ROZDZIAŁ VII

GĘSTOŚĆ ROZMIESZCZENIA LICZB PIERWSZYCH W CIĄGU LICZB NATURALNYCH

§ 1. Iloczyn $\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)$ rozciągnięty na kolejne liczby pierwsze. Udowodnimy najpierw

Lemat I. *Dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje m kolejnych liczb pierwszych*

$$p_1, p_2, \ldots, p_m,$$

dla których zachodzi nierówność

$$(1)\qquad \left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p}\right)<\varepsilon.$$

D o w ó d. Wystarczy założyć, że $\varepsilon<1$, gdyż dla $\varepsilon\geqslant 1$ jest $1-\frac{1}{p_1}<\varepsilon$. Niech

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=S_n \quad \text{dla} \quad n=1,\ 2,\ldots$$

Okażemy, że

$$(2)\qquad S_{2^k}>\frac{k+1}{2} \quad \text{dla} \quad k=1,\ 2,\ldots$$

Istotnie, nierówność (2) zachodzi dla $k=1$, gdyż $1+\frac{1}{2}>\frac{1+1}{2}$. Jeżeli zaś nierówność (2) zachodzi dla pewnego naturalnego k, to

$$S_{2^{k+1}}=S_{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\ldots+\frac{1}{2^k+2^k}>$$

$$>S_{2^k}+\frac{2^k}{2^{k+1}}>\frac{k+1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k+2}{2},$$

czyli $S_{2^{k+1}}>\frac{k+2}{2}$, a więc zachodzi ona dla $k+1$.

Nierówność (2) została zatem udowodniona przez indukcję[1].

Przyjmijmy w szczególności $k=\mathrm{E}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$. Jest to liczba całkowita niemniejsza od 2, gdyż $\varepsilon<1$. Niech dla krótkości $n_0=2^{\mathrm{E}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}$. Jest to liczba naturalna niemniejsza od 4.

Wobec $k=\mathrm{E}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$ jest $k>\frac{2}{\varepsilon}-1$, skąd $\frac{k+1}{2}>\frac{1}{\varepsilon}$, a zatem na mocy (2) i określenia liczby n_0:

$$(3)\qquad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n_0}>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Niech

$$(4)\qquad p_1, p_2, \ldots, p_m$$

będą wszystkimi liczbami pierwszymi, niewiększymi od n_0. Dla każdej z tych liczb p_i wyznaczmy odpowiedni wykładnik α_i tak, żeby było

$$(5)\qquad p_i^{\alpha_i}\leqslant n_0, \quad \text{ale} \quad p_i^{\alpha_i+1}>n_0.$$

Liczba α_i jest więc liczbą naturalną, gdyż $p_i\leqslant n_0$. Wobec tożsamości

$$\frac{1-\dfrac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}}{1-\dfrac{1}{p_i}}=1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots+\frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$$

zachodzi dla każdego $i=1,\ 2,\ldots,\ m$ nierówność

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_i}}>1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots+\frac{1}{p_i^{\alpha_i}},$$

---

[1] Z nierówności (2) wynika, że sumy cząstkowe szeregu harmonicznego $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ wzrastają nieograniczenie. Wzrost ten jest jednak bardzo powolny. Można bowiem dowieść przez indukcję, że $S_{2^k}<k$ dla $k=3,\ 4,\ \ldots$, skąd np. $S_{2^{100}}<100$; na to więc, aby było $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>100$, musiałoby być $n>2^{100}$, a zatem $n>10^{30}$ (gdyż $2^{10}>10^3$). Gdybyśmy więc chcieli wypisać tyle składników szeregu harmonicznego, by ich suma przekroczyła liczbę 100, nie wystarczyłaby długość drogi od ziemi do najdalszych dostrzegalnych gwiazd.

skąd

(6) $$1:\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_m}\right) > \left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\dots+\frac{1}{p_1^{\alpha_1}}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_2^{\alpha_2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{p_m}+\frac{1}{p_m^2}+\dots+\frac{1}{p_m^{\alpha_m}}\right).$$

Rozwijając iloczyn po prawej stronie, otrzymamy oczywiście sumę

(7) $$\sum\frac{1}{p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}\dots p_m^{\lambda_m}}$$

rozciągniętą na wszystkie układy m liczb całkowitych $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, spełniających nierówności:

