CZĘŚĆ TRZECIA

ROZDZIAŁ IX

SFORMALIZOWANE TEORIE MATEMATYCZNE

§ 1. Ogólny opis teorii sformalizowanych. W Rozdziałach IV-VII badaliśmy, czy pojęcia matematyczne dają się zdefiniować za pomocą pojęć logicznych. Obecnie pozostawimy to zagadnienie na uboczu i będziemy się zajmować teoriami, które badają pojęcia matematyczne same dla siebie, nie troszcząc się o to, czy można je sprowadzić do pojęć logicznych.

Opiszemy przede wszystkim strukturę wyrażeń, występujących w takich teoriach; następnie rozpatrzymy, które z tych wyrażeń uznawane są za prawdziwe i w jaki sposób uzasadnia się ich prawdziwość.

Nie popełniając żadnej istotnej nieścisłości, możemy powiedzieć, że każda teoria matematyczna bada pewne przedmioty, zbiory i relacje. Np. w geometrii elementarnej badamy zbiór punktów, zbiór prostych oraz relacje zachodzące między elementami tych zbiorów, a wyrażające się funkcjami zdaniowymi: *punkt x leży na prostej y, punkt x jest tak odległy od y jak z od t* i niektórymi innymi.

Podobnie w arytmetyce badamy liczby 0, 1, 2, i t. d., zbiór złożony ze wszystkich tych liczb oraz pewne działania (relacje trójczłonowe), określone i wykonalne w tym zbiorze. W topologii badamy zbiór E pewnych przedmiotów (nazywanych punktami) i relację typu $((*),*)$ wyrażającą się funkcją zdaniową: *zbiór X (zawarty w E) jest otoczeniem punktu p.* Przykładów takich można by przytoczyć bardzo dużo (zob. dalej, § 3 i § 4).

Niektóre spośród przedmiotów, zbiorów i relacji, badanych w danej teorii, mogą być definiowane za pomocą poprzednio

zdefiniowanych; jest jednak jasne, że procesu definiowania jednych pojęć przez drugie nie można kontynuować bez końca. Pewne zatem pojęcia muszą być pozostawione bez definicji.

Pojęcia te nazywamy *pojęciami pierwotnymi* teorii.

Zakładamy, że są to przedmioty, zbiory i relacje pewnego typu. Każde więc pojęcie pierwotne ma zupełnie określony typ logiczny.

Wynika stąd, że w wyrażeniach każdej teorii matematycznej występują nazwy pojęć pierwotnych.

Nazywamy je *stałymi specyficznymi* tej teorii.

Dla skrótu mówić będziemy nieraz o *typie logicznym stałych specyficznych* zamiast o typie logicznym pojęć, których te stałe są nazwami.

Pierwszym więc krokiem przy budowaniu teorii matematycznej jest wybór stałych specyficznych i wskazanie typu logicznego każdej z nich.

Np. stałymi specyficznymi arytmetyki są m. in. znaki $<, +$ i $\cdot$. Pierwszy z nich ma typ $(*,*)$, drugi i trzeci — typ $(*,*,*)$. Oczywiście mamy tu na myśli arytmetykę pojmowaną jako odrębna teoria matematyczna, a nie jako fragment logiki (por. Rozdział VII, § 5). W arytmetyce pojmowanej jako fragment logiki znaki $<, +$ i $\cdot$ nie są stałymi specyficznymi, lecz są nazwami pewnych pojęć czysto logicznych, których typ jest różny od $(*,*)$ i $(*,*,*)$ [1].

Poza stałymi specyficznymi posługujemy się w każdej teorii matematycznej wyrażeniami czysto logicznymi. W wyrażeniach teorii występują więc funktory zdaniotwórcze, kwantyfikatory oraz zmienne różnych typów.

Na ogół zasób pojęć logicznych, potrzebnych do ugruntowania teorii matematycznej, stanowi pewien fragment pełnego systemu prostej teorii typów, znanego nam z Rozdziału VIII (§ 3). Jest rzeczą wskazaną rozklasyfikować teorie matematyczne stosownie do bogactwa występujących w nich pojęć logicznych [2].

---

[1] Większość przyjętych symbolik logicznych wprowadza różne oznaczenia dla analogicznych pojęć, należących do różnych typów logicznych. Tak np. można posługiwać się znakiem ϵ ze wskaźnikami. Wtedy stałe logiczne, występujące w aksjomatyce teorii, od razu wyznaczają typ logiczny stałych specyficznych.

[2] Por. A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, Nr 34 (1933), § 4, str. 66.

Będziemy mówili, że teoria ma *rząd* co najwyżej n, jeśli w jej wyrażeniach występują tylko zmienne rzędu co najwyżej n.

Teorie, w których występują zmienne dowolnie wysokich rzędów, nazywają się teoriami *rzędu nieskończonego*.

Teorie rzędu 0 nazywamy *elementarnymi*.

Zasób środków logicznych, na jakich opiera się teoria elementarna, pokrywa się w zasadzie z węższym rachunkiem funkcyjnym (por. Rozdział VIII, § 3, str. 217). Jak zobaczymy na przykładach w § 3 i § 4, teorie matematyczne mają na ogół rząd bardzo niski.

Matematyk budujący teorię powinien z góry określić jej rząd; przy tym nie jest on krępowany żadnymi ograniczeniami przy wyborze takiego lub innego rzędu. Celowość lub osobiste upodobania twórcy teorii są tutaj jedynymi kryteriami.

Funkcje zdaniowe, występujące w teorii rzędu n, są zbudowane za pomocą funktorów zdaniotwórczych i kwantyfikatorów z wyrażeń postaci

$$x^{(c_1, c_2, \ldots, c_k)}(y^{c_1}, z^{c_2}, \ldots, u^{c_k}),$$

gdzie symbol $x^{(c_1, c_2, \ldots, c_k)}$ może być zastąpiony jakąkolwiek zmienną typu $(c_1, \ldots, c_k)$ lub stałą specyficzną tego typu, symbole zaś $y^{c_1}, z^{c_2}, \ldots, u^{c_k}$ — zmiennymi lub stałymi specyficznymi typów $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Rzędy typów $c_1, c_2, \ldots, c_k$ i $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ nie przekraczają przy tym n. Zamiast $x^{(c)}(y^c)$ piszemy często $y^c \in x^{(c)}$.

Ustaliwszy w ten sposób zasób wyrażeń, przejdźmy do opisu zdań prawdziwych.

Przede wszystkim przyjmujemy w każdej teorii za prawdziwe wszystkie tautologie logiczne, które dają się napisać przy pomocy tych środków, jakimi w tej teorii rozporządzamy.

Łatwo można się zorientować, że prócz takich zdań musimy jeszcze przyjąć za prawdziwe inne zdania. Wiemy bowiem, że tautologie logiczne są prawdziwe bez względu na znaczenie występujących w nich wyrażeń. Jeśli więc np. $\Phi(R)$ jest tautologią, to podstawiając za literę R nazwę jakiejkolwiek relacji dwuczłonowej, np. symbol $<$ albo $=$, otrzymamy zdanie prawdziwe. Tautologie logiczne nie pozwalają więc odróżnić np. relacji mniejszości od relacji równości. Nie wystarcza użyć jako stałej specyficznej znaku $<$, aby być pewnym, że teoria bada relację mniejszości; trzeba przyjąć za prawdziwe pewne zdania, które zapewnią nam to, że relacja oznaczona znakiem $<$ jest rzeczywiście relacją mniejszości lub przynajmniej ma pewne cechy, odróżniające ją od innych relacji dwuczłonowych.

Z tych uwag wynika, że w każdej teorii matematycznej uznane są za prawdziwe pewne zdania, nie będące tautologiami. Podobnie jak nie wszystkie pojęcia (pozalogiczne) mogą być w niej zdefiniowane, tak nie wszystkie spośród omawianych zdań mogą być w niej dowiedzione. Każda teoria przyjmuje zatem bez dowodu pewną ilość zdań, nie będących tautologiami.

Zdania te noszą nazwę *pewników* lub *aksjomatów* teorii.

Jest jasne, że każda stała specyficzna musi występować co najmniej w jednym aksjomacie.

Będziemy rozważali tylko takie teorie, w których występuje pojęcie równości między indywiduami typu *. To założenie jest automatycznie spełnione w teoriach nieelementarnych, wtedy bowiem relacja równości daje się zdefiniować i z tej definicji dają się wyprowadzić prawa zwrotności, symetrii, przechodniości oraz prawo ekstensjonalności

$$(x = y) \to [\Phi(x, u, \ldots, v) \equiv \Phi(y, u, \ldots, v)]$$

dla każdej funkcji zdaniowej Φ (por. Rozdział V, § 1, str. 109-111).

Jeśli teoria jest elementarna, to relacja równości niekoniecznie daje się zdefiniować przy pomocy innych pojęć. W takich razach zakładamy, że wśród stałych specyficznych teorii występują stałe $=$ i $\neq$ typu $(*, *)$, wśród aksjomatów zaś występują zdania:

(1) $$\prod_x (x = x), \quad \prod_{xy} [(x = y) \equiv (y = x)], \quad \prod_{xyz} [(x = y) \cdot (y = z) \to (x = z)],$$

(2) $$\prod_{u, \ldots, v} \prod_{xy} \{(x = y) \to [\Phi(x, u, \ldots, v) \equiv \Phi(y, u, \ldots, v)]\},$$

$$\prod_{xy} [(x \neq y) \equiv (x = y)'].$$

Prawa (1) i (2), zwane *aksjomatami równości*, nie są w teoriach elementarnych tautologiami logicznymi. Dowody tych praw, podane w Rozdziale V, § 1, str. 110-111, nie dają się powtórzyć w ramach teorii elementarnej, gdyż w takiej teorii nie rozporządzamy zmiennymi typu (*), z których czyniliśmy użytek w Rozdziale V.

Zauważmy, że wystarczyłoby w zupełności, gdybyśmy przyjęli pewnik ekstensjonalności (2) tylko dla funkcji zdaniowych postaci

$$M(x, u, \ldots, v),$$

gdzie M jest stałą specyficzną. Wszystkie pozostałe przypadki prawa (2) dają się wówczas udowodnić (p. dalej str. 228, ćwiczenie 2).

Relację równości między przedmiotami typów różnych od * będziemy pojmować jako równość zakresową (por. Rozdział V, § 2, str. 112). Wspomnieliśmy już (p. str. 224), że w teoriach rzędu n przyjmujemy pewnik ekstensjonalności (Rozdział V, § 2, str. 113 i Rozdział VIII, § 3, str. 215) dla wszystkich typów rzędu mniejszego od n. Dla przedmiotów tych typów relacja równości zakresowej pokrywa się więc z relacją identyczności zdefiniowaną przez zasadę *identitas indiscernibilium* (Rozdział V, § 1, str. 109). Ta definicja ani pewnik ekstensjonalności nie dają się w teorii rzędu n wypowiedzieć dla przedmiotów, których typy są rzędu n.

