

ROZDZIAŁ V

LICZBA I SUMA DZIELNIKÓW, LICZBY DOSKONAŁE, WZORY SUMACYJNE.

§ 1. Liczba dzielników liczby naturalnej. Niech n będzie liczbą naturalną o rozwinięciu na czynniki pierwsze

$$(1) \quad n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k},$$

a d niech będzie jakimkolwiek dzielnikiem naturalnym liczby n . Ponieważ dzielnik dzielnika liczby n sam jest dzielnikiem tej liczby, więc w rozwinięciu liczby d na czynniki pierwsze mogą występować tylko te liczby pierwsze, które figurują w rozwinięciu (1), i przy tym w potęgach o wykładnikach nie większych niż w rozwinięciu (1).

Każdy dzielnik naturalny liczby n można zatem przedstawić w postaci

$$(2) \quad d = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_k^{\lambda_k},$$

gdzie λ_i są liczbami całkowitymi, spełniającymi nierówności

$$(3) \quad 0 \leq \lambda_i \leq a_i \quad \text{dla } i=1, 2, \dots, k.$$

Z drugiej strony, łatwo widzieć, że każda liczba d , wyznaczona ze wzoru (2), w którym liczby całkowite λ_i spełniają nierówności (3), jest dzielnikiem naturalnym liczby n , gdyż wobec (3) liczba

$$\frac{n}{d} = p_1^{a_1 - \lambda_1} p_2^{a_2 - \lambda_2} \dots p_k^{a_k - \lambda_k}$$

jest całkowita.

Wreszcie jasne jest, że różnym układom liczb całkowitych

$$(4) \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k,$$

spełniających nierówności (3), odpowiadają w myśl (2) różne liczby d . Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 1. Jeżeli za (4) przyjmować wszystkie możliwe układy k liczb całkowitych, spełniających nierówności (3), to wzór (2) wyznaczy wszystkie (i same tylko) dzielniki naturalne liczby n , przy tym każdy dzielnik tylko raz jeden.

Mówiąc dalej o liczbie dzielników, będziemy zawsze mieli na myśli liczbę dzielników naturalnych. Wobec twierdzenia 1 możemy powiedzieć, że liczba dzielników liczby n , mającej rozwinięcie na czynniki pierwsze (1), równa jest liczbie wszystkich możliwych układów liczb całkowitych (4), spełniających nierówności (3). Policzmy, ile jest takich układów.

Łatwo widzieć, że na to, by liczba całkowita λ_i spełniała nierówności (3), potrzeba i wystarcza, aby λ_i było jedną z liczb ciągu

$$0, 1, 2, 3, \dots, a_i.$$

Każda z liczb λ_i może więc, niezależnie od innych, przybierać dokładnie $a_i + 1$ różnych wartości. Kombinując każdą z $a_i + 1$ wartości liczby λ_1 z każdą z $a_2 + 1$ wartości liczby λ_2 itd., otrzymujemy

Twierdzenie 2. Liczba $\theta(n)$ dzielników liczby n wynosi

$$(5) \quad \theta(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1).$$

Obliczmy np. $\theta(60)$. Ponieważ liczba 60 rozwija się na czynniki pierwsze $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, więc ze wzoru (5) otrzymamy

$$\theta(60) = (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \quad \text{czyli} \quad \theta(60) = 12.$$

Dla $100 = 2^2 \cdot 5^2$ jest $\theta(100) = 9$.

Ze wzoru (5) wynika, że można zawsze wyznaczyć liczbę, mającą dowolną z góry daną liczbę dzielników.

Np. aby otrzymać liczbę, mającą l dzielników, wystarczy przyjąć $n = p^{l-1}$, gdzie p jest liczbą pierwszą.

Widzimy więc, że równanie $\theta(n) = l$ ma przy każdym naturalnym l nieskończenie wiele rozwiązań.

Wzór (5) wskazuje też na to, że $\theta(n) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k=1$ i $a_1=1$. Innymi słowy: równanie $\theta(n) = 2$ jest charakterystyczne dla liczb pierwszych. Wynika to zresztą także bezpośrednio z definicji liczb pierwszych.

Wobec wzoru (5), liczba $\theta(n)$ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie a_i są parzyste, tj. gdy liczba n jest kwadratem.

Nieparzystość liczby dzielników jest więc cechą charakterystyczną liczb kwadratowych.

Wzór (5) pozwala też z łatwością obliczać kolejne wartości funkcji $\theta(n)$ dla niewielkich liczb n . Znajdujemy np.:

$$\begin{aligned}\theta(1) &= 1, & \theta(2) &= 2, & \theta(3) &= 2, & \theta(4) &= 3, & \theta(5) &= 2, \\ \theta(6) &= 4, & \theta(7) &= 2, & \theta(8) &= 4, & \theta(9) &= 3, & \theta(10) &= 4.\end{aligned}$$

W § 6 poznamy sposób obliczania sumy kolejnych wartości funkcji $\theta(n)$.

ĆWICZENIA. 1. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną, mającą 30 dzielników¹⁾.

Odpowiedź: 720.

2. Dowieść, że liczba wszystkich rozwiązań równania $xyz = n$ w liczbach naturalnych x, y, z (dla liczby n naturalnej) równa jest $\sum_{d|n} \theta(d)$, gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie dzielniki naturalne d liczby n . (Winogradow)

Więc np. dla $n=10$ rozwiązań tych jest 9.

3. Dowieść, że jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 1, to w ciągu nieskończonym

$$\theta(n), \quad \theta\theta(n), \quad \theta\theta\theta(n), \quad \dots$$

wszystkie wyrazy, poczynając od pewnego miejsca, są równe 2.

Okazać, że miejsce to może być dowolnie dane z góry.

4. Dowieść, że dla wszelkich naturalnych n jest $\theta(n) \leq 2\sqrt{n}$.

Dowód wynika stąd, że z dwu wzajemnie dopełniających się dzielników liczby n co najmniej jeden jest nie większy od $\sqrt{n}$.

5. Niech Z będzie zbiorem wszystkich liczb tzw. *najbardziej złożonych*, czyli takich liczb naturalnych n , które mają więcej dzielników niż każda liczba naturalna mniejsza od n .

Dowieść, że zbiór Z jest nieskończony i wyznaczyć pierwszych 10 liczb tego zbioru.

Dowód. Liczby 1 i 2 należą oczywiście do zbioru Z . Załóżmy że liczba naturalna m należy do Z . Istnieją liczby naturalne n mające więcej niż $\theta(m)$ dzielników, np. liczba $2^{\theta(m)}$ ma $\theta(m)+1$ dzielników. Niech n będzie najmniejszą z nich i niech k będzie liczbą naturalną mniejszą od n .

Jeżeli $k < m$, to $\theta(k) < \theta(m)$ na mocy założenia, że m należy do zbioru Z , oraz $\theta(m) < \theta(n)$ na mocy określenia liczby n ; jest więc $\theta(k) < \theta(n)$. Jeżeli zaś $m \leq k < n$, to na mocy określenia liczby n i założenia, że $k < n$, jest $\theta(k) \leq \theta(m)$, skąd znowu $\theta(k) < \theta(n)$. Liczba n należy więc do zbioru Z , a przy tym jest większa od m , bo skoro m należy do zbioru Z , to $n \leq m$ pociąga $\theta(n) \leq \theta(m)$, wbrew określeniu liczby n .