(8) $$0\leqslant\lambda_1\leqslant\alpha_1,\quad 0\leqslant\lambda_2\leqslant\alpha_2,\quad \dots,\quad 0\leqslant\lambda_m\leqslant\alpha_m.$$

Wobec tego, że liczby (4) są z założenia wszystkimi liczbami pierwszymi nie przekraczającymi n_0, wnosimy z (5), że każda liczba naturalna $n\leqslant n_0$ ma rozwinięcie na czynniki pierwsze

$$n=p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}\dots p_m^{\lambda_m},$$

w którym wykładniki λ_i czynią zadość nierównościom (8). Wynika stąd natychmiast, że wśród składników sumy (7) znajdują się wszystkie składniki szeregu

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n_0}.$$

Suma (7) jest więc niemniejsza od sumy tego szeregu, a zatem w myśl (3) — większa od $\frac{1}{\varepsilon}$. Uwzględniając wzór (6), mamy więc nierówność

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)}>\frac{1}{\varepsilon},$$

skąd wzór (1), c. b. d. d.

Jako natychmiastowy wniosek z dowiedzionego lematu I otrzymujemy następującą własność funkcji $\varphi(n)$:

Twierdzenie 1. *Dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba naturalna n, że $\varphi(n)/n<\varepsilon$.*

Wystarczy bowiem oznaczyć przy danym $\varepsilon>0$ przez m liczbę naturalną, spełniającą tezę lematu, i przyjąć $n=p_1p_2\dots p_m$.

Wynika stąd dalej z łatwością, że $\underline{\lim}_{n=\infty}\frac{\varphi(n)}{n}=0$, a z drugiej strony (wobec $\varphi(p)=p-1$ dla p pierwszych) jest $\overline{\lim}_{n=\infty}\frac{\varphi(n)}{n}=1$.

Jako inny wniosek z lematu I otrzymujemy natychmiast wzór

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)=0,$$

wyrażający, że iloczyn nieskończony $\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)$, rozciągnięty na wszystkie kolejne liczby pierwsze p, jest rozbieżny. Jak wiadomo z Analizy, pociąga to za sobą rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ czyli szeregu odwrotności kolejnych liczb pierwszych

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\dots$$

(co nie wynika jeszcze z tego, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, gdyż np. liczb kwadratowych też jest nieskończenie wiele, a szereg odwrotności kwadratów kolejnych liczb naturalnych jest zbieżny) — a także rozbieżność iloczynu nieskończonego $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)$.

Jako dalszy łatwy wniosek otrzymujemy stąd, że *istnieje ciąg nieskończony liczb naturalnych n_k $(k=1, 2, \dots)$, dla którego*

$$\lim_{k=\infty}\frac{\sigma(n_k)}{n_k}=+\infty.$$

Wystarczy bowiem przyjąć $n_k=p_1p_2\dots p_k$, gdyż (por. wzór (7), str. 115)

$$\frac{\sigma(n_k)}{n_k}=\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{p_k}\right).$$

Jest więc $\overline{\lim}_{n=\infty}\frac{\sigma(n)}{n}=+\infty$. Natomiast $\underline{\lim}_{n=\infty}\frac{\sigma(n)}{n}=1$, gdyż stale $\sigma(n)\geqslant n$, a $\frac{\sigma(p_k)}{p_k}=\left(1+\frac{1}{p_k}\right)$, skąd $\lim_{k=\infty}\frac{\sigma(p_k)}{p_k}=1$.

§ 2. Dowód wzoru $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{\pi(x)}{x}=0$. Niech teraz x będzie liczbą większą od p_m, gdzie m czyni zadość nierówności (1), i niech

$$P=p_1p_2\dots p_m. \tag{9}$$

Każda liczba pierwsza większa od p_m jest oczywiście pierwsza względem iloczynu P; stąd wniosek, że liczb pierwszych p, spełniających nierówności

$$p_m<p\leqslant x,$$

jest nie więcej niż liczb naturalnych $n\leqslant x$, pierwszych względem P. Ponieważ takich liczb n jest $\varphi(P,x)$, a z drugiej strony istnieje dokładnie m liczb pierwszych p, spełniających nierówność

$$p\leqslant p_m,$$

więc oznaczając przez $\pi(x)$ liczbę liczb pierwszych nie większych od x, możemy napisać nierówność

$$\pi(x)\leqslant m+\varphi(P,x). \tag{10}$$

Ponieważ wzór (9) przedstawia rozwinięcie liczby P na czynniki pierwsze, więc w myśl wzoru (8) z Rozdziału VI (str. 138) zachodzi równość symboliczna

$$\varphi(P,x)=\text{symb}\,E\left[x\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)\right],$$

gdzie po prawej stronie należy wprzód wypisać wszystkie 2^m wyrazów rozwinięcia iloczynu

$$x\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_m}\right),$$

a potem przed każdym z nich dopisać symbol E.

