

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY:  
K. BORSUK, B. KNASTER, K. KURATOWSKI, W. SIERPIŃSKI,  
W. ŚLEBODZIŃSKI, H. STEINHAUS i A. ZYGMUND

TOM XVIII

0338  
[18]

DR ANDRZEJ MOSTOWSKI<sup>1</sup>  
PROFESOR UNIwersYTETU WARSZAWSKIEGO

<sup>2</sup>  
LOGIKA  
MATEMATYCZNA

KURS UNIwersYTECKI

Biblioteka Uniwersytecka w Warszawie



1000415295

Z SUBWENCJI PREZYDIUM RADY MINISTRÓW  
I MINISTERSTWA OŚWIATY

WARSZAWA — WROCŁAW 1948

02338

COPYRIGHT, 1948, by MONOGRAFIE MATEMATYCZNE  
 WARSZAWA (Poland) WROCLAW  
 Seminarium Matematyczne Uniwersytetu.

ALL RIGHTS RESERVED.

NO PART OF THIS BOOK MAY BE TRANSLATED OR  
 REPRODUCED IN ANY FORM, BY MIMEOGRAPH  
 OR ANY OTHER MEANS, WITHOUT PERMISSION IN  
 WRITING FROM THE PUBLISHERS.



Printed in Poland

8.44.48  
 107.44  
 0051

Nakład 3.000 egz. Stronic VIII+388. Papier bezdrz. sat. 100 g 70×100 cm. Sierpień 1948.

## PRZEDMOWA

W polskiej literaturze podręcznikowej nie ma dotychczas żadnej obszernej książki, poświęconej nowoczesnej *logice formalnej* (zwanej też *logistyką* albo *logiką matematyczną*). Brak ten jest tym dziwniejszy, że polska szkoła logiczna należała przed wojną do najlepszych w świecie i że zarówno obowiązujące dotychczas jak planowane na przyszłość programy egzaminów magisterskich przewidują dla studentów matematyki obowiązkowy egzamin z logiki (lub z metodologii matematyki).

Książka niniejsza napisana została z myślą zaspokojenia tej potrzeby. Wynika stąd, że książka pomyślana jest jako podręcznik, przeznaczony przede wszystkim dla studiujących matematykę.

Przy pisaniu książki z logiki przewyciężyć trzeba trudności, jakich nie spotyka się przy opracowywaniu dzieł z klasycznych działów matematyki.

Wydaje mi się, że trudności te płyną z trzech źródeł.

Pierwszym z nich jest niewątpliwie to, że logika matematyczna jest jeszcze nauką młodą, nie mającą za sobą dostatecznie długiej tradycji. Jest ona w tej chwili już zbyt obszerna, by móc ją całą przedstawić w jednej książce, a nie umiemy jeszcze odróżnić w niej działów ważniejszych od mniej ważnych.

Źródłem drugiej trudności jest niedoskonałość istniejących obecnie środków logicznych. Wiadomo, że logika ma za zadanie m.in. sformalizować rozumowania matematyczne i poddać je badaniom metodologicznym czy meta-matematycznym. Dotychczas znane sposoby formalizowania rozumowań intuicyjnych są jednak albo tak nieściśle, że nie można budować na nich rozumowań meta-matematycznych, albo prowadzą do rachunków tak rozwlekłych, że nie można myśleć poważnie o stosowaniu ich w praktyce.

Trzecia wreszcie trudność pochodzi stąd, że nie potrafimy pozbawić logiki (jakkolwiek bądź byłaby ona formalna) pewnego choćby podświadomego podkładu filozoficznego, którego wybór świadomy jest tym trudniejszy, że — w obecnym stanie dyskusji nad podstawami matematyki — nie można z całą pewnością powiedzieć, który z wielu ścierających się ze sobą poglądów jest najlepszy, albo chociażby dobry.

Omówię tu po kolei te trudności.

Przy wyborze materiału kierowałem swą uwagę głównie na te dziedziny logiki, które mają lub — jak sądzę — mogą mieć zastosowania w matematyce albo przyczynić się do wyjaśnienia natury pojęć matematycznych. Wydaje mi się, że z tego punktu widzenia prawa rachunku zdań mają mniejsze znaczenie, niż prawa dotyczące kwantyfikatorów, a teoria klas i sylogistyka mniejsze znaczenie niż teoria relacji. Dlatego teorię kwantyfikatorów i teorię relacji potraktowałem obszernie, a rachunek zdań i sylogistykę — tylko pobieżnie. Uważałem za niezbędne, by czytelnik-matematyk znalazł w książce teorię Frege'go liczb naturalnych, która jest niewątpliwie jednym z najpiękniejszych i najgłębszych działów logiki. Wreszcie, potraktowałem obszernie zagadnienia metodologiczne, których wagę i doniosłość uznają dziś nawet matematycy, zainteresowanymi swymi stojący daleko od logiki. Omawiając zagadnienia metodologiczne, ograniczyłem się jednak do rozpatrywania systemów sformalizowanych zawierających całą logikę zdań i kwantyfikatorów, ponieważ jestem przekonany, że systemy takie mają dla matematyki bez porównania większe znaczenie, niż inne uboższe od nich systemy. Tym tłumaczy się pominięcie zapoczątkowanych przez Jana Łukasiewicza badań metodologicznych nad rachunkiem zdań oraz t.zw. *metodologii ogólnej*, zapoczątkowanej przez Alfreda Tarskiego.

Wobec i tak dużych rozmiarów książki nie mogłem poruszyć lub dostatecznie pogłębić wielu ważnych zagadnień. Tak np. nie rozwinąłem teorii funkcji obliczalnych, ani związanych z nią zagadnień rozstrzygalności, a twierdzenia Gödla, które same starczyłyby za temat do odrębnej monografii, mogłem przedstawić tylko szkicowo.

Oczywiście względy subiektywne też odegrały rolę w wyborze materiału. Czytelnik obeznany z literaturą logiczną stwierdzi z łatwością, jak dalece na wybór ten wpłynęły prace Alfreda Tarskiego.

Przejdę teraz do omówienia drugiej ze wspomnianych trudności.

Logika, którą przedstawiam w I i II części tej książki, nie jest systemem sformalizowanym w ścisłym znaczeniu tego słowa. Wprawdzie począwszy od rozdziału III dowody twierdzeń logicznych prowadzone są zasadniczo z powoływaniem się na przyjęte reguły wnioskowania i udowodnione poprzednio prawa, od zasady tej poczyniłem jednak liczne odstępstwa przy trudniejszych twierdzeniach. Nadto samo określenie funkcji zdaniowych i zdań, które podane być powinno na wstępie każdego systemu całkowicie sformalizowanego, znajduje się dopiero w rozdziale VIII.

Mimo to sądzę, że czytelnik po przestudiowaniu pierwszych dziewięciu rozdziałów będzie wiedział, na czym polegają dowody sformalizowane, i potrafi takie dowody w razie potrzeby sam budować. Znajdzie on bowiem w tych rozdziałach wiele przykładów rozumowań prawie sformalizowanych, a po przeczytaniu rozdziałów VIII i IX będzie również wiedział, jak należy określić wyrażenia sensowne i poprawnie formułować reguły wnioskowania.