Postać aksjomatów nie podlega żadnym ograniczeniom, jak również ich ilość. Zazwyczaj liczba aksjomatów jest niewielka, znamy jednak teorie, w których liczba aksjomatów jest nieskończona.

Nie zmniejszając ogólności, możemy przyjąć, że w żadnym z aksjomatów nie występuje żadna zmienna wolna (p. dalej str. 228, ćwiczenie 1).

Z aksjomatów i tautologii logicznych wyprowadza się twierdzenia, posługując się regułami wnioskowania, znanymi nam z Rozdziału III (§ 3, str. 53-56). Reguła podstawiania musi być przy tym uzupełniona w następujący sposób:

Za zmienną wolną, występującą w funkcji zdaniowej już uznanej za prawdziwą, wolno podstawiać nie tylko inne zmienne tego samego typu (z zachowaniem warunków omówionych w Rozdziale III, § 3, str. 54), *lecz także każdą stałą specyficzną tego samego typu.*

Stosując reguły wnioskowania do wyrażeń, które powstają przez podstawienie z tautologii rachunku zdań lub aksjomatów definicyjnego i ekstensjonalności, możemy otrzymać wszelkie tautologie logiczne (zgodnie z definicją tautologii, podaną w Rozdziale III, § 3, str. 56). Wnosimy stąd, że definicję pojęcia *twierdzenie teorii matematycznej* można sformułować jak następuje:

Definicja. Wyrażenie T nazywamy twierdzeniem teorii matematycznej $\boldsymbol{T}$, jeśli istnieje skończony ciąg funkcji zdaniowych tej teorii

$$T_0, T_1, \ldots, T_n, \tag{3}$$

który czyni zadość następującym dwóm warunkom:

1^0 *T_n jest identyczne z T;*

2^0 *Dla $i \leqslant n$ wyrażenie T_i jest albo aksjomatem teorii $\boldsymbol{T}$, albo powstaje z tautologii rachunku zdań przez podstawienie za zmienne zdaniowe funkcji zdaniowych teorii $\boldsymbol{T}$, albo jest podstawieniem aksjomatu definicyjnego lub aksjomatu ekstensjonalności, albo wreszcie T_i powstaje z jednej lub dwu funkcji zdaniowych T_j, T_k, poprzedzających T_i w ciągu* (3), *przez jedną z operacji: podstawianie, odrywanie, opuszczanie kwantyfikatora (dużego lub małego), dołączanie kwantyfikatora (dużego lub małego), uogólnianie.*

Ciąg (3) nazywamy *sformalizowanym dowodem* wyrażenia T.

Pierwszy wyraz T_0 tego ciągu jest oczywiście albo aksjomatem teorii $\boldsymbol{T}$, albo podstawieniem tautologii rachunku zdań, albo wreszcie podstawieniem aksjomatu definicyjnego lub aksjomatu ekstensjonalności.

Modyfikując nieco dotychczasowy sens symbolu $\vdash$, będziemy pisać $\vdash T$ zamiast: *T jest twierdzeniem.* Oczywiście sens zdania $\vdash T$ jest zależny od teorii $\boldsymbol{T}$, do której odnoszą się rozważania; ściślejszym byłby więc symbol $\vdash T(\boldsymbol{T})$, w którym ta zależność jest zaznaczona.

Opis teorii matematycznych został tym samym zakończony: wiemy, jaki jest zasób wyrażeń, którymi w teoriach matematycznych wysławiamy twierdzenia; wiemy, które z tych wyrażeń przyjęte są za prawdziwe bez dowodu, i wiemy wreszcie, w jaki sposób można ze zdań już uznanych za prawdziwe wyprowadzać twierdzenia.

Teorie matematyczne, zbudowane w opisany tu sposób, nazywamy *teoriami sformalizowanymi.*

Z pojęciem teorii naukowej i w szczególności teorii matematycznej wiążemy zazwyczaj dość nieokreślone wyobrażenia pewnego zespołu rozumowań, metod i wyników. Natomiast żadne podobne wyobrażenie nie wiąże się z teoriami sformalizowanymi.

Teoria taka jest w zupełności określona przez dwa zbiory: zbiór wyrażeń i zbiór twierdzeń. Pierwszy z nich jest wyznaczony przez podanie rzędu teorii, wyszczególnienie stałych specyficznych i wskazanie typu każdej stałej. Drugi zbiór jest określony przez podanie aksjomatów i wyszczególnienie reguł wnioskowania.

Ograniczyliśmy się tutaj do opisu teorii sformalizowanych, opierających się na poznanym w Rozdziale VIII pełnym systemie prostej teorii typów. Opisane teorie stanowią pewne rozszerzenie systemu prostej teorii typów lub pewnego jego fragmentu — rozszerzenie, polegające na przyjęciu stałych specyficznych (które mogą być podstawiane za zmienne tego samego typu, lecz za które nic podstawiać nie wolno) oraz aksjomatów, charakteryzujących sens tych stałych.

Istnieją również teorie sformalizowane, nie związane tak silnie z pełnym systemem prostej teorii typów. W szczególności, wprowadza się nieraz do ich wyrażeń symbole, służące do oznaczania wartości funkcji. Symbole takie są bardzo dogodne i to nie tylko w teoriach sformalizowanych. Np. w trygonometrii używamy stale symboli $\sin x$, $\operatorname{arc\,sin} x$ i t. p.

Symbole te dają się jednak zawsze wyeliminować. Jeśli bowiem symbol $f(x)$ oznacza wartość pewnej funkcji, a Φ jest dowolną funkcją zdaniową, to wzór $\Phi(f(x))$ znaczy to samo, co wzór

$$y R x \to \Phi(y),$$

gdzie $R = (\hat{y}, \hat{x})[y = f(x)]$. Dzięki temu każdą myśl napisaną przy pomocy symbolu $f(x)$ można też napisać, nie używając innych stałych specyficznych prócz nazw przedmiotów, zbiorów i relacyj [1]).

ĆWICZENIA. 1. Wykazać, że jeśli zdanie $\Pi_x \Phi(x)$ jest aksjomatem, to funkcja zdaniowa $\Phi(x)$ jest twierdzeniem; jeśli zaś $\Phi(x)$ jest aksjomatem, to $\Pi_x \Phi(x)$ jest twierdzeniem.

Wsk.: Przy dowodzie pierwszego twierdzenia powołać się na tautologię (1) z Rozdziału III, § 4 str. 58. W dowodzie drugiego twierdzenia zastosować regułę uogólniania.

2. Wykazać, że jeśli (2) jest przyjęte za aksjomat dla dwu funkcji zdaniowych Φ i Ψ, to zdanie, powstające z (2) przez zastąpienie Φ którąkolwiek z funkcji zdaniowych:

$$\Phi', \quad \Phi + \Psi, \quad \Phi \cdot \Psi, \quad \Phi \to \Psi, \quad \Phi \equiv \Psi, \quad \Pi_u \Phi, \quad \Sigma_u \Phi,$$

jest twierdzeniem.

[1]) Podany opis teorii sformalizowanych wzoruje się na pracy J. Herbrand, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, Nr 33 (1930), Rozdział III, str. 54 i następne.

§ 2. Porównanie teorii sformalizowanych i teorii ujętych aksjomatycznie. Uwagi historyczne. Budowanie teorii matematycznych w postaci sformalizowanej jest bardzo niedawnym osiągnięciem w dziedzinie metodologii matematyki [1]). Poprzednio teorie matematyczne bądź opierano wyłącznie na intuicji, bądź ujmowano w postaci aksjomatycznej.

W pierwszym wypadku, tworzący lub też studiujący teorię wiązał z pojęciami matematycznymi, badanymi w tej teorii, pewne wyobrażenia i przyjmował pewne podstawowe fakty, dotyczące tych pojęć, za oczywiste. W dalszym ciągu teorii posługiwał się logiką intuicyjną i wynikami, osiągniętymi w innych teoriach. Granica między tym, co jeszcze jest oczywiste a co już wymaga dowodu, nie była przy tym nakreślona. Matematyka w tym stadium rozwoju była więc właściwie nauką na wpół empiryczną, częściowo opartą na wyobrażeniach, a częściowo na logice.

Tak np. we wczesnym stadium rozwoju geometrii punkty wyobrażano sobie prawdopodobnie jako bardzo małe obszary przestrzeni, proste — jako bardzo cienkie i długie linie. Z tych wyobrażeń czerpano podstawowe wiadomości o prostych i punktach i na tych dopiero wiadomościach budowano dalszą wiedzę geometryczną.

Jest jasne, że przez takie stadium początkowe przechodzą teorie matematyczne wówczas, gdy są one dopiero w trakcie zbierania materiału: odkrycie nowego faktu znaczy więcej niż sposób, w jaki został on uzasadniony, pytanie: *jak jest?* wyprzedza pytanie: *dlaczego tak jest?*

Dla logików to stadium w rozwoju teorii nie jest interesujące (może być natomiast ciekawym tematem badań dla psychologów, interesujących się mechanizmem twórczości naukowej).

Wielki postęp w stosunku do tego surowego jeszcze stadium stanowią teorie zbudowane aksjomatycznie. W takich teoriach dokonuje się wyboru pojęć pierwotnych i aksjomatów tak, jak to opisaliśmy przy omawianiu teorii sformalizowanych. Teoria zbudowana aksjomatycznie nie ma więc na celu badania konkretnych zbiorów i relacji w oparciu o dane, czerpane z intuicji. Stawia ona sobie za zadanie studium takich przedmiotów, zbio-

[1]) Jak wspominaliśmy w Rozdziale III (zob. § 3, str. 57, odsyłacz), myśl zastąpienia rozumowań rachunkiem powziął pierwszy Leibniz. Pierwszy system sformalizowany stworzył Frege (zob. str. 175, odsyłacz).

rów i relacji, które spełniają aksjomaty; przy tym jest dla niej obojętne, czym właściwie są te przedmioty, zbiory i relacje.

Tak np. w geometrii zbudowanej w sposób aksjomatyczny jest obojętne, czym są punkty i proste, ważne zaś jest to, co się o nich zakłada, czyli że są to przedmioty, spełniające układ aksjomatów [1]).

Jest to zatem stanowisko znacznie bardziej abstrakcyjne, niż w pierwotnym, na wpół empirycznym stadium. Dzięki tej abstrakcyjności zyskujemy sprecyzowanie założeń: własności pojęć pierwotnych nie są uzasadnione złudną nieraz oczywistością, lecz są wyraźnie wymienione w aksjomatach. Własności nie figurujące w aksjomatach muszą być udowodnione.

Różnica zaś między stadium aksjomatycznym a stadium sformalizowanym polega na tym, że w pierwszym z nich nie precyzuje się środków logicznych, jakich wolno używać w dowodzeniu twierdzeń. Teoria, która jest tylko zaksjomatyzowana, jest więc czymś o wiele mniej uchwytnym niż teoria sformalizowana.

