

ROZDZIAŁ VI

FUNKCJA MÖBIUSA, FUNKCJA GAUSSA,
ZALEŻNOŚĆ $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ I JEJ ODWRÓCENIE

§ 1. Funkcja Möbiusa i jej własności. Wprowadzimy teraz pewną pomocniczą funkcję liczbową $\mu(n)$, zwaną *funkcją Möbiusa* (a przez niektórych autorów — *funkcją Mertensa*). Określamy ją, jak następuje:

- (1) $\mu(1) = 1$;
 (2) $\mu(n) = 0$ dla liczb n , podzielnych przez kwadrat większy od 1;
 (3) $\mu(n) = (-1)^k$ dla liczb n , które są iloczynami k różnych czynników pierwszych.

W myśl tej definicji jest więc np.:

$$\begin{aligned} \mu(1) &= 1, & \mu(2) &= -1, & \mu(3) &= -1, & \mu(4) &= 0, & \mu(5) &= -1, \\ \mu(6) &= 1, & \mu(7) &= -1, & \mu(8) &= 0, & \mu(9) &= 0, & \mu(10) &= 1, \end{aligned}$$

Wyprowadzimy obecnie pewną własność funkcji $\mu(n)$. Założymy w tym celu, że liczba $n > 1$ ma rozwinięcie na czynniki pierwsze

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

i weźmy pod uwagę iloczyn

$$(4) \quad (1 - p_1^s)(1 - p_2^s) \dots (1 - p_k^s),$$

gdzie s jest liczbą całkowitą.

Rozwinięcie iloczynu (4) składa się oczywiście z 1 i z wyrazów $\pm d^s$, gdzie d jest dzielnikiem liczby n , będącym iloczynem samych różnych czynników pierwszych, znak zaś jest + albo — zależnie od tego, czy liczba czynników pierwszych liczby d jest parzysta, czy nieparzysta. W myśl własności (3) funkcji Möbiusa, możemy więc powiedzieć, że współczynnik ± 1 przy d^s jest równy $\mu(d)$.

Jeżeli jeszcze weźmiemy pod uwagę, że $\mu(1) \cdot 1^s = 1$ oraz że na to, by liczba d była albo jednością, albo iloczynem samych różnych czynników pierwszych, potrzeba i wystarcza, żeby nie miała ona żadnego dzielnika kwadratowego większego od 1, to z łatwością dojdziemy do wniosku, że iloczyn (4) równy jest sumie

$$(5) \quad \sum \mu(d) \cdot d^s,$$

rozsuniętej na wszystkie dzielniki (naturalne) liczby n , niepodzielne przez żaden kwadrat większy od 1.

Jeżeli wreszcie uwzględnimy, że dla pozostałych dzielników liczby n (o ile takie istnieją) musi być $\mu(d) = 0$ w myśl własności (2) funkcji Möbiusa, to będziemy mogli sumę (5), nie zmieniając jej wartości, rozciągnąć na wszystkie dzielniki naturalne liczby n .

Wprowadźmy następujące znakowanie: jeżeli

$$d_1, d_2, \dots, d_m$$

są wszystkimi dzielnikami liczby n , to sumę

$$f(d_1) + f(d_2) + \dots + f(d_m)$$

oznaczать będziemy dla skrócenia symbolem

$$\sum_{d|n} f(d)$$

i nazywać *sumą składników $f(d)$, rozciągniętą na wszystkie dzielniki liczby n* .

W myśl tego znakowania, otrzymamy dla iloczynu (4) wzór

$$(6) \quad (1 - p_1^s)(1 - p_2^s) \dots (1 - p_k^s) = \sum_{d|n} \mu(d) d^s.$$

W szczególności, gdy $s = 0$, otrzymujemy z (6)

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

dla każdej liczby naturalnej $n > 1$.

Tak np.

$$\sum_{d|10} \mu(d) = 0;$$

jakoż sprawdzamy bezpośrednio, że

$$\mu(1) + \mu(2) + \mu(5) + \mu(10) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

§ 2. Liczba niewiększych od x liczb pierwszych względem liczb pierwszych $p_1, p_2, \dots, p_m$. Niech $x \geq 1$ będzie liczbą rzeczywistą, a $p_1, p_2, \dots, p_m$ — różnymi liczbami pierwszymi. Oznaczmy przez $\psi(p_1, p_2, \dots, p_m; x)$ liczbę liczb naturalnych niewiększych od x i pierwszych względem każdej z liczb $p_1, p_2, \dots, p_m$. Zajmiemy się obliczeniem liczby $\psi(p_1, p_2, \dots, p_m; x)$. Aby otrzymać niewiększe od x liczby pierwsze względem p_1 , należy z ciągu $1, 2, \dots, E(x)$ usunąć liczby podzielne przez p_1 ; jest ich — jak łatwo widzieć — $E\left(\frac{x}{p_1}\right)$, skąd

$$(7) \quad \psi(p_1; x) = E(x) - E\left(\frac{x}{p_1}\right).$$

Obliczmy z kolei, ile jest niewiększych od x liczb pierwszych względem p_1 i p_2 . Spośród $\psi(p_1; x)$ liczb ciągu $1, 2, \dots, E(x)$, pierwszych względem p_1 , musimy usunąć te, które nie są pierwsze względem p_2 , a więc które są postaci kp_2 , gdzie k jest liczbą naturalną pierwszą względem p_1 . Liczb takich jest oczywiście tyle, ile jest liczb naturalnych $k \leq \frac{x}{p_2}$ pierwszych względem p_1 , czyli $\psi\left(p_1; \frac{x}{p_2}\right)$, skąd wobec (7)

$$\psi(p_1, p_2; x) = \psi(p_1; x) - \psi\left(p_1, \frac{x}{p_2}\right) = E(x) - E\left(\frac{x}{p_1}\right) - E\left(\frac{x}{p_2}\right) + E\left(\frac{x}{p_1 p_2}\right).$$

Wzór ten możemy napisać symbolicznie w postaci

$$\psi(p_1, p_2; x) = \text{symb } E\left[x\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\right],$$

co należy rozumieć w ten sposób, że po prawej stronie rozwijamy najpierw iloczyn

$$x\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) = x - \frac{x}{p_1} - \frac{x}{p_2} + \frac{x}{p_1 p_2},$$

a następnie przed każdym z czterech wyrazów tego rozwinięcia dopisujemy znak E.