W ten sposób — metodą stopniowego wprowadzania coraz dalej posuniętej ścisłości — starałem się osiągnąć cel dydaktyczny: zorientować czytelnika, na czym polega proces formalizowania rozumowań intuicyjnych. Cel zaś naukowy, którym byłoby ujęcie matematyki lub jej dostatecznie obszernego fragmentu w ramy dokładnie opisanego systemu sformalizowanego, nie leżał w moich zamiarach.

Aby umożliwić w części III względną choćby ścisłość rozumowań meta-matematycznych, musiałem dbać o dostateczną prostotę systemów sformalizowanych, używanych lub raczej aproksymowanych w pierwszych dwu częściach, i dlatego uznałem za wskazane całkowicie wyeliminować używanie funktorów nazwotwórczych. Z natury rzeczy odbiło się to ujemnie na przejrzystości i zwięzłości wielu wzorów i dowodów.

Należy się tu także wzmianka o użytej w tej książce symbolice. Starałem się dostosować ją do symboliki, używanej przez wielu polskich matematyków, stosujących logikę w teorii mnogości i topologii; tam, gdzie nie miałem tych wzorów, stosowałem symbolikę zbliżoną do symboliki Russell'a i Whitehead'a. Unikałem symboliki beznawiasowej, gdyż wydaje mi się, że utrudnia ona odczytywanie wzorów, nie przynosząc istotnego

pożytku, któryby to kompensował. Dalej, idąc za radą profesora Knastera, zastąpiłem cudzysłowy, używane powszechnie do tworzenia nazw wyrażeń, przez pisanie przed wyrażeniami słów takich jak *zdanie*, *zmienna*, *funkcja zdaniowa* i t. p. Tak np. piszę: *podstawiamy zmienną  $x$  za zmienną  $y$  w wyrażeniu  $x^2 - y = 0$  zamiast: podstawiamy „ $x$ ” za „ $y$ ” w „ $x^2 - y = 0$ ”.* Do inowacji tej skłoniło mnie zarówno to, że konsekwentne stosowanie cudzysłowów jest nieraz bardzo trudne, jak i to, że czytelnik dopiero pod koniec książki może się dowiedzieć, do czego właściwie te cudzysłowy mają służyć, i nie mógłby się wobec tego zorientować, dlaczego jest ich tak dużo i jak należy rozumieć ich potrzebę.

Co do trzeciej trudności, związanej z zajęciem określonego stanowiska filozoficznego w zakresie podstaw matematyki, to celowo unikałem poruszania tych zagadnień w tekście, gdyż wykraczają one oczywiście poza ramy logiki formalnej. System logiczny potraktowałem jako język, w którym mówi się o zbiorach i relacjach. Przyjąłem dla tych tworów pewnik ekstensjonalności i uznałem, że podlegają one zasadom, znanym pod nazwą prostej teorii typów. Stanowisko takie jest dogodną podstawą do rozwinięcia zagadnień formalnych i pokrywa się z mniej lub więcej uświadomionym stanowiskiem większości matematyków — co zresztą nie znaczy, by musiało ono być uznane bez zastrzeżeń przez filozofów.

Jestem skłonny mniemać, że zadowolające rozstrzygnięcie zagadnienia podstaw matematyki nastąpi na drodze wskazanej przez konstruktywizm lub kierunek do niego zbliżony. Na tej jednak podstawie nie można by już teraz napisać podręcznika logiki.

Ograniczenie tematu książki do zagadnień formalnych odbiło się oczywiście też na jej treści. Nie ma w niej ani prób uzasadnienia filozoficznej poprawności prostej teorii typów, ani wzmianki o rozgałęzionej teorii typów czy o próbach stworzenia logiki niezależnej od teorii typów. Poza kilku nawiasowymi uwagami nie ma też w niej mowy ani o intuicjonizmie, ani o formalizmie, ani o żadnym innym kierunku, zmierzającym do takiego lub innego ugruntowania podstaw matematyki. Z tych samych względów nie poruszyłem trudności, związanych z teorią deskryptów ani też teorii sensu i znaczenia, zbudowanej przez Frege'go, a odnowionej niedawno przez Churcha.

Jak każdy niemal tom „Monografii Matematycznych”, tak i ta książka wiele zawdzięcza pracy i życzliwości profesora Bronisława Knastera, który nie tylko troszczył się o poprawny jej układ i wygląd graficzny, lecz zechciał też przejrzeć mój rękopis i poczynić w nim wiele poprawek zarówno stylistycznych jak i rzeczowych. W szczególności dotyczy to rozdziału VIII, dzięki czemu rozdział ten przybrał swą obecną postać.

Rękopis mój przeczytał również magister Roman Sikorski, którego uwagi umożliwiły mi poprawienie tekstu w wielu miejscach. Cenne uwagi zakomunikowali mi także profesorowie Edward Marczewski i Jerzy Słupecki oraz magistrowie Wanda Szmielęw i Helena Rasiowa, której jestem ponadto winien wdzięczność za pomoc w korektach.

Warszawa, w czerwcu 1948 roku.

*Andrzej Mostowski*

#### ERRATA

stronica i wiersz:	jest:	ma być:
25 <sup>15</sup>	stwierdziłem pirycznie	stwierdził empirycznie
30 <sup>8, 10</sup>	$\equiv [$	$\equiv \{ \{$
30 <sup>9</sup>	$  \equiv$	$\} \equiv$
30 <sup>11</sup>	$]$ .	$\} \}$ .
37 <sup>10, 12</sup>	$A \cdot B$	$A \cdot B$
38 <sup>2</sup>	$A'_d$	$A_d$
38 <sup>9</sup>	$\vdash A \equiv$	$\vdash A_d \equiv$
39 <sup>14</sup>	(20)	(15)
46 <sup>9</sup>	łustym	odmiennym
46 <sup>13</sup>	zdaniotwórcze	zdaniotwórcze (z wyjątkiem negacji)
49 <sup>6</sup>	$\sum_{n_0}(n_0 \quad \} \}$ .	$\sum_{n_0}((n_0 \quad \} \} \}$ .
64 <sup>14</sup>	$\vdash \prod_v$	$\vdash \prod_x$
80 <sup>19</sup>	(15) i (16)	(15), (17) i (12)
81 <sup>17</sup>		
94 <sup>12</sup>	na mocy (11)	na mocy (9)
102 <sup>1</sup>	$X \cdot Y \Delta X \cdot Z$	$(X \cdot Y) \Delta (X \cdot Z)$

stronica i wiersz:	jest:	ma być:
102 <sup>5</sup>	$X \Delta Y \Delta X \cdot Y$	$X \Delta Y \Delta (X \cdot Y)$
103 <sup>12</sup>	$x \cdot 1 = x$	$x \cdot 1 = x$
105 <sub>7</sub>	8	9
117 <sup>6</sup>	(2)	(1)
117 <sup>7</sup>	59	58
123 <sup>6</sup>	pierwszy	drugi
123 <sup>7</sup>	drugiego	pierwszego
137 <sub>10</sub>	$X$ i $Y$	$Y$ i $Z$
142 <sub>6</sub>	$\mathcal{R}(x) \leq \mathcal{R}(y)$	$\mathcal{R}(x) < \mathcal{R}(y)$
146 <sup>10</sup>	Najmniejszy	Największy
	najwięk-	najmniej-
150 <sub>18</sub>	$S$	$S$
159 <sup>14</sup>	$R$ , zawierają	$R$ zawierają
160 <sup>5</sup>	po	po-
174 <sub>16</sub>	§ 6	§ 5
190 <sup>8</sup>	$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$	$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$
210 <sup>2</sup>	$(X) (X \in X)$	$(\bar{X}) (X \in X)$
288 <sup>12</sup>	$\varrho_1, \varrho_2, \dots$	$\varrho_1, \varrho_2, \dots$
334 <sub>16</sub>	$\prod_u [x(u) \rightarrow x(v)]$	$\prod_u x(u) \rightarrow x(v)$
337 <sup>4,8</sup>	$R$	$N$
341 <sub>6</sub>	której	w której rozwinięciu
		trójkowym
346 <sub>16</sub>	$n = \varphi(k, l, m)$	$n = \vartheta(k, l, m)$

