c_1 + g N_2,$$

$$\dots$$

$$N_{m-1} = c_{m-1} + g N_m,$$

$$N_m = c_m + g N_{m+1} = c_m,$$

skąd dostajemy w jednej chwili

$$N = c_0 + g c_1 + g^2 c_2 + \dots + g^m c_m$$

czyli wzór (1), gdzie $c_m > 0$, gdyż $N_m \neq 0$, liczby zaś c_n (dla $n = 0, 1, \dots, m$), jako reszty z dzielenia przez g , są całkowite i spełniają nierówności (2).

Tym samym twierdzenie 1 zostało udowodnione.

Dowiedliśmy zarazem, że dla rozwinięcia liczby N przy zasadzie g mamy następujący algorytm: dzielimy N przez g , resztę oznaczamy przez c_0 , a iloraz przez N_1 ; dzielimy dalej N_1 przez g , resztę oznaczamy przez c_1 , a iloraz przez N_2 itd., aż dojdziemy do ilorazu $N_{m+1} = 0$. Uzyskujemy tym sposobem rozwinięcie (1).

Można z łatwością dowieść, że

$$m = E\left(\frac{\log N}{\log g}\right) \quad \text{ i } \quad c_n = E\left(\frac{N}{g^n}\right) - g E\left(\frac{N}{g^{n+1}}\right) \quad \text{ dla } n = 0, 1, \dots, m.$$

Jeżeli liczba całkowita N' jest ujemna, $N' = -N$, i wzór (1) jest rozwinięciem liczby N przy zasadzie g , to wzór

$$N' = -(c_m g^m + c_{m-1} g^{m-1} + \dots + c_1 g + c_0)$$

nazywamy *rozwinięciem liczby ujemnej N' przy zasadzie g* .

Jeżeli wreszcie liczba N jest zerem, to za jej rozwinięcie przy zasadzie g uważamy wzór $N = 0$.

W ten sposób każda liczba całkowita wyraża się — i to w jeden tylko sposób — przy każdej zasadzie naturalnej $g > 1$.

Twierdzenie 1 jest równoważne tożsamości

$$(1 + z + z^2 + \dots + z^{g-1}) \cdot (1 + z^g + z^{2g} + \dots + z^{(g-1)g}) \cdot$$

$$(1 + z^{g^2} + z^{2g^2} + \dots + z^{(g-1)g^2}) \cdot \dots = 1 : (1 - z) \quad \text{dla } |z| < 1.$$

Ponieważ przy zasadzie 2 mamy tylko dwie cyfry 0 i 1, więc z udowodnionego twierdzenia 1 otrzymujemy natychmiast

Wniosek. Każda liczba naturalna daje się i to w jeden tylko sposób przedstawić jako sumę różnych potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych nieujemnych ²⁾.

Tak np.:

$$100 = 2^6 + 2^5 + 2^2, \quad 29 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0.$$

Można też dowiedzieć, że każda liczba naturalna jest sumą algebraiczną różnych potęg (całkowitych nieujemnych) liczby 3.

Dla otrzymania takiego rozwinięcia należy zmodyfikować podany wyżej algorytm w ten sposób, żeby przy kolejnych dzieleniach przez 3 brać zawsze resztę bezwzględnie najmniejszą modulo 3. Tym sposobem otrzymujemy np.:

$$52 = 3^4 - 3^3 - 3 + 3^0.$$

Jak łatwo widzieć, rozwinięcie takie jest zawsze jedyne.

ĆWICZENIA 1. Napisać liczbę 1949 w układzie numeracji dwójkowym. Odpowiedź: $(11110011101)_2$.

2. Przedstawić liczbę 27 kolejno przy zasadach $g = 2, 3, \dots, 13$.

Odpowiedź: $(11011)_2, (1000)_3, (123)_4, (102)_5, (43)_6, (36)_7, (33)_8, (50)_9, (27)_{10}, (25)_{11}, (23)_{12}, (21)_{13}$.

¹⁾ G. Pólya i G. Szegő. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, tom I, Berlin 1925, str. 3, zadanie 18.

²⁾ Godne uwagi jest, że i każda liczba porządkowa pozaskończona daje się i to w jeden tylko sposób przedstawić jako sumę skończonej liczby malejących potęg liczby 2. Ob. np. mój *Zarys teorii mnogości*, wyd. 3, Warszawa 1928, str. 216.

3. Wyrazić liczbę 30382 w układzie numeracji o zasadzie 8.

Odpowiedź: $(73256)_8$.

4. Przedstawić liczbę $(1510166)_7$ w układzie dziesiętnym.

Odpowiedź: 204182.

5. Ile cyfr ma w układzie dwójkowym liczba 10^{10} ?

Odpowiedź: 34 cyfry.

6. Ile cyfr ma w układzie dziesiętnym liczba, wyrażająca się w układzie dwójkowym jako jedynka ze stu zerami? z tysiącem zer?

Odpowiedź: 31, 302.

7. Ułożyć tabliczki dodawania i mnożenia przy zasadzie numeracji 7.

Odpowiedź:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	10
3	3	4	5	6	10	11
4	4	5	6	10	11	12
5	5	6	10	11	12	15
6	6	10	11	12	15	15

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	6	11	15
3	3	4	6	12	15	24
4	4	6	11	15	22	33
5	5	6	15	21	26	34
6	6	6	15	24	33	42

8. Jaka jest cecha podzielności przez 3 dla liczby napisanej przy zasadzie 7?

Odpowiedź. Suma cyfr tej liczby (gdzie dodawanie należy wykonać przy zasadzie 7) musi być podzielna przez 3. Wynika to z kongruencji $7 \equiv 1 \pmod{3}$.

9. Jaka jest cecha podzielności przez 8 dla liczby napisanej przy zasadzie 12?

Odpowiedź. Liczba, utworzona z dwu ostatnich cyfr tej liczby (prze-czytana przy zasadzie 12) musi być podzielna przez 8. Wynika to z kongruencji $12^2 \equiv 0 \pmod{8}$.

10. Jaka jest cecha podzielności przez 8 liczby napisanej przy zasadzie 5?

Odpowiedź. Należy podzielić cyfry tej liczby na grupy dwucyfrowe, poczynając od końca, i następnie dodać je do siebie (przy zasadzie 5). Liczba jest podzielna przez 8 wtedy i tylko wtedy, gdy uzyskana w ten sposób suma jest podzielna przez 8. Wynika to z kongruencji $5^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

11. Okazać, że postępowanie wskazane w ćwiczeniu 10, lecz wykonane w układzie dziesiętnym dla liczby napisanej w układzie dziesiętnym, daje cechę podzielności przez 11 (inną od dobrze znanej).