Założmy teraz, że przy pewnym m naturalnym zachodzi dla wszelkich różnych m liczb pierwszych $p_1, p_2, \dots, p_m$ (i dla każdej liczby rzeczywistej $x \geq 1$) równość symboliczna

$$(8) \quad \psi_1(p_1, p_2, \dots, p_m; x) = \text{symb } E\left[x\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)\right].$$

Aby obliczyć, ile jest w ciągu $1, 2, \dots, E(x)$ liczb pierwszych względem każdej z $m+1$ różnych liczb pierwszych $p_1, p_2, \dots, p_{m+1}$, musimy spośród $\psi(p_1, p_2, \dots, p_m; x)$ liczb tego ciągu, pierwszych względem $p_1, p_2, \dots, p_m$, usunąć te, które są postaci kp_{m+1} , gdzie k jest liczbą pierwszą względem $p_1, p_2, \dots, p_m$; wobec $kp_{m+1} \leq x$ jest przy tym $k \leq \frac{x}{p_{m+1}}$. Liczb, które mamy usunąć, jest więc $\psi\left(p_1, p_2, \dots, p_m; \frac{x}{p_{m+1}}\right)$, skąd wobec (8):

$$\begin{aligned} \psi(p_1, p_2, \dots, p_{m+1}; x) &= \psi(p_1, p_2, \dots, p_m; x) - \psi\left(p_1, p_2, \dots, p_m; \frac{x}{p_{m+1}}\right) = \\ &= \text{symb } E\left[x\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)\right] - \\ &\quad - \text{symb } E\left[\frac{x}{p_{m+1}}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)\right], \end{aligned}$$

co — jak łatwo widzieć — jest równe

$$\text{symb } E\left[x\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)\left(1 - \frac{1}{p_{m+1}}\right)\right].$$

Wzór symboliczny (8) został w ten sposób udowodniony przez indukcję. Niech teraz

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m}$$

będzie rozwinięciem liczby $n > 1$ na czynniki pierwsze i niech $\varphi(n, x)$ oznacza liczbę niewiększych od x liczb pierwszych względem n .

Jest oczywiście

$$\varphi(n, x) = \psi(p_1, p_2, \dots, p_m; x),$$

a zatem wobec (8)

$$(9) \quad \varphi(n, x) = \text{symb } E\left[x\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)\right].$$

Z własności (1)-(3) funkcji Möbiusa wynika z łatwością, że wzór (9), można też napisać w postaci

$$(10) \quad \varphi(n, x) = \sum_{d|n} \mu(d) E\left(\frac{x}{d}\right).$$

§ 3. Funkcja Gaussa $\varphi(n)$. Niech teraz w szczególności $x=n$ i umówmy się oznaczać $\varphi(n, n)$ po prostu przez $\varphi(n)$. Funkcja $\varphi(n)$, tzw. *funkcja Gaussa*, jest więc liczbą największych od n liczb naturalnych pierwszych względem n .

Ponieważ dla $x=n$ (wobec $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$) wszystkie wyrazy rozwinięcia $x \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right)$ są liczbami całkowitymi i wskutek tego

$$\text{symb } E \left[n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) \right] = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right),$$

więc wzór (9) daje wobec $\varphi(n, n) = \varphi(n)$

$$(11) \quad \varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right),$$

co można też napisać w postaci

$$(12) \quad \varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} (p_1-1) p_2^{\alpha_2-1} (p_2-1) \dots p_m^{\alpha_m-1} (p_m-1)$$

lub wobec (10) w postaci

$$(13) \quad \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) E \left(\frac{n}{d} \right).$$

Tak np.

$$\varphi(60) = \varphi(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 2(2-1)(3-1)(5-1) = 16,$$

$$\varphi(81) = \varphi(3^4) = 3^3(3-1) = 54,$$

$$\varphi(1000) = \varphi(2^3 \cdot 5^3) = 2^2 \cdot 5^2(2-1)(5-1) = 400.$$

Za pomocą wzoru (12) z łatwością obliczamy kolejne wartości funkcji $\varphi(n)$ (w tym wartość $\varphi(1)=1$ wyznaczamy na podstawie definicji funkcji $\varphi(n)$, gdyż wzór (12) służy tylko dla $(n>1)$):

$$\begin{array}{cccccc} \varphi(1)=1, & \varphi(2)=1, & \varphi(3)=2, & \varphi(4)=2, & \varphi(5)=4, \\ \varphi(6)=2, & \varphi(7)=6, & \varphi(8)=4, & \varphi(9)=6, & \varphi(10)=4. \end{array}$$

Jako ciekawy przykład zastosowania funkcji φ podamy następujący dowód Kummera, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Przypuśćmy, że mnogość wszystkich liczb pierwszych jest skończona; niech to będą kolejno liczby

$$p_1, p_2, \dots, p_n,$$

a P niech będzie ich iloczynem.