¹⁾ Szczegółowe rozwiązanie podaje G. Chrystal, *Algebra*, część II, Londyn 1900, str. 538, Example 2.

Dla każdej więc liczby zbioru Z istnieje w tym zbiorze liczba większa, skąd wnosimy, że zbiór Z jest nieskończony.

Pierwszymi dziesięcioma liczbami zbioru Z są:

$$1, 2, 4, 6, 12, 30, 48, 60, 120, 180.$$

6. Dla każdej z pierwszych dziesięciu liczb naturalnych n wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną, mającą n dzielników.

Odpowiedź: 1, 2, 4, 6, 16, 12, 64, 50, 56, 48.

§ 2. Suma dzielników liczby naturalnej. Oznaczmy symbolem $\sigma(n)$ sumę wszystkich dzielników naturalnych liczby n . Na mocy twierdzenia 1 (§ 1) jest więc

$$(6) \quad \sigma(n) = \sum p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie układy liczb całkowitych (4), spełniających nierówności (5).

Lecz — jak łatwo widzieć — każdy składnik prawej strony wzoru (6) otrzymujemy, i to tylko raz jeden, rozwijając iloczyn

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots \\ \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{\alpha_k}),$$

a z drugiej strony, każdy wyraz rozwinięcia tego iloczynu jest jednym ze składników sumy (6). Stąd

Twierdzenie 3. Suma $\sigma(n)$ dzielników naturalnych liczby naturalnej n wynosi

$$(7) \quad \sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Więc np. $\sigma(100) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^3 - 1}{5 - 1} = 7 \cdot 31 = 217$; istotnie, wypisując kolejne dzielniki liczby 100, dostajemy

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 25 + 50 + 100 = 217.$$

Wzór (7) pozwala ułożyć tabliczkę kolejnych wartości funkcji $\sigma(n)$:

$$\begin{aligned}\sigma(1) &= 1, & \sigma(2) &= 3, & \sigma(3) &= 4, & \sigma(4) &= 7, & \sigma(5) &= 6, \\ \sigma(6) &= 12, & \sigma(7) &= 8, & \sigma(8) &= 15, & \sigma(9) &= 13, & \sigma(10) &= 18.\end{aligned}$$

W § 7 poznamy sposób obliczania sumy kolejnych wartości $\sigma(n)$.

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że dla naturalnych n jest

$$\sigma(3n-1) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Dowód ¹⁾ wynika stąd, że z dwu dopełniających się wzajemnie dzielników liczby $3n-1$ jeden musi być formy $3k-1$, drugi zaś formy $3k+1$, a więc ich suma jest podzielna przez 3.

2. Dowieść, że dla naturalnych n jest:

$$\sigma(4n-1) \equiv 0 \pmod{4}, \quad \sigma(6n-1) \equiv 0 \pmod{6}, \quad \sigma(8n-1) \equiv 0 \pmod{8}.$$

Wskazówka. Dla $8n-1$ oprzeć się na uwadze, że z dwu dopełniających się dzielników tej liczby zawsze albo jeden jest postaci $8k-1$, a drugi $8k+1$, albo jeden jest postaci $8k-3$, a drugi $8k+3$.

3. Dowieść, że dla naturalnych n jest:

$$\sigma(12n-1) \equiv 0 \pmod{12}, \quad \sigma(24n-1) \equiv 0 \pmod{24}.$$

Dowód wynika stąd, że liczba $12n-1$ jest zarówno postaci $3k-1$ jak $4k-1$, liczba zaś $24n-1$ jest zarówno postaci $3k-1$ jak $8k-1$.

Nie wiadomo, czy prócz liczb $m=3, 4, 6, 8, 9, 12$ i 24 są jeszcze inne takie liczby naturalne m , iż $\sigma(mn-1) \equiv 0 \pmod{m}$ dla każdego naturalnego n .

4. Dowieść, że suma odwrotności wszystkich dzielników liczby naturalnej n wynosi $\frac{\sigma(n)}{n}$.

§ 3. Liczby doskonałe. Metoda Euklidesa. Wyznaczanie pierwszych dziesięciu liczb doskonałych parzystych. Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n , których suma dzielników naturalnych mniejszych od n jest mniejsza od n , np. wszystkie liczby pierwsze i wszystkie potęgi liczb pierwszych. Istnieje też nieskończenie wiele liczb naturalnych n , których suma dzielników naturalnych mniejszych od n jest większa od n , np. wszystkie liczby postaci $n=2^a \cdot 3$, gdzie $a=2, 3, \dots$. Nie wiadomo natomiast, czy istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n , które są równe sumie swych dzielników naturalnych mniejszych od n .

Liczby takie nazywamy *doskonałymi*.

Znamy ich tylko 12 i nie wiemy, czy istnieje ich więcej. Największa ze znanych liczb doskonałych ma 77 cyfr.

Najmniejszą liczbą doskonałą jest — jak łatwo widzieć — liczba $6=1+2+3$. Następną po niej jest liczba $28=1+2+4+7+14$.

¹⁾ Inny dowód podaje K. G. Ramanathan, The Mathematics Student, tom II (1943), str. 55.

Suma dzielników liczby n , mniejszych od n , jest oczywiście równa $\sigma(n)-n$. Dla liczby doskonałej n otrzymujemy więc równanie $\sigma(n)-n=n$, czyli

$$(8) \quad \sigma(n)=2n.$$

Wyznamy wszystkie liczby doskonałe parzyste. Uodwodnimy

Twierdzenie 4. *Na to, aby liczba parzysta n była doskonała, potrzeba i wystarcza, by była ona postaci $2^{s-1}(2^s-1)$, gdzie 2^s-1 jest liczbą pierwszą.*

Dowód. Niech n będzie liczbą doskonałą parzystą. Rozwijając n na czynniki pierwsze, otrzymamy

$$(9) \quad n=2^{s-1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\dots p_k^{\alpha_k}=2^{s-1}l,$$

gdzie s jest liczbą naturalną większą od 1, l zaś jest liczbą nieparzystą i

$$l=p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\dots p_k^{\alpha_k}.$$

Na mocy (7) jest:

$$\sigma(n)=\frac{2^s-1}{2-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\dots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1},$$

$$\sigma(l)=\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\frac{p_3^{\alpha_3+1}-1}{p_3-1}\cdot\dots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1},$$

skąd

$$\sigma(n)=(2^s-1)\sigma(l).$$

Wobec (8) i (9) mamy więc

$$(10) \quad (2^s-1)\sigma(l)=2^s l.$$

Iloczyn po lewej stronie równości (10) jest podzielny przez 2^s . Lecz czynnik (2^s-1) tego iloczynu, jako liczba nieparzysta, jest pierwszy względem 2^s ; wobec tego drugi czynnik musi być podzielny przez 2^s :

$$(11) \quad \sigma(l)=2^s q,$$

gdzie q jest liczbą naturalną. Wnosząc tę wartość do wzoru (10) i skracając przez 2^s , otrzymujemy:

$$(12) \quad (2^s-1)q=l,$$

co możemy też wobec (11) napisać w postaci

$$(13) \quad \sigma(l)=l+q.$$

Z drugiej strony, wzór (12) wskazuje, że q jest dzielnikiem liczby l , różnym od l , gdyż $q=l$ pociąga na mocy (12) $2^s-1=1$, skąd $s=1$, gdy tymczasem $s>1$.