Dowód wynika z kongruencji $10^2 \equiv 1 \pmod{11}$.

§ 2. Ułamki nieskończone przy zasadzie g . Wzór na n -tą cyfrę. Zajmiemy się obecnie rozwinięciami liczb rzeczywistych przy dowolnej zasadzie naturalnej.

Rozwinięciem liczby rzeczywistej x na ułamek nieskończony przy zasadzie g (gdzie g jest liczbą naturalną większą od 1) nazywamy szereg nieskończony

$$(5) \quad x = c_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \frac{c_3}{g^3} + \dots,$$

gdzie c_0 jest liczbą całkowitą (którą więc potrafimy już rozwinąć według zasady g), c_n zaś są liczbami całkowitymi, spełniającymi dla $n=1, 2, \dots$ nierówności

$$(6) \quad 0 \leq c_n \leq g-1.$$

Liczbę

$$(7) \quad r_n = c_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \dots + \frac{c_n}{g^n}$$

nazywamy n -tym reduktem rozwinięcia (5), przy czym za redukt r_0 uważamy liczbę c_0 .

Wobec (6) jest oczywiście dla $n=0, 1, 2, \dots$

$$0 \leq x - r_n = \frac{c_{n+1}}{g^{n+1}} + \frac{c_{n+2}}{g^{n+2}} + \dots \leq \frac{g-1}{g^{n+1}} + \frac{g-1}{g^{n+2}} + \frac{g-1}{g^{n+3}} + \dots = \frac{1}{g^n}$$

czyli

$$0 \leq x - r_n \leq \frac{1}{g^n},$$

przy czym $x - r_n$ może być równe $1/g^n$ tylko wtedy, gdy

$$c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = g-1,$$

tzn. gdy poczynając od pewnego miejsca, wszystkie cyfry są równe $g-1$.

Rozwinięcia, dla których to nie zachodzi, nazywamy *normalnymi*.

Jeżeli więc rozwinięcie jest normalne, to dla $n=0, 1, 2, \dots$

$$0 \leq x - r_n < \frac{1}{g^n},$$

zatem $0 \leq g^n x - g^n r_n < 1$, skąd

$$(8) \quad E(g^n x - g^n r_n) = 0.$$

Załóżmy, że szereg (5) jest rozwinięciem normalnym liczby x (przy zasadzie g). Zachodzi więc przy wszelkim naturalnym n wzór (8). W myśl (7) liczba

$$g^n r_n = c_0 g^n + c_1 g^{n-1} + \dots + c_{n-1} g + c_n$$

jest oczywiście całkowita; zatem $E(g^n x - g^n r_n) = E(g^n x) - g^n r_n$, skąd w myśl (8)

$$(9) \quad g^n r_n = E(g^n x) \quad \text{dla } n=0, 1, 2, \dots$$

Dla $n=0$ znajdujemy stąd (wobec $r_0 = c_0$)

$$c_0 = E(x).$$

Dla $n > 0$ możemy jeszcze napisać

$$g^{n-1} r_{n-1} = E(g^{n-1} x).$$

Mnożąc obie strony tej równości przez g i odejmując od (9), otrzymujemy

$$g^n(r_n - r_{n-1}) = E(g^n x) - gE(g^{n-1} x),$$

a że wobec (7) jest oczywiście $g^n(r_n - r_{n-1}) = c_n$, więc ostatecznie

$$c_n = E(g^n x) - gE(g^{n-1} x) \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

Dowiedliśmy zatem, że jeżeli szereg (8) jest rozwinięciem normalnym liczby x na ułamek nieskończony przy zasadzie g , to muszą zachodzić wzory:

$$(10) \quad c_0 = E(x) \quad \text{i} \quad c_n = E(g^n x) - gE(g^{n-1} x) \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

Wynika stąd natychmiast, że każda liczba rzeczywista ma co najwyżej jedno rozwinięcie normalne (przy danej zasadzie g).

Wyznamy teraz dla danego rzeczywistego x przy danej zasadzie g liczby c_n (gdzie $n=0, 1, \dots$) ze wzorów (10). Okażemy, że szereg

$$(11) \quad c_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \frac{c_3}{g^3} + \dots$$

jest rozwinięciem normalnym liczby x (przy zasadzie g). W myśl definicji rozwinięcia normalnego należy więc dowieść, że:

1° sumą szeregu (11) jest liczba x ;

2° c_0 jest liczbą całkowitą, a c_n dla $n=1, 2, \dots$ są liczbami całkowitymi i spełniają nierówności (6);

3° nie może być, poczynając od pewnego miejsca, $c_n = g-1$.

Ze wzorów (10) znajdujemy po łatwej redukcji

$$s_n = c_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \dots + \frac{c_n}{g^n} = E(x) + \frac{E(gx) - gE(x)}{g} + \dots \\ \dots + \frac{E(g^n x) - gE(g^{n-1}x)}{g^n} = \frac{E(g^n x)}{g^n}.$$

Lecz $g^n x - 1 < E(g^n x) \leq g^n x$, skąd

$$x - \frac{1}{g^n} < \frac{E(g^n x)}{g^n} \leq x.$$

Jest zatem

$$(12) \quad 0 \leq x - s_n < \frac{1}{g^n} \quad \text{dla } n=0, 1, 2, \dots$$

Wynika stąd wobec $g > 1$, że ciąg sum cząstkowych s_n zmierza do granicy x , a więc że liczba x jest sumą szeregu nieskończonego (11). Że liczby c_n są całkowite, wynika bezpośrednio ze wzorów (10). Dla $n > 0$ mamy $c_n = E(g^n x) - gE(g^{n-1}x)$, a że $g^n x - 1 < E(g^n x) \leq g^n x$ i $g^{n-1}x - 1 < E(g^{n-1}x) \leq g^{n-1}x$, więc

$$-1 = g^n x - 1 - g \cdot g^{n-1}x < E(g^n x) - gE(g^{n-1}x) < \\ < g^n x - g(g^{n-1}x - 1) = g,$$

czyli $-1 < c_n < g$, co wobec całkowitości liczby c_n jest równoważne nierównościom (6). Gdyby dla $n > k$ było stałe $c_n = g - 1$, to byłoby też

$$x - s_k = \frac{g-1}{g^{k+1}} + \frac{g-1}{g^{k+2}} + \dots = \frac{1}{g^k}$$

wbrew (12).