Dlaczego nauka doszła w końcu XIX wieku do przekonania, że nie wystarcza stadium aksjomatyczne i że trzeba teorie matematyczne formalizować? Nie trudno dać odpowiedź na to pytanie.

Jest rzeczą znamienną, że badania podstaw matematyki rozwijają się w następstwie odkrycia pozornych sprzeczności lub paradoksów. Badania te doprowadzają w konsekwencji do pewnych postulatów metodologicznych, zmierzających do tego, by teorie matematyczne były budowane w pewien określony sposób, usuwający możliwość pojawiania się w nich tych paradoksów.

Teorie zaksjomatyzowane powstały w Grecji w V lub IV wieku przed Chrystusem pod wpływem odkrycia odcinków niewspółmiernych. Fakt ten przeczył naiwnym wyobrażeniom o długości odcinków i był odczuwany przez geometrów greckich jako paradoks. Tworząc zaksjomatyzowany system geometrii, matematycy pragnęli się uchronić od powstawania takich paradoksów [1]). „Wyszczególnijmy założenia i dbajmy o to, aby były one oczywiste" — mówili sobie zapewne — „a sprzeczność wówczas nie powstanie". Mówiąc tak, zawierzali oczywiście logice, byli przekonani, że wnioskując poprawnie z oczywistych założeń, dochodzić będą do poprawnych i oczywistych wniosków.

Na przełomie wieku XIX i XX wiara w poprawność i oczywistość logiki intuicyjnej została zachwiana głównie wskutek odkrycia antynomii. Nic więc dziwnego, że odbiło się to na sposobie, w jaki przedstawiamy teorie matematyczne. Nie wystarcza nam już samo sformułowanie założeń teorii. Musimy dokładnie określić logikę, na której opieramy się w trakcie budowania teorii, i na tym w gruncie rzeczy polega proces formalizowania teorii.

Widać stąd, że formalizowanie teorii matematycznych nie jest wywołane bezcelowym dążeniem do ścisłości, pojętej jako cel sam w sobie. Jest ono naturalnym wynikiem przewrotu, jaki dokonał się w logice w ciągu XIX wieku.

Powstanie sformalizowanych teorii matematycznych doprowadziło do sytuacji dość niezwykłej, na którą od razu zwrócimy uwagę czytelnika.

Dowodzenie twierdzeń matematycznych uchodziło z dawien dawna za czynność umysłową, i to nawet za jedną z najtrudniejszych i najsubtelniejszych. W teoriach sformalizowanych zastąpiliśmy jednak tę czynność umysłową przez mechaniczne stosowanie reguł wnioskowania. Teoretycznie rzecz biorąc, można by w nauce sformalizowanej dowodzić twierdzeń zupełnie bezmyślnie, próbując tylko stosować (na wszelkie możliwe sposoby) reguły wnioskowania do aksjomatów, twierdzeń już udowodnionych, tautologii rachunku zdań oraz pewników: ekstensjonalności i de-

[1]) Znakomity matematyk niemiecki D. Hilbert był podobno zapytany w czasie jednej z dyskusji na temat podstaw geometrii, czy rolę punktów mogą grać kałamarze, a rolę prostych pióra. „Owszem — odpowiedział Hilbert — o ile kałamarze i pióra spełniają układ aksjomatów geometrii".

Matematycy doszli zresztą dopiero w XIX wieku do wniosku, że do takich konsekwencji prowadzi aksjomatyczny sposób budowania teorii. Czytając definicje zawarte w I księdze *Elementów*, nie trudno przekonać się, że tak abstrakcyjne stanowisko było w każdym razie obce Euklidesowi (por. odsyłacz na str. 231).

[1]) Aksjomatyczny system geometrii greckiej, który (częściowo zniekształcony) dotrwał do naszych czasów, jest dziełem wielkiego matematyka greckiego Euklidesa (IV wiek przed Chr.). Jego *Elementy* są dziełem tak dojrzałym, że trudno przypuszczać, by Euklides nie miał poprzedników. Euklides nie był więc bez wątpienia twórcą metody aksjomatycznej, lecz jej znakomitym jak na owe czasy realizatorem.

Kto powziął pierwszy myśl aksjomatycznego ujęcia geometrii, nie wiemy. Jordan twierdzi, że pomysł ten przypisać należy Platonowi. Por. Z. Jordan, *Platon odkrywcą metody aksjomatycznej*, Przegląd Filozoficzny, tom 40 (1937), str. 57 i następne.

finicyjnego; inne tautologie logiczne wypadłyby nam w wyniku stosowania reguł wnioskowania. Inaczej mówiąc, dla każdej teorii sformalizowanej można wyobrazić sobie maszynę, która kolejno wypisuje twierdzenia tej teorii i to tak, że po dłuższym lub krótszym funkcjonowaniu wypisze każde z góry dane twierdzenie.

Droga ta praktycznie nie daje się zrealizować, przynajmniej w chwili obecnej, gdyż dowody sformalizowane są tak długie, że nie starczyłoby życia ludzkiego, by dojść w ten sposób do twierdzeń ciekawych. Tym nie mniej sama możliwość takiego zmechanizowania dowodów jest faktem doniosłym. Okazuje się, że rola intuicji w dowodach twierdzeń (w teoriach sformalizowanych) nie jest bynajmniej istotna: sprowadza się ona do tego, żeby wśród chaosu wszelkich możliwych kroków dowodowych znaleźć takie ich następstwo, które względnie szybko doprowadzi do celu.

Nasuwa się tu natychmiast pytanie, czy cała intuicyjna wiedza matematyczna daje się zamknąć w ramach jednej sformalizowanej teorii. Do tego doniosłego problemu powrócimy w Rozdziałach XIII i XIV.

Na zakończenie dodamy, że w praktyce rzadko kiedy podaje się teorie matematyczne w postaci sformalizowanej, gdyż — jak to już nadmieniliśmy w Rozdziale VII, § 6, str. 194 — znany obecnie rachunek logiczny jest bardzo nieporęczny. Być może, w przyszłości rachować będziemy wyrażeniami logicznymi z równą łatwością, z jaką dziś rachujemy liczbami. Na razie zadowolić się musimy prowadzeniem dowodów niezupełnie sformalizowanych, dbając jednak o takie ich formułowanie, by w każdej chwili było widoczne, że sformalizowanie jest możliwe.

§ 3. Przykłady sformalizowanych teorii elementarnych. Podane tu i w § 4 przykłady częściowo mają służyć za ilustrację abstrakcyjnego opisu teorii, wyłożonego w § 1, częściowo zaś dostarczą nam materiału ilustracyjnego do wywodów Rozdziału XI.

Opisując teorię sformalizowaną, ograniczymy się do wymienienia jej stałych specyficznych oraz aksjomatów. W teoriach elementarnych nie będziemy jednak wymieniać stałych specyficznych $=$ i $\neq$ ani aksjomatów równości, gdyż założyliśmy raz na zawsze, że nie będziemy się zajmowali teoriami, w których nie występują te stałe albo te aksjomaty.

I. Elementarna teoria nierówności [1]). Stałymi specyficznymi tej teorii są L i $<$. Stała L ma typ (*), t. zn. jest nazwą zbioru; stała $<$ ma typ (*,*) czyli jest nazwą pewnej relacji dwuczłonowej.

L nazywamy *zbiorem liczb rzeczywistych.*

Wzór $x<y$ czytamy: *liczba rzeczywista x jest mniejsza od liczby rzeczywistej y.*

Za aksjomaty przyjmujemy zdania:

I1. $\prod_{x\in L}(x<x)'$, I2. $\prod_{x,y,z\in L}[(x<y)\cdot(y<z)\to(x<z)]$,

I3. $\prod_{x,y\in L}[(x=y)+(x<y)+(y<x)]$ [2]),

I4. $\prod_{x\in L}\sum_{y\in L}(x<y)$, I5. $\prod_{x\in L}\sum_{y\in L}(y<x)$,

I6. $\prod_{x,y\in L}\{(x<y)\to\sum_{z\in L}[(x<z)\cdot(z<y)]\}$.

I1, I2, i I3 — są to prawa przeciwzwrotności, przechodniości i spójności dla relacji $<$. I4 i I5 stwierdzają, że zbiór liczb rzeczywistych nie jest ograniczony z góry ani z dołu, I6 zaś orzeka, że relacja $<$ porządkuje zbiór liczb w typ *gęsty,* czyli taki, że między każdymi dwiema liczbami leży jeszcze co najmniej jedna liczba.

Własności wymienione w aksjomatach charakteryzują zresztą w bardzo nieznacznym stopniu zbiór L jako zbiór liczb rzeczywistych, w każdym jednak razie twierdzenia, wyprowadzone z tych aksjomatów, pouczają nas o niektórych własnościach tego zbioru.

Zauważmy, że aksjomaty I1-I6 stwierdzają, że liczby rzeczywiste są *indywiduami* (przedmiotami najniższego typu), nie przesądzają jednak, czy prócz liczb rzeczywistych nie ma jeszcze innych indywiduów. Czasem jest dogodnie rozstrzygnąć w tym lub innym kierunku kwestię istnienia takich indywiduów. Można to uczynić, przyjmując za dodatkowy aksjomat np. zdanie $\prod_x(x\in L)$, orzekające, że każde indywiduum jest liczbą rzeczywistą.

Spośród licznych twierdzeń, jakie można wyprowadzić z aksjomatów I1-I6 wymienimy następujące:

---

[1]) Por. A. Tarski, *Grundzüge des Systemenkalküls II,* Fundamenta Mathematicae, tom 26 (1936), str. 290 i następne.

[2]) Wyrażenie $x,y\in L$ za kwantyfikatorem rozumieć należy (jak w Rozdziałach VI i VII) jako koniunkcję funkcji zdaniowych $x\in L$ i $y\in L$. Podobnie w innych wzorach.

I7. $\prod_{x,y\in L}[(x=y)\equiv(y=x)]$,

I8. $\prod_{x,y\in L}\{(x=y)'\equiv[(x<y)+(y<x)]\}$,

I9. $\prod_{x,y\in L}\{(x<y)'\equiv[(y<x)+(x=y)]\}$,

I10. $\prod_{u,v,\ldots,w\in L}\sum_{x\in L}[(x<u)\cdot(x<v)\cdot\ldots\cdot(x<w)]$,

I11. $\prod_{u,v,\ldots,w\in L}\sum_{x\in L}[(u<x)\cdot(v<x)\cdot\ldots\cdot(w<x)]$,

I12. $\prod_{y,z,\ldots,t,u,v,\ldots,w\in L}\{\sum_{x\in L}[(y<x)\cdot(z<x)\cdot\ldots\cdot(t<x)\cdot$
$\cdot(x<u)\cdot(x<v)\cdot\ldots\cdot(x<w)]\equiv(y<u)\cdot(y<v)\cdot\ldots\cdot(y<w)\cdot$
$\cdot(z<u)\cdot(z<v)\cdot\ldots\cdot(z<w)\cdot\ldots\cdot(t<u)\cdot(t<v)\cdot\ldots\cdot(t<w)\}$.