Gdyby oprócz l i q liczba l miała jeszcze inny dzielnik naturalny, to mielibyśmy oczywiście $\sigma(l)>l+q$ wbrew (13). A więc liczba l ma tylko dwa dzielniki: l i q , skąd widać, że l jest liczbą pierwszą i $q=1$.

Wzór (12) daje więc $l=2^s-1$, wobec czego mamy w myśl (9)

$$(14) \quad n = 2^{s-1}(2^s - 1).$$

Dowiedliśmy zatem, że warunek twierdzenia jest konieczny.

Okazemy, że jest on zarazem dostateczny, żeby liczba n była doskonałą.

Załóżmy więc, że 2^s-1 jest liczbą pierwszą (oczywiście nieparzystą) i wyznaczmy n ze wzoru (14). Liczba n ma zatem rozwinięcie na czynniki pierwsze $n=2^{s-1}p$, gdzie $p=2^s-1$, skąd na mocy (7)

$$\sigma(n) = \frac{2^s-1}{2-1} \cdot \frac{p^s-1}{p-1} = (2^s-1)(p+1)$$

czyli wobec $p=2^s-1$

$$\sigma(n) = (2^s-1) \cdot 2^s,$$

a więc w myśl (14)

$$\sigma(n) = 2n,$$

co dowodzi, że n jest liczbą doskonałą.

Warunku, żeby liczba 2^s-1 była pierwszą, nie można zastąpić w twierdzeniu 4 warunkiem, żeby liczba s była pierwszą, ponieważ wtedy liczba 2^s-1 mogłaby być złożoną i przeto warunek nie byłby wystarczający. Pozostałby on jednak konieczny: istotnie — jak łatwo widzieć — jeżeli 2^s-1 jest liczbą pierwszą, to s jest liczbą pierwszą. Gdyby bowiem liczba $s>1$ nie była pierwszą, to moglibyśmy wyznaczyć takie dwie liczby naturalne m i n , większe od jedności i mniejsze od s , że $s=mn$. Moglibyśmy wówczas napisać

$$2^s-1 = 2^{mn}-1 = (2^m-1)(1+2^m+2^{2m}+\dots+2^{(n-1)m});$$

wobec nierówności $2 \leq m < s$ byłoby przy tym $3 \leq 2^m-1 < 2^s-1$, więc liczba 2^s-1 nie mogłaby być pierwszą.

Mamy więc jeszcze

Wniosek. Wszystkie liczby doskonałe parzyste są zawarte we wzorze $2^{p-1}(2^p-1)$ z warunkiem, że liczby p oraz 2^p-1 są pierwszymi.

Liczbami doskonałymi zajmował się Euklides, który podał następującą metodę ich wyznaczania:

„Obliczajmy kolejne sumy składników szeregu

$$1+2+4+8+16+32+\dots$$

Jeżeli suma taka okaże się liczbą pierwszą, to pomnożmy ją przez ostatni składnik. Otrzymamy liczbę doskonałą”.

Opierając się na twierdzeniu 4, czytelnik udowodni z łatwością, że metoda Euklidesa w istocie wyznacza wszystkie liczby doskonałe parzyste.

Wyznaczymy kilka kolejnych liczb doskonałych parzystych. Musimy więc przyjmować za p kolejne liczby pierwsze i badać, czy 2^p-1 jest liczbą pierwszą. Jest tak istotnie dla $p=2, 3, 5, 7$; otrzymujemy wówczas $2^p-1=3, 7, 31, 127$, a więc liczby pierwsze. Stąd dostajemy odpowiednie liczby doskonałe znane już w starożytności:

$$2(2^2-1)=6, \quad 2^2(2^3-1)=28, \quad 2^4(2^5-1)=496, \quad 2^6(2^7-1)=8128.$$

Przy większych wartościach p bezpośrednie badanie liczb 2^p-1 staje się coraz uciążliwsze. Wielką pomocą jest w tym względzie następujące

Twierdzenie 5. Jeżeli $p>2$ jest liczbą pierwszą, to dzielniki pierwsze liczby 2^p-1 muszą mieć formę $2kp+1$.

Dowód. Niech q będzie dzielnikiem pierwszym liczby 2^p-1 (a więc oczywiście liczbą nieparzystą). Oznaczmy przez d najmniejszą liczbę naturalną, dla której liczba 2^d-1 jest podzielna przez q . Liczby takie istnieją, gdyż np. liczba 2^p-1 jest podzielna przez q . Jest oczywiście $d>1$, ponieważ liczba $2^1-1=1$ nie jest podzielna przez q .

Udowodnimy, że każda liczba naturalna x , spełniająca kongruencję

$$(15) \quad 2^x \equiv 1 \pmod{q},$$

jest podzielna przez d .

Przypuśćmy bowiem, że liczba naturalna x spełnia kongruencję (15) i daje przy dzieleniu przez d resztę dodatnią r .

Możemy więc przyjąć $x=dt+r$, gdzie t jest liczbą całkowitą nieujemną. Wobec podzielności liczby 2^d-1 przez q mamy: $2^d \equiv 1 \pmod{q}$, skąd $2^{dt} \equiv 1 \pmod{q}$ i $2^x = 2^{dt+2^r} \equiv 2^r \pmod{q}$, co daje na mocy (15)

$$2^r \equiv 1 \pmod{q}.$$

Liczba 2^r-1 byłaby więc podzielna przez q dla liczby naturalnej $r < d$, wbrew określeniu liczby d .

Niech w szczególności $x=p$. W myśl założenia, liczba 2^p-1 jest podzielna przez q ; kongruencja (15) jest więc dla $x=p$ spełniona. Ale w takim razie — jak dowiedliśmy — x jest podzielne przez d ; jest więc $d|p$. Lecz p jest liczbą pierwszą, d zaś — liczbą naturalną, większą od 1; wnosimy stąd, że $d=p$.

Niech teraz $x=q-1$; warunek (15) jest spełniony w myśl małego twierdzenia Fermata. Liczba $q-1$ musi więc być podzielna przez $d=p$, skąd $q-1=tp$, gdzie t jest całkowite.

Lecz lewa strona ostatniego wzoru jest liczbą parzystą, oczywiście zaś $(2, p)=1$; musi więc t być parzyste czyli $t=2k$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Ostatecznie więc $q-1=2kp$ czyli $q=2kp+1$, c. b. d. d.

Zastosujemy twierdzenie 5 do zbadania liczby

$$2^{11}-1=2047,$$

by znaleźć następną po $2^6(2^7-1)$ liczbę doskonałą.