Każda liczba $n>1$ ma przynajmniej jeden czynnik pierwszy, a więc przynajmniej jeden wspólny dzielnik z P . Stąd wniosek, że tylko liczba 1 jest pierwsza względem P , a zatem

$$\varphi(P) = 1.$$

Lecz z drugiej strony, w myśl wzoru (13) jest

$$\varphi(P) = (p_1-1)(p_2-1) \dots (p_n-1),$$

co jest oczywiście liczbą większą od 1, gdyż $p_2-1=3-1=2$. Przypuszczenie, że mnogość wszystkich liczb pierwszych jest skończona, prowadzi więc do sprzeczności.

Istnieją liczby n o tej własności, że każda mniejsza od n liczba pierwsza względem n jest liczbą pierwszą. Własność tę ma — jak łatwo widzieć — np. liczba 30. Można dowieść, że żadna liczba naturalna $n>30$ własności tej już nie posiada. Dowód elementarny znalazł Bonse¹⁾. Łatwo to natomiast wyprowadzić z postulatu Bertranda (p. Rozdział I, str. 14).

Ze wzoru (12) wynika, że jeżeli liczba n jest pierwsza, to

$$\varphi(n) = n-1.$$

Okażemy, że jeżeli liczba naturalna n jest złożona, to

$$\varphi(n) < n-1.$$

Niech $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ będzie rozwinięciem liczby n na czynniki pierwsze; jest albo $m>1$, albo $m=1$ i $\alpha_1>1$.

Jeżeli $m>1$, to p_1 i p_2 są różnymi liczbami pierwszymi skąd $p_1 + p_2 \geq 5$, a zatem

$$(p_1-1)(p_2-1) = p_1 p_2 - (p_1 + p_2) + 1 \leq p_1 p_2 - 4$$

i przeto

$$\begin{aligned} p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_m^{\alpha_m-1} (p_1-1)(p_2-1) \dots (p_m-1) &\leq \\ &\leq p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_m^{\alpha_m-1} (p_1 p_2 - 4) p_3 \dots p_m = \\ &= n - 4 p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} p_3^{\alpha_3} \dots p_m^{\alpha_m} \leq n-4. \end{aligned}$$

¹⁾ H. Bonse, Archiv der Mathematik und Physik, tom 12 (5) (1907), str. 292-295; ob. też R. Remak, tamże, tom 15 (1908), str. 186-195 oraz H. Rademacher i O. Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, Berlin 1930, str. 151-157.

Wobec (12) jest więc $\varphi(n) \leq n-4$.

Jeżeli zaś $m=1$ i $a_1 > 1$, to na mocy (12) jest

$$\varphi(n) = p_1^{a_1-1}(p_1-1) = p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1} \leq p_1^{a_1} - p_1 \leq n-2,$$

(przy tym — jak łatwo widzieć — jest $\varphi(n) = n-2$ tylko dla $n=4$).

Z uwagi na to, że $\varphi(1)=1$, możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 1. *Równość $\varphi(n)=n-1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest pierwsza.*

Ponieważ — jak to wynika z dowodu — dla liczb złożonych $n > 4$ mamy $\varphi(4) \leq n-3$, więc dla liczb pierwszych $p > 3$ mamy $\varphi(p) = p-1$ oraz $\varphi(p+1) \leq p-2$, skąd $\varphi(p+1) < \varphi(p)$. Istnieje więc nieskończenie wiele liczb naturalnych n , dla których

$$\varphi(n+1) < \varphi(n).$$

Z drugiej strony, łatwo widzieć, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = +\infty.$$

Jeżeli bowiem $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m}$, gdzie $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_m$ (skąd $p_k \geq 5$ dla $k \geq 3$), to $n \geq 5^{m-2} > 4^{m-2}$; stąd $2^{m-2} < \sqrt{n}$, a że $\varphi(n) \geq \frac{n}{2^m}$ na mocy (11), więc $\varphi(n) > \frac{\sqrt{n}}{4}$ dla $n=1, 2, 3, \dots$. Zatem:

Funkcja $\varphi(n)$ rośnie nieograniczenie wraz z n , ale nie jest stale rosnąca.

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że nie ma takiej liczby naturalnej n , dla której $\varphi(n) = 14$.

2. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną m , dla której równanie $\varphi(x) = m$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x .

Odpowiedź: $m=5$.

3. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej m istnieje co najwyżej skończenie wiele liczb naturalnych x , dla których

$$\varphi(x) = m$$

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (12).

4. Znaleźć wszystkie liczby naturalne x , dla których

$$\varphi(x) = 100.$$

Odpowiedź: 101, 125, 202 i 250.

5. Znaleźć wszystkie liczby naturalne x , dla których $\varphi(x) = 2^{10}$.

Odpowiedź: 2^{11} , $2^{10} \cdot 3$, $2^9 \cdot 5$, $2^7 \cdot 17$, $2^3 \cdot 257$, $2^8 \cdot 5 \cdot 5$, $2^6 \cdot 5 \cdot 17$, $2^2 \cdot 3 \cdot 257$, $2^5 \cdot 5 \cdot 17$, $5 \cdot 257$, $2 \cdot 5 \cdot 257$, $2^3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17$.

6. Dowieść, że $2\varphi[\varphi(n)] \leq \varphi(n)$ dla naturalnych $n > 2$.

Dowód. Dla $n > 2$ liczba $\varphi(n)$ jest — jak łatwo widzieć — parzysta, a zatem $\varphi(n) = 2^h(2q-1)$, gdzie $h \geq 1$; stąd $\varphi[\varphi(n)] = 2^{h-1}\varphi(2q-1) \leq 2^{h-1}(2q-1)$ i przeto

$$2\varphi[\varphi(n)] \leq 2^h(2q-1) = \varphi(n).$$

7. Dowieść¹⁾, że dla $n > 30$ jest $\varphi(n) > \theta(n)$, gdzie $\theta(n)$ oznacza liczbę dzielników naturalnych liczby n .