Dowiedliśmy więc, że szereg (11) jest rozwinięciem normalnym liczby x przy zasadzie g , czyli że x ma co najmniej jedno takie rozwinięcie.

Możemy zatem wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 2. Każda liczba rzeczywista x ma przy danej zasadzie naturalnej $g > 1$ jedno i tylko jedno rozwinięcie normalne (5) na ułamek nieskończony; cyfry tego rozwinięcia $c_0, c_1, \dots, c_m$ spełniają wzory (10).

Wzory te pozwalają z łatwością wyrazić n -tą cyfrę rozwinięcia liczby rzeczywistej x przy zasadzie g za pomocą funkcji E .

Np. setną po przecinku cyfrą rozwinięcia liczby $\sqrt{2}$ na ułamek dziesiętny jest

$$E(10^{100}\sqrt{2}) - 10E(10^{99}\sqrt{2}).$$

Aby jednak obliczyć efektywnie tę cyfrę, trzeba by dokonać długich rachunków. Podobnie byłoby np. z obliczeniem setnej cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby e lub π . Nawet dla niektórych liczb wymiernych obliczenie dalekich cyfr ich rozwinięcia dziesiętnego wymaga żmudnych rachunków, np. obliczenie tysięcznej po przecinku cyfry rozwinięcia liczby $\frac{1}{1913}$ na ułamek dziesiętny, tj. efektywne obliczenie liczby $E\left(\frac{10^{1000}}{1913}\right) - 10E\left(\frac{10^{999}}{1913}\right)$.

§ 3. Algorytm dla wyznaczania rozwinięcia normalnego. Jak wiemy z twierdzenia 2, rozwinięcie normalne liczby rzeczywistej x możemy otrzymać, obliczając kolejne jego cyfry ze wzorów (10). Można jednak w inny jeszcze sposób dojść do rozwinięcia normalnego liczby x .

Niech

$$x_1 = x - E(x).$$

Jest oczywiście

$$0 \leq x_1 < 1.$$

Niech dalej

$$x_2 = gx_1 - E(gx_1).$$

Będziemy mieli znowu

$$0 \leq x_2 < 1.$$

Z liczbą x_2 możemy postąpić podobnie jak z liczbą x_1 , pisząc

$$x_3 = gx_2 - E(gx_2),$$

przy czym będzie znowu $0 \leq x_3 < 1$ itd.

Otrzymujemy w ten sposób ciąg liczb rzeczywistych x_n , określony wzorem zwrotnym

$$(13) \quad x_{n+1} = gx_n - E(gx_n), \quad \text{gdzie } n=1, 2, \dots \text{ i } x_1 = x - E(x).$$

Można jednak z łatwością znaleźć bezpośredni wzór dla wyrazów ciągu $\{x_n\}$, wyrażający x_n przez liczby g, x i n . Okażemy mianowicie, że

$$(14) \quad x_n = g^{n-1}x - E(g^{n-1}x) \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

Dla $n=1$ wzór (14) oczywiście zachodzi. Załóżmy, że zachodzi on dla pewnego naturalnego n , czyli że $gx_n = g^n x - gE(g^{n-1}x)$, skąd

$$(15) \quad E(gx_n) = E(g^n x) - gE(g^{n-1}x)$$

i, w myśl (15), $x_{n+1} = g^n x - gE(g^{n-1}x) - [E(g^n x) - gE(g^{n-1}x)]$ czyli

$$x_{n+1} = g^n x - E(g^n x).$$

Wnosimy stąd przez indukcję, że wzór (14) zachodzi dla każdego naturalnego n . Nadto wzór (15) wskazuje w myśl (10), że

$$(16) \quad c_n = E(gx_n) \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

Wzory (15) i (16) doprowadzają nas do następującego algorytmu rozwijania liczb rzeczywistych na ułamki normalne:

Aby rozznaczyć rozwinięcie normalne

$$x = c_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \frac{c_3}{g^3} + \dots,$$

piszemy:

$$\begin{aligned} c_0 &= E(x), & x_1 &= x - c_0, \\ c_1 &= E(gx), & x_2 &= gx_1 - c_1, \\ c_2 &= E(gx_2), & x_3 &= gx_2 - c_2 \end{aligned} \quad \text{itd.}$$

ĆWICZENIA. 1. Rozwinąć liczbę $\frac{1}{2}$ na ułamek nieskończony normalny przy zasadzie 5.

Odpowiedź: $\frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \dots$

2. Wyznaczyć ciąg kolejnych cyfr rozwinięcia liczby $\frac{1}{7}$ na ułamek nieskończony normalny przy zasadzie 2.

Odpowiedź: 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, ..., tj.

$$c_{3k-2} = c_{3k-1} = 0 \quad \text{i} \quad c_{3k} = 1 \quad \text{dla } k=1, 2, \dots$$

§ 4. Warunek konieczny i wystarczający rozwijalności na ułamek skończony. Jeżeli poczynając od pewnego miejsca, np. dla $n > k$, wszystkie cyfry c_n rozwinięcia liczby niecałkowitej x są zerami, to możemy takie rozwinięcie napisać w postaci skończonej

$$(17) \quad x = c_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \dots + \frac{c_k}{g^k}$$

i mówimy, że x rozwija się na *ułamek skończony* k -cyfrowy.

Naturalnie, możemy tu założyć, że ostatnia cyfra c_k nie jest zerem, gdyż w przeciwnym razie można by wypisany ułamek zastąpić przez ułamek o mniejszej liczbie cyfr.

Zbadamy obecnie, jakie warunki są konieczne i wystarczające na to, żeby liczba x miała rozwinięcie skończone.

Założmy, że liczba rzeczywista (niecałkowita) x ma rozwinięcie (17). Oczywiście

$$(18) \quad g^k x = t,$$

gdzie t jest liczbą całkowitą, ale już liczba

$$g^{k-1}x = t' + \frac{c_k}{g}$$

nie jest całkowitą, gdyż zakładamy, że $c_k \neq 0$.

Ze wzoru (18) wynika, że liczba x jest wymierna. Niech więc $x = \frac{l}{m}$ i przyjmijmy, że jest to ułamek nieprzywiedlny o mianowniku naturalnym. W myśl (18) jest $\frac{t}{g^k} = \frac{l}{m}$, zatem

$$(19) \quad g^k l = tm,$$

skąd $m | g^k l$. Wobec $(l, m) = 1$ wnosimy stąd, że g^k jest podzielne przez m . Zatem, jeżeli ułamek nieprzywiedlny $\frac{l}{m}$ ma przy zasadzie g rozwinięcie skończone, to mianownik m może mieć takie tylko czynniki pierwsze, które ma zasada g . Jeżeli więc

$$(20) \quad g = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

jest rozkładem liczby g na czynniki pierwsze, to

$$(21) \quad m = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_r^{\lambda_r},$$

gdzie wykładniki λ_i są liczbami całkowitymi nieujemnymi.