Dla przekonania się, czy liczba 2047 jest pierwsza, wystarczy ją dzielić przez liczby pierwsze, nie przekraczające liczby $\sqrt{2047} < 46$; nadto, w myśl twierdzenia 2, liczby te muszą mieć formę $22k+1$. Jak łatwo widzieć, istnieje jedna tylko liczba pierwsza tej formy mniejsza od 46, mianowicie 23. Przy dzieleniu otrzymujemy $2047=23 \cdot 89$. Liczba 2047 jest więc złożona i przeto dla $p=11$ nie otrzymujemy liczby doskonałej.

Przyjmijmy więc za p następną liczbę pierwszą, tj. $p=13$. Dla zbadania, czy liczba $2^{13}-1=8191$ jest pierwsza, wystarczy ją dzielić przez liczby pierwsze formy $26k+1$, nie większe od $\sqrt{8191} < 91$.

Z wchodzących tu w rachubę liczb postępu 27, 53, 79 tylko dwie ostatnie są liczbami pierwszymi. Przy dzieleniu liczby 8191 przez 53 otrzymujemy resztę 29, przy dzieleniu zaś przez 79 —

resztę 54. Stwierdziliśmy więc, że liczba 8191 jest pierwsza. Stąd wniosek, że liczba

$$2^{12}(2^{13}-1)=33\,550\,336$$

jest piątą z kolei liczbą doskonałą parzystą. Liczbę tę wykryto dopiero w XV wieku.

Następną liczbą pierwszą jest $p=17$. Ponieważ pierwiastek z liczby $2^{17}-1=131071$ jest mniejszy od 363, więc postęp $54k+1$ daje tu — jak to z łatwością czytelnik sprawdzi — tylko cztery liczby pierwsze, mianowicie 103, 137, 239 i 307.

Wykonując cztery dzielenia, stwierdzamy, że 131071 jest liczbą pierwszą i otrzymujemy w ten sposób szóstą liczbę doskonałą parzystą:

$$2^{16}(2^{17}-1)=8\,589\,869\,056.$$

Z kolei przyjmijmy $p=19$. Mamy tu $2^{19}-1=524\,287$. Pierwiastek kwadratowy z tej liczby jest mniejszy od 725; dla zbadania, czy liczba $2^{19}-1$ jest pierwsza, wystarczy ją dzielić przez liczby pierwsze formy $58k+1$, mniejsze od 725. Takich liczb — jak to sprawdzamy z łatwością — jest tylko sześć; są to mianowicie liczby 191, 229, 419, 457, 571 i 647.

Przez wykonanie odpowiednich sześciu dzieleni stwierdzamy, że liczba 524 287 jest pierwsza — i co za tym idzie — że liczba

$$2^{18}(2^{19}-1)=137\,438\,691\,328$$

jest doskonałą. Jest to więc siódma z kolei liczba doskonała parzysta.

Następną liczbą pierwszą jest $p=23$. Dla zbadania liczby $2^{23}-1=8\,388\,607$ musimy ją dzielić przez liczby pierwsze postępu arytmetycznego 47, 95, 139, 185, ..., nie większe od $\sqrt{2^{23}-1} < 2897$. Dzielać już przez pierwszą z liczb otrzymanego postępu, stwierdzamy, że $8\,388\,607=47 \cdot 178\,481$, tj. że $2^{23}-1$ jest liczbą złożoną. Dla wykładnika $p=23$ nie otrzymujemy zatem liczby doskonałej.

Przyjmijmy z kolei $p=29$. Jest $2^{29}-1=536\,870\,911$. Dla zbadania tej liczby dzielimy ją kolejno przez liczby pierwsze postępu 59, 117, 175, 233, ...

Przez 59 liczba $2^{29}-1$ nie jest podzielna; następną liczbą pierwszą wypisanego postępu jest 233; przy dzieleniu otrzymujemy $2^{29}-1=233 \cdot 2304167$, co dowodzi, że wykładnik $p=29$ też nie daje liczby doskonałej.

Z kolei przyjmujemy $p=31$. Euler stwierdził, że liczba $2^{31}-1=2147483647$ jest pierwsza i — co za tym idzie — że liczba

$$2^{30}(2^{31}-1)=2\,505\,843\,008\,139\,952\,128$$

jest doskonała. Jest to więc ósma z kolei liczba doskonała parzysta.

Dziewiąta z kolei liczba doskonała parzysta odpowiada wykładnikowi $p=61$. Jest to liczba $2^{60}(2^{61}-1)$, podana w 1885 r. przez P. Seelhoffa.

R. E. Powers w 1911 r. znalazł następną liczbę doskonałą $2^{88}(2^{89}-1)$. Tenże wraz z E. Fauquembergue'em znalazł w 1914 r. liczbę doskonałą $2^{106}(2^{107}-1)$, a E. Fauquembergue (również w 1914 r.) znalazł największą ze znanych dotąd liczb doskonałych:

$$2^{126}(2^{127}-1),$$

mającą 77 cyfr. Drugi czynnik tej liczby, czyli $2^{127}-1$, jest największą ze znanych dotąd liczb pierwszych.

D. H. Lehmer dowiódł, że liczba $2^{257}-1$ nie jest pierwsza i przeto że $2^{256}(2^{257}-1)$ nie jest liczbą doskonałą¹⁾. Nie wiemy, czy liczba $2^{199}-1$ jest pierwsza i dlatego nie wiemy, czy liczba $2^{198}(2^{199}-1)$ jest doskonała; podobnie nie wiemy, czy pierwszymi są liczby 2^p-1 dla $p=137, 139, 149, 157, 167, 193$.

Nie wiadomo dotychczas, czy liczb doskonałych parzystych jest nieskończenie wiele, ani nawet czy jest ich więcej niż znanych dotąd 12.

Nie znamy dotąd żadnej liczby doskonałej nieparzystej, ale nie posiadamy też dowodu na to, że liczb takich nie ma. W każdym razie dowiedziono, że nie ma liczb doskonałych nieparzystych poniżej liczby $5 \cdot 10^{10}$.

Za pomocą teorii kongruencji można z łatwością dowieść, że każda liczba doskonała parzysta daje jako ostatnią cyfrę (w układzie dziesiętnym) 6 albo 8 oraz że każda liczba doskonała parzysta większa od 6 ma formę $9k+1$. Dowód tych twierdzeń pozostawiamy czytelnikowi.

Analogię do liczb doskonałych stanowią liczby naturalne n , spełniające równanie $\sigma(n)=5n$. Najmniejszą z takich liczb jest $n=120=2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

¹⁾ Por. też M. Kraitchik, *Théorie des Nombres*, tom II, Paryż 1926, str. 142.

A oto jeszcze kilka innych takich liczb:

$$672=2^5 \cdot 3 \cdot 7 \text{ (znaleziona przez Fermata),}$$

$$2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31, \quad 2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73, \quad 2^{13} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127, \quad 2^{19} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151.$$

Szukano też liczb naturalnych n , spełniających równanie $\sigma(n)=4n$, jak np. liczby $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ i $2^3 \cdot 5^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, jako też liczb naturalnych, spełniających równanie $\sigma(n)=5n$, jak np. liczba $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19$.