Gdybyśmy tego nie uczynili, popełnilibyśmy w każdym z 2^m wyrazów błąd mniejszy od jedności, zatem w całej sumie — błąd mniejszy od liczby jej składników, tj. od 2^m. Mamy więc nierówność

$$\varphi(P,x)<2^m+x\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_m}\right),$$

skąd wobec (1)

$$\varphi(P,x)<2^m+x\varepsilon.$$

Nierówność (10) daje więc

$$\pi(x)<m+2^m+x\varepsilon \quad \text{dla każdego } x>p_m. \tag{11}$$

Przyjmijmy dla skrócenia oznaczenie

$$\mu=p_m+\frac{m+2^m}{\varepsilon}.$$

Dla $x>\mu$ zachodzą oczywiście nierówności

$$x>p_m \quad \text{i} \quad x>\frac{m+2^m}{\varepsilon}.$$

Pierwsza z nich pociąga za sobą nierówność (11), druga zaś daje

$$m+2^m<x\varepsilon,$$

skąd, uwzględniając (11), otrzymujemy $\pi(x)<2x\varepsilon$ czyli

$$\frac{\pi(x)}{x}<2\varepsilon.$$

Tym sposobem udowodniliśmy następujące

Twierdzenie 2. *Do każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $\mu>0$, że nierówność*

$$x>\mu$$

pociąga za sobą nierówność

$$\frac{\pi(x)}{x}<2\varepsilon. \tag{12}$$

Innymi słowy: *dla dostatecznie wielkich x stosunek liczby liczb pierwszych niewiększych od x do samej liczby x staje się i pozostaje mniejszy od każdej danej naprzód liczby dodatniej.*

O liczbie liczb pierwszych niewiększych od x wiemy więc, że wzrasta ona nieograniczenie wraz z x, ale jej stosunek do x zmierza do zera [1]).

§ 3. Ograniczoność stosunku $\pi(x):(x/\log x)$. Za pomocą elementarnych twierdzeń z Analizy można udowodnić twierdzenie mocniejsze niż twierdzenie 2, a mianowicie

[1]) Czytelników, interesujących się bliżej zagadnieniem rozmieszczenia liczb pierwszych, odsyłamy do dwutomowego dzieła: E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Lipsk-Berlin 1909.

Twierdzenie 3. *Dla wszelkich $x>1$ rzeczywistych zachodzi nierówność*

$$\pi(x)<(8\log 2+2)\frac{x}{\log x}. \tag{13}$$

W tym celu udowodnimy następujący

Lemat II [1]. *Oznaczając dla n naturalnych przez $f(n)$ iloczyn wszystkich liczb pierwszych p, dla których $n<p\leqslant 2n$, mamy nierówność $f(n)<2^{2n}$.*

Dowód. Liczba $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ jest — jak wiadomo — całkowita. Każda liczba pierwsza p, dla której $n<p<2n$, dzieli oczywiście liczbę $(2n)!$, lecz nie dzieli liczby $(n!)^2$. Jest więc $f(n)\Big|\binom{2n}{n}$, skąd

$$f(n)\leqslant\binom{2n}{n}<\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=(1+1)^{2n}=2^{2n},$$

a zatem $f(n)<2^{2n}$, c. b. d. o.