Wobec $m | g^k$ wnosimy dalej, że zachodzić muszą nierówności:

$$(22) \quad k\alpha_1 \geq \lambda_1, \quad k\alpha_2 \geq \lambda_2, \quad \dots, \quad k\alpha_r \geq \lambda_r.$$

Ponadto k jest najmniejszą liczbą naturalną, spełniającą nierówności (22), gdyby bowiem nierówności te zachodziły już dla liczby $k-1$, to wobec (20) i (21) liczba $g^{k-1}x$ byłaby podzielna przez m i przeto liczba $g^{k-1}x$ byłaby całkowita, a dowiedliśmy, że tak nie jest.

Założmy teraz, że x jest równe ułamkowi nieprzywiedlnemu $\frac{l}{m}$ o mianowniku naturalnym, dającym rozkład (21), i niech k będzie liczbą naturalną, spełniającą nierówności (22). Dla $n > k$

liczby $g^n x$ i $g^{n-1} x$ są całkowite, gdyż g^k jest podzielne przez m ; wzory (10) wskazują więc, że $c_n = g^n x - g g^{n-1} x = 0$ dla $n > k$. Liczba x ma zatem rozwinięcie skończone.

Udowodniliśmy więc następujące

Twierdzenie 3. *Na to, by liczba rzeczywista (niecałkowita) x miała rozwinięcie na ułamek skończony przy zasadzie g , potrzeba i wystarcza, żeby była ona liczbą wymierną, równą ułamkowi nieprzywiedlnemu, którego mianownik ma tylko te czynniki pierwsze, jakie ma zasada g .*

Jeżeli zasada g i mianownik m mają rozkłady (20) i (21), to liczba cyfr rozwinięcia liczby x jest równa najmniejszej liczbie naturalnej k , spełniającej nierówności (22).

W szczególności dla $g=10$ twierdzenie 3 przybiera postać:

Na to, by liczba rzeczywista (niecałkowita) x rozwijała się na ułamek dziesiętny skończony, potrzeba i wystarcza, by była to liczba wymierna, równa ułamkowi nieprzywiedlnemu o mianowniku postaci $2^{\lambda_1} 5^{\lambda_2}$, gdzie λ_1 i λ_2 są liczbami całkowitymi nieujemnymi.

Liczba cyfr ułamka dziesiętnego dla x jest równa większej z liczb λ_1 i λ_2 (ewentualnie ich wspólnej wartości).

Jeżeli liczba rzeczywista x nie ma rozwinięcia skończonego przy zasadzie g , to iloczyn $g^{n-1} x$ przy żadnym n nie jest całkowity i wzór (14) wskazuje, że jest stale $x_n > 0$.

§ 5. Rozwinięcia liczb wymiernych; ich okresowość. Zajmiemy się obecnie rozwinięciami normalnymi tych liczb wymiernych, które nie mają rozwinięć skończonych. Niech x , równe ułamkowi nieprzywiedlnemu $\frac{l}{m}$, będzie taką liczbą. Napiszmy

$$(23) \quad m x_n = q_n \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

W myśl (14) jest więc

$$(24) \quad q_n = g^{n-1} l - m E \left(\frac{g^{n-1} l}{m} \right),$$

skąd widać, że q_n jest liczbą całkowitą. Wobec nierówności $0 \leq x_n < 1$ i $x_n \neq 0$ wnosimy w myśl (23), że

$$0 < q_n < m.$$

Liczby q_n są więc liczbami ciągu $1, 2, \dots, m-1$. Ponieważ w ciągu tym mamy tylko $m-1$ wyrazów, więc w ciągu

$$(25) \quad q_1, q_2, \dots, q_m$$

(w którym jest m wyrazów) co najmniej dwa wyrazy muszą być równe, np.

$$(26) \quad q_h = q_{h+s},$$

gdzie h i s są liczbami naturalnymi mniejszymi od m .

Z (26) wynika wobec (23), że $x_h = x_{h+s}$, zatem też w jednej chwili, w myśl (13), równość $x_n = x_{n+s}$ dla $n \geq h$, a stąd, w myśl (16), równość $c_n = c_{n+s}$ dla $n \geq h$.

Liczba x daje więc rozwinięcie *periodyczne* czyli *okresowe*.

Udowodniliśmy zatem

Twierdzenie 4. *Rozwinięcie normalne liczby wymiernej jest zawsze albo skończone, albo okresowe.*

Zbadamy obecnie bliżej rozwinięcia okresowe. W tym celu zajmiemy się najpierw ciągami okresowymi w ogóle.

§ 6. Ciągi okresowe. Okres zasadniczy. Ciąg nieskończony jakichkolwiek elementów (niekoniecznie liczbowych)

$$c_1, c_2, c_3, \dots$$

nazywamy *okresowym* (ściślej: okresowym, poczynając od pewnego miejsca), jeżeli istnieją takie liczby naturalne h i s , że

$$(27) \quad c_n = c_{n+s} \quad \text{dla wszelkich } n \geq h.$$

Wśród wszystkich liczb h , dla których przy pewnym s spełniony jest warunek (27), jest jedna najmniejsza h_0 . Powiadamy wówczas, że *okres zaczyna się od wyrazu c_{h_0}* .

Z drugiej strony, wśród wszystkich liczb s , dla których istnieje takie h , że zachodzi warunek (27), jest jedna najmniejsza s_0 . Okres

$$(28) \quad c_{h_0}, c_{h_0+1}, \dots, c_{h_0+s_0-1}$$

nazywamy *zasadniczym*, a liczbę s_0 — *liczbą wyrazów* albo *długością okresu zasadniczego*.

Udowodnimy obecnie

Twierdzenie 5. *W ciągu o okresie zasadniczym (28) zachodzi równość $c_n = c_{n+s_0}$ dla wszystkich $n \geq h_0$ ¹⁾.*

¹⁾ Porównaj S. Zaremba, *Arytmetyka teoretyczna*, Kraków 1912, str. 152.