Sprawdzenie nie nastręcza tu trudności.

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że liczba $2^{27}(2^{27}-1)$ nie jest doskonała.

Dowód. Dzielniki pierwsze liczby $2^{27}-1$ muszą mieć postać $74k+1$. Dla $k=3$ znajdujemy dzielnik 223 liczby $2^{27}-1$; nie jest więc ona pierwsza i badana liczba nie jest doskonała.

2. Wychodząc ze wzoru na liczby doskonałe parzyste, dowieść twierdzenia inż. H. Woska, że ciąg wszystkich kolejnych dzielników liczby doskonałej parzystej, podzielony na dwa ciągi o równej liczbie wyrazów, daje dwa postępy geometryczne o ilorazie 2.

3. Dowieść, że jeżeli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 3, to wzory $\sigma(n)=5n$ i $\sigma(5n)=4 \cdot 5n$ są równoważne. (Descartes)

4. Dowieść, że każda liczba doskonała nieparzysta, o ile takie istnieją, jest postaci ps^2 , gdzie p jest liczbą pierwszą, a s liczbą naturalną¹⁾.

5. Przyjmijmy oznaczenia:

$$s(n)=\sigma(n)-n, \quad s^2(n)=ss(n), \quad s^3(n)=sss(n), \quad \dots$$

Dowieść, że dla $n=12496=2^4 \cdot 11 \cdot 71$ liczby

$$n, \quad s(n), \quad s^2(n), \quad s^3(n), \quad s^4(n)$$

są wszystkie różne, a $s^5(n)=n$.

(P. Poulet)

§ 4. Liczby doskonałe drugiego rodzaju. Liczbę naturalną $n > 1$, równą iloczynowi wszystkich jej mniejszych od niej dzielników, nazywamy liczbą doskonałą drugiego rodzaju.

Takie są np. liczby

$$6=1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 8=1 \cdot 2 \cdot 4, \quad 35=1 \cdot 5 \cdot 7.$$

Wyznaczymy wszystkie liczby doskonałe drugiego rodzaju.

Niech P będzie iloczynem wszystkich dzielników liczby n . Oznaczając przez

$$d_1, d_2, d_3, \dots, d_m$$

¹⁾ Twierdzenie to wypowiedział Descartes w 1638 r.

wszystkie dzielniki liczby n w ich naturalnym porządku, otrzymamy więc

$$(16) \quad P = d_1 d_2 \dots d_m,$$

gdzie m jest liczbą wszystkich dzielników liczby n , tj. $m = \theta(n)$. Lecz jeżeli d przebiega wszystkie dzielniki liczby n , to przebiega je też iloraz $\frac{n}{d}$, tylko w odwrotnym porządku. Jest więc również

$$(17) \quad P = \frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{d_m}.$$

Jeżeli teraz pomnożymy stronami wzory (16) i (17), z których każdy ma po prawej stronie $m = \theta(n)$ czynników, to otrzymamy $P^2 = n^{\theta(n)}$, skąd

$$(18) \quad P = n^{\frac{\theta(n)}{2}}.$$

Iloczyn wszystkich dzielników liczby n , mniejszych od n , jest oczywiście równy $\frac{P}{n}$. Na to więc, żeby liczba n była liczbą doskonałą drugiego rodzaju, potrzeba i wystarcza, by było $n = \frac{P}{n}$, czyli w myśl (18), by $n = n^{\frac{1}{2}\theta(n)-1}$, skąd przez porównanie wykładników po obu stronach otrzymujemy

$$1 = \frac{1}{2}\theta(n) - 1$$

czyli

$$(19) \quad \theta(n) = 4.$$

To proste równanie wyznacza zatem wszystkie liczby doskonałe drugiego rodzaju.

Na mocy wzoru (5) na liczbę dzielników (§ 1, str. 113) możemy więc jeszcze powiedzieć, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby liczba

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

(gdzie $p_1, p_2, \dots, p_k$ są liczbami pierwszymi) była doskonałą drugiego rodzaju, jest równość

$$(20) \quad (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1) = 4.$$

Ponieważ wykładniki $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są liczbami naturalnymi, więc równość (20) zachodzić może tylko dla $k \leq 2$ czyli dla $k = 1$ lub $k = 2$.

W pierwszym przypadku równanie (19) daje $a_1 + 1 = 4$, skąd $a_1 = 3$ i $n = p^3$; liczba n jest więc wtedy sześcianną liczbą pierwszej.

W drugim przypadku dostajemy równanie $(a_1 + 1)(a_2 + 1) = 4$, skąd (wobec tego, że liczby a_1 i a_2 są naturalne) mamy $a_1 = a_2 = 1$ i $n = p_1 p_2$; liczba n jest więc tu iloczynem dwu różnych liczb pierwszych.

Udowodniliśmy w ten sposób następujące

Twierdzenie 6. Wszystkie sześcianny liczb pierwszych oraz wszystkie iloczyny dwu różnych liczb pierwszych są jedynymi liczbami doskonałymi drugiego rodzaju.

Oto kilka kolejnych liczb doskonałych drugiego rodzaju:

$$6, 8, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 27.$$

Czytelnik udowodni z łatwością, że jedynie liczba

$$6 = 1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

jest liczbą doskonałą zarazem pierwszego i drugiego rodzaju.

§ 5. Liczby zaprzyjaźnione. Dwie liczby m i n nazywamy zaprzyjaźnionymi (*numeri amiables*), jeżeli suma mniejszych od m dzielników liczby m równa jest liczbie n i jednocześnie suma mniejszych od n dzielników liczby n równa jest liczbie m .

Takimi są np. liczby 220 i 284, gdyż — jak łatwo obliczyć:

$$\sigma(220) - 220 = 284 \quad \text{ i } \quad \sigma(284) - 284 = 220.$$

Łatwo widzieć, że na to, by liczby naturalne m i n były zaprzyjaźnione, potrzeba i wystarcza, aby było $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n$.

Dłuższy artykuł poświęcił niedawno liczbom zaprzyjaźnionym Escott¹⁾; podaje on 590 par takich liczb, znalezionych w ciągu ostatnich 25 wieków. Pierwszą parę (220 i 280) znalazł jakoby Pytagoras (około 540 r. przed Chr.) Parę $2^4 \cdot 23 \cdot 47$ i $2^4 \cdot 1151$ podał Fermat, parę $2^7 \cdot 191 \cdot 583$ i $2^7 \cdot 73727$ — Descartes. Aż 59 par liczb zaprzyjaźnionych podał Euler, między innymi parę $2^3 \cdot 17 \cdot 79$ i $2^3 \cdot 23 \cdot 59$, jako też parę $2^3 \cdot 19 \cdot 41$ i $2^5 \cdot 199$.

CWICZENIE. Dowieść, że parami liczb zaprzyjaźnionych są:

$$\begin{array}{ll} 2^3 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137 & \text{ i } 2^2 \cdot 23 \cdot 827 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 19 & \text{ i } 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 239 \end{array} \quad (\text{Euler});$$

$$\begin{array}{ll} 2^5 \cdot 37 & \text{ i } 2 \cdot 5 \cdot 11^2 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 & \text{ i } 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 139 \end{array} \quad (\text{Paganini}),$$

$$\quad \quad \quad (B. H. Brown).$$

¹⁾ E. B. Escott, Scripta Mathematica, tom 12 (1946), str. 61-72.