Aby zilustrować różnicę, zachodzącą między teorią elementarną a teoriami wyższych rzędów, zwróćmy uwagę na następującą okoliczność. Zdanie:

Jeśli $x\in L$, $y\in L$ i $x<y$, to istnieje nieskończenie wiele takich $z\in L$, że $x<z$ i $z<y$

nie daje się wyrazić tymi środkami logicznymi, którymi rozporządzamy w elementarnej teorii nierówności. Zdanie to można napisać wzorem

(4) $\prod_{x,y\in L}\{(x<y)\to[\prod_{z\in L}[z\in X\equiv(x<z)\cdot(z<y)]\to(\mathrm{Nc}(X)\in\mathrm{Ncind})']\}$,

skąd jest widoczne, że do wysłowienia go użyć musimy zmiennych typu (((*))), takie bowiem zmienne figurowały w definicji zbioru Ncind (por. Rozdział VII, § 5, str. 183). Zdanie (4) daje się zatem napisać dopiero w teorii rzędu 3 [1]).

II. Elementarna teoria grup. Stałymi specyficznymi tej teorii (poza znakami równości i różności) są L i σ.

Stała L ma typ (*), jest więc nazwą zbioru, który w tej teorii nazywamy *grupą*.

Stała σ ma typ (*,*,*), t. zn. jest nazwą relacji trójczłonowej.

Wzór $\sigma(x,y,z)$ czytamy: *x jest wynikiem złożenia y i z.*

[1]) Opierając się na równoważności

$$\mathrm{Nc}(X)\in\mathrm{Ncind}\equiv\Pi_{\mathfrak{X}}\{0\in\mathfrak{X}\cdot\Pi_{Yx}[Y\in\mathfrak{X}\to Y+\iota(x)\in\mathfrak{X}]\to X\in\mathfrak{X}\},$$

można by obniżyć o jedność rząd zmiennych, występujących w zdaniu (4).

Czytelnik nie znający teorii grup może przyjąć, że zmienne $x,y,\ldots$ przebiegają zbiór liczb rzeczywistych, i czytać wzór $\sigma(x,y,z)$ jako: *x jest sumą y i z.*

Za aksjomaty przyjmujemy zdania:

II1. $\prod_{x,y,z,t\in L}[\sigma(x,z,t)\cdot\sigma(y,z,t)\to(x=y)]$,

II2. $\prod_{y,z\in L}\sum_{x\in L}\sigma(x,y,z)$, II3. $\prod_{x,z\in L}\sum_{y\in L}\sigma(x,y,z)$,

II4. $\prod_{x,y\in L}\sum_{z\in L}\sigma(x,y,z)$,

II5. $\prod_{x,y,z,t,u,v\in L}[\sigma(z,u,v)\cdot\sigma(x,t,z)\cdot\sigma(y,t,u)\to\sigma(x,y,v)]$,

II6. $\sum_{x\in L}\sigma'(x,x,x)$.

Aksjomaty II1 i II2 stwierdzają, że relacja σ jest działaniem określonym i wykonalnym w zbiorze L (por. Rozdział VI, § 9, str. 156). Aksjomat II5 stwierdza łączność tego działania (por. Rozdział VI, § 9, str. 157). Aksjomaty II3 i II4 można by nazwać prawami wykonalności działań odwrotnych do σ (por. Rozdział VI, § 9, str. 158), byłoby to jednak o tyle nieścisłe, że w samych aksjomatach nie jest założona jednoznaczność σ względem drugiego ani trzeciego argumentu, wskutek czego na razie nie wiadomo, czy relacje $\sigma_{2,1,3}$ i $\sigma_{2,3,1}$, odwrotne do σ, są działaniami. Można jednak wykazać, że z aksjomatów II1, II2 i II5 wynika jednoznaczność relacji $\sigma_{2,1,3}$ i $\sigma_{2,3,1}$ (por. dalej str. 241, ćwiczenie 2); wtedy aksjomaty II3 i II4 rzeczywiście stwierdzają wykonalność działań odwrotnych do σ. Aksjomat II6 stwierdza istnienie w zbiorze L przedmiotu, który nie reprodukuje się przy złożeniu sam ze sobą. Z aksjomatów II1-II5 wyprowadzić można istnienie dokładnie jednego takiego przedmiotu x, zwanego *modułem grupy*, że $\sigma(x,x,x)$; aksjomat II6 orzeka więc, że w grupie istnieje przynajmniej jeden przedmiot różny od jej modułu.

Ostatecznie widzimy, że elementarna teoria grup bada działanie σ, określone i wykonalne w pewnym zbiorze L o co najmniej dwu elementach, łączne w tym zbiorze i posiadające obydwa działania odwrotne.

Podamy kilka twierdzeń z teorii grup, szkicując tylko dowody.

II7. $\vdash\sum_{t\in L}\prod_{z\in L}\sigma(z,t,z)$.

Dowód. Z II5 wynika

$$\vdash\sigma(z,u,v)\cdot\sigma(x,t,z)\cdot\sigma(u,t,u)\to\sigma(x,u,v),$$

a więc też

$$\vdash \sigma(z,u,v)\cdot\sigma(x,t,z)\cdot\sigma(u,t,u)\to\sigma(z,u,v)\cdot\sigma(x,u,v).$$

Powołując się na II 1, otrzymujemy stąd

$$\vdash \sigma(z,u,v)\cdot\sigma(x,t,z)\cdot\sigma(u,t,u)\to(z=x),$$

a więc na mocy aksjomatów równości

$$\vdash \sigma(z,u,v)\cdot\sigma(x,t,z)\cdot\sigma(u,t,u)\to\sigma(z,t,z).$$

Dołączając w poprzedniku kwantyfikatory $\sum_{v\in L}$ i $\sum_{x\in L}$, otrzymamy po uwzględnieniu II 4 i II 2 $\vdash \sigma(u,t,u)\to\sigma(z,t,z)$, a więc po dołączeniu w następniku kwantyfikatora $\prod_{z\in L}$ i dokonaniu prostych przekształceń logicznych:

$$\vdash \sum_{t\in L}\sigma(u,t,u)\to\sum_{t\in L}\prod_{z\in L}\sigma(z,t,z).$$

Poprzednik odrywamy na mocy II 3 i otrzymujemy twierdzenie II 7.

Twierdzenie II 7 stwierdza istnienie tak zwanego *modułu lewostronnego* czyli elementu t, który złożony z dowolnym innym elementem z daje z powrotem element z.

W podobny sposób dowodzi się istnienia modułu prawostronnego:

II 8. $\vdash \sum_{u\in L}\prod_{z\in L}\sigma(z,z,u)$.

Udowodnimy, że *każdy moduł lewostronny jest równy każdemu modułowi prawostronnemu:*

II 9. $\vdash \prod_{z\in L}[\sigma(z,t,z)\cdot\sigma(z,z,u)]\to(t=u)$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

$$\vdash \prod_{z\in L}[\sigma(z,t,z)\cdot\sigma(z,z,u)]\to\sigma(u,t,u)\cdot\sigma(t,t,u)$$

i zastosować aksjomat II 1.

Wynika stąd bezpośrednio, że istnieje dokładnie jeden moduł lewostronny i dokładnie jeden moduł prawostronny oraz że są one równe; wzorami napisać możemy ten wniosek jak następuje:

II 10. $\vdash \sum_{u\in L}\prod_{z\in L}[\sigma(z,u,z)\cdot\sigma(z,z,u)]$,

II 11. $\vdash \prod_{u,v\in L}\{\prod_{z\in L}[\sigma(z,u,z)\cdot\sigma(z,z,u)]\cdot\prod_{z\in L}[\sigma(z,v,z)\cdot\sigma(z,z,v)]\to(u=v)\}$.

III. Elementarna teoria grup przemiennych uporządkowanych. Stałymi specyficznymi tej teorii są stałe $L, <$ i σ, znane nam z teorii I i II.

Za aksjomaty przyjmujemy aksjomaty I 1-I 6 teorii mniejszości, aksjomaty II 1-II 6 teorii grup oraz jeszcze dwa aksjomaty dodatkowe:

III 1. $\prod_{x,y,z\in L}[\sigma(x,y,z)\equiv\sigma(x,z,y)]$,

III 2. $\prod_{x,y,z,u,v\in L}[\sigma(x,y,z)\cdot\sigma(u,v,z)\cdot(y<v)\to(x<u)]$.

III 1 — jest to prawo przemienności dla działania σ, III 2 — prawo (lewostronnej) monotoniczności działania σ względem relacji $<$ (por. Rozdział VI, § 9, str. 156 i 159). Prawostronna monotoniczność działania σ względem relacji $<$ daje się dowieść jako twierdzenie.

Teoria opisana w tym przykładzie pozwala ugruntować prawa dotyczące dodawania liczb rzeczywistych, np. prawo dodawania nierówności:

$$\vdash (x,y,z,t\in L)\cdot(x<y)\cdot(z<t)\cdot\sigma(u,x,z)\cdot\sigma(v,y,t)\to(u<v)$$

i wiele innych [1]).

IV. Elementarna teoria liczb rzeczywistych [2]). W tej teorii występują omówione poprzednio stałe specyficzne L, $<$, σ, ponadto stała π typu $(*,*,*)$ oraz dwie stałe 0 i 1 typu $*$. Zbiór L nazywamy — podobnie jak w teorii I — zbiorem liczb rzeczywistych. Wzór $\pi(x,y,z)$ czytamy: *x jest iloczynem y i z.* Nazywać też będziemy 0 *liczbą zero*, a 1 — *liczbą jeden.*

Przyjmujemy wszystkie aksjomaty teorii I, II i III, a nadto aksjomaty:

IV 1. $\prod_{x,y,z,t\in L}[\pi(x,z,t)\cdot\pi(y,z,t)\to x=y]$,

IV 2. $\prod_{y,z\in L}\sum_{x\in L}\pi(x,y,z)$,

IV 3. $\prod_{x,z\in L}[(z\neq 0)\to\sum_{y\in L}\pi(x,y,z)]$,

IV 4. $\prod_{x,y\in L}[(y\neq 0)\to\sum_{z\in L}\pi(x,y,z)]$,

IV 5. $\prod_{x,y,z,t,u,v\in L}[\pi(z,u,v)\cdot\pi(x,t,z)\cdot\pi(y,t,u)\to\pi(x,y,v)]$,

[1]) Por. A. Tarski, *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*, Biblioteczka matematyczna Nr 3, 4 i 5, Warszawa-Lwów, 1937, Rozdziały VII i VIII.