8. Dowieść, że żadna liczba naturalna x nie spełnia równania $\varphi(x) = 99$ ani równania $\varphi(x) = 101$.

9. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $\varphi(x) = 82$ w liczbach naturalnych x .

Odpowiedź: 83 i 166.

10. Obliczyć, ile jest liczb naturalnych x , dla których $\varphi(x) = 96$.

Odpowiedź: 17.

11. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych m , dla których równanie $\varphi(x) = m$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x .

Odpowiedź: Takimi są np. wszystkie liczby nieparzyste $m > 1$.

12. Dowieść, że wszystkich różnych ułamków właściwych nieprzywiedlnych nieujemnych o mianowniku nie większym od n jest $\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n)$.

13. Dowieść, że liczba występująca w ciągu $1, 2, \dots, n$ (gdzie n jest liczbą naturalną) jest wtedy i tylko wtedy liczbą pierwszą względem każdej innej liczby występującej w tym ciągu, jeżeli jest bądź jednością, bądź liczbą pierwszą większą od $n/2$. Że dla każdego naturalnego $n > 1$ istnieje w tym ciągu co najmniej jedna taka liczba pierwsza, wynika z postulatu Bertranda (p. Rozdział I, str. 14).

§ 4. Własności funkcji Gaussa i jej zastosowania. Zajmemy się obecnie wyprowadzeniem wzoru na liczbę niewiększych od x liczb naturalnych, mających z daną liczbą n dany największy wspólny dzielnik d .

Na to, by liczba m miała z liczbą n największy wspólny dzielnik d , potrzeba i wystarcza, żeby było $m = kd$, gdzie k jest liczbą naturalną pierwszą względem $\frac{n}{d}$ (ob. Rozdział I, § 3 str. 5).

Jeżeli nadto $m \leq x$, to musi być $k \leq \frac{x}{d}$. Zatem tyle niewiększych od x liczb naturalnych spełnia warunek $(m, n) = d$, ile jest liczb naturalnych niewiększych od $\frac{x}{d}$ i pierwszych względem $\frac{n}{d}$.

¹⁾ Szczegółowy dowód podali G. Pólya i G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, tom II, Berlin 1925, str. 352.

Jest ich więc $\varphi\left(\frac{n}{d}, \frac{x}{d}\right)$.

W szczególności, dla $x=n$ otrzymujemy jako liczbę wszystkich wyrazów ciągu

$$(14) \quad 1, 2, \dots, n,$$

mających z n największy wspólny dzielnik d , liczbę

$$\varphi\left(\frac{n}{d}, \frac{n}{d}\right) = \varphi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Niech teraz

$$d_1, d_2, \dots, d_m$$

będą wszystkimi dzielnikami naturalnymi liczby n , ustawionymi np. według kolejnych wielkości. Wszystkie liczby ciągu (14) możemy podzielić na m klas, zaliczając do i -tej klasy wszystkie te, które mają z liczbą n największy wspólny dzielnik d_i . W i -tej klasie będzie więc $\varphi\left(\frac{n}{d_i}\right)$ liczb, a że wszystkich liczb w ciągu (14) jest n , więc oczywiście

$$(15) \quad \varphi\left(\frac{n}{d_1}\right) + \varphi\left(\frac{n}{d_2}\right) + \dots + \varphi\left(\frac{n}{d_m}\right) = n.$$

Lecz gdy d_i przebiega wszystkie dzielniki liczby n w porządku rosnącym, to oczywiście $\frac{n}{d_i}$ też przebiega wszystkie dzielniki liczby n , tylko w porządku malejącym. Wzór (12) możemy więc napisać w postaci

$$(16) \quad \sum_{d|n} \varphi(d) = n,$$

skąd

Twierdzenie 2. Suma wartości funkcji Gaussa, rozciągnięta na wszystkie dzielniki naturalne liczby n , równa jest n .

Tak np. dla $n=6$:

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(6) = 6;$$

jakoż istotnie po lewej stronie mamy składniki $1+1+2+2=6$.

Wyprowadzimy jeszcze jedną ważną własność funkcji Gaussa. Założmy, że a i b są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi.

Niech

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \quad \text{ i } \quad b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l}$$

będą rozwinięciami tych liczb na czynniki pierwsze. Liczba ab ma oczywiście rozwinięcie na czynniki pierwsze

$$ab = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l},$$

skąd w myśl wzoru (11):

$$\varphi(a) = a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

$$\varphi(b) = b \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_l}\right),$$

$$\varphi(ab) = ab \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_l}\right),$$

a zatem

$$(17) \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Równość $(a, b) = 1$ pociąga więc za sobą równość (17).

Godne uwagi jest, że i na odwrót, z równości (17) wynika równość $(a, b) = 1$.

Istotnie, załóżmy, że $(a, b) > 1$, że więc liczby a i b mają jakieś wspólne czynniki pierwsze $r_1, r_2, \dots, r_m$; prócz tego a może mieć dzielniki pierwsze $p_1, p_2, \dots, p_k$, a b — dzielniki pierwsze $q_1, q_2, \dots, q_l$. Jest oczywiście:

$$\varphi(a) = a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \left(1 - \frac{1}{r_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{r_m}\right),$$

$$\varphi(b) = b \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_l}\right) \left(1 - \frac{1}{r_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{r_m}\right),$$

$$\varphi(ab) = ab \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_l}\right) \left(1 - \frac{1}{r_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{r_m}\right),$$

skąd

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab) \left(1 - \frac{1}{r_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{r_m}\right),$$

a zatem

$$\varphi(a)\varphi(b) < \varphi(ab).$$

Udowodniliśmy tym samym

Twierdzenie 3. Na to, by $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, potrzeba i wystarczy, by liczby a i b były względnie pierwsze.