§ 6. Wzory sumacyjne dla liczby dzielników liczby naturalnej. Zajmiemy się obecnie wyprowadzeniem pewnych wzorów dla sumy

$$(21) \quad T(x) = \theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \dots + \theta[E(x)],$$

gdzie $x \geq 1$, a $\theta(k)$ oznacza — jak poprzednio — liczbę dzielników liczby k .

W tym celu udowodnimy przede wszystkim, że $\theta(k)$ jest liczbą rozwiązań równania

$$(22) \quad mn = k$$

w m i n naturalnych.

Istotnie, jeżeli liczba naturalna n jest dzielnikiem liczby k , to $m = \frac{k}{n}$ jest liczbą naturalną i układ m, n jest rozwiązaniem równania (22) w liczbach naturalnych. Na odwrót, jeżeli układ liczb naturalnych m, n spełnia równanie (22), to n jest dzielnikiem liczby k . Każdemu dzielnikowi (naturalnemu) liczby k odpowiada zatem jednoznacznie rozwiązanie równania (22) w liczbach naturalnych m, n i na odwrót. Stąd wynika zapowiedziana własność liczby $\theta(k)$.

Liczbę $T(x)$ możemy więc uważać w myśl wzoru (21) za liczbę rozwiązań (w liczbach naturalnych m i n) nierówności $mn \leq E(x)$, która jest oczywiście równoważna nierówności

$$(23) \quad mn \leq x.$$

Wszystkie rozwiązania tej nierówności w liczbach naturalnych m, n podzielimy na klasy, zaliczając do jednej i tej samej klasy K_n wszystkie te rozwiązania, w których n ma jedną i tę samą wartość. Oczywiście

$$T(x) = \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \bar{K}_3 + \dots,$$

gdzie $\bar{K}_n$ (dla $n = 1, 2, 3, \dots$) oznacza liczbę rozwiązań, należących do klasy K_n .

Przy danym n liczba m może przyjmować tylko wartości naturalne, spełniające nierówność (23) czyli nierówność

$$m \leq \frac{x}{n},$$

a więc wartości:

$$1, 2, 3, \dots, E\left(\frac{x}{n}\right),$$

których jest dokładnie $E\left(\frac{x}{n}\right)$.

W klasie K_n mamy więc $E\left(\frac{x}{n}\right)$ rozwiązań, skąd

$$(24) \quad T(x) = E\left(\frac{x}{1}\right) + E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x}{3}\right) + \dots$$

Prawa strona tego wzoru ma tylko pozornie postać szeregu nieskończonego: wystarczy w niej wypisać tylko pierwszych $E(x)$ składników, ponieważ wszystkie następne są zerami. Istotnie, wobec $E(x) > x - 1$ mamy $n > x$ dla $n > E(x)$, czyli dla $n \geq E(x) + 1$, skąd $E\left(\frac{x}{n}\right) = 0$. Możemy więc wzór (24) napisać jeszcze w postaci

$$(25) \quad T(x) = \sum_{n=1}^{E(x)} E\left(\frac{x}{n}\right).$$

Tak np. dla $x = 10$:

$$T(10) = E\left(\frac{10}{1}\right) + E\left(\frac{10}{2}\right) + E\left(\frac{10}{3}\right) + E\left(\frac{10}{4}\right) + E\left(\frac{10}{5}\right) + E\left(\frac{10}{6}\right) + E\left(\frac{10}{7}\right) + E\left(\frac{10}{8}\right) + E\left(\frac{10}{9}\right) + E\left(\frac{10}{10}\right) = 10 + 5 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 27,$$

co potwierdza też obliczenie bezpośrednie z tabliczki podanej w § 1 (str. 114):

$$T(10) = \theta(1) + \dots + \theta(10) = 1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 + 2 + 4 + 3 + 4 = 27.$$

Obliczanie sumy $T(x)$ za pomocą wzoru (25), jakkolwiek znacznie dogodniejsze od obliczania przez kolejne wyznaczanie wartości funkcji $\theta(n)$, staje się jednak uciążliwe przy większych wartościach liczby x . Np. już dla $x = 100$ trzeba by wyznaczyć sumę aż stu wartości funkcji E . Postaramy się wobec tego wyprowadzić dogodniejszy wzór dla obliczania sumy $T(x)$.

Podzielimy w tym celu wszystkie rozwiązania nierówności (23) w m i n naturalnych na dwie klasy, zaliczając do pierwszej klasy wszystkie te, w których $n \leq \sqrt{x}$, do drugiej zaś — wszystkie pozostałe, tj. wszystkie te, dla których $n > \sqrt{x}$. Obliczmy, ile rozwiązań jest w każdej klasie.

Nadając liczbie n jakąkolwiek wartość naturalną nie większą od $\sqrt{x}$, będziemy otrzymywali rozwiązania klasy pierwszej, jeżeli tylko para m, n jest rozwiązaniem naturalnym nierówności (23), tj. jeżeli m jest liczbą naturalną nie większą od $\frac{x}{n}$. Dla każdego naturalnego $n \leq \sqrt{x}$ jest więc w klasie pierwszej dokładnie $E\left(\frac{x}{n}\right)$ rozwiązań, a że samo n może w klasie pierwszej przyjmować wartości:

$$1, 2, 3, \dots, E(\sqrt{x}),$$

więc liczba rozwiązań należących do tej klasy wynosi

$$\sum_{n=1}^{E(\sqrt{x})} E\left(\frac{x}{n}\right).$$

Policzmy teraz, ile rozwiązań należy do klasy drugiej, tj. ile rozwiązań w liczbach naturalnych m, n mają nierówności

$$mn \leq x, \quad n > \sqrt{x},$$

czyli

$$(26) \quad \sqrt{x} < n \leq \frac{x}{m}.$$

Przyjmijmy na m oznaczoną wartość. Jeżeli $m > \sqrt{x}$, to $\frac{x}{m} < \sqrt{x}$ i nierówności (26) nie są spełnione przez żadne n . Założmy więc, że $m \leq \sqrt{x}$. Aby wyznaczyć, dla ilu różnych n zachodzą wówczas nierówności (26), wystarczy oczywiście od liczby wszystkich n naturalnych, spełniających nierówność $n \leq \frac{x}{m}$ (a takich n jest oczywiście $E\left(\frac{x}{m}\right)$), odjąć liczbę wszystkich n naturalnych, nie spełniających nierówności $\sqrt{x} < n$, czyli spełniających nierówność $n \leq \sqrt{x}$ (a takich n jest oczywiście $E(\sqrt{x})$). W ten sposób otrzymujemy

$$E\left(\frac{x}{m}\right) - E(\sqrt{x})$$

jako liczbę wszystkich układów liczb naturalnych m, n , spełniających przy danym $m \leq \sqrt{x}$ nierówności (26). A że samo m , speł-

niając nierówność $m \leq \sqrt{x}$, może przyjmować tylko wartości:

$$1, 2, 3, \dots, E(\sqrt{x}),$$

więc liczba układów liczb naturalnych m, n , spełniających nierówności (26), czyli liczba wszystkich rozwiązań należących do klasy drugiej, wynosi łącznie

$$\sum_{m=1}^{E(\sqrt{x})} \left(E\left(\frac{x}{m}\right) - E(\sqrt{x}) \right) = \sum_{m=1}^{E(\sqrt{x})} E\left(\frac{x}{m}\right) - \sum_{m=1}^{E(\sqrt{x})} E(\sqrt{x}).$$