## CZĘŚĆ PIERWSZA

### ROZDZIAŁ I

#### WIADOMOŚCI WSTĘPNE

§ 1. Wstęp. Jedną z najbardziej charakterystycznych cech nauk matematycznych jest możność przeprowadzania na ich terenie dowodów, to znaczy możność wyprowadzania jednych twierdzeń z drugich, o których prawdziwości przekonaliśmy się już dawniej, bądź też które umownie przyjmujemy za punkt wyjścia.

Wyprowadzanie jednych zdań z innych, czyli tak zwane rozumowanie dedukcyjne, gra wielką rolę również w naukach doświadczalnych, mianowicie przy wyprowadzaniu wniosków z hipotez. Im więcej można z hipotezy wyprowadzić wniosków zgodnych z doświadczeniem, tym bardziej prawdopodobna staje się ta hipoteza. Natomiast obalenie hipotezy wymaga wykazania, że z hipotezy tej wynika wniosek sprzeczny z doświadczeniem. Widać stąd, że i w naukach przyrodniczych przeprowadza się często wnioskowanie dedukcyjne, chociaż nie ma ono dla tych nauk tak doniosłego znaczenia jak dla matematyki.

Zarówno matematyka jak nauki przyrodnicze używają rozumowania dedukcyjnego jako instrumentu. Dla matematyka celem dowodu jest uzasadnienie nowego, dotąd nieznanego faktu, dla empiryka zaś rozumowanie dedukcyjne jest potrzebne do obalenia lub utwierdzenia hipotezy.

Ani więc matematyka, ani tym mniej nauki empiryczne nie studiują natury samego rozumowania dedukcyjnego. Nauka, która studium takie stawia sobie za zadanie, nosi nazwę *logiki*.

Potrzeba logiki zjawia się dość późno w psychice rozwijającego się umysłu i nie wszyscy odczuwają jej potrzebę jednakowo mocno. Wielu najwybitniejszych nawet uczonych nie zna wcale

## SKOROWIDZ ZNAKÓW

	Str.		Str.
negacja	7	$\mathfrak{D}(R)$	dziedzina relacji . . . . . 129
dopełnienie zbioru i relacji	97	$\mathfrak{C}(R)$	przeciwdziedzina relacji . . . . . 129
koniunkcja	8	$\mathfrak{E}(R)$	pole relacji . . . . . 130
iloczyn zbiorów i relacji	96	$X R$	relacja o ograniczonej dziedzinie . . . . . 150
alternatywa	9	$R Y$	relacja o ograniczonej przeciwdziedzinie . . . . . 150
+		$X R Y$	relacja o ograniczonej dziedzinie i przeciwdziedzinie (obustronnie ograniczona) . . . . . 150
suma zbiorów i relacji	96	$R(X)$	obraz zbioru $X$ dany przez relację $R$ . . . . . 150
$\rightarrow$		$\text{refl}(X)$	klasa relacji zwrotnych w $X$ . . . . . 153
$\equiv$		$\text{arefl}(X)$	klasa relacji przeciwzwrotnych w $X$ . . . . . 153
równoważność	12	$\text{sym}(X)$	klasa relacji symetrycznych w $X$ . . . . . 154
		$\text{asym}(X)$	klasa relacji przeciwsymetrycznych w $X$ . . . . . 154
dyzjunkcja	16	$\text{asym}^*(X)$	klasa relacji na w pół przeciwsymetrycznych w $X$ . . . . . 154
$\vdash$		$\text{trans}(X)$	klasa relacji przechodnich w $X$ . . . . . 154
skrót słów: <i>jest tautologią</i>	20, 227	$\text{aeq}(X)$	klasa relacji zwrotnych, symetrycznych i przechodnich w $X$ . . . . . 156
$A_d$		$\text{part}(X)$	klasa podziałów zbioru $X$ . . . . . 157
wyrażenie dwoiste do $A$	37	$\mathfrak{A}(R, X)$	rodzina klas abstrakcji relacji $R$ w zbiorze $X$ . . . . . 158
$\prod$		$\text{con}(X)$	klasa relacji spójnych w zbiorze $X$ . . . . . 142
duży kwantyfikator	44	$\text{ord}(X)$	klasa relacji porządkujących zbiorów $X$ . . . . . 142
$\sum$		$\text{b ord}(X)$	klasa relacji dobrze porządkujących zbiorów $X$ . . . . . 144
mały kwantyfikator	45	$\text{ord}^*(X)$	klasa relacji częściowo porządkujących zbiorów $X$ . . . . . 144
$\prod_{\Phi(x)}$		1-Cls	klasa relacji jednoznacznych . . . . . 146
kwantyfikatory o ograniczonym zakresie	49	Cls-1	klasa relacji odwrotnie jednoznacznych . . . . . 150
$\sum_{\Phi(x)}$		1-1	klasa relacji doskonałych (wzajemnie jednoznacznych) . . . . . 151
$\epsilon$		$\mathfrak{D}_1(U)$	pierwsza, druga i trzecia dziedzina relacji
należenie elementu do zbioru	89	$\mathfrak{D}_2(U)$	trójczłonowej . . . . . 154
$(x)\Phi(x)$		$\mathfrak{D}_3(U)$	
zbiór $x$ -ów spełniających warunek $\Phi(x)$	91	$U_{123}, U_{132}$	
$(x, y)\Phi(x, y)$		$U_{213}, U_{231}$	relacje odwrotne do relacji trójczłonowej . . . . . 154
relacja, zachodząca między $x$ a $y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi(x, y)$	91, 263	$U_{312}, U_{321}$	
$\subset$		$\sim_R$	równoliczność zbiorów dane przez relację $R$ . . . . . 165
zawieranie się (inkluzja) dla zbiorów i relacji	93	$\text{ip}$	stosunek równoliczności zbiorów . . . . . 166
$=$		$\text{Nc}$	klasa liczb kardynalnych . . . . . 172
równość i równość zakresowa	94, 109	$\text{Nc}(X)$	liczba kardynalna zbioru $X$ . . . . . 177
$\neq$			
różność i różność zakresowa	95, 112		
0			
zbiór pusty	95		
1			
zbiór pełny	85		
0*			
relacja pusta	95		
1*			
relacja pełna	96		
1'			
równość	109		
0'			
różność	112		
$\check{R}$			
relacja odwrotna	119		
$R;S$			
iloczyn względny relacji (relacja złożona)	120		