Dowiedliśmy również, że dla wszelkich liczb naturalnych a i b jest

$$\varphi(ab) \geq \varphi(a)\varphi(b).$$

Zauważymy, że analogiczne własności posiada funkcja $\theta(n)$, oznaczająca liczbę dzielników liczby n . Opierając się na wzorach wyprowadzonych w Rozdziale V (ob. (5) str. 113), czytelnik udowodni z łatwością, że równość

$$\theta(ab) = \theta(a) \cdot \theta(b)$$

jest równoważna równości

$$(a, b) = 1,$$

a nierówność $(a, b) > 1$ — nierówności

$$\theta(ab) < \theta(a) \cdot \theta(b).$$

Podobnie udowodnilibyśmy, że dla funkcji $\sigma(n)$, oznaczającej sumę dzielników liczby n , mamy dla $(a, b) = 1$

$$\sigma(ab) = \sigma(a) \cdot \sigma(b),$$

a dla $(a, b) > 1$

$$\sigma(ab) < \sigma(a) \cdot \sigma(b).$$

Dla funkcji Möbiusa $\mu(n)$ znaleźlibyśmy, że równość

$$(a, b) = 1$$

pociąga za sobą równość

$$\mu(ab) = \mu(a) \cdot \mu(b),$$

a nierówność $(a, b) > 1$ daje

$$\mu(ab) = 0.$$

Opierając się na wzorze (16), łatwo wyprowadzić związek między funkcją $\varphi(n)$ a funkcją $\zeta(s)$ (określoną na str. 131). Wystarczy w tym celu zastosować mnożenie Dirichleta (ob. tamże) do szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, gdzie $a_n = \varphi(n)/n^s$ i $b_n = 1/n^s$ (dla $s > 2$),

co daje szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gdzie

$$c_n = \sum_{d|n} a_d b_{\frac{n}{d}} = \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{d^s} \cdot \frac{d^s}{n^s} = \frac{1}{n^s} \sum_{d|n} \varphi(d) = \frac{n}{n^s} = \frac{1}{n^{s-1}},$$

skąd $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \zeta(s-1)$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \quad (\text{dla } s > 2).$$

ĆWICZENIA. 1. Opierając się na wzorze (16), dowieść, że dla $|x| < 1$ zachodzi tożsamość Liouville'a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)x^k}{1-x^k} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

2. Dowieść, że żadna liczba nieparzysta większa od 1 nie jest wartością funkcji Gaussa $\varphi(n)$.

Dowód. Jeżeli liczba naturalna $n > 1$ jest potęgą naturalną liczby 2, $n = 2^k$, to $\varphi(n) = 2^{k-1}$; zatem albo $\varphi(n) = 1$, albo $\varphi(n)$ jest parzyste. Jeżeli zaś $n > 1$ nie jest potęgą liczby 2, to n ma dzielnik pierwszy nieparzysty p i wówczas $p-1 | \varphi(n)$, tym bardziej więc $2 | \varphi(n)$.

3. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n , dla których $\varphi(n) = 10$.

Odpowiedź: 11 i 22.

4. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n dla których $\varphi(n) = 80$.

Odpowiedź: 125, 164, 176, 200, 264 i 500.

Obliczmy teraz sumę wszystkich niewiększych od n liczb pierwszych względem n .

Niech $n > 1$. Jeżeli liczba naturalna $k \leq n$ jest pierwsza względem n (a więc, wobec $n > 1$, mniejsza od n), to $n-k$ też jest liczbą naturalną pierwszą względem n i na odwrót. Wobec tego sumy $\sum k$ i $\sum (n-k)$, rozciągnięte na wszystkie liczby naturalne $k \leq n$ pierwsze względem n , są równe jako dwie połowy sumy

$$\sum n = \sum k + \sum (n-k).$$

Lecz oczywiście $\sum n = n\varphi(n)$, gdyż w sumie tej jest tyle składników, ile jest niewiększych od n liczb naturalnych pierwszych względem n , a każdy z tych składników równy jest n . Stąd

Twierdzenie 4. Suma niewiększych od n liczb naturalnych pierwszych względem n wynosi (dla $n > 1$) $\frac{1}{2}n\varphi(n)$.

Można dowieść (co nie jest zresztą łatwe), że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ suma kwadratów wszystkich niewiększych od n liczb pierwszych względem n równa jest

$$\frac{\varphi(n)}{5} \left[n^3 + \frac{(-1)^k}{2} p_1 p_2 \dots p_k \right],$$

gdzie $p_1, p_2, \dots, p_k$ są wszystkimi różnymi czynnikami pierwszymi liczby n ¹⁾.

Czytelnik zechce sprawdzić to dla liczb n pierwszych oraz dla $n = 10$.

¹⁾ Ob. G. Pólya i G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, tom II, Berlin 1925, str. 120 (zadanie 27) i str. 328-329.

§ 5. Wzory sumacyjne dla funkcji Gaussa i Möbiusa. Założmy teraz, że dla dwu funkcji liczbowych $f(n)$ i $F(n)$ zachodzi przy wszelkim naturalnym n wzór

$$(18) \quad F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Obliczmy sumę

$$\sum_{n=1}^{E(x)} F(n) = \sum_{n=1}^{E(x)} \sum_{d|n} f(d),$$

gdzie $x \geq 1$.