Druga z sum, stojących po prawej stronie, równa jest oczywiście liczbie $[E(\sqrt{x})]^2$, gdyż jest sumą $E(\sqrt{x})$ składników, z których każdy jest równy $E(\sqrt{x})$. A więc w klasie drugiej mamy

$$\sum_{m=1}^{E(\sqrt{x})} E\left(\frac{x}{m}\right) - [E(\sqrt{x})]^2$$

rozwiązań. Razem z otrzymaną liczbą rozwiązań klasy pierwszej otrzymujemy zatem

$$\sum_{n=1}^{E(\sqrt{x})} E\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{m=1}^{E(\sqrt{x})} E\left(\frac{x}{m}\right) - [E(\sqrt{x})]^2$$

jako liczbę wszystkich rozwiązań nierówności (23) w liczbach naturalnych m, n czyli jako wartość funkcji $T(x)$. Ponieważ oczywiście

$$\sum_{m=1}^{E(\sqrt{x})} E\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{n=1}^{E(\sqrt{x})} E\left(\frac{x}{n}\right),$$

bo obie sumy są skróconym oznaczeniem sumy

$$E\left(\frac{x}{1}\right) + E\left(\frac{x}{2}\right) + \dots + E\left(\frac{x}{E(\sqrt{x})}\right),$$

więc możemy napisać

$$(27) \quad T(x) = 2 \sum_{n=1}^{E(\sqrt{x})} E\left(\frac{x}{n}\right) - [E(\sqrt{x})]^2.$$

Wzór ten znalazł Lejeune-Dirichlet. Za pomocą tego wzoru z łatwością obliczymy $T(100)$, mianowicie:

$$\begin{aligned} T(100) &= 2 \sum_{n=1}^{10} E\left(\frac{100}{n}\right) - 10^2 = \\ &= 2(100 + 50 + 33 + 25 + 20 + 16 + 14 + 12 + 11 + 10) - 100 = \\ &= 2 \cdot 291 - 100 = 482. \end{aligned}$$

Podobnie, za pomocą łatwych rachunków znaleźlibyśmy:

$$T(200) = 1098, \quad T(500) = 5190, \quad T(1000) = 7069.$$

Dłuższe nieco rachunki dają wartości:

$$T(5000) = 45376, \quad T(10000) = 93668.$$

Ze wzoru (25) można otrzymać ciekawy wzór przybliżony na średnią wartość funkcji $\theta(n)$. Jeżeli mianowicie w każdym składniku sumy po prawej stronie wzoru (25) odrzucimy symbol E , to popełnimy przez to w każdym składniku błąd mniejszy od 1, a zatem w całej sumie — błąd mniejszy od liczby składników, tj. od $E(x) \leq x$. Mamy więc równość przybliżoną

$$T(x) \approx \sum_{n=1}^{E(x)} \frac{x}{n}$$

z błędem mniejszym od x . Dla x całkowitych, $x=k$, będziemy stąd mieli równość przybliżoną:

$$\frac{\theta(1) + \theta(2) + \dots + \theta(k)}{k} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$$

z błędem mniejszym od 1. Ponieważ prawa strona tego wzoru wzrasta nieograniczenie¹⁾ wraz z k , więc stosunek lewej jego strony do prawej zmierza do 1, gdy k wzrasta nieograniczenie.

Funkcja $\theta(n)$ występuje w Analizie jako współczynnik w pewnych rozwinięciach na szeregi. Weźmy np. szereg (zbieżny dla $|x| < 1$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \dots$$

¹⁾ p. Rozdział VII, § 1.

zwany *szeregiem Lamberta*, i rozwińmy każdy z jego składników na postęp geometryczny podług wzoru

$$\frac{x^k}{1-x^k} = x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots$$

Otrzymamy w ten sposób sumę podwójną $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} x^{kl}$, w której dla każdego n naturalnego potęga x^n występuje tyle razy, ile jest rozwiązań równania $kl=n$ w liczbach naturalnych k i l , czyli $\theta(n)$ razy. Stąd tożsamość (dla $|x| < 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta(n) x^n.$$

Funkcja liczbowa $\theta(n)$ występuje więc jako współczynnik przy x^n w rozwinięciu sumy szeregu Lamberta na szereg potęgowy¹⁾.

Funkcja $\theta(n)$ występuje też jako współczynnik w rozwinięciu tzw. *funkcji* ζ . Weźmy dla $s > 1$ szereg

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

W Analizie dowodzi się²⁾, że szereg ten jest zbieżny dla $s > 1$.

Zastosujmy teraz do iloczynu $\zeta(s) \cdot \zeta(s)$ tzw. *mnożenie Dirichleta*, które polega na tym, że w iloczynie dwu szeregów $(a_1 + a_2 + \dots)(b_1 + b_2 + \dots)$ zbieramy razem takie iloczyny a_k i b_l , dla których iloczyn wskaźników kl jest ten sam:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots)(b_1 + b_2 + \dots) &= a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \\ &+ (a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_3 b_1) + (a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_1) + (a_1 b_5 + a_5 b_1) + \\ &+ (a_1 b_6 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_6 b_1) + (a_1 b_7 + a_7 b_1) + \dots \end{aligned}$$

Jak łatwo widzieć, otrzymujemy w ten sposób wzór³⁾:

$$[\zeta(s)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^s}.$$

¹⁾ Ob. moją *Analizę*, tom I, część 2, wyd. 2, Warszawa 1925, str. 88 lub *Działania nieskończone*, Monografie Matematyczne, tom 15 (1948), część II, str. 88.

²⁾ Ob. tamże, str. 58.

³⁾ Ob. tamże, str. 76.

§ 7. Wzory sumacyjne dla sumy dzielników liczby naturalnej. Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem wzorów dla sumy

$$S(x) = \sigma(1) + \sigma(2) + \dots + \sigma(E(x)),$$

gdzie $x \geq 1$, a $\sigma(k)$ oznacza — jak poprzednio — sumę dzielników liczby k . Zauważymy w tym celu, że liczbę $\sigma(k)$ uważać można za sumę liczb n , rozciągniętą na wszystkie układy liczb naturalnych m, n , spełniające równanie

$$mn = k.$$

Sumę $S(x)$ uważać więc możemy za sumę liczb n , rozciągniętą na wszystkie układy liczb naturalnych m, n , spełniające nierówność (23). Dla każdej liczby n jest $E(\frac{x}{n})$ takich układów, a zatem dla niej

$$\sigma(n) = n E\left(\frac{x}{n}\right),$$

ponieważ zaś n może przybierać tylko wartości naturalne nie większe od x , więc

$$(28) \quad S(x) = \sum_{n=1}^{E(x)} n E\left(\frac{x}{n}\right).$$

Dla sumy $S(x)$ można wyprowadzić jeszcze inny wzór, rozumując jak następuje.