		Str.
0	liczba kardynalna zero	177
$\iota(x)$	zbiór złożony z jednego elementu $x$	177
$\aleph^*$	następnik liczby kardynalnej $\aleph$	178
ind	klasa zbiorów dziedzicznych	182
Neind	zbiór liczb kardynalnych skończonych (induktywnych)	183
$+$ , $s$	dodawanie liczb kardynalnych	187
$*$ , $(*)$ , $(*,*)$ , $((*)$ , ...	symbole typów	205
$x^c$	zmienna typu $c$	215
$E(x, y)$	skrót słów: $x$ jest elementem mnogości $y$	245
$(\exists x)\Phi(x)$	to $x$ , dla którego $\Phi(x)$	250
$\frac{\quad}{df}$	równość definicyjna	250
$\ulcorner \urcorner$	quasi-cudzysłowy	312
$(B)!\Phi\left(\begin{smallmatrix} x, y, \dots, u \\ P, Q, \dots, R \end{smallmatrix}\right)$	skrót słów: przedmioty $P, Q, \dots, R$ spełniają ro dziedzinie $B$ funkcję zdaniową $\Phi$ o zmiennych $x, y, \dots, u$	327
$N(\Phi)$	numer wyrażenia $\Phi$	363
$q\{I\}$	zbiór złożony z $q$ -elementowych podzbiorów zbioru $I$	363

## SKOROWIDZ NAZW

Liczby oznaczają stronicę.

<i>Absolutne dowody niesprzeczności</i> 277.	<i>Część wspólna p. Poczyn.</i>
<i>Abstrakcji</i> klasy 138, — zasada 138, — znak 91.	<i>Czynniki koniunkcji</i> 8.
<i>Addytywność</i> relacji 131.	<i>Dedekinda p. Liczby.</i>
<i>Aksjomat</i> 225. — definicyjny 90, — ekstensjonalności 113, — epsilonowy 256, — określoności 245, — sprowadzalności 90, — tworzenia mnogości potęgowej 245, — tworzenia par 245, — tworzenia sum 245.	<i>Dedukcyjne p. Rozumowanie.</i>
<i>Aksjomaty</i> algebry Boole'a 103, — równości 225.	<i>Definiendum</i> 250.
<i>Aksjomatyczna</i> teoria mnogości 244.	<i>Definiens</i> 250.
<i>Aksjomatyczne</i> ujęcie rachunku zdań 39.	<i>Definicja</i> granicy ciągu 49, — indukcyjna 187, — jednostajnej ciągłości 49, — tautologii 56.
<i>Algebra</i> Boole'a 102, — logiki 28.	<i>De Morgana p. Prawa.</i>
<i>Alternatywa</i> 9, — elementarna 32, — prosta 294, — uogólniona 47, — wyłączająca 9.	<i>Dictum de omni</i> 59.
<i>Analityczne p. Zdanie.</i>	<i>Dodawanie</i> pierścienia 160.
<i>Antynomie</i> 208, 277, — Berry'ego 315, — Burali-Forti'ego 210, 213, 218, — kłamcy 319, — Richarda 318, 367, — Russell'a, 209, 213, 218, 247, — semantyczne 315, — wyrazu heterologiczny 320, — zbioru wszystkich zbiorów 210.	<i>Dołączanie</i> kwantyfikatorów 55.
<i>Antysymetria</i> relacji trójczłonowych 154.	<i>Dopełnienie</i> 97, — podwójne 140.
<i>Apagogeniczne</i> dowody 22.	<i>Dowód</i> 57, — sformalizowany 227.
<i>Argument</i> p. Zbiór.	<i>Dowody</i> apagogeniczne 22, — niesprzeczności absolutne 277, — przez interpretację 274.
<i>Arytmetyzacja</i> p. Metoda.	<i>Duns Scotusa p. Prawo.</i>
<i>Autologiczny</i> 320.	<i>Dwoiste</i> funktory 38.
<b>Baza</b> 325.	<i>Dwoistość</i> 37, 38, 65, 74, — w algebrze Boole'a 107.
<i>Berry'ego</i> p. Antynomie.	<i>Dyzjunkcja</i> 16.
<i>Boole'a</i> algebra p. Algebra.	<i>Dyzjunkcyjna</i> postać normalna 294.
<i>Burali-Forti'ego</i> p. Antynomie.	<i>Działanie</i> łączne 157, — monotoniczne (lewo- i prawostronnie) 159, — odwrotne (lewo- i prawostronnie) 158, — określone w zbiorze 156, — przemienne 156, — wykonalne w zbiorze 156.
<i>Cantora</i> twierdzenie 347, — zbiór 341.	<i>Dziedziczność</i> zbioru (—własności) 182.
<i>Cauchy'ego</i> warunek 49.	<i>Dziedzina</i> 129, — ograniczona 130, — pierwsza, druga i trzecia 154.
<i>Charakterystyka</i> 79, 295.	<i>Egzystencjalne p. Zdanie.</i>
<i>Ciało</i> 160.	<i>Ekstensjonalność</i> 111, 216, — funktorów 15.
<i>Ciąg</i> nieskończony 148.	<i>Element</i> 89, — ostatni 143, — pary uporządkowanej (pierwszy i drugi) 143, — pierwszy 143.
<i>Ciągłość</i> jednostajna 49, —ci pewnik 242.	<i>Eliminacja</i> kwantyfikatorów 298, — definicji indukcyjnych 257.
<i>Claviusa</i> p. Prawo.	<i>Empiryzm</i> 73, 357.
	<i>Epsilonowy</i> aksjomat 256.

**Figury syllogizmów** 126, 127, 129.  
**Finitystyczne p. Rozumowanie.**  
**Forma p. Postać.**  
**Formalizm** 357.  
**Formalna supozycja** 311.  
**Formalne p. Liczby.**  
**Funkcja** 147, — liczbowa 345, — obliczalna 300, 301, — parzysta 153, — zdaniowa 4, — zdaniowa jednostkowa 250, — zdaniowa molekularna 324, — zdaniowa fałszywa w dziedzinie  $B$  330, — prawdziwa 330, — prawdziwa w dziedzinie  $B$  330, — spełnialna w dziedzinie  $B$  330.  
**Funktory dwoiste** 38, — ekstensjonalne 15, — nazwotwórcze 264, — zdaniotwórcze 7.  
**Genetyczna p. Metoda.**  
**Geometria rzutowa** 240.  
**Goldbacha p. Hipoteza.**  
**Góbla twierdzenie** 371, — o pełniłości węższego rachunku funkcyjnego 353.  
**Grupa** 159, 234, — przemienna 159, — uporządkowana 159.  
**Heterologiczny** 320.  
**Hilberta p. Program.**  
**Hipoteza Goldbacha** 50, 270.  
**Homomorfizm** 197.  
**Idealizm** 357.  
**Identitas indiscernibilium** 110.  
**Identyczność** 109.  
**Iloczyn kartezjański** 148, — logiczny 8, — relacji 96, — uogólniony 47, — względny 120, — zbiorów 96.  
**Implikacja** 10, — odwrotna 24, — prosta 23, — przeciwna 24, — przeciwstawna 24, — ścisła 12.  
**Indukcja p. Zasada.**  
**Indukcyjna definicja** 187, 329.  
**Induktywne liczby** 183.  
**Indywidua** 204.  
**Inferencyjna p. Równoważność.**  
**Inkluzja** 93.  
**Interpretacja** 270, — skończona 276.  
**Intuicjonizm** 41, 73.  
**Intuicyjne p. Liczby.**  
**Istotna zmienna** 45.  
**Izomorfizm relacji** 194.  
**Jednoczesne zaprzeczenie** 16.  
**Jednorodność relacji** 130.  
**Jednostajna ciągłość** 49.  
**Jednostkowa funkcja zdaniowa** 250.  
**Kardynalna liczba** 171, 177, 181, 183.  
**Kartezjański iloczyn** 148.  
**Kategoria semantyczna** 206.  
**Kategoryczność teorii** 305.