Dowód. Na mocy określenia liczby h_0 jest przy pewnym naturalnym s

$$(29) \quad c_n = c_{n+s} \text{ dla } n \geq h_0.$$

Założmy, że przy pewnym naturalnym k jest

$$(30) \quad c_n = c_{n+ks} \text{ dla } n \geq h_0;$$

w myśl (29) jest to prawdziwe dla $k=1$. Jeżeli $n \geq h_0$, to tym bardziej $n+s \geq h_0$; możemy więc w warunku (30) zastąpić n przez $n+s$, co daje $c_{n+s} = c_{n+s+ks}$, skąd w myśl (29)

$$c_n = c_{n+(k+1)s} \text{ dla } n \geq h_0.$$

Wnosimy stąd przez indukcję, że (30) zachodzi przy wszelkim naturalnym k , a ponieważ zachodzi oczywiście dla $k=0$, więc zachodzi przy wszelkim całkowitym $k \geq 0$.

Na mocy określenia liczby s_0 jest przy pewnym naturalnym h

$$c_n = c_{n+s_0} \text{ dla } n \geq h.$$

Niech h_1 będzie najmniejszą z liczb naturalnych h o tej własności. Zatem

$$(31) \quad c_n = c_{n+s_0} \text{ dla } n \geq h_1.$$

Okazemy, że $h_1 = h_0$. Przypuśćmy, że $h_1 \neq h_0$. Na mocy określenia liczby h_0 nie może być $h_1 < h_0$, musiałoby więc być $h_1 > h_0$, skąd $h_1 - 1 \geq h_0$. Ponadto

$$(32) \quad c_{h_1-1} \neq c_{h_1-1+s_0},$$

gdyż na mocy określenia liczby h_1 równość (31) nie może zachodzić dla $n = h_1 - 1$.

Podobnie jak z (29) wyprowadziliśmy (30), z (31) wyprowadza się

$$(33) \quad c_n = c_{n+ks_0} \text{ dla } n \geq h_1$$

przy wszelkim całkowitym $k \geq 0$.

Przyjmijmy we wzorze (33) $n = h_1 - 1 + s_0$ i $k = s - 1$; mamy do tego prawo, gdyż $h_1 - 1 + s_0 \geq h_1$ i $s - 1 \geq 0$. Otrzymamy

$$(34) \quad c_{h_1-1+s_0} = c_{h_1-1+s_0+(s-1)s_0} = c_{h_1-1+ss_0}.$$

Z drugiej strony, wobec $h_1 - 1 \geq h_0$ możemy przyjąć we wzorze (30) $n = h_1 - 1$ i $k = s_0$. Otrzymamy

$$(35) \quad c_{h_1-1} = c_{h_1-1+ss_0}.$$

Wzory (34) i (35) dają $c_{h_1-1} = c_{h_1-1+ss_0}$ wbrew (32). Dowiedliśmy więc, że $h_1 = h_0$. Warunek (31) możemy zatem napisać w formie $c_n = c_{n+s_0}$ dla $n \geq h_0$, c. b. d. d.

Z określenia liczb h_0 i s_0 wynika natychmiast, że jeżeli dla pewnych liczb naturalnych h i s spełniony jest warunek (27), to

$$h \geq h_0 \quad \text{ i } \quad s \geq s_0.$$

Wynika stąd, że nie ma w rozpatrywanym ciągu okresu wcześniejszego ani krótszego niż okres zasadniczy (28).

Jasne jest, że ciąg okresowy, w którym okres zasadniczy zaczyna się od wyrazu c_{h_0} i zawiera s_0 wyrazów, jest jednoznacznie określony, jeżeli znamy wyrazy

$$c_1, c_2, \dots, c_{h_0-1},$$

poprzedzające okres zasadniczy, oraz wyrazy (28), tworzące okres zasadniczy.

W szczególności, dla $h_0 = 1$ nie ma oczywiście wyrazów, poprzedzających okres.

O ciągu mówimy wówczas, że ma *okres czysty*.

Wyrazy o wskaźnikach $n \geq h_0$ nazywamy *regularnymi*, wyrazy zaś o wskaźnikach $n < h_0$ — *nieregularnymi*.

§ 7. Liczba cyfr nieregularnych i liczba cyfr okresu zasadniczego. Powróćmy do rozwinięć normalnych liczb wymiernych. Na mocy twierdzenia 4 (str. 217) rozwinięcie normalne liczby wymiernej x , o ile nie jest skończone, jest okresowe. Niech h_0 będzie wskaźnikiem cyfry, rozpoczynającej okres zasadniczy, a s_0 — liczbą cyfr tego okresu; $x = \frac{l}{m}$ niech będzie ułamkiem nieprzywiedlnym (o mianowniku naturalnym). Okazemy, że liczby h_0 i s_0 zależą tylko od mianownika m i zbadaemy bliżej ową zależność.

Dowiedziemy przede wszystkim, że *na to, by dla h i s naturalnych spełniony był warunek (27), potrzeba i wystarczy, żeby zachodziła równość*

$$(36) \quad q_h = q_{h+s},$$

gdzie liczby q_n są określone wzorem (24).

Że równość (36) pociąga za sobą warunek (27), tegośmy już dowiedli w § 5 (str. 217), wyprowadzając wnioski ze wzoru (26).

Założmy więc teraz warunek (27). Niech liczba naturalna k spełnia nierówność

$$(37) \quad g^k > m.$$

Na mocy (15) i (16) możemy napisać:

$$x_h = \frac{c_h}{g} + \frac{c_{h+1}}{g^2} + \dots + \frac{c_{h+k-1}}{g^k} + \frac{x_{h+k}}{g^k},$$

$$x_{h+s} = \frac{c_{h+s}}{g} + \frac{c_{h+s+1}}{g^2} + \dots + \frac{c_{h+s+k-1}}{g^k} + \frac{x_{h+s+k}}{g^k},$$

skąd na mocy (27)

$$x_h - x_{h+s} = \frac{x_{h+k} - x_{h+s+k}}{g^k}.$$

i przeto w myśl (23)

$$q_h - q_{h+s} = \frac{q_{h+k} - q_{h+s+k}}{g^k}.$$

Lecz liczby q_n są całkowite, nieujemne i mniejsze od m ; wartość bezwzględna prawej strony ostatniej równości jest więc mniejsza od $\frac{m}{g^k}$ czyli, w myśl (37), mniejsza od jedności:

$$|q_h - q_{h+s}| < 1,$$

skąd wobec całkowitości liczb q_n wynika równość (36).