Składnikami sumy podwójnej po prawej stronie są oczywiście liczby $f(k)$ dla liczb naturalnych $k \leq x$. Przy danym naturalnym $k \leq x$ składnik $f(k)$ występuje w sumie $\sum_{d|n} f(d)$ wtedy i tylko wtedy (i to raz jeden), gdy k jest dzielnikiem liczby n . Takich liczb naturalnych $n \leq x$ jest oczywiście $E\left(\frac{x}{k}\right)$; tyle więc razy występuje $f(k)$ w sumie podwójnej. Stąd wzór

$$(19) \quad \sum_{n=1}^{E(x)} F(n) = \sum_{k=1}^{E(x)} f(k) E\left(\frac{x}{k}\right).$$

Założmy w szczególności, że przy wszelkim naturalnym n jest

$$f(n) = n^s,$$

gdzie s jest liczbą całkowitą. Funkcja

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} d^s$$

przedstawia tu sumę s -tych potęg wszystkich dzielników liczby n , wzór zaś (19) daje

$$\sum_{n=1}^{E(x)} F(n) = \sum_{k=1}^{E(x)} k^s E\left(\frac{x}{k}\right).$$

Stąd w szczególności dla $s=0$ i $s=1$ odnajdujemy wzory (24) i (28) z Rozdziału V dla liczby i sumy dzielników (str. 127 i 132).

Przyjmijmy teraz $f(n) = \varphi(n)$. W myśl (16) jest więc $F(n) = n$ dla wszelkich n , a zatem

$$\sum_{n=1}^{E(x)} F(n) = \sum_{n=1}^{E(x)} n = 1 + 2 + \dots + E(x) = \frac{E(x)[E(x)+1]}{2}.$$

skąd na mocy (18)

$$\sum_{k=1}^{E(x)} \varphi(k) E\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{E(x)[E(x)+1]}{2}.$$

Tak np. dla $x=10$:

$$\sum_{k=1}^{10} \varphi(k) E\left(\frac{10}{k}\right) = \frac{10 \cdot 11}{2};$$

jakoż

$$1 \cdot 10 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 55.$$

Przyjmijmy dalej $f(n) = \mu(n)$. Na mocy własności funkcji Möbiusa, dowiedzionej w § 1 (str. 137), funkcja

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} \mu(d)$$

ma wartość 1 dla $n=1$ i wartość 0 dla $n>1$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{E(x)} F(n) = 1,$$

skąd na mocy (19)

$$(20) \quad \sum_{k=1}^{E(x)} \mu(k) E\left(\frac{x}{k}\right) = 1.$$

Np. dla $x=10$ jest

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \mu(k) E\left(\frac{10}{k}\right) &= E\left(\frac{10}{1}\right) - E\left(\frac{10}{2}\right) - E\left(\frac{10}{3}\right) - E\left(\frac{10}{5}\right) + E\left(\frac{10}{6}\right) - E\left(\frac{10}{7}\right) + E\left(\frac{10}{10}\right) = \\ &= 10 - 5 - 3 - 2 + 1 - 1 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Ponieważ na mocy definicji symbolu E jest $0 \leq \frac{x}{k} - E\left(\frac{x}{k}\right) < 1$, na mocy zaś definicji funkcji Möbiusa jest stale $|\mu(k)| \leq 1$, więc jest też stale

$$\left| \mu(k) \frac{x}{k} - \mu(k) E\left(\frac{x}{k}\right) \right| < 1,$$

czyli błąd, jaki popełnimy, odrzucając symbol E przy każdym składniku we wzorze (20), jest dla każdego składnika mniejszy od 1, dla pierwszego zaś składnika — jak łatwo widzieć — błąd ten jest równy $x - E(x)$. Dla całej sumy, zawierającej prócz pierwszego składnika jeszcze $E(x) - 1$ składników, błąd nie przekracza zatem liczby

$$[x - E(x)] + [E(x) - 1] = x - 1.$$

Wzór (20) daje więc

$$\left| \sum_{k=1}^{E(x)} \mu(k) \frac{x}{k} - 1 \right| \leq x - 1,$$

skąd w jednej chwili

$$\left| \sum_{k=1}^{E(x)} \mu(k) \frac{x}{k} \right| \leq x \quad \text{ i } \quad \left| \sum_{k=1}^{E(x)} \frac{\mu(k)}{k} \right| \leq 1$$

dla wszelkich $x \geq 1$. Dowodzi to, że sumy kolejnych składników szeregu

$$\frac{\mu(1)}{1} + \frac{\mu(2)}{2} + \frac{\mu(3)}{3} + \dots$$

wahają się w skończonych granicach. H. v. Mangoldt udowodnił w 1897 r., że sumy

$$\sum_{k=1}^n \frac{\mu(k)}{k}$$

zmierzają do 0, gdy n wzrasta nieograniczenie (co Euler przypuszczał już w 1748 r.). Z twierdzenia Mangoldta wynika drogą elementarną, że średnią wartością funkcji liczbowej $\mu(n)$ jest liczba 0.

§ 6. Odwrocenie wzoru $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Zajmiemy się obecnie tzw. *odwróceniem wzoru* (18).

Niech $F(n)$ będzie dowolną funkcją liczbową. Udowodnimy

Twierdzenie 5. *Istnieje jedna i tylko jedna funkcja liczbową $f(n)$, spełniająca wzór (18) przy wszelkim naturalnym n .*

Dowód. Jeżeli przy wszelkim naturalnym n zachodzi wzór (18), to mamy ciąg nieskończony równości:

$$\begin{aligned} F(1) &= f(1), \\ F(2) &= f(1) + f(2), \\ F(3) &= f(1) + f(3), \\ F(4) &= f(1) + f(2) + f(4), \\ F(5) &= f(1) + f(5), \\ F(6) &= f(1) + f(2) + f(3) + f(6), \\ &\dots \end{aligned} \quad (21)$$

Pierwsza z tych równości daje bezpośrednio $f(1) = F(1)$; z drugiej, znając $f(1)$, możemy wyznaczyć $f(2)$; trzecia pozwala wyznaczyć $f(3)$, skoro już znaleźliśmy $f(1)$ i $f(2)$, itd.; n -ta pozwoli nam wyznaczyć $f(n)$ przez wartości $f(k)$ dla $k < n$. Jeżeli więc istnieje funkcja $f(n)$, spełniająca wzór (18) dla $n = 1, 2, 3, \dots$, to taka funkcja jest tylko jedna.