Oznaczmy teraz przez $L(x)$ sumę wszystkich logarytmów naturalnych liczb pierwszych $p\leqslant x$:

$$L(x)=\sum_{p\leqslant x}\log p.$$

Jak łatwo widzieć, jest $\log f(n)=L(2n)-L(n)$, zatem na mocy lematu II

$$L(2n)-L(n)<2n\log 2$$

oraz

$$L(2^k)-L(2^{k-1})<2^k\log 2 \qquad \text{dla } k=1,2,\ldots,m,$$

skąd przez sumowanie

$$L(2^m)<2^{m+1}\log 2.$$

Oznaczając następnie przez p_n n-tą z kolei liczbę pierwszą, mamy — jak wiadomo —

$$\pi(p_n)=n.$$

Dla $n>\mu$ jest $p_n\geqslant n>\mu$, skąd w myśl (12) $\pi(p_n):p_n<2\varepsilon$ czyli $n:p_n<2\varepsilon$. Wynika stąd, że stosunek $p_n:n$ wzrasta nieograniczenie wraz z n.

[1]) Ob. S. A. Scott, The Edinburgh Mathematical Notes (1939), No 31, str. XVII.

Niech teraz x będzie liczbą rzeczywistą większą od 1. Istnieje oczywiście taka liczba naturalna m, że $2^{m-1}\leqslant x<2^m$. Stąd

$$L(x)\leqslant L(2^m)<2^{m+1}\log 2\leqslant 4x\log 2 \quad \text{czyli} \quad L(x)<4x\log 2.$$

Lecz $\quad L(x)\geqslant\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\log p\geqslant[\pi(x)-\pi(\sqrt{x})]\log\sqrt{x} \quad$ i $\quad \pi(\sqrt{x})\leqslant\sqrt{x}$;

zatem

$$\frac{\pi(x)\log x}{x}<8\log 2+\frac{2\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Otóż wiadomo z Analizy, że $e^t>t$ dla $t>0$, skąd $\log t<t$ dla $t>0$ i przeto $\log\sqrt{x}<\sqrt{x}$. Jest więc

$$\frac{\pi(x)\log x}{x}<8\log 2+2$$

i tym samym wzór (13) został udowodniony.

W myśl dowiedzionego w ten sposób twierdzenia 3 stosunek $\pi(x):(x/\log x)$ jest dla wszelkich $x>1$ ograniczony od góry. Okażemy teraz, że dla $x\geqslant 2$ jest on też ograniczony od dołu przez liczbę dodatnią.

W tym celu udowodnimy przede wszystkim następujący

Lemat III. *Jeżeli m jest liczbą naturalną, a p — liczbą pierwszą, to najwyższą potęgą liczby p, dzielącą $m!$, jest*

$$\nu=\mathrm{E}\Big(\frac{m}{p}\Big)+\mathrm{E}\Big(\frac{m}{p^2}\Big)+\mathrm{E}\Big(\frac{m}{p^3}\Big)+\ldots$$

Innymi słowy: *liczba pierwsza p wchodzi do rozwinięcia na czynniki pierwsze liczby $m!$ z wykładnikiem ν.*

Dowód. Niech k będzie liczbą naturalną. Wśród liczb $1,2,\ldots,m$ jest oczywiście (por. str. 127) $\mathrm{E}\Big(\frac{m}{p^k}\Big)$ podzielnych przez p^k i $\mathrm{E}\Big(\frac{m}{p^{k+1}}\Big)$ podzielnych przez p^{k+1}, zatem $\mathrm{E}\Big(\frac{m}{p^k}\Big)-\mathrm{E}\Big(\frac{m}{p^{k+1}}\Big)$ podzielnych przez p^k, lecz niepodzielnych przez p^{k+1} czyli takich, w których rozwinięciach na czynniki pierwsze liczba pierwsza p występuje z wykładnikiem k. Iloczyn tych wszystkich liczb daje więc rozwinięcie na czynniki pierwsze, w którym liczba pierwsza p występuje z wykładnikiem $k\Big[\mathrm{E}\Big(\frac{m}{p^k}\Big)-\mathrm{E}\Big(\frac{m}{p^{k+1}}\Big)\Big]$. Wynika stąd z łatwością, że do rozwinięcia liczby $m!$ na czynniki pierwsze liczba pierwsza p wchodzi z wykładnikiem

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left[E\left(\frac{m}{p^k}\right)-E\left(\frac{m}{p^{k+1}}\right)\right]=\sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{m}{p^k}\right)$$

czyli z wykładnikiem ν, c. b. d. o.

Uwaga. Szeregi występujące w tym dowodzie są tylko pozornie nieskończone, gdyż dla dostatecznie wielkich k (bo w każdym razie dla wszystkich $k>m$) jest $E\left(\frac{m}{p^k}\right)=0$.