Dowiedliśmy więc, że warunek (27) jest równoważny równości (36). Okażemy z kolei, że równość (36) jest równoważna kongruencji

$$(38) \quad q_h \equiv q_{h+s} \pmod{m}.$$

Istotnie, z jednej strony równość (36) pociąga za sobą oczywiście kongruencję (38), z drugiej zaś strony, jeżeli liczby q_h i q_{h+s} , które są nieujemne i mniejsze od m , spełniają kongruencję (38), to muszą być równe.

W myśl (24) — jak łatwo widzieć — kongruencja (38) jest dalej równoważna kongruencji

$$g^{h-1}l \equiv g^{h+s-1}l \pmod{m},$$

która wobec $(l, m) = 1$ jest równoważna kongruencji

$$(39) \quad g^{h-1} \equiv g^{h+s-1} \pmod{m}.$$

Dowiedliśmy więc, że warunek (27) jest równoważny kongruencji (39).

Oznaczmy teraz przez m_1 największy z tych dzielników naturalnych liczby m , które są pierwsze względem g . Możemy założyć, że $m_1 > 1$, gdyż w razie $m_1 = 1$ rozwinięcie liczby x byłoby skończone (na mocy twierdzenia 5). Niech

$$m = m_1 m_2.$$

Liczba m_2 ma więc — jak łatwo widzieć — te tylko czynniki pierwsze, które ma liczba g (gdyż w przeciwnym razie liczba m miałaby dzielnik większy od m i pierwszy względem g , wbrew określeniu liczby m_1).

Okażemy, że kongruencja (39) jest równoważna układowi kongruencji

$$(40) \quad g^s \equiv 1 \pmod{m_1}, \quad g^{h-1} \equiv 0 \pmod{m_2}.$$

Istotnie, na to, by zachodziła kongruencja (39), potrzeba i wystarczy, żeby liczba $g^{h+s-1} - g^{h-1}$ była podzielna przez m czyli żeby dla pewnej liczby całkowitej t zachodziła równość

$$(41) \quad g^{h-1}(g^s - 1) = t m_1 m_2.$$

Jeżeli jednak zachodzi równość (41), to wobec $(g, m_1) = 1$ liczba $g^s - 1$ musi być podzielna przez m_1 , ponieważ zaś $g^s - 1$ jest liczbą pierwszą względem g , a więc i względem m_2 , wnosiśmy, że liczba g^{h-1} musi być podzielna przez m_2 . Równość (41) pociąga więc za sobą kongruencje (40).

Z drugiej strony, jeżeli zachodzą kongruencje (40), to

$$g^s - 1 = t_1 m_1 \quad \text{ i } \quad g^{h-1} = t_2 m_2$$

przy pewnych całkowitych t_1 i t_2 , skąd równość (41).

Dowiedliśmy więc, że warunek (27) jest równoważny układowi kongruencji (40).

Wobec tego z określenia liczby h_0 wynika natychmiast, że jest ona najmniejszym pierwiastkiem naturalnym kongruencji wykładniczej

$$g^{h-1} \equiv 0 \pmod{m_2},$$

z określenia zaś liczby s_0 — że jest ona najmniejszym pierwiastkiem naturalnym kongruencji wykładniczej

$$g^s \equiv 1 \pmod{m_1}.$$

Innymi słowy: liczba h_0 jest najmniejszą wartością naturalną h , dla której liczba g^{h-1} jest podzielna przez m_2 , liczba zaś s_0 jest wykładnikiem, do którego należy zasada g według modułu m_1 (przy tym za wykładnik, do którego należy g według modułu 1, należy uważać jedność); liczba $k=h-1$ jest oczywiście liczbą cyfr nieregularnych rozpatrywanego rozwinięcia.

Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 6. Jeżeli $m=m_1m_2$, gdzie m_1 jest największym dzielnikiem liczby m , pierwszym względem g , to rozwinięcie ułamka nieprzywiedlnego $\frac{1}{m}$ na ułamek normalny przy zasadzie g ma k cyfr nieregularnych i s cyfr okresu zasadniczego, gdzie k jest najmniejszym wykładnikiem całkowitym nieujemnym, dla którego liczba g^k jest podzielna przez m_2 , a s jest wykładnikiem, do którego należy liczba g według modułu m_1 .

Stąd w szczególności dla zasady $g=10$:

Jeżeli $m=m_12^a5^b$, gdzie liczby a i b są całkowite nieujemne, m_1 zaś jest liczbą niepodzielną ani przez 2, ani przez 5, to rozwinięcie ułamka nieprzywiedlnego $1/m$ na ułamek dziesiętny normalny ma k cyfr nieregularnych i s cyfr okresu zasadniczego, gdzie k jest większą z liczb a i b (lub ich wspólną wartością, jeżeli są równe), s zaś jest wykładnikiem, do którego należy liczba 10 według modułu m_1 .

Z dowiedzionego twierdzenia 6 otrzymujemy natychmiastowy

Wniosek. Rozwinięcie ułamka nieprzywiedlnego $1/m$ na ułamek normalny przy zasadzie g ma okres czysty wtedy i tylko wtedy, gdy mianownik m jest pierwszym względem zasady g .

PRZYKŁAD. Niech $g=10$ i $m=61$. Wobec $(m, g)=1$ okres jest czysty. Obliczmy liczbę s cyfr okresu zasadniczego. A priori możemy powiedzieć, że s , jako wykładnik, do którego należy liczba 10 według modułu 61, musi być jednym z dzielników liczby $\varphi(61)=60$. Bliższy rachunek wskazuje, że $s=60$ (liczba 10 jest bowiem pierwiastkiem pierwotnym liczby 61). Okres zasadniczy rozwinięcia ułamka nieprzywiedlnego o mianowniku 61 na ułamek dziesiętny składa się więc z 60 cyfr.

Np. dla ułamka $\frac{1}{61}$ okres zasadniczy jest następujący:

016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459.

Ułamek $\frac{1}{97}$ ma okres zasadniczy, złożony z 96 cyfr.

Można okazać¹⁾, że liczba 10 jest pierwiastkiem pierwotnym liczby pierwszej 1913; wynika stąd, że np. liczba $\frac{1}{1913}$ ma w rozwinięciu na ułamek dziesiętny okres zasadniczy złożony z 1912 cyfr. Natomiast liczba $\frac{1}{37}$ ma okres zasadniczy, złożony tylko z 3 cyfr.

Wyprowadzimy obecnie regułę praktyczną rozwijania liczb wymiernych na ułamki normalne. Reguła ta wynika natychmiast z algorytmu, wyprowadzonego w § 3 (str. 214), gdy zastąpić w nim liczby x_n przez liczby q_n w myśl wzoru (25) i uwzględnić, że liczba $c_n = E\left(\frac{gq_n}{m}\right)$ jest ilorazem z dzielenia liczby (całkowitej) gq_n przez m , liczba zaś $q_{n+1} = gq_n - mc_n$ jest resztą z tego dzielenia.