Z drugiej strony jasne jest, że wyznaczając $f(1), f(2), f(3), \dots$ kolejno z równań (21), otrzymamy funkcję $f(n)$, spełniającą wszystkie te równania, czyli spełniającą wzór (18) przy wszelkim naturalnym n , c. b. d. d.

Równania (21) pozwalają za pomocą krótszych lub dłuższych rachunków obliczać $f(n)$, gdy znamy $F(1), F(2), \dots, F(n)$.

Istnieje atoli ogólny wzór na $f(n)$, mianowicie

$$(22) \quad f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right),$$

który możemy też napisać w postaci

$$(23) \quad f(n) = \sum_{\delta|n} \mu\left(\frac{n}{\delta}\right) F(\delta)$$

albo jeszcze w postaci

$$(24) \quad f(n) = \sum_{kl=n} \mu(k) F(l)$$

(tj. gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie takie układy liczb naturalnych k i l , dla których $kl = n$).

Dla udowodnienia tych wzorów wystarczy oczywiście okazać, że funkcja f określona wzorem (24) spełnia wzór (18) dla każdego naturalnego n .

Otóż wzór (24) daje

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} f(d) &= \sum_{d|n} \sum_{kl=d} \mu(k) F(l) = \sum_{kl=n} \mu(k) F(l) = \\ &= \sum_{l|n} [F(l) \sum_{\substack{k|l \\ k \mid n}} \mu(k)] = F(n), \end{aligned}$$

gdyż wobec własności funkcji μ , wyprowadzonej w § 1, $\sum_{\substack{k|l \\ k \mid n}} \mu(k)$

jest różne od zera i równe jest jedności tylko dla $\frac{n}{l} = 1$ czyli dla $l = n$.

Funkcja f spełnia więc wzór (18) dla $n=1, 2, \dots$, co dowodzi prawdziwości wzorów (22)-(24).

Rozpatrzmy teraz kilka szczególnych przypadków dowiedzonego twierdzenia 4. Przyjmijmy we wzorze (18) w szczególności $F(n)=n$. W myśl twierdzenia 4 istnieje jedna i tylko jedna funkcja liczbową $f(n)$, spełniająca przy wszelkim naturalnym n warunek

$$(25) \quad \sum_{d|n} f(n) = n,$$

i funkcja ta jest wyznaczona wzorem

$$(26) \quad f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

W myśl wzoru (15) funkcja Gaussa $\varphi(n)$ spełnia wzór (24). A więc własność ta jest dla funkcji Gaussa charakterystyczna. Nadto otrzymaliśmy dla funkcji Gaussa wzór

$$(27) \quad \varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Przyjmijmy teraz $F(1)=1$ i $F(n)=0$ dla $n>1$. Jako natychmiastowy wniosek z twierdzenia 4 otrzymujemy w tym przypadku, że warunek

$$\mu(n)=1 \quad \text{ i } \quad \sum_{d|n} \mu(d)=0 \quad \text{ dla } \quad n>1$$

jest charakterystyczny dla funkcji Möbiusa. Warunek ten można by więc przyjąć za definicję funkcji $\mu(n)$.

Biorąc za $f(n)$ różne funkcje i wyznaczając $F(n)$ ze wzoru (18), możemy otrzymywać ze wzoru (22) różne mniej lub więcej ciekawe tożsamości. Czytelnik zechce rozpatrzeć bliżej takie tożsamości np. dla $f(n)=1$ i dla $f(n)=n$.

Ze wzoru (24) wynika natychmiast, że

$$\sum_{n=1}^{E(x)} f(n) = \sum \mu(d) F(\delta),$$

gdzie sumowanie po stronie prawej należy rozciągnąć na wszystkie pary d, δ liczb naturalnych, spełniające nierówność

$$(28) \quad d\delta \leq x.$$

Suma wszystkich składników, którym odpowiada ta sama wartość d , wynosi oczywiście

$$\sum_{\delta=1}^{E(\frac{x}{d})} \mu(d) F(\delta) = \mu(d) \sum_{\delta=1}^{E(\frac{x}{d})} F(\delta),$$

gdyż w myśl (28) δ może przy danym d przyjmować wartości naturalne nie przekraczające $\frac{x}{d}$. Stąd wzór

$$(29) \quad \sum_{n=1}^{E(x)} f(n) = \sum_{d=1}^{E(x)} \left(\mu(d) \sum_{\delta=1}^{E(\frac{x}{d})} F(\delta) \right).$$

W szczególności, gdy $f(1)=1$ i $f(n)=0$ dla $n>1$, otrzymamy w myśl wzoru (18) $F(n)=1$ przy wszelkim naturalnym n . Dalej mamy oczywiście

$$\sum_{\delta=1}^{E(\frac{x}{d})} F(\delta) = E\left(\frac{x}{d}\right)$$

i dla $x \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{E(x)} f(n) = 1;$$

wzór (29) daje więc

$$(30) \quad 1 = \sum_{d=1}^{E(x)} \mu(d) E\left(\frac{x}{d}\right).$$

Jest to wzór (20), otrzymany w § 5 na innej drodze (str. 149).

Przyjmijmy teraz $F(n)=n$. Jak dowiedliśmy (p. str. 152), jest $f(n)=\varphi(n)$, a że dla $d \leq x$ jest oczywiście

$$\sum_{\delta=1}^{E(\frac{x}{d})} \delta = 1 + 2 + 3 + \dots + E\left(\frac{x}{d}\right) = \frac{1}{2} \left[E\left(\frac{x}{d}\right)^2 + E\left(\frac{x}{d}\right) \right],$$

więc wzór (29) daje

$$\sum_{n=1}^{E(x)} \varphi(n) = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{E(x)} \mu(d) \left[E\left(\frac{x}{d}\right)^2 + E\left(\frac{x}{d}\right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{E(x)} \mu(d) E\left(\frac{x}{d}\right),$$

czyli w myśl (30)

$$(31) \quad \sum_{n=1}^{E(x)} \varphi(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{E(x)} \mu(n) \left[E\left(\frac{x}{n}\right)^2 \right].$$

Ze wzoru tego skorzystamy w Rozdziale XVIII.