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 4. *Dla wszelkich rzeczywistych $x\geqslant 2$ zachodzi nierówność*

$$\pi(x)>\frac{\log 2}{4}\,\frac{x}{\log x}. \tag{14}$$

Dowód. Niech p będzie czynnikiem pierwszym w rozwinięciu liczby naturalnej $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Jest oczywiście $p\leqslant 2n$. Niech s będzie największą liczbą naturalną, dla której $p^s\leqslant 2n$. Jak wiemy z lematu III, liczba pierwsza p wchodzi do rozwinięcia liczby $(2n)!$ z wykładnikiem $\sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{2n}{p^k}\right)$, a do rozwinięcia liczby $n!$ z wykładnikiem $\sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{n}{p^k}\right)$. Zatem do rozwinięcia liczby $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ liczba p wchodzi z wykładnikiem

$$r(p)=\sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{2n}{p^k}\right)-2\sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{n}{p}\right)=\sum_{k=1}^{s}\left[E\left(\frac{2n}{p^k}\right)-2E\left(\frac{n}{p}\right)\right].$$

Lecz dla t rzeczywistych jest

$$E(t)-2E\left(\frac{t}{2}\right)\leqslant 1,$$

gdyż lewa strona jest liczbą całkowitą i

$$E(t)-2E\left(\frac{t}{2}\right)<t-2\left(\frac{t}{2}-1\right)=2.$$

Wobec tego $r(p)\leqslant\sum_{k=1}^{s}1=s$ czyli $r(p)\leqslant s$, skąd $p^{r(p)}\leqslant p^s\leqslant 2n$. Wobec

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\prod_{p\leqslant 2n} p^{r(p)},$$

gdzie iloczyn rozciąga się na wszystkie liczby pierwsze $p\leqslant 2n$, jest więc

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}\leqslant\prod_{p\leqslant 2n} 2n=(2n)^{\pi(2n)}.$$

Z drugiej strony

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{1\cdot 2\dots n}=\prod_{k=1}^{n}\frac{n+k}{k}\geqslant\prod_{k=1}^{n}2=2^n,$$

skąd $2^n\leqslant(2n)^{\pi(2n)}$, czyli $\pi(2n)\log 2n\geqslant n\log 2$. Dla $x\geqslant 2$ jest więc

$$\pi(x)\geqslant\pi\left[2E\left(\frac{x}{2}\right)\right]\geqslant\frac{E\left(\frac{x}{2}\right)\log 2}{\log 2E\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Lecz $2E\left(\frac{x}{2}\right)\leqslant x$, skąd $\log 2E\left(\frac{x}{2}\right)\leqslant\log x$, a dla $x\geqslant 4$ jest $x-2\geqslant\frac{x}{2}$ i $E\left(\frac{x}{2}\right)>\frac{x}{2}-1\geqslant\frac{x}{4}$. Zatem $\pi(x)>\frac{x\log 2}{4\log x}$, gdy $x\geqslant 4$, co jednak jest słuszne również wtedy, gdy $2\leqslant x<4$, ponieważ wówczas $\frac{x\log 2}{4\log x}<1$. Tak więc wzór (14) został udowodniony [1]).

Łącząc twierdzenia 3 i 4, możemy wypowiedzieć następujący

Wniosek. *Istnieją takie dwie liczby dodatnie a i b, mianowicie $a=8\log 2+2$ i $b=\frac{1}{4}\log 2$, że*

$$a<\pi(x):\frac{x}{\log x}<b \quad \textit{dla wszelkich } x\geqslant 2.$$

J. Hadamard i Ch. de la Vallée Poussin dowiedli w 1896 r., że

$$\lim_{x=\infty}\left(\pi(x):\frac{x}{\log x}\right)=1, \tag{15}$$

co jednak jest już rzeczą znacznie trudniejszą.

[1]) Por. E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, tom I, Lipsk 1927, str. 67.