Aby rozwinąć ułamek nieprzywiedlny $1/m$ (o mianowniku naturalnym) na ułamek normalny przy zasadzie g , dzielimy 1 przez m , iloraz oznaczamy przez c_0 , a resztę przez q_1 ; dzielimy dalej gq_1 przez m , iloraz oznaczamy przez c_1 , a resztę przez q_2 ; dzielimy następnie gq_2 przez m , iloraz oznaczamy przez c_2 , a resztę przez q_3 itd. Postępujemy tak dopóty, dopóki nie otrzymamy po raz pierwszy reszty 0 (co dowodzi, że rozwinięcie jest skończone) albo dopóki nie dostaniemy reszty już poprzednio otrzymanej; jeżeli pierwszą powtarzającą się resztą jest $q_{h+s} = q_h$, to cyfry $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{h-1}$ są cyframi nieregularnymi otrzymanego rozwinięcia, cyfry zaś $c_h, c_{h+1}, \dots, c_{h+s-1}$ tworzą okres zasadniczy.

PRZYKŁADY. 1. Rozwińmy $\frac{1}{3}$ na ułamek normalny przy zasadzie 2.

Jest tu $l=1$, $m=3$ i $g=2$. Znajdujemy kolejno:

$$c_0=0, \quad q_1=1, \quad gq_1=2, \quad c_1=0, \quad q_2=2, \quad gq_2=4, \quad c_2=1, \quad q_3=1=q_1.$$

Jest tu więc $h=1$ i $s=2$.

Okres jest zatem czysty i składa się z dwu cyfr: 01. Piszemy więc

$$\frac{1}{3} = (0,01)_2,$$

nad cyframi okresu zasadniczego stawiając kropki.

2. Rozwińmy $\frac{1}{10}$ na ułamek normalny dwójkowy.

Jest tu $l=1$, $m=10$ i $g=2$. Obliczamy kolejno:

$$c_0=0, \quad q_1=1, \quad gq_1=2, \quad c_1=0, \quad q_2=2, \quad gq_2=4, \quad c_2=0, \quad q_3=4, \quad gq_3=8, \\ c_3=0, \quad q_4=8, \quad gq_4=16, \quad c_4=1, \quad q_5=6, \quad gq_5=12, \quad c_5=1, \quad q_6=2=q_2.$$

¹⁾ Zob. mój artykuł w czasopiśmie Wektor, tom 2 (1913), str. 439.

Jest tu więc $h=2$ i $s=4$.

Okres jest więc mieszany, z jedną cyfrą nieregularną 0; okres zasadniczy tworzą cyfry 0011. Piszemy więc

$$1/10 = (0,00011)_2.$$

3. Rozwińmy $1/10$ na ułamek normalny trójkowy.

Jest tu $l=1$, $m=10$ i $g=5$. Obliczamy kolejno:

$$c_0=0, \quad q_1=1, \quad gq_1=5, \quad c_1=0, \quad q_2=5, \quad gq_2=9, \quad c_2=0, \quad q_3=9, \quad gq_3=27$$

$$c_3=2, \quad q_4=7, \quad gq_4=21, \quad c_4=2, \quad q_5=1=q_1.$$

Jest tu więc $h=1$ i $s=4$. Stąd $1/10 = (0,0022)_5$.

ĆWICZENIA. 1. Rozwinąć $\frac{1}{81}$ na ułamek dziesiętny.

Odpowiedź: $\frac{1}{81} = (0,012345679)_{10}$.

2. Rozwinąć $\frac{57}{656}$ na ułamek dziesiętny.

Odpowiedź: $\frac{57}{656} = (0,086890243)_{10}$.

3. Rozwinąć liczby $\frac{1}{10}$ i $\frac{1}{100}$ na ułamki nieskończone przy zasadzie 11.

Odpowiedź: $\frac{1}{10} = (0,1)_{11}$, $\frac{1}{100} = (0,012345678X)_{11}$, gdzie X jest cyfrą $g-1$ przy zasadzie $g=11$.

4. Rozwinąć $\frac{1}{99}$ na ułamek dziesiętny.

Odpowiedź: $\frac{1}{99} = (0,00010203 \dots 080910111213 \dots 969799)_{10}$.

Okres otrzymujemy tu wypisując jako dwucyfrowe (a więc uzupełniając jednocyfrowe zerem na początku) kolejne liczby całkowite od 0 do 99 z pominięciem liczby 98.

5. Dowieść, że liczba, której rozwinięcie na ułamek dziesiętny nieskończony otrzymuje się, pisząc zero jako całość, po przecinku zaś wypisując wszystkie kolejne liczby naturalne, tj. liczba

$$(0,12345678910111213 \dots)_{10}$$

jest niewymierna.

Dowód polega na wykazaniu, że wypisane rozwinięcie nie jest okresowe. Istotnie przy żadnym s okres tej liczby nie może składać się z s cyfr, gdyż zawiera ona wszystkie kolejne cyfry liczby 10^s , a nie jest zerem.

§ 8. Wyznaczanie liczby rodnej. Na mocy twierdzenia 4 każda liczba wymierna rozwija się na ułamek normalny okresowy (gdyż rozwinięcie skończone też możemy uważać za okresowe, z cyfrą 0, stanowiącą okres). Zapytamy obecnie, czy na

odwrot, każdy ułamek okresowy jest rozwinięciem normalnym pewnej liczby wymiernej oraz jak można ewentualnie tę liczbę, zwaną *liczbą rodną* danego rozwinięcia, wyznaczyć.

Niech więc szereg (11) ze str. 211 będzie danym ułamkiem okresowym mającym $h-1$ cyfr nieregularnych oraz s -cyfrowy okres zasadniczy. Zakładamy naturalnie, że nie wszystkie cyfry okresu zasadniczego są równe $g-1$, bo wtedy ułamek ten nie mógłby być rozwinięciem normalnym przy zasadzie g . Jest więc spełniony warunek (27) ze str. 217.