[2]) Por. A. Tarski, tamże, Rozdział X.

IV 6. $\prod_{x,y,z\in L}[\pi(x,y,z)\equiv\pi(x,z,y)]$,

IV 7. $\prod_{x,y,z,u,v\in L}[(0<z)\cdot\pi(u,x,z)\cdot\pi(v,y,z)\cdot(x<y)\to(u<v)]$,

IV 8. $\prod_{x,y,z,t,u,v,w\in L}[\sigma(x,y,z)\cdot\pi(u,v,x)\cdot\pi(t,v,y)\cdot\pi(w,v,z)\to$
$\to\sigma(u,t,w)]$,

IV 9. $0\in L$, IV 10. $1\in L$, IV 11. $0<1$,

IV 12. $\prod_{x\in L}\sigma(x,0,x)$, IV 13. $\prod_{x\in L}\pi(x,1,x)$.

Znaczenie tych aksjomatów jest następujące: zgodnie z IV 1 i IV 2 relacja π jest działaniem określonym i wykonalnym w zbiorze L. Aksjomaty IV 3 i IV 4 stwierdzają wykonalność działań odwrotnych do π w zbiorze liczb różnych od 0, przy czym takie pojmowanie tych aksjomatów staje się uzasadnione dopiero po wyprowadzeniu (z aksjomatów IV 1, IV 2 i IV 7) wniosku, że relacje odwrotne do π są działaniami w zbiorze liczb różnych od 0 (por. uwagi na str. 235). IV 5 i IV 6 — są to prawa łączności i przemienności mnożenia. IV 7 jest prawem monotonii dla mnożenia: orzeka ono, że obie strony nierówności można pomnożyć przez liczbę dodatnią. IV 8 jest prawem rozdzielności mnożenia względem dodawania (por. Rozdział VI, § 9, str. 158). Aksjomaty IV 9, IV 10 i IV 11 orzekają, że 0 i 1 sa liczbami oraz, że 0 jest mniejsze od 1. Aksjomat IV 12 stwierdza, że 0 jest modułem dodawania, a aksjomat IV 13 — że 1 jest modułem mnożenia.

Z aksjomatów teorii IV wyprowadzić można szereg twierdzeń dotyczących liczb rzeczywistych; w szczególności teorię równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą i, ogólniej, teorię n równań liniowych z n niewiadomymi dla $n=2,3,\ldots$

Nie można natomiast w teorii IV ugruntować teorii równań kwadratowych i równań stopni wyższych, nie można też zdefiniować w niej pojęcia liczby naturalnej, wymiernej i niewymiernej, ani też rozwinąć teorii funkcji wykładniczej i logarytmicznej. Racjonalny sposób ugruntowania tych działów matematyki polega nie na dalszym wzmacnianiu układu aksjomatów teorii IV, lecz na wyposażeniu jej w mocniejsze środki logiczne, t. j. na przejściu od elementarnej do nieelementarnej teorii liczb rzeczywistych (por. § 4, teoria VII, str. 242).

Kończąc przykłady natury arytmetycznej, porównajmy jeszcze dwa poznane dotąd sposoby budowania arytmetyki. Wiemy z Rozdziału VII (§ 5, str. 185), że arytmetykę można zbudować

jako fragment logiki, obecnie zaś poznaliśmy arytmetykę, pojętą jako swoistą teorię matematyczną sformalizowaną. Z Rozdziału VI (§ 6, str. 140) wiemy, że pojęcie liczby rzeczywistej daje się zdefiniować w samej logice, podobnie jak działania mnożenia i dodawania oraz relacja mniejszości. Prawa I 1-IV 13 dają się wówczas udowodnić, stają się tautologiami logicznymi. Cała ta konstrukcja wymaga jednak bardzo mocnych środków logicznych, a mianowicie użycia zmiennych wysokiego typu, pewnika nieskończoności i innych pewników logiki. W ujęciu zaś aksjomatycznym bogactwo środków logicznych redukuje się do minimum: logika, na której się opieramy, pokrywa się z możliwie najwęższym działem logiki, mianowicie z węższym rachunkiem funkcyjnym (por. Rozdział VIII, § 3, str. 217). Jak wspomnieliśmy na str. 238, te środki logiczne są za słabe do ugruntowania wielu ważnych działów matematyki i muszą być wzmocnione; w każdym jednak razie są one nawet po takim wzmocnieniu bez porównania uboższe niż środki logiczne, niezbędne dla wyprowadzenia arytmetyki z logiki.

Z drugiej strony, arytmetyka pojęta jako odrębna teoria matematyczna, traci w znacznym stopniu swój aprioryczny charakter, a twierdzenia jej — charakter zdań analitycznych; aksjomaty robią wrażenie umów dowolnie przyjętych; nie rozumiemy właściwie, jakim cudem arytmetyka znajduje zastosowanie w praktyce.

Podamy jeszcze dwa przykłady teorii geometrycznych.

V. Elementarna teoria relacji *leżenia między*. Stałymi specyficznymi tej teorii są P i M. Stała P ma typ $(*)$, a M — typ $(*,*,*)$.

Zbiór P nazywamy *zbiorem punktów*, wzór zaś $M(x,y,z)$ czytamy: *punkt y leży wewnątrz odcinka o końcach x i z*.

Przyjmujemy następujące aksjomaty[1]):

V 1. $\prod_{x,y,z\in P}[M(x,y,z)\to M(z,y,x)]$,

V 2. $\prod_{x,y\in P}[(x\neq y)\to\sum_{z\in P}M(x,z,y)]$,

V 3. $\prod_{x,y\in P}[(x\neq y)\to\sum_{z\in P}M(x,y,z)]$,

V 4. $\prod_{x,y,z\in P}[M(x,y,z)\to(x\neq y)\cdot(x\neq z)]$,

[1]) Por. M. Zacharias, *Elementargeometrie der Ebene und des Raumes*, Berlin-Lipsk 1930, str. 20.

V 5. $\prod_{x,y,z \in P}\{(x \neq y)\cdot(y \neq z)\cdot(x \neq z) \rightarrow$
$\rightarrow [M(x,y,z)+M(y,z,x)+M(z,x,y)]\}$,

V 6. $\prod_{x,y,z \in P}[M(x,y,z) \rightarrow M'(y,x,z)\cdot M'(x,z,y)]$,

V 7. $\prod_{x,y,z,t \in P}\{M(x,y,t)\cdot M(x,z,t) \rightarrow$
$\rightarrow [M(x,z,y)+(z=y)+M(y,z,t)]\}$,

V 8. $\prod_{x,y,z,t \in P}\{M(x,y,t)\cdot[M(x,z,y)+M(y,z,t)] \rightarrow M(x,z,t)\}$,

V 9. $\prod_{x,y,z,t \in P}\{M(x,y,z)\cdot M(x,y,t) \rightarrow [M(y,t,z)+(t=z)+M(y,z,t)]\}$.

Z tych pewników wyprowadzić można twierdzenia dotyczące położenia punktów na linii prostej.

VI. Fragment geometrii rzutowej. W tej teorii występują dwie stałe specyficzne: L typu (*,*,*) i P typu (*).

Wzór $L(x,y,z)$ czytamy: *punkty x,y i z leżą na tej samej prostej*, przy czym słowem *punkt* oznaczamy zarówno punkty właściwe jak niewłaściwe.

P jest zbiorem punktów.

Aksjomatami tej teorii są zdania [1]):

VI 1. $\sum_{x,y \in P}(x \neq y)$,

VI 2. $\prod_{x,y,z \in P}[L(x,y,z) \rightarrow L(x,z,y)\cdot L(y,z,x)]$,

VI 3. $\prod_{x,y \in P} L(x,x,y)$,

VI 4. $\prod_{x,y,z,t \in P}[(x \neq y)\cdot(z \neq x)\cdot L(z,x,y)\cdot L(t,z,x) \rightarrow L(t,x,y)]$,

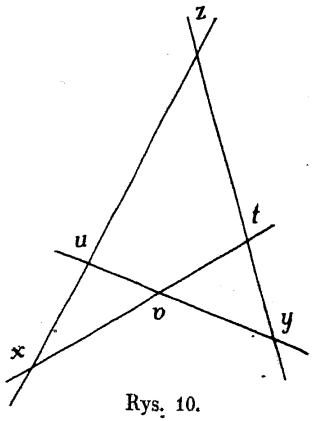
VI 5. $\prod_{x,y \in P}\{x \neq y \rightarrow \sum_{z \in P}[(z \neq x)\cdot(z \neq y)\cdot L(z,x,y)]\}$,

VI 6. $\prod_{x,y \in P}[x \neq y \rightarrow \sum_{z \in P} L'(z,x,y)]$,

VI 7. $\prod_{x,y,z,t,u \in P}\{L'(x,y,z)\cdot L(t,y,z)\cdot(t \neq y)\cdot(t \neq z)\cdot$
$\cdot L(u,x,z)\cdot(u \neq x)\cdot(u \neq z) \rightarrow \sum_{v \in P}[L(v,x,t)\cdot L(v,y,u)]\}$.

[1]) Zob. A. N. Whitehead, *Axioms of projective geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Nr 4, 1913, str. 7.

Sens aksjomatów VI 1-VI 6 nie powinien budzić wątpliwości. Sens bardziej złożonego aksjomatu VI 7 wyjaśnia rys. 10.



Rys. 10.

Z aksjomatów VI 1-VI 7 można wyprowadzić szereg własności punktów i prostych, leżących na płaszczyźnie rzutowej. Aby otrzymać pełny system geometrii rzutowej, należy dodać do teorii VI jeszcze jedno pojęcie pierwotne typu (*,*,*,*) (relację przedzielania się par punktów), scharakteryzować je odpowiednimi aksjomatami, a nadto — opuszczając już teren teorii elementarnej — przyjąć t. zw. *pewnik ciągłości* [1]).

ĆWICZENIA. 1. Podać sformalizowane dowody twierdzeń I 7 - I 12.

2. Udowodnić następujące twierdzenia elementarnej teorii grup:

$$\vdash \Pi_{x,y,z,t \in L}[\sigma(x,y,t)\cdot\sigma(x,z,t) \rightarrow (y=z)],$$

$$\vdash \Pi_{x,y,z,t \in L}[\sigma(x,y,z)\cdot\sigma(x,y,t) \rightarrow (z=t)].$$

3. Wykazać, że aksjomaty II 2, II 3, i II 4 można zastąpić zdaniem:

$$\Pi_{x,y \in L}\Sigma_{z,t,u \in L}[\sigma(z,x,y)\cdot\sigma(x,t,y)\cdot\sigma(x,y,u)].$$

4. Wykazać, że w teorii grup przemiennych zdanie

$$\Pi_{x,y,z,u,v,w \in L}[\sigma(x,y,t)\cdot\sigma(z,t,u)\cdot\sigma(y,u,v)\cdot\sigma(x,v,w) \rightarrow (z=w)]$$

jest twierdzeniem.