Dla ustalonej wartości m liczba n może przybierać w myśl (23) wartości naturalne nie przewyższające $\frac{x}{m}$, tj. wartości:

$$1, 2, 3, \dots, E\left(\frac{x}{m}\right),$$

których suma równa jest

$$1 + 2 + \dots + E\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{2} \left[E\left(\frac{x}{m}\right)^2 + E\left(\frac{x}{m}\right) \right].$$

Zatem suma liczb n , rozciągnięta na wszystkie rozwiązania naturalne nierówności (23), wynosi

$$(29) \quad S(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{E(x)} \left[E\left(\frac{x}{m}\right)^2 + E\left(\frac{x}{m}\right) \right].$$

Przez porównanie wzorów (28) i (29) otrzymujemy ciekawą tożsamość:

$$\sum_{n=1}^{E(x)} n E\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{E(x)} \left[E\left(\frac{x}{n}\right)^2 + E\left(\frac{x}{n}\right) \right],$$

którą — jak łatwo widzieć — można napisać w postaci

$$\sum_{n=1}^{E(x)} \left[E\left(\frac{x}{n}\right)^2 \right] = \sum_{n=1}^{E(x)} (2n-1) E\left(\frac{x}{n}\right)$$

albo jeszcze w postaci:

$$\left[E\left(\frac{x}{1}\right)^2 \right] + \left[E\left(\frac{x}{2}\right)^2 \right] + \left[E\left(\frac{x}{3}\right)^2 \right] + \dots = 1 E\left(\frac{x}{1}\right) + 3 E\left(\frac{x}{2}\right) + 5 E\left(\frac{x}{3}\right) + \dots$$

Tak np. dla $x=10$:

$$10^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 1 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 11 \cdot 1 + 13 \cdot 1 + 15 \cdot 1 + 17 \cdot 1 + 19 \cdot 1.$$

Żaden ze wzorów (28) i (29) nie jest dogodny do obliczania funkcji $S(x)$; wzór dogodniejszy można by z łatwością wyprowadzić tą samą metodą, jaką otrzymaliśmy wzór (26). Otrzymalibyśmy w ten sposób wzór:

$$(30) \quad S(x) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{E(\sqrt{x})} \left[E\left(\frac{x}{n}\right)^2 \right] + \sum_{n=1}^{E(\sqrt{x})} (2n+1) E\left(\frac{x}{n}\right) - [E(\sqrt{x})]^3 - [E(\sqrt{x})]^2 \right\},$$

z którego z łatwością obliczylibyśmy np.

$$S(100) = 8249.$$

Funkcja $\sigma(n)$, podobnie jak funkcja $\theta(n)$, występuje w Analizie jako współczynnik w pewnych rozwinięciach na szeregi. Można mianowicie dla $|x| < 1$ wyprowadzić wzór ¹⁾

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n,$$

a dla $s > 2$ wzór ²⁾

$$\zeta(s-1) \cdot \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s}.$$

¹⁾ Ob. tamże, str. 89.

²⁾ Ob. tamże, str. 76.

§ 8. Tożsamość Hermite'a dla funkcji $E(x)$. Wyprowadzimy następującą tożsamość Hermite'a:

$$(51) \quad \sum_{k=0}^{m-1} E\left(x + \frac{k}{m}\right) = E(mx)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby naturalnej m .

Tożsamość tę wystarczy udowodnić dla $0 \leq x < 1$, gdyż obie jej strony wzrastają o m przy zastąpieniu x przez $x+1$.

Otóż zakładając, że $0 \leq x < 1$, mamy

$$0 \leq x + \frac{k}{m} < 2 \quad \text{dla } k=0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Składnik $E\left(x + \frac{k}{m}\right)$ może więc przyjmować tylko dwie wartości: 0 i 1, z czego wartość 1 tylko dla takich k , dla których $x + \frac{k}{m} \geq 1$. Niech q będzie najmniejszym z takich k . Zatem

$$x + \frac{q-1}{m} < 1 \leq x + \frac{q}{m},$$

skąd

$$m-q \leq mx < m-q+1,$$

co dowodzi wobec całkowitości liczby $m-q$, że $E(mx) = m-q$.

Z drugiej strony, określenie liczby q daje

$$E\left(x + \frac{k}{m}\right) = 0 \quad \text{dla } k < q,$$

$$E\left(x + \frac{k}{m}\right) = 1 \quad \text{dla } k = q, q+1, \dots, m-1,$$

zatem $\sum_{k=0}^{m-1} E\left(x + \frac{k}{m}\right) = m-q = E(mx)$, c. b. d. o.

Dowód ten podał S. Łojasiewicz w 1945 r.

W szczególności, dla $m=2$ tożsamość (51) daje

$$E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x .

Pisząc zamiast x kolejno $\frac{t}{2}, \frac{t}{4}, \frac{t}{8}, \dots$, otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned} E(t) &= E\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{t}{2}\right) = E\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{t}{4} + \frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{t}{4}\right) = \dots \\ &\dots = E\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{t}{4} + \frac{1}{2}\right) + \dots + E\left(\frac{t}{2^k} + \frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{t}{2^k}\right), \end{aligned}$$

co wobec $\lim_{k \rightarrow \infty} E\left(\frac{t}{2^k}\right) = 0$ daje (dla t rzeczywistych) tożsamość:

$$E(t) = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{t}{2^k} + \frac{1}{2}\right).$$

Oczywiście składniki szeregu po prawej stronie są, poczynając od pewnego miejsca, stale równe zeru.

ĆWICZENIA 1. Dowieść, że dla k całkowitych i n naturalnych jest

$$E\left(\frac{k}{n}\right) - E\left(\frac{k-1}{n}\right) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n|k \\ 0, & \text{gdy } n \nmid k. \end{cases}$$

2. Dowieść, że dla n naturalnych jest

$$E\left(\frac{1}{n}\right) - E\left(\frac{1}{n-1}\right) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ jest kwadratem liczby naturalnej} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

3. Dowieść, że dla n naturalnych jest:

$$E\left(\frac{5}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}\right) = n, \quad E\left(\frac{4}{\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+5)}}\right) = n+1,$$

4. Znaleźć trzy kolejne liczby naturalne, znając ich iloczyn.

Rozwiązanie. Jeżeli $(n-1)n(n+1) = a$, to $(n-1)^3 < a = n^3 - n < n^3$, skąd $n-1 < \sqrt[3]{a} < n$, a zatem $\sqrt[3]{a} < n < \sqrt[3]{a} + 1$, co dowodzi, że $n = E\left(\sqrt[3]{a}\right) + 1$.

5. Dowieść, że dla wszelkich rzeczywistych x i y jest

$$E(2x) + E(2y) \geq E(x) + E(x+y) + E(y).$$