Szereg (11) możemy wobec tego napisać w postaci

$$\begin{aligned} & c_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \dots + \frac{c_{h-1}}{g^{h-1}} + \frac{c_h}{g^h} + \frac{c_{h+1}}{g^{h+1}} + \dots \\ & \dots + \frac{c_{h+s-1}}{g^{h+s-1}} + \frac{c_h}{g^{h+s}} + \frac{c_{h+1}}{g^{h+s+1}} + \dots + \frac{c_{h+s-1}}{g^{h+2s-1}} + \dots = \\ & = c_0 + \frac{c_1}{g} + \dots + \frac{c_{h-1}}{g^{h-1}} + \left(\frac{c_h}{g^h} + \frac{c_{h+1}}{g^{h+1}} + \dots + \frac{c_{h+s-1}}{g^{h+s-1}} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{g^s} + \frac{1}{g^{2s}} + \dots \right) = \\ & = c_0 + \frac{c_1}{g} + \dots + \frac{c_{h-1}}{g^{h-1}} + \left(\frac{c_h}{g^h} + \frac{c_{h+1}}{g^{h+1}} + \dots + \frac{c_{h+s-1}}{g^{h+s-1}} \right) \frac{1}{1 - \frac{1}{g^s}} = \\ & = c_0 + \frac{(c_1 g^{h+s-2} + c_2 g^{h+s-3} + \dots + c_{h-1} g^s + c_h g^{s-1} + \dots + c_{h+s-1})}{g^{h-1}(g^s - 1)} - \\ & \quad - \frac{(c_1 g^{h-2} + c_2 g^{h-3} + \dots + c_{h-1})}{g^{h-1}(g^s - 1)} = \\ & = c_0 + \frac{(c_1 c_2 \dots c_{h+s-1})_g}{g^{h-1}(g^s - 1)} - \frac{(c_1 c_2 \dots c_{h-1})_g}{g^{h-1}(g^s - 1)}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc wzór

$$(42) \quad c_0 + \frac{(c_1 c_2 \dots c_{h+s-1})_g - (c_1 c_2 \dots c_{h-1})_g}{g^{h-1}(g^s - 1)} = c_0 + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \dots,$$

z którego wynika, że szereg (11) jest rozwinięciem normalnym przy zasadzie g liczby wymiernej

$$c_0 + \frac{(c_1 c_2 \dots c_{h+s-1})_g - (c_1 c_2 \dots c_{h-1})_g}{g^{h-1}(g^s - 1)}$$

(która jednak nie musi być ułamkiem nieprzywiedlnym).

Wzór (42) przedstawia zarazem *regulę zwojania ułamków okresowych*.

5. Sprawdzić, że dla każdej zasady $g > 2$ mamy

$$\frac{1}{(g-1)^2} = (0, \overline{0123} \dots \overline{g-5} \overline{g-1})_g^{-1}.$$

Dowód. Prawa strona tego wzoru jest równa

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{g^2} + \frac{2}{g^3} + \frac{3}{g^4} + \dots + \frac{g-5}{g^{g-2}} + \frac{g-1}{g^{g-1}} \right) \left(1 + \frac{1}{g^{g-1}} + \frac{1}{g^{2(g-1)}} + \dots \right) = \\ & = \left[\frac{g^{g-5}-1}{g^{g-5}(g-1)^2} - \frac{g-5}{g^{g-2}(g-1)} + \frac{g-1}{g^{g-1}} \right] \frac{g^{g-1}}{g^{g-1}-1} = \frac{1}{(g-1)^2}. \end{aligned}$$

Por. ćwiczenie 4 ze str. 224.

6. Którą cyfrą po przecinku jest ostatnia różna od zera cyfra rozwinięcia dziesiętnego normalnego liczby 2^{-n} (gdzie n jest liczbą naturalną), a którą liczby 5^{-n} ?

Odpowiedź: n -tą w obu przypadkach.

7. Którą cyfrą po przecinku jest pierwsza różna od zera cyfra rozwinięcia dziesiętnego normalnego liczby 2^{-10} ? 2^{-100} ? 2^{-1000} ? 5^{-10} ? 5^{-100} ? 5^{-1000} ?

Odpowiedź. Jak łatwo obliczyć, pierwsza różna od zera cyfra rozwinięcia dziesiętnego normalnego liczby 2^{-n} (gdzie n jest liczbą naturalną) występuje na miejscu $n - E(n \log_{10} 2)$ po przecinku, a liczby 5^{-n} — na miejscu $n - E(n \log_{10} 5)$ po przecinku. Ponieważ $\log_{10} 2 = 0,30103\dots$, a $\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2$, więc dla liczb:

2^{-10}	2^{-100}	2^{-1000}	5^{-10}	5^{-100}	5^{-1000}
są to miejsca:					
4.	31.	302.	7.	70.	699.

¹⁾ J. W. L. Glaisher, Messenger of Mathematics, tom 2 (1873), str. 188.

ROZDZIAŁ X

RÓWNANIE PYTAGORASA I JEGO UOGÓLNIENIA

§ 1. Równanie $x^2 + y^2 = z^2$ w liczbach całkowitych. Zajmiemy się rozwiązywaniem w liczbach całkowitych równania

$$(1) \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

zwanego *równaniem Pytagorasa*.

Równanie to gra — jak wiadomo — podstawową rolę w trygonometrii i w geometrii analitycznej, a jego szczególny przypadek dla $x=y$ wiąże się z istnieniem liczb niewymiernych.

Wyłączmy rozwiązania oczywiste, w których jedna z liczb x, y jest zerem; z pozostałych możemy ograniczyć się do rozwiązań w liczbach naturalnych, gdyż zmiana znaku przy niewiadomych nie zmienia samego równania.

Nazywać będziemy *rozwiązaniem właściwym* każde takie rozwiązanie równania (1), w którym liczby x, y, z są naturalne i nie mają wspólnego dzielnika większego od jedności.

Jeżeli ξ, η, ζ jest rozwiązaniem właściwym, d zaś — jakąkolwiek liczbą naturalną, to

$$(2) \quad x = d\xi, \quad y = d\eta, \quad z = d\zeta$$

też jest rozwiązaniem x, y, z równania (1).

Istotnie, jeżeli $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$, to mnożąc obie strony przez d^2 , otrzymamy w myśl (2) równanie (1).

Na odwrót, jeżeli x, y, z jest rozwiązaniem równania (1), to istnieje taka liczba naturalna d i takie rozwiązanie właściwe ξ, η, ζ , że zachodzą wzory (2).

Istotnie, niech liczby naturalne x, y, z spełniają równanie (1); oznaczmy przez d ich największy wspólny dzielnik i przyjmijmy:

$$(3) \quad \xi = x/d, \quad \eta = y/d, \quad \zeta = z/d;$$

są to liczby naturalne. Z równania (1), po podzieleniu obu stron przez d^2 , wynika w jednej chwili wobec (3), że $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$, co