5. Ze zdania podanego w ćwiczeniu 4 i z aksjomatu II 4 wyprowadzić zdania II 1, II 2, II 3, II 5, II 6 i III 1 [2]).

6. Przedstawić algebrę Boole'a (Rozdział IV, § 5, str. 103) w postaci teorii sformalizowanej na wzór przykładów omówionych w § 3.

Wsk.: Przyjąć za pojęcia pierwotne $0,1,K$ i relacje

$$(\hat{x},\hat{y},\hat{z})[x=y+z], \quad (\hat{x},\hat{y},\hat{z})[x=y\cdot z], \quad (\hat{x},\hat{y})[x=y'].$$

Ilość pojęć pierwotnych może być zresztą zmniejszona.

[1]) Whitehead, tamże, str. 30.

[2]) A. Tarski, *Ein Beitrag zur Axiomatik der Abelschen Gruppen*, Fundamenta Mathematicae, tom 30 (1938), str. 253-256.

§ 4. Przykłady teorii nie-elementarnych. Podamy obecnie kilka ważnych przykładów teorii nie-elementarnych.

VII. Pełna teoria liczb rzeczywistych. Jest to teoria rzędu 1, t. zn. że w jej wyrażeniach występują zmienne typów:

$$*, \quad (*), \quad (*,*), \quad (*,*,*), \quad \ldots$$

Pojęciami pierwotnymi tej teorii są: zbiór L, relacje $<$, σ i π oraz przedmioty 0 i 1, znane nam z § 3 (teoria IV, str. 237).

Za aksjomaty przyjęte są wszystkie aksjomaty teorii IV, a nadto jeszcze jeden aksjomat nie-elementarny, zwany *pewnikiem ciągłości:*

$$\text{VII 1.} \quad \prod_{X,Y\subset L}\{(X\neq 0)\cdot(Y\neq 0)\cdot\prod_{x\in X}\prod_{y\in Y}(x<y)\rightarrow \rightarrow\sum_{z\in L}\prod_{x\in X}\prod_{y\in Y}[(x\leqslant z)\cdot(z\leqslant y)]\}.$$

W teorii VII można rozwinąć w szerokim zakresie analizę matematyczną. Przede wszystkim można zdefiniować zbiór liczb naturalnych jako najmniejszy zbiór, który zawiera elementy 0 i 1 oraz ma tę własność, że wraz z każdymi dwoma elementami y i z zawiera taki element x, że $\sigma(x,y,z)$. Można też zdefiniować zbiór liczb wymiernych i wykazać istnienie liczb niewymiernych. Definicje te można by zresztą sformułować, nie przyjmując pewnika ciągłości VII 1, z pewnika tego korzystamy jednak już w dowodach najbardziej podstawowych własności liczb naturalnych i wymiernych (np. przy dowodzie t. zw. pewnika Archimedesa).

Aksjomat ciągłości VII 1 pozwala udowodnić istnienie logarytmu dowolnej liczby dodatniej, dzięki czemu można rozwinąć w tej teorii również całą teorię funkcji wykładniczej i logarytmicznej.

Rozporządzając zmiennymi typu $(*,*)$, możemy dalej rozwinąć teorię ciągów, szeregów, granic, a także rachunek różniczkowy i całkowy jednej i wielu zmiennych. Również nie sprawiłoby trudności zdefiniowanie liczb zespolonych i wyprowadzenie zasadniczych twierdzeń z teorii funkcji analitycznych. Oczywiście, dowód nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych daje się także napisać i przeprowadzić w tej teorii.

Teorię VII można by więc nazwać teorią analizy klasycznej. Jednak dla wysłowienia niektórych twierdzeń wyższych działów analizy, w których mowa o rodzinach funkcji (jak np. w rachunku wariacyjnym) dogodnie byłoby wyposażyć teorię

VII jeszcze w zmienne rzędu 2, mimo iż większość problemów klasycznych dałaby się — w dość co prawda sztuczny sposób — wysłowić przy wyłącznym użyciu zmiennych rzędu 0 i 1.

Również liczne działy teorii mnogości dają się sformalizować w teorii VII, np. teoria funkcji Baire'owskich, zbiorów rzutowych (w przestrzeniach euklidesowych) i t. d.

Uświadomienie sobie bogactwa pojęć, dających się zdefiniować w teorii VII, jest rzeczą pouczającą: widzimy, jak niezmiernie ubogi jest system logiczny, wystarczający do ugruntowania niemal całej matematyki, i jak mała cząstka nieskończonej hierarchii typów logicznych jest do tego celu potrzebna.

VIII. Aksjomatyczna teoria liczb naturalnych. Podobnie jak teoria VII, jest to teoria rzędu 1. Pojęciami pierwotnymi są: zbiór liczb L, liczba 0 i relacja dwuczłonowa N. Symbol L jest więc stałą typu $(*)$, symbol 0 — stałą typu $*$, a symbol N — stałą typu $(*,*)$.

Wzór $N(x,y)$ czytamy: *y jest następnikiem x.*

Aksjomaty tej teorii są nam znane z Rozdziału VII (§ 5, str. 183); używając symboli, możemy je napisać w następującej postaci:

$$\text{VIII 1.} \quad \prod_{x\in L}N'(x,0),$$

$$\text{VIII 2.} \quad 0\in L,$$

$$\text{VIII 3.} \quad \prod_{x\in L}\sum_{y\in L}N(x,y),$$

$$\text{VIII 4.} \quad \prod_{x,y,z\in L}[N(x,y)\cdot N(x,z)\rightarrow(y=z)],$$

$$\text{VIII 5.} \quad \prod_{x,y,z\in L}[N(y,x)\cdot N(z,x)\rightarrow(y=z)],$$

$$\text{VIII 6.} \quad \prod_{X\subset L}[(0\in X)\cdot\prod_{x,y\in L}[(x\in X)\cdot N(x,y)\rightarrow(y\in X)]\rightarrow\prod_{x\in L}(x\in X)].$$

Aksjomat VIII 1 orzeka, że 0 nie jest następnikiem żadnej liczby, a aksjomat VIII 2, że 0 jest liczbą. Aksjomat VIII 3 stwierdza, że każda liczba ma co najmniej jeden następnik, aksjomat zaś VIII 4 — że każda liczba ma co najwyżej jeden następnik. Aksjomat VIII 5 orzeka, że z równości następników dwu liczb wynika równość samych liczb. Wreszcie, VIII 6 jest pewnikiem indukcji.

Pewna różnica zachodząca między układem aksjomatów VIII 1 - VIII 6 a układem podanym w Rozdziale VII (§ 5, str. 183) tłumaczy się innym doborem pojęć pierwotnych (relacja N zamiast pojęcia następnika).

Fakt, że teoria VIII nie jest elementarna, znajduje swój wyraz w aksjomacie VIII 6, w którym figuruje zmienna typu (*). Również w bardzo wielu twierdzeniach tej teorii i ich dowodach muszą figurować zmienne rzędu 1, np. w wysłowieniu i dowodzie twierdzenia o istnieniu najmniejszej relacji trójczłonowej σ, jednoznacznej względem pierwszego argumentu i ponadto takiej, że dla dowolnych $x, y, u, v, w \in L$ jest:

$$\sigma(y, y, 0), \qquad N(x, y) \cdot \sigma(u, v, x) \cdot N(u, w) \to \sigma(w, v, y).$$

Relacja σ o tych własnościach odpowiada działaniu dodawania liczb.

Podobnie, wprowadzenie pojęć iloczynu i potęgi nie byłoby możliwe bez użycia zmiennych rzędu 1. Sposób, w jaki te pojęcia można zdefiniować, poznaliśmy w Rozdziale VII, § 6.

Wyposażając teorię VIII w zmienne jeszcze wyższych rzędów, można określić liczby całkowite, wymierne i rzeczywiste jako klasy abstrakcji pewnych relacji równoważności (por. Rozdział VI, § 6, przykłady 1, 2 i 3, str. 138-140).

Jest to t. zw. *metoda genetyczna* wprowadzania liczb rzeczywistych.

Jak widzimy, metoda ta wymaga znacznie silniejszych środków logicznych, niż scharakteryzowanie pojęcia liczby rzeczywistej bezpośrednio na drodze aksjomatycznej.

IX. Aksjomatyczna teoria mnogości. Teoria ta, która powstała po odkryciu antynomii w intuicyjnej teorii mnogości i która miała w myśl intencji swych twórców [1]) zastąpić tę intuicyjną teorię, zajmuje się badaniem pewnych przedmiotów, nazywanych *zbiorami*, oraz pewnych relacji między nimi.

Ponieważ jednak używaliśmy poprzednio słowa *zbiór* w innym znaczeniu (mianowicie jako synonimu słowa *własność*), więc dla uniknięcia nieporozumień używać będziemy nazwy *mnogość* dla przedmiotów, badanych w aksjomatycznej teorii mnogości.

Pojęciami pierwotnymi są: zbiór (własność) P, zbiór (własność) M i relacja dwuczłonowa E.

Wzór $x \in P$ czytamy: *x jest przedmiotem* (który w szczególnym wypadku może też być mnogością). Wzór $x \in M$ albo $M(x)$ czytamy:

[1]) Pierwszy system aksjomatów teorii mnogości podał matematyk niemiecki E. Zermelo w pracy *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I*, Mathematische Annalen, tom 65 (1908), str. 261-281.

x jest mnogością, wzór zaś $E(x,y)$ czytamy: *x jest elementem mnogości y*.

Za aksjomaty przyjmujemy następujące zdania:

IX 1. $\prod_x [M(x) \to x \in P]$,

IX 2. $\prod_{xy} [E(x,y) \to M(y) \cdot (x \in P)]$,

IX 3. $\prod_{x,y \in P} \{M(x) \cdot M(y) \cdot \prod_{z \in P} [E(z,x) \equiv E(z,y)] \to (x = y)\}$,

IX 4. $\prod_{x,y \in P} \sum_{z \in P} \left(M(z) \cdot \prod_{t \in P} \{E(t,z) \equiv [(t = x) + (t = y)]\}\right)$,

IX 5. $\prod_{x \in P} \sum_{y \in P} \left(M(y) \cdot \prod_{z \in P} \{E(z,y) \equiv \sum_{t \in P} [E(z,t) \cdot E(t,x)]\}\right)$,

IX 6. $\prod_{x \in P} \sum_{y \in P} \left(M(y) \cdot \prod_{z \in P} \{E(z,y) \equiv \prod_{t \in P} [E(t,z) \to E(t,x)]\}\right)$,

IX 7. $\sum_x \Big(M(x) \cdot \prod_y [M(y) \cdot \prod_z E'(z,y) \to E(y,x)] \cdot$
$\cdot \prod_{y,z \in P} \{\prod_t [E(t,z) \equiv (t = y)] \cdot [E(y,x)] \to E(z,x)\}\Big)$,

IX 8. $\prod_{Xx} \left(M(x) \to \sum_y \{M(y) \cdot \prod_z [E(z,y) \equiv E(z,x) \cdot (z \in X)]\}\right)$,

IX 9. $\sum_R \left((R \in 1\text{-Cls}) \cdot \prod_x \{M(x) \cdot \sum_u E(u,x) \to \sum_y [y R x \cdot E(y,x)]\}\right)$.