Niech teraz p_n oznacza n-tą z kolei liczbę pierwszą. W myśl twierdzenia 3 jest

$$\pi(p_n) < b\frac{p_n}{\log p_n}$$

przy czym oczywiście $\pi(p_n) = n$ i $p_n \geqslant n$. Jest więc

$$p_n > \frac{1}{b}\pi(p_n)\log p_n \geqslant \frac{n\log n}{b}.$$

Przy oznaczeniu $c = \frac{1}{b}$ mamy zatem

$$p_n > cn\log n.$$

Z drugiej strony w myśl twierdzenia 4 jest

$$\pi(p_n) > a\frac{p_n}{\log p_n},$$

skąd wobec $\pi(p_n) = n$

$$a < \frac{n\log p_n}{p_n}. \tag{16}$$

Lecz — jak wiadomo z Analizy — dla dostatecznie wielkich n jest $\frac{\log p_n}{\sqrt{p_n}} < a$, skąd, na mocy (16), $\frac{\log p_n}{\sqrt{p_n}} < \frac{n\log p_n}{p_n}$, więc $p_n < n^2$, czyli $\log p_n < 2\log n$ i przeto, na mocy (16), $a < \frac{2n\log n}{p_n}$. Przy oznaczeniu $d = \frac{2}{a}$ mamy więc

$$p_n < dn\log n.$$

Udowodniliśmy zatem

Twierdzenie 5[1]. *Istnieją takie liczby dodatnie c i d, że dla dostatecznie wielkich n jest*

$$cn\log n < p_n < dn\log n. \tag{17}$$

Ze wzoru (15) można z łatwością wysnuć, że $\lim\limits_{n=\infty}(p_n : n\log n) = 1$, stąd zaś że $\lim\limits_{n=\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$.

[1]) Por. E. Landau, tamże, str. 68-69.

Rosser dowiódł [1]), że dla wszelkich n naturalnych zachodzi nierówność

$$p_n > n\log n,$$

a dla naturalnych $n > 1$

$$n\log n + n\log\log n - n - 9n < p_n < n\log n + n\log\log n - n + 9n;$$

dowiódł on też [2]), że dla naturalnych $n \geqslant 55$ jest

$$\frac{n}{\log n + 2} < \pi(n) < \frac{n}{\log n - 4}.$$

Łatwo dowieść, że dla każdej liczby naturalnej m istnieje taka liczba naturalna n, że $p_{n+1} - p_n > m$ (por. ćwiczenie 4 z Rozdziału I, § 8, str. 23).

Natomiast nie wiemy, czy $\lim\limits_{n=\infty}(p_{n+1} - p_n) = +\infty$.

ĆWICZENIA. 1. Opierając się na przytoczonych nierównościach Rossera dla p_n oraz na tym że $2 < \log 10 < 3$, dowieść, że miliardowa liczba pierwsza ma 11 cyfr [3]).

2. Obliczyć, ile zer na końcu ma liczba 1000!

Odpowiedź: 249, ponieważ w myśl lematu III najwyższą potęgą liczby 5, dzielącą liczbę 1000!, jest 249-ta, a liczby 2 jest 994-ta.

3. Dowieść następującego wzoru [4]) dla największej liczby pierwszej p, dzielącej liczbę naturalną n:

$$p = \lim_{k=\infty}\lim_{l=\infty}\lim_{m=\infty}\sum_{i=0}^{l}\left\{1 - \left(\cos\frac{(i!)^k\pi}{n}\right)^{2m}\right\}.$$

Wskazówka. Oprzeć się na tym, że dla $i < p$ jest

$$f(i,k) = \left(\cos\frac{(i!)^k\pi}{n}\right)^2 < 1,$$

skąd $\lim\limits_{m=\infty}[f(i,k)]^m = 0$, a dla $i \geqslant p$ oraz dostatecznie wielkich k jest $f(i,k) = 1$; zatem dla dostatecznie wielkich k i l jest

$$\lim_{m=\infty}\sum_{i=0}^{k}\{1 - [f(i,k)]^m\} = p.$$

[1]) J. B. Rosser, Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, tom 45 (1939), str. 21.

[2]) J. B. Rosser American Journal of Mathematics, tom 63 (1941), str. 211.

[3]) E. Borel w zbiorowym dziele *Les grands courants de la pensée mathématique, présentés par F. Le Lionnais,* Cahiers du Sud (1948), str. 26, podaje, że liczba ta ma 10 cyfr (co może jest błędem drukarskim).

[4]) G. H. Hardy, Messenger of Mathematics, tom 35 (1906), str. 145.