**Kierunki** 140.  
**Klasy abstrakcji** 138.  
**Klasyfikacja** 137.  
**Koniunkcja** 8, — uogólniona 47.  
**Koniunkcyjna p. Postać.**  
**Konkluzja** 126.  
**Konstruktywizm** 73.  
**Konwers** 119.  
**Kwadrat logiczny** 129.  
**Kwantyfikatory** 44, — duży (ogólny) 44, — mały (szczegółowy) 45, —  $y$  o ograniczonym zakresie 49.  
**Leksykograficzne p. Uporządkowanie.**  
**Lewostronna monotoniczność** 159, — odwrotność 158, — rozdzielność 158.  
**Leżenie między p. Relacja.**  
**Liczba zero** 177.  
**Liczby induktywne** 183, — jako nazwy własności pojęć 175, — kardynalne 171, — kardynalne nieskończone w znaczeniu Dedekinda 181, — kardynalne refleksywne 181, — kardynalne skończone 177, 183, — naturalne 177, 183, — naturalne formalne 301, — naturalne intuicyjne 301, — porządkowe 197, — relatywne 196, — rzeczywiste 140, — wymierne 140, — względne 139.  
**Logika** 1, — dwuwartościowa 27, 40, — matematyczna 2, — rzędu  $n$  324, — tradycyjna 2.  
**Logistyka** 2.  
**Łączność działania** 157, — iloczynu, sumy zbiorów 100.  
**Macierz** 79, 295.  
**Maksimum** 143.  
**Materiałna supozycja** 311.  
**Meta-matematyka** 266.  
**Meta-teoria** 274, 293.  
**Metoda aksjomatyczna** 52, — arytmetyzacji meta-matematyki 320, 322, — eliminacji kwantyfikatorów 298, — genetyczna 244, — tablicowa 41, — zerowo-jedynkowa 20.  
**Metodologia** 293.  
**Minimum** 143.  
**Mnogość** 244, 358.  
**Mnogości równej mocy** 359.  
**Mnożenie pierścienia** 160.  
**Moc zbioru** 177.  
**Modalne p. Zdanie.**  
**Model** 270, — semantyczny 356, — teorii 270, — wyrażenia 270.  
**Moduł grupy** 235, 253, — działania 160, — lewostronny, prawostronny 123, 160, 236.  
**Molekularna funkcja zdaniowa** 175.  
**Monotonia p. Prawa.**

**Najmniejsza wspólna wielokrotność** 144.  
**Największy wspólny dzielnik** 144.  
**Następnik** 231, — implikacji 10, — liczby kardynalnej 178.  
**Nazwa liczby** 3, — wyrażenia 291.  
**Nazwotwórcze funktory** 264.  
**Negacja** 7.  
**Nieprzeliczalna mnogość** 358.  
**Nierozróżnialność** 110.  
**Nierozstrzygalność wyrażenia** 291.  
**Nieskończone liczby kardynalne w znaczeniu Dedekinda** 181.  
**Niesprzeczność teorii** 273 (zob. też *Prawo*).  
**Niezależność aksjomatów** 279.  
**Normalna postać** 32, — własność 209, —  $y$  zbiór 209.  
**Numer ciągu wyrażań** 322, — wyrażenia 322, — znaku 321.

**Obraz zbioru** 130, — geometryczny funkcji zdaniowej 6, 342.  
**Odrywanie p. Operacja.**  
**Ograniczenie zbioru** 255.  
**Okres warunkowy** 10.  
**Operacja addytywna** 131, — dołączania dużego kwantyfikatora 55, — małego kwantyfikatora 55, — odrywania 53, — opuszczania dużego kwantyfikatora 55, — małego kwantyfikatora 55, — podstawiania 53, — uogólniania 56.  
**Opuszczanie kwantyfikatorów** 55.

**Parametry** 91.  
**Para uporządkowana** 148, 359.  
**Partito numerorum** 198.  
**Parzysta funkcja** 153.  
**Pełność reguł wnioskowania** 332.  
**Pełny system prostej teorii typów** 217.  
**Pewnik** 225, — ciągłości 241, 242, — nieskończoności 185, 245, — sprowadzalności 90, — wyróżniania 90, 246, — wyboru 246, (zob. też *Aksjomat*).  
**Pewniki** 225, — definicyjne 216, — ekstensjonalności 216, (zob. też *Aksjomaty*).  
**Pierścień** 159.  
**Pierwotne pojęcia** 223.  
**Pochłanianie p. Prawa.**  
**Podmnożenie** 245.  
**Podobieństwo relacji** 195.  
**Podporządkowanie** 126.  
**Podprzeciwieństwo** 129.  
**Podstawianie p. Operacja.**  
**Podwójne przeczenie** 26.  
**Podział** 137.  
**Poglądy na matematykę** 357.

**Pojęcia pierwotne** 223, — zależne 284.  
**Pole relacji** 130.  
**Poprzednik** 144, — implikacji 10.  
**Porządek częściowy** 144, —  $ki$  częściowe 124 (zob. też *Uporządkowanie*).  
**Postać normalna dyzjunkcyjna** 36, 294, — koniunkcyjna 36, — w rachunku kwantyfikatorów 79.  
**Pozorna zmienna** 45.  
**Półpłaszczyzna** 141.  
**Półprosta** 141.  
**Prawa de Morgana** 27, — de Morgana dla kwantyfikatorów 72, — de Morgana dla zbiorów 100, — de Morgana w algebrze Boole'a 106, — ekstensjonalności dla alternatywy i koniunkcji 29, — łączności 28, — konwersji 126, — kwadratu logicznego 129, — logiczne 51, — monotonii 145, — monotonii dla iloczynu względnego 122, — pochłaniania w algebrze Boole'a 106, — podporządkowania 126, — podprzeciwieństwa 129, — podwójnego przeczenia 26, — przeciwieństwa 129, — przemienności 28, — przedstawiania kwantyfikatorów 75, — rozdzielności 64, — rozdzielności dla iloczynu względnego 121, — tautologii 29, — tautologii dla zbiorów 101, — tautologii w algebrze Boole'a 105.  
**Prawo Claviusa** 24, — dictum de omni 59, — dodawania implikacji 29, — Duns Scotusa 25, — ekstensjonalności 111, — komutacji 61, — logiczne 20, — łączności 28, — łączności dla iloczynu względnego 121, — łączności dla iloczynu zbiorów 100, — łączności dla sumy zbiorów 100, — mnożenia implikacji 29, — niesprzeczności 273, — podwójnego dopełnienia 140, — podwójnego dopełnienia w algebrze Boole'a 105, — podwójnego przeczenia 26, — przechodności dla inkluzji 93, — przechodności dla równości 110, — przechodności dla równości zakresowej 94, — przemienności 28, — przemienności dla iloczynu zbiorów 101, — przemienności dla sumy zbiorów 100, — rozdzielności 64, rozdzielności dodawania względem mnożenia 28, — rozdzielności mnożenia względem dodawania 28, — rozdzielności dodawania względem mnożenia dla zbiorów 101, — rozdzielności mnożenia względem dodawania dla zbiorów 101, — rozkładania dużego kwantyfikatora 61, — rozkładania małego kwantyfikatora 62, — równości przedmiotów nierozróżnialnych 110,