Pewnik IX 1 stwierdza, że każda mnogość jest przedmiotem, pewnik IX 2 — że przeciwdziedzina relacji E utworzona jest z mnogości (jeśli przedmiot ma jakikolwiek element, to musi być mnogością), a dziedzina — z przedmiotów. Aksjomat IX 3 stwierdza, że dwie mnogości o wszystkich elementach wspólnych muszą być identyczne (aksjomat *określoności*). Aksjomat IX 4 orzeka, że dla dowolnych dwu przedmiotów x i y istnieje mnogość z, której elementami są tylko przedmioty x i y (aksjomat *tworzenia par*). Treść aksjomatu IX 5 jest następująca: dla każdego przedmiotu x istnieje mnogość y, której elementami są te i tylko te przedmioty z, które są elementami mnogości należących do przedmiotu x jako jego elementy (pewnik *tworzenia sum*). Aksjomat IX 6 stwierdza, że dla każdego przedmiotu x istnieje mnogość y, której elementami są wszystkie podmnogości przedmiotu x (przy czym z jest *podmnogością* przedmiotu x, jeśli każdy element przedmiotu z jest elementem przedmiotu x). Pewnik IX 6 nazywamy pewnikiem *tworzenia mnogości potęgowej*. Aksjomat IX 7 nosi nazwę *pewnika nieskończoności*: istnieje mnogość x, która posiada jako element mnogość pustą (nie posiadającą elementów) i która ma przy tym tę własność, że wraz z każ-

dym swoim elementem y posiada też jako element mnogość z, której jedynym elementem jest y.

Dwa pozostałe pewniki nie są już elementarne: zawierają one zmienne rzędu 1. Pewnik *wyróżniania* IX 8 orzeka, że jeśli x jest mnogością, a X dowolną własnością, to istnieje mnogość y, której elementami są te spośród elementów mnogości x, które mają własność X. Mnogość y powstaje więc z mnogości x przez *wyróżnienie* spośród jej elementów tych, które mają własność X.

Ostatni pewnik IX 9 jest pewną mocną formą słynnego w badaniach podstaw matematyki *pewnika wyboru*. W przyjętym tu sformułowaniu orzeka on, że istnieje funkcja, która każdej mnogości, posiadającej w ogóle elementy, przyporządkowuje jeden z tych elementów.

Podany tu układ aksjomatów odpowiada w przybliżeniu pierwotnemu układowi, jaki podał Zermelo w pracy cytowanej na str. 244. Układ ten był wielokrotnie uzupełniany i przekształcany; przekształcenia te szły m. in. w kierunku wyeliminowania zmiennych rzędu 1, t. j. uczynienia aksjomatycznej teorii mnogości teorią elementarną [1]).

Intuicyjne znaczenie pojęć: *przedmiot* i *mnogość* nie jest tak jasne jak intuicyjne znaczenie pojęć pierwotnych w teoriach I-VIII. Nie możemy tu wyjaśniać ich szczegółowo, lecz ograniczymy się tylko do następującej uwagi.

Przedmioty, nie będące mnogościami, grają w aksjomatycznej teorii mnogości rolę podobną do tej, jaką w pełnym systemie prostej teorii typów grają indywidua czyli elementy zbioru 1. Są to więc najprostsze cegiełki, z których zbudowane są mnogości. Budując mnogości z innych mnogości i z przedmiotów, nie będących mnogościami, nie musimy przy tym przestrzegać zasady czystości typów. Elementami jednej i tej samej mnogości mogą być zarówno przedmioty, które same nie są mnogościami, jak i najrozmaitsze mnogości.

Aksjomatyczna teoria mnogości jest — podobnie jak pełny system prostej teorii typów (Rozdział VIII, § 3) — jedną z prób uchronienia matematyki od antynomii.

---

[1]) Można to osiągnąć, modyfikując układ pojęć pierwotnych. Por. P. Bernays, *A system of axiomatic set-theory*, The Journal of Symbolic Logic, tom 2 (1937), str. 65-77, tom 6 (1941), str. 1-17, tom 7 (1942), str. 65-89 i 133-145, tom 8 (1943), str. 89-106. W pracy tej podana jest obszerna literatura.

Na terenie aksjomatycznej teorii mnogości udowodnić można wszystkie niemal twierdzenia intuicyjnej teorii mnogości i to nieraz w postaci bardziej zadowalającej niż to było możliwe na terenie pełnego systemu prostej teorii typów, gdyż w aksjomatycznej teorii mnogości nie występuje zjawisko systematycznej wieloznaczności. Jednocześnie aksjomatyczna teoria mnogości wydaje się wolna od sprzeczności, gdyż żadne z rozumowań, które w intuicyjnej teorii mnogości prowadziło do antynomii, nie daje się przenieść na teren teorii zaksjomatyzowanej. Np. aby móc powtórzyć w tej teorii rozumowanie, prowadzące do antynomii Russell'a (por. Rozdział VIII, § 2, str. 209) należałoby z aksjomatów IX 1-IX 9 wyprowadzić twierdzenie

$$(T) \qquad \sum_{x \subset P}\{M(x)\cdot\prod_{y \subset P}[E(y,x)\equiv E'(y,y)\cdot M(y)]\}$$

(*istnieje mnogość, której elementami są te i tylko te mnogości, które nie są swoimi własnymi elementami*). Otóż twierdzenia tego nie umiemy wyprowadzić z aksjomatów IX 1-IX 9; potrafimy tylko wyprowadzić z tych aksjomatów negację twierdzenia (T), co oczywiście przemawia za tym, że antynomii Russell'a nie można zrekonstruować w rozważanym tu systemie.

Zupełnie podobnie ma się sprawa z innymi antynomiami, znanymi nam z Rozdziału VIII.

X. Teoria przestrzeni topologicznych. Jest to teoria rzędu 1. Pojęciami pierwotnymi są: zbiór P typu (*), zwany *przestrzenią*, i relacja dwuczłonowa D typu ((*),(*)).

Wzór $D(X,Y)$ czytamy: *Y jest zamknięciem zbioru X*.

Aksjomaty są następujące:

X 1. $\prod_{X \subset P}\sum_{Y \subset P} D(X,Y)$,

X 2. $\prod_{X,Y,Z \subset P}[D(X,Y)\cdot D(X,Z)\to Y=Z]$,

X 3. $\prod_{X,Y,Z \subset P}[D(X,Y)\cdot D(Y,Z)\to Y=Z]$,

X 4. $\prod_{X,Y,Z,T \subset P}[D(X,Y)\cdot D(Z,T)\to D(X+Z,\ Y+T)$,

X 5. $\prod_{X,Y \subset P}[D(X,Y)\to X \subset Y]$,

X 6. $D(0,0)$,

X 7. $D(P,P)$.

Aksjomaty X1 i X2 orzekają, że każdy zbiór $X \subset P$ ma dokładnie jedno zamknięcie. Oznaczając zamknięcie zbioru X przez $\overline{X}$ (zgodnie ze znakowaniem przyjętym w literaturze matematycznej), możemy pewniki X3-X7 napisać w postaci wzorów:

$$\overline{\overline{X}} = \overline{X}, \qquad \overline{X+Z} = \overline{X} + \overline{Z}, \qquad X \subset \overline{X}, \qquad \overline{0} = 0, \qquad \overline{P} = P.$$

0 jest tu zbiorem pustym.

W sformułowaniu aksjomatów nie użyliśmy dogodnego symbolu $\overline{X}$ na oznaczenie zamknięcia zbioru X, gdyż — jak zaznaczyliśmy na str. 228 — unikamy wprowadzania symboli, służących do oznaczania wartości funkcji.

Na podstawie aksjomatów X1-X7 można rozwinąć ogólną teorię przestrzeni topologicznych [1]).

ĆWICZENIA. 1.[2]) Udowodnić, że układ aksjomatów VIII1-VIII6 jest równoważny układowi, składającemu się ze zdań VIII2, VIII3, VIII4 oraz zdań następujących:

(a) $$\prod_{x \in L}[x \neq 0 \to \sum_{y \in L} N(y,x)],$$

(b) $$\prod_{X,Y \subset L}\{\sum_x (x \in X) \cdot \prod_y [y \in Y \equiv \sum_{x \in X} N(x,y)] \to (X \neq Y)\}.$$

2. Wykazać, że aksjomat (b) można zastąpić zdaniem

(c) $$\prod_{X \subset L}\{\sum_x (x \in X) \to \sum_{x \in X} \prod_{y \in L}[N(y,x) \to (y \in X)']\}$$ [3]).

[1]) Aksjomaty X1-X7 (w nieco innym sformułowaniu) podał K. Kuratowski w pracy *Sur l'opération $\overline{A}$ d'Analysis Situs*, Fundamenta Mathematicae, tom 3 (1922), str. 182-199. Por. też dzieło tegoż autora *Topologie I*, Monografie Matematyczne, tom 3, Warszawa-Lwów 1933, str. 15.

[2]) Ćwiczenie to zakomunikował mi prof. A. Bielecki.

[3]) Por. Shianghaw Wang, *A system of completely independent axioms for the sequence of natural numbers*, The Journal of Symbolic Logic, tom 8 (1943), str. 41-44.

ROZDZIAŁ X

DEFINICJE

§ 1. Reguła definiowania. Matematyk, rozwijający jakąkolwiek teorię, wprowadza zazwyczaj krótkie i przejrzyste symbole dla oznaczenia pojęć (dowolnego typu logicznego), które bądź powtarzają się często w rozumowaniach, bądź są specjalnie ciekawe i mają być poddane dokładniejszemu zbadaniu. Rozpatrzymy tutaj proces wprowadzania takich nowych symboli na gruncie teorii sformalizowanej.

Zarówno zdrowy rozsądek jak względy formalne, o których wspomnimy dalej (p. str. 255-256), nakazują pewną ostrożność przy wprowadzaniu nowych symboli do teorii. Przede wszystkim jest zrozumiałe, że wtedy tylko można używać symbolu, oznaczającego jakikolwiek przedmiot (dowolnego typu logicznego), gdy wiemy, że przedmiot ten istnieje [1]). Ponadto nie należy nigdy oznaczać tym samym symbolem dwu lub więcej różnych przedmiotów.