§ 7. **Funkcja Liouville'a.** Nazywamy funkcją *Liouville'a* funkcję liczbową $\lambda(n)$, określoną w następujący sposób:

$$1^0 \lambda(1) = 1;$$

2⁰ jeżeli liczba $n > 1$ ma rozwinięcie na czynniki pierwsze

$$(32) \quad n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

to

$$\lambda(n) = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}.$$

Tak więc:

$$\lambda(1) = 1, \quad \lambda(2) = -1, \quad \lambda(3) = -1, \quad \lambda(4) = 1, \quad \lambda(5) = -1,$$

$$\lambda(6) = 1, \quad \lambda(7) = -1, \quad \lambda(8) = -1, \quad \lambda(9) = 1, \quad \lambda(10) = 1 \text{ itd.}$$

Zakładając, że liczba naturalna $n > 1$ ma rozwinięcie (32) na czynniki pierwsze, weźmy pod uwagę iloczyn

$$\begin{aligned} & [1 - p_1^s + p_1^{2s} - p_1^{3s} + \dots + (-1)^{\alpha_1} p_1^{\alpha_1 s}] \cdot \\ & \cdot [1 - p_2^s + p_2^{2s} - \dots + (-1)^{\alpha_2} p_2^{\alpha_2 s}] \cdot \dots \\ & \dots [1 - p_k^s + p_k^{2s} - p_k^{3s} + \dots + (-1)^{\alpha_k} p_k^{\alpha_k s}], \end{aligned}$$

gdzie s jest dowolną liczbą całkowitą. Rozwijając ten iloczyn, otrzymamy — jak łatwo widzieć — sumę algebraiczną wyrazów $(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k})^s$, w której każdy będzie poprzedzony znakiem

$$(-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k} = \lambda(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k})$$

i w której sumowanie będzie się rozciągało na wszystkie dzielniki

$$d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

liczby n . Wypisany iloczyn jest więc równy sumie $\sum_{d|n} \lambda(d) d^s$.

Z drugiej strony, wzór na sumę postępu geometrycznego daje

$$1 - p^s + p^{2s} - p^{3s} + \dots + (-1)^{\alpha} p^{\alpha s} = \frac{1 + (-1)^{\alpha} p^{(\alpha+1)s}}{1 + p^s}.$$

Stosując tę tożsamość do każdego z czynników rozważanego iloczynu, otrzymujemy wzór

$$\begin{aligned} & \frac{1 + (-1)^{\alpha_1} p_1^{(\alpha_1+1)s}}{1 + p_1^s} \cdot \frac{1 + (-1)^{\alpha_2} p_2^{(\alpha_2+1)s}}{1 + p_2^s} \cdot \dots \cdot \frac{1 + (-1)^{\alpha_k} p_k^{(\alpha_k+1)s}}{1 + p_k^s} = \\ & = \sum_{d|n} \lambda(d) d^s. \end{aligned}$$

W szczególności dla $s=0$ otrzymujemy z tego wzoru

$$(33) \quad \frac{1 + (-1)^{\alpha_1}}{2} \cdot \frac{1 + (-1)^{\alpha_2}}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1 + (-1)^{\alpha_k}}{2} = \sum_{d|n} \lambda(d).$$

Liczba

$$\frac{1 + (-1)^{\alpha}}{2}$$

jest — jak łatwo widzieć — równa zeru w razie α nieparzystego i jedności w razie α parzystego. Stąd wniosek, że lewa strona wzoru (33) jest różna od zera i równa jedności tylko wtedy, gdy wszystkie wykładniki $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są parzyste, czyli tylko wtedy, gdy liczba n jest kwadratem. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 5. Suma $\sum_{d|n} \lambda(d)$ jest jednością dla n kwadratów, zerem zaś dla wszystkich pozostałych n .

Wprawdzie w dowodzie twierdzenia 5 zakładaliśmy, że $n > 1$ (gdyż tylko wtedy lewa strona wzoru (33) ma sens), lecz — jak łatwo widzieć — samo twierdzenie jest prawdziwe również dla $n=1$, gdyż $\lambda(1)=1$.

Wobec dowiedzionej własności funkcji Liouville'a i w myśl wzoru (15) z § 5 możemy zatem napisać:

$$\sum_{k=1}^{E(x)} \lambda(k) E\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{n=1}^{E(x)} F(n), \text{ gdzie } F(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ kwadratowych} \\ 0 & \text{dla pozostałych } n. \end{cases}$$

Suma $\sum_{n=1}^{E(x)} F(n)$ składa się więc z tylu jedności, ile istnieje liczb kwadratowych $n \leq x$. Stąd natychmiastowy wniosek, że wartością sumy jest liczba $E(\sqrt{x})$ czyli że

$$\sum_{n=1}^{E(x)} \lambda(n) E\left(\frac{x}{n}\right) = E(\sqrt{x}).$$

Np. dla $x=5$:

$$\begin{aligned} & \lambda(1) E\left(\frac{5}{1}\right) + \lambda(2) E\left(\frac{5}{2}\right) + \lambda(3) E\left(\frac{5}{3}\right) + \lambda(4) E\left(\frac{5}{4}\right) + \lambda(5) E\left(\frac{5}{5}\right) = \\ & = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2 = E(\sqrt{5}). \end{aligned}$$