sprzeczności 27, 273, — sylogizmu warunkowego 21, — symetrii dla równości 110, — symetrii dla równości zakresowej 95, — tożsamości dla równości 110, — tożsamości dla równości zakresowej 94, — transpozycji 22, — wyłączonego środka 26, 293, — wyłączonego środka dla zbiorów 100, — zwrotności dla inkluzji 93.

*Praprostronna* monotoniczność 159, — odwrotność 158, — rozdzielną 158.

*Predykaty* p. *Rachunek*.

*Produkt* 143.

*Program* Hilberta 266.

*Przebieganie* zbioru przez zmienną 4.

*Przechodność* inkluzji 93, — relacji 134, — równości 110.

*Przeciwzwrótność* relacji 133.

*Przeciwdziedzina* 129, — ograniczona 130.

*Przeciwieństwo* 129.

*Przeciwsymetria* p. *Antysymetria*.

*Przedmioty* o bazie  $B$  325.

*Przekształcona* p. *Relacja*.

*Przeliczalny* zbiór 357.

*Przemienność* 28, — działania 156, — grupy 159.

*Prześłanka* 126.

*Przestawianie* kwantyfikatorów 75.

*Przestrzeń*  $C^k$  342, — topologiczna 247.

*Punkty* sieciowe 48.

*Quasi-cudzoślowsy* 312.

*Rachunek* funkcyjny rozszerzony 217, — funkcyjny węższy 217, — funkcyjny węższy jednoargumentowy 217, — predykatów rozszerzony 217.

*Realizacja* stopnia  $\alpha$  347.

*Realizm* 73, 357.

*Refleksyjne* liczby kardynalne 181.

*Reguła* definiowania 250, — definiowania rozszerzona 264, — definiowania uzupełniona 263, — odrywania 11, 21, — podstawiania 21.

*Reguły* wnioskowania 52.

*Relacja* addytywna 131, — inkluzji 93, — leżenia między 87, 239, 274, — odwrotna 119, — pełna 85, 96, — przekształcona 153, — pusta 85, 95, — zawierania 93, — równości 109, — różności 112, — spójna 142.

*Relacje* 85, — antysymetryczne 134, — doskonałe 151, — izomorficzne 195, — jednorodne 130, — jedno-jednoznaczne 151, — jednoznaczne 146, — jednoznaczne względem pierwszego argumentu 155, —  $m$ -znaczne 152, —  $m$ - $n$ -znaczne 153, — na wół przeciwsymetryczne 134, —  $n$ -członowe 85, — o ograniczonej dziedzinie, przeciw-

dziedzinie 130, — obustronnie ograniczone 130, — odwrotnie jednoznaczne 150, — odwrotnie  $n$ -znaczne 153, — podobne 195, — porządkujące 142, — przechodnie 134, — przeciwsymetryczne 134, — przeciwwrotne 133, — spójne 142, — symetryczne 133, — wzajemnie jednoznaczne 151, — zwrotne 133.

*Richarda* p. *Antynomia*.

*Rozdzielność* iloczynu względnego 121, — lewostronna, prawostronna 158.

*Rozkładanie* kwantyfikatorów 61, 62.

*Rozstrzygalność* teorii 299, 303.

*Rozumowanie* dedukcyjne 1, — finitystyczne 278, — nieefektywne 221, — niekonstruktywne 221.

*Równokształtność* 19, — relacji 194.

*Równoliczność* zbiorów 165.

*Równość* 109, — definicyjna 250, — mocy 359, — zakresowa 94.

*Równości* definicyjne 91.

*Równoważność* 12, — inferencyjna 31, — układów aksjomatów 279.

*Równoważności* 136.

*Różnica* symetryczna 101.

*Różność* 112, — zakresowa 95.

*Russella* p. *Antynomia*.

*Rząd* teorii 224, — typu 205.

*Rzutoma* geometria 240.

*Scotusa* p. *Prawo*.

*Schematy* tautologii 58.

*Semantyczna* antynomia 315, —  $y$  model 356.

*Semantyka* 309.

*Sensowne* p. *Wyrażenie*.

*Składnia* 309.

*Składniki* alternatywy 9.

*Skolema-Löwenheima* twierdzenie 356.

*Stomnikowe* p. *Uporządkowanie*.

*Spełnianie* funkcji zdaniowej 5, 326-330.

*Spójność* relacji 142.

*Spromadzalność* p. *Pewnik*.

*Sprowadzenie do niedorzeczności* 22.

*Sprzeczność* p. *Prawo*.

*Stale* specyficzne 223.

*Stosunek* 85.

*Struktura* 145, — zupełna 145.

*Suma* logiczna 9, — relacji 96, — uogólniona 47, — względna 124, — zbiorów 96.

*Supozycja* formalna, materialna 311.

*Sylogistyka* 124.

*Sylogizmy* I figury 126, — II, III i IV figury 127.

*Symetria* relacji 133, — relacji trójczłonowych 154, — równości 110, — równości zakresowej 95.

*Systematyczna* wieloznaczność 219.

*Tautologie* rachunku kwantyfikatorów 51, — rachunku zdań 20.

*Teoria* elementarna grup 234, — elementarna grup przemiennych uporządkowanych 237, — elementarna liczb rzeczywistych 237, — elementarna nierówności 233, — elementarna relacji leżenia między 239, — kategoriyczna 305, — liczb naturalnych 243, — mnogości 244, — niesprzeczna 273, — pełna liczb rzeczywistych 241, — przestrzeni topologicznych 247, — sformalizowana 227, — typów konstruktywnych 317, — prosta typów 214, — rozgałęziona typów 214, — rozstrzygalna 299, — zupełna 291.

*Teorie* elementarne 224, — rzędu nieskończonego 224.

*Termin* mniejszy, średni, większy 127.

*Teza* 11, 31.

*Topologiczna* przestrzeń 247.

*Tożsamość* 109 (zob. też *Prawo*).

*Transpozycja* p. *Prawo*.

*Tryb* 127, —  $y$  sylogizmów 129.

*Twierdzenie* 226, 227, — Cantora 347, — Gödla 371, — o dedukcji 267, — drugie o eliminowaniu definicji 262, — pierwsze o eliminowaniu definicji 257, — Skolema-Löwenheima 356, — Tarskiego 366.

*Typ* 88, — logiczny 204, — o bazie  $B$  325, — porządkowy 196, — stałych specyficznych 223, — zerowy 205.

*Układy* aksjomatów niezależne, równoważne 279.

*Uogólnianie* 56.

*Uogólniona* alternatywa, koniunkcja 47.

*Uporządkowana* grupa 159, — para 358, —  $e$  trójki i czwórki 148.

*Uporządkowanie* zbioru 143, — dobre 144, — leksykograficzne (słownikowe) 303, 318.

*Walcowanie* 9.

*Wartość* funkcji 148, — logiczna 13.

*Warunek* Cauchy'ego 49, — dostateczny, konieczny 13.

*Wieloznaczność* systematyczna 219.

*Własność* 83, 244.

*Własności* normalne 209.

*Wnętrze* zbioru 255.

*Wniosek* 127.

*Wolna* zmienna 45.

*Współrzędne* 167.

*Wykonalność* działania 156.

*Wybór* p. *Pewnik*.

*Wykres* p. *Obraz*.

*Wynik* działania 156, — złożenia 234, — złożenia relacji 120.

*Wynikanie* p. *Implikacja*.

*Wyrażenie* dwoiste 37, — nierozstrzygalne 291, — o postaci normalnej 32, — sensowne 18.

*Wyóżnianie* p. *Pewnik*.

*Zakresy* pojęć 175.

*Zależność* pojęć pierwotnych 284.

*Założenie* 11.

*Zamknięcie* zbioru 247, 343.

*Zasada* abstrakcji 138, — czystości typów 214, — dwoistości 107, — indukcji 138.

*Zasięg* kwantyfikatora 45.

*Zawieranie* p. *Inkluzja*.

*Zbiory* normalne 209.

*Zbiór* 83, — argumentów 147, — Cantora 341, — definiowalny 364, — dziedziczny 182, — jednostkowy 84, — liczb naturalnych 253, — liczb wymiernych 254, — normalny 209, 213, — pełny 85, 96, — przeliczalny 357, — pusty 84, 95, — skończony 186, — uporządkowany 143, — wartości 147, — zamknięty 247, 370.

*Zdanie* analityczne 173, — egzystencjalne 59, — modalne 41, — ogólne, ogólnoprzeczące, ogólnotwierdzące, szczegółowo-przeczące, szczegółowotwierdzące 125.

*Zdaniotwórcze* funktory 7.

*Zdaniowa* p. *Funkcja*.

*Zero* p. *Liczba*.

*Zero-jedynkowa* p. *Metoda*.

*Złożenie* 234, — relacji 120.

*Zmienne* 4, — istotne, pozorne, wolne 45, — zdaniowe 7, — związane 45.

*Znak* abstrakcji 91.

*Zupełność* teorii 291.

*Związana* zmienna 45.

*Zwrótność* 93.

## SKOROWIDZ NAZWISK

Liczby oznaczają stronicę.

Ajdukiewicz 206.  
 Arystoteles 2, 124, 125.  
 Bachmann 272.  
 Beltrami 276.  
 Bernays 246, 256, 278, 279, 301, 309, 355, 358.  
 Berry 315.  
 Beth 219.  
 Bielecki 248.  
 Birkhoff 25, 41, 105, 145.  
 Black 221, 331.  
 Blake 50, 347.  
 Boczwar 211, 213.  
 Boole 28, 102, 374.  
 Brouwer 73.  
 Burali-Forti 208.  
 Byrne 107.  
 Cantor 140, 341, 347.  
 Carnap 15, 272.  
 Church 149, 304.  
 Chwistek 214, 317.  
 Clavius 24, 25, 33.  
 Couturat 25, 29.  
 Curry 18.  
 Dedekind 181.  
 De Morgan 27, 28, 74, 100, 132.  
 Dirichlet 147.  
 Dubreil 141, 146.  
 Duns-Scotus 25, 26, 95.  
 Euklides 230, 231, 276.  
 Euler 5, 147, 198.  
 Fraenkel 213, 221, 249.  
 Frege 40, 136, 175, 176, 177, 184, 185, 186, 208, 229, 251, 257, 313, 315.  
 Gentzen 219.  
 Gerhardt 110.  
 Gödel 51, 221, 279, 299, 301, 323, 345, 352, 356, 365, 369, 371-373.  
 Grelling 320.  
 Hardy 198.  
 Herbrand 228, 267, 353.  
 Hilbert 141, 230, 256, 266, 278, 279, 282, 283, 301, 309, 313, 355.  
 Huntington 107.  
 Hurwitz 199.  
 Janiszewski 357.  
 Jaśkowski 59, 274.  
 Jordan 231.  
 Kant 184.  
 Kleene 301.  
 Knaster 211.  
 Kotarbiński 129.  
 König 153.  
 Kronecker 172.  
 Kuratowski 48, 248, 255.  
 Lagrange 147.  
 Landau 139, 183.  
 Langford 12, 41, 298.  
 Leibniz 57, 109, 110, 112, 229, 257, 372.  
 Leśniewski 37, 85, 206, 214, 251.  
 Lewis 12, 41, 298.  
 Lindenbaum 200.  
 Löwenheim 356, 357.  
 Łukasiewicz 16, 18, 21, 40, 41, 42.  
 Mc Kinsey 124.  
 Menger 282.  
 Nelson 320.  
 v. Neumann 41.  
 Padoa 288.  
 Peano 13, 18, 89, 147, 183, 250.  
 Peirce 47, 124.  
 Platon 231.  
 Poincaré 25, 26, 184, 199, 276, 277.  
 Post 17, 40, 373.  
 Pressburger 18.  
 Quine 4, 213, 312.

Ramanujan 198.  
 Rasiowa 37.  
 Richard 318.  
 Robinsohn 112.  
 Rosser 357.  
 Russell 21, 25, 40, 90, 91, 132, 146, 153, 175, 208, 213, 214, 247, 271, 272, 315.  
 Schönfinkel 355.  
 Schröder 48, 124.  
 Scholz 21.  
 Shannon 104.  
 Sheffer 16.  
 Sierpiński 17, 140, 143, 153, 159, 160, 161, 186, 342, 347.  
 Skolem 298, 356, 359, 360.  
 Stone 102, 161.  
 Szestakow 104.  
 Szpilrajn-Marczewski 146.  
 Szmielew 304.  
 Śleszyński 129, 314.  
 Tarski 41, 48, 124, 159, 200, 217, 219, 223, 233, 237, 241, 267, 283, 288, 291, 298, 299, 304, 308, 323, 327, 331, 360, 362, 364, 365.  
 Van der Waerden 198.  
 Veblen 305.  
 Wang 248.  
 Weyl 41, 48.  
 Wilkosz 133.  
 Whitehead 21, 40, 90, 132, 146, 153, 213, 240, 241, 263, 315.  
 Zacharias 239.  
 Zawirski 41, 73.  
 Zermelo 90, 244, 246.  
 Żyliński 17.

## SPIS RZECZY

PRZEDMOWA . . . . .	Str. III
ERRATA . . . . .	VII

## CZĘŚĆ PIERWSZA

## ROZDZIAŁ I. WIADOMOŚCI WSTĘPNE.

§ 1. Wstęp . . . . .	1
§ 2. Zmienne. Funkcje zdaniowe . . . . .	3

## ROZDZIAŁ II. RACHUNEK ZDAŃ.

§ 1. Negacja . . . . .	7
§ 2. Koniunkcja . . . . .	8
§ 3. Alternatywa . . . . .	9
§ 4. Implikacja . . . . .	10
§ 5. Równoważność . . . . .	12
§ 6. Uwaga, dotycząca symboliki . . . . .	13
§ 7. Dalsze funktory zdaniotwórcze. Związki między funktorami . . . . .	14
§ 8. Tautologie rachunku zdań . . . . .	18
§ 9. Niektóre ważne tautologie . . . . .	21
§ 10. Tautologie algebry logicznej . . . . .	28
§ 11. Postacie normalne . . . . .	31
§ 12. Dwoistość . . . . .	37
§ 15. O aksjomatycznym ujęciu rachunku zdań i logikach wielowartościowych . . . . .	39

## ROZDZIAŁ III. KWANTYFIKATORY.

§ 1. Określenia i przykłady . . . . .	44
§ 2. Zastosowanie kwantyfikatorów do zapisywania twierdzeń matematycznych. Kwantyfikatory o ograniczonym zakresie . . . . .	49
§ 3. Reguły wnioskowania. Tautologie . . . . .	51
§ 4. Przykłady tautologii . . . . .	58
§ 5. Tautologie dotyczące rozdzielności . . . . .	64
§ 6. Zastosowania do dowodów matematycznych . . . . .	68
§ 7. Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów. Prawa przedstawiania kwantyfikatorów . . . . .	72
§ 8. Postacie normalne . . . . .	79

## CZĘŚĆ DRUGA

## ROZDZIAŁ IV. ALGEBRA ZBIORÓW I RELACJI.

§ 1. Zbiory i relacje . . . . .	83
§ 2. Funkcje zdaniowe a zbiory i relacje. Symbol abstrakcji . . . . .	88
§ 3. Inkluzja, równość zakresowa. Działania na zbiorach i relacjach . . . . .	93
§ 4. Związek między rachunkiem zbiorów i relacji a rachunkiem zdań . . . . .	97
§ 5. Algebra Boole'a . . . . .	102

## ROZDZIAŁ V. RÓWNOŚĆ.

§ 1. Definicja równości . . . . .	109
§ 2. Równość zbiorów i relacji. Pewnik ekstensjonalności . . . . .	112
§ 3. Eliminacja symbolów abstrakcji . . . . .	114

## ROZDZIAŁ VI. TEORIA RELACJI.

§ 1. Relacja odwrotna . . . . .	119
§ 2. Iloczyn względny . . . . .	120
§ 3. Sylogistyka Arystotelesa . . . . .	124
§ 4. Dziedzina i przeciwdziedzina. Relacje ograniczone. Obrazy . . . . .	129
§ 5. Relacje zwrotne, symetryczne, przechodnie oraz pokrewne typy relacji . . . . .	153
§ 6. Równoważności . . . . .	156
§ 7. Relacje spójne, porządkujące i porządki częściowe . . . . .	142
§ 8. Relacje jednoznaczne, odwrotnie jednoznaczne i doskonałe . . . . .	146
§ 9. Relacje wielozłożowe. Działania . . . . .	153
§ 10. Dodatek. Dowód wzorów $(46_1)$ , $(46_2)$ i $(46_3)$ . . . . .	161

## ROZDZIAŁ VII. LICZBY NATURALNE. IZOMORFIZM.

§ 1. Równoliczność zbiorów . . . . .	165
§ 2. Liczby kardynalne . . . . .	169
§ 3. Czym są liczby naturalne? . . . . .	172
§ 4. Zero i następnik . . . . .	177
§ 5. Liczby naturalne. Pewnik nieskończoności . . . . .	181
§ 6. Definicje indukcyjne . . . . .	187
§ 7. Izomorfizm relacji. Liczby relatywne. Homomorfizm . . . . .	194
§ 8. Zasadnicze twierdzenie o izomorfizmie . . . . .	199

## ROZDZIAŁ VIII. TEORIA TYPÓW LOGICZNYCH.

§ 1. Systematyka typów logicznych . . . . .	204
§ 2. Antynomie . . . . .	207
§ 3. Prosta teoria typów . . . . .	213

## CZĘŚĆ TRZECIA

## ROZDZIAŁ IX. SFORMALIZOWANE TEORIE MATEMATYCZNE.

§ 1. Ogólny opis teorii sformalizowanych . . . . .	222
§ 2. Porównanie teorii sformalizowanych i teorii ujętych aksjomatycznie. Uwagi historyczne . . . . .	229

	Str.
§ 3. Przykłady sformalizowanych teorii elementarnych . . . . .	232
§ 4. Przykłady teorii nie-elementarnych . . . . .	242
<b>ROZDZIAŁ X. DEFINICJE.</b>	
§ 1. Reguła definiowania . . . . .	248
§ 2. Przykłady definicji . . . . .	253
§ 3. Twierdzenia o eliminowaniu definicji . . . . .	257
§ 4. Uzupełnienia i rozszerzenia reguły definiowania . . . . .	263
<b>ROZDZIAŁ XI. ZAGADNIENIA METODOLOGICZNE.</b>	
§ 1. Twierdzenie o dedukcji . . . . .	267
§ 2. Modele teorii sformalizowanych . . . . .	270
§ 3. niesprzeczność . . . . .	275
§ 4. Uwaga o tzw. absolutnych dowodach niesprzeczności . . . . .	277
§ 5. Niezależność aksjomatów . . . . .	279
§ 6. Niezależność pojęć pierwotnych . . . . .	283
§ 7. Zupełność . . . . .	291
§ 8. Rozstrzygalność . . . . .	299
§ 9. Kategoryczność . . . . .	304
<b>ROZDZIAŁ XII. O META-MATEMATYCE.</b>	
§ 1. Meta-matematyka jako odrębna nauka dedukcyjna . . . . .	308
§ 2. Wyrażenia i nazwy wyrażeń . . . . .	310
§ 3. Antynomie semantyczne . . . . .	315
§ 4. Metoda arytmetyzacji . . . . .	320
<b>ROZDZIAŁ XIII. ZAGADNIENIE PEŁNOŚCI REGUŁ WNIOSKOWANIA.</b>	
§ 1. System $L_n$ . . . . .	324
§ 2. Pojęcie spełniania . . . . .	326
§ 3. Zdania prawdziwe, fałszywe i spełnialne . . . . .	330
§ 4. Twierdzenie o pełności dla funkcji zdaniowych bez kwantyfikatorów . . . . .	332
§ 5. Prawdziwość tautologii logicznych . . . . .	336
§ 6. Geometryczna interpretacja pojęcia spełniania w węższym rachunku funkcyjnym . . . . .	341
§ 7. Twierdzenie Gödla o pełności węższego rachunku funkcyjnego . . . . .	345
§ 8. Twierdzenie Skolema-Löwenheima . . . . .	356
<b>ROZDZIAŁ XIV. TWIERDZENIE GÖDLA.</b>	
§ 1. Twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności pojęcia spełniania . . . . .	362
§ 2. Porównanie twierdzenia Tarskiego z antynomią Richarda . . . . .	367
§ 3. Twierdzenie Gödla o niepełności bogatszych systemów logicznych. Zakończenie . . . . .	369
SKOROWIDZ ZNAKÓW . . . . .	376
SKOROWIDZ NAZW . . . . .	379
SKOROWIDZ NAZWISK . . . . .	384