Zauważmy dalej, że wprowadzając nowy symbol, wzbogacamy listę stałych specyficznych. Powiększając jednak ilość stałych specyficznych, musimy jednocześnie zmienić odpowiednio

[1]) Powstaje tu od razu pytanie, kiedy mamy prawo twierdzić o jakimś tworze matematycznym, że *istnieje*. To zasadnicze zagadnienie filozofii matematyki było przedmiotem wielu dyskusji, które doprowadziły do powstania kilku odrębnych poglądów filozoficznych na podstawy matematyki. Poglądy te zreferowane są np. w książce: A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, wyd. 3-e, Berlin 1928.

Wybór tego czy innego stanowiska filozoficznego odbija się na wyborze aksjomatów i reguł wnioskowania, czyli na sposobie formalizowania teorii. Z chwilą jednak, gdy rozumuje się w teorii już sformalizowanej, filozoficzne zagadnienie istnienia przestaje grać jakąkolwiek rolę. W teorii sformalizowanej istnienie przedmiotów, spełniających funkcję zdaniową $\Phi(x)$, znaczy tylko tyle, że zdanie $\Sigma_x \Phi(x)$ jest twierdzeniem tej teorii.

aksjomatykę (np. zwiększając ilość aksjomatów), gdyż w przeciwnym razie nowa stała specyficzna nie byłaby niczym scharakteryzowana (por. Rozdział IX, § 1, str. 224-225).

Wychodząc z tych przesłanek, sformułujemy jak następuje regułę definiowania, umożliwiającą wprowadzanie nowych stałych specyficznych do teorii sformalizowanej:

Reguła definiowania. Jeśli $\Phi(x)$ jest funkcją zdaniową o jednej zmiennej wolnej x (dowolnego typu c), taką że

(1) $$\vdash \sum_x \Phi(x),$$

(2) $$\vdash \prod_{xy} [\Phi(x) \cdot \Phi(y) \to (x = y)]$$ [1],

to wolno przyjąć za nową stałą specyficzną typu c symbol λ, różny od wszystkich dotychczas używanych w teorii, przy czym jednocześnie przyjmujemy zdanie

(3) $$\Phi(\lambda)$$

za nowy aksjomat.

To, że stosujemy regułę definiowania, zapisujemy krótko wzorem

(4) $$\lambda \underset{df}{=} (\iota x)\Phi(x)$$ [2],

który czytamy: *λ jest na mocy definicji tym x, dla którego zachodzi $\Phi(x)$.*

Wzór (4) nazywamy *równością definicyjną.*

Symbol λ, występujący po lewej stronie równości definicyjnej, nosi nazwę *definiendum* (czyli tego, co ma być określone), wyrażenie zaś, stojące po prawej stronie, nazywa się *definiens* (czyli określające).

Reguła definiowania pozwala nam przyjmować równości definicyjne tylko dla takich funkcji zdaniowych, dla których zachodzą wzory (1) i (2). Takie funkcje zdaniowe będziemy krótko nazywali *jednostkowymi.*

[1]) Symbolem $\Phi(y)$ oznaczamy tu, oczywiście, funkcję zdaniową, powstającą z $\Phi(x)$ przez podstawienie zmiennej y zamiast zmiennej x, przy czym zakładamy, że podstawienie to jest wykonalne w myśl reguły podstawiania (Rozdział III, § 3, str. 53, reguła 2).

[2]) Użycie w tym sensie odwróconej litery greckiej ι (*jota*) pochodzi od Peano: Zob. G. Peano, *Formulaire de Mathématiques*, tom 3, Turyn 1901, str. 31.

Funkcja zdaniowa jest więc jednostkowa, jeśli aksjomaty i reguły wnioskowania, przyjęte w teorii, pozwalają dowieść, że istnieje dokładnie jeden przedmiot spełniający tę funkcję zdaniową.

Prace poświęcone metodologii matematyki rzadko kiedy zajmują się dokładnie regułą definiowania, ograniczając się zazwyczaj do krótkiej wzmianki, że — dla skrócenia wzorów — długi *definiens* zastępujemy krótkim *definiendum* i że można by tego uniknąć, gdybyśmy się zdecydowali na pisanie długich wzorów. Taki pogląd na rolę definicji nie jest jednak uzasadniony, zwłaszcza w odniesieniu do teorii sformalizowanych, w których nie powinno być żadnych wątpliwości co do tego, jakimi wyrażeniami wolno w nich operować i na jakiej zasadzie uznaje się w nich pewne wyrażenia za twierdzenia. Reguła definiowania nie różni się zasadniczo od innych reguł dowodzenia, które znamy z Rozdziału III (§ 3): tak jak i tamte reguły pozwala ona uznawać pewne zdania za prawdziwe (i jest równie jak one oczywista). Nie ma więc powodu, by traktować regułę definiowania inaczej, niż pozostałe reguły [1]).

Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie. Jeśli funkcja zdaniowa $\Phi(x)$ jest jednostkowa, to w teorii, w której przyjęta jest definicja

(5) $$\lambda \underset{df}{=} (\iota x)\Phi(x),$$

równoważności

(6) $$\prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \equiv \Psi(\lambda) \quad \text{i} \quad \Psi(\lambda) \equiv \sum_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)].$$

są twierdzeniami dla każdej funkcji zdaniowej $\Psi(x)$, zawierającej zmienną x jako zmienną wolną [2]).

[1]) Jak w wielu innych działach logiki, tak i tu Frege pierwszy scharakteryzował należycie rolę, jaką grają definicje. Oto co pisze on w *Grundlagen der Arithmetik* na str. 78: „Definicja przedmiotu jako taka nie mówi o nim właściwie nic, tylko ustala znaczenie znaku. Gdy jednak zostało to już dokonane, definicja zamienia się w sąd dotyczący przedmiotu; nie określa go już ona, lecz stoi w równym rzędzie z innymi o nim wypowiedziami".

Potrzebę dokładnego sformułowania reguły definiowania podkreślał dobitnie Leśniewski; podał on ścisłe sformułowanie tej reguły w odniesieniu do stworzonych przez siebie systemów logiki (por. pracę Leśniewskiego cytowaną na str. 214).

[2]) $\Psi(x)$ może zawierać i inne zmienne wolne, różne od zmiennej x.

Dowód. Z tautologii logicznej $\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \cdot \Phi(\lambda) \to \Psi(\lambda)$ otrzymujemy

$$\vdash \Phi(\lambda) \to \{\prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \to \Psi(\lambda)\}.$$

Ponieważ zaś zgodnie z (5) i regułą definiowania wyrażenie $\Phi(\lambda)$ jest twierdzeniem, więc stosując operację odrywania, otrzymamy

$$\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \to \Psi(\lambda). \tag{7}$$

Z tautologii $\vdash \Phi(\lambda) \to [\Psi(\lambda) \to \Phi(\lambda) \cdot \Psi(\lambda)]$ otrzymujemy przez oderwanie poprzednika

$$\vdash \Psi(\lambda) \to \Phi(\lambda) \cdot \Psi(\lambda),$$

a stąd na mocy tautologii logicznej $\vdash \Phi(\lambda) \cdot \Psi(\lambda) \to \sum_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)]$ wynika

$$\vdash \Psi(\lambda) \to \sum_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)]. \tag{8}$$

Zauważmy na koniec, że z założenia, iż funkcja zdaniowa $\Phi(x)$ jest jednostkowa, wynika

$$\vdash \Phi(x) \cdot \Phi(y) \to (x = y),$$

skąd

$$\vdash \Phi(x) \cdot \Phi(y) \cdot \Psi(y) \to (x = y) \cdot \Psi(y).$$

Ponieważ zaś zgodnie z prawem ekstensjonalności

$$\vdash (x = y) \cdot \Psi(y) \to \Psi(x),$$

więc wnosimy, że

$$\vdash \Phi(x) \cdot \Phi(y) \cdot \Psi(y) \to \Psi(x).$$

Przez proste przekształcenie logiczne otrzymujemy stąd dalej

$$\vdash \Phi(y) \cdot \Psi(y) \to [\Phi(x) \to \Psi(x)],$$

po czym dołączamy kwantyfikator duży w następniku, a mały w poprzedniku. Zmieniając jeszcze zmienną związaną y na zmienną związaną x, otrzymujemy

$$\vdash \sum_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)] \to \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)]. \tag{9}$$

Równoważności (6) wynikają od razu z (7), (8) i (9).

Udowodnione w ten sposób twierdzenie stosować możemy w dwu kierunkach.

Po pierwsze, możemy dzięki temu twierdzeniu skracać wzory logiczne, wprowadzając odpowiednie definicje. Wyrażenie $\Psi(\lambda)$ jest zwykle krótsze, niż każde z wyrażeń

$$\prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)], \qquad \sum_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)],$$

a wszystkie trzy wyrażenia są równoważne.

Po drugie, możemy stosować równoważności (6) do eliminowania symbolu zdefiniowanego. Równoważności te pokazują bowiem, że *każde wyrażenie, w którym występuje stała zdefiniowana, jest równoważne pewnym wyrażeniom, w których stała ta nie występuje.*

§ 2. Przykłady definicji. 1. W elementarnej teorii grup (Rozdział IX, § 3, str. 236, teoria II) udowodniliśmy, że funkcja zdaniowa $\prod_{z \in L} [\sigma(z, x, z) \cdot \sigma(z, z, x)]$ jest jednostkowa. Możemy zatem wprowadzić definicję

$$e \underset{df}{=} (\iota x) \{(x \in L) \cdot \prod_{z \in L} [\sigma(z, x, z) \cdot \sigma(z, z, x)]\}.$$

Zdania $\prod_{z \in L} [\sigma(z, e, z)]$ i $\prod_{z \in L} [\sigma(z, z, e)]$ są więc twierdzeniami; e nazywa się *modułem* grupy.

2. W pełnej teorii liczb rzeczywistych (Rozdział IX, § 4, str. 242, teoria VII) można udowodnić, że funkcja zdaniowa $\Phi(X)$ określona w następujący sposób jest jednostkowa:

$$(0 \in X) \cdot \prod_{x,y \in L} [x \in X \cdot \sigma(y, x, 1) \to y \in X] \cdot$$

$$\cdot \prod_Y \{(0 \in Y) \cdot \prod_{x,y \in L} [x \in Y \cdot \sigma(y, x, 1) \to y \in Y] \to X \subset Y\}.$$

$\Phi(X)$ orzeka oczywiście, że X jest najmniejszym zbiorem, który zawiera 0 i ma tę własność, że wraz z każdym swym elementem x zawiera też sumę x i 1.

Wobec jednostkowości funkcji zdaniowej $\Phi(X)$ wprowadzić możemy definicję

$$N \underset{df}{=} (\iota X) \Phi(X).$$

N nazywamy *zbiorem liczb naturalnych.*

Podobnie można wykazać, że funkcja zdaniowa $\Psi(X)$, określona jako

$$\prod_x \{x \in X \equiv \sum_{y,z \in L} [(y \in N) \cdot (z \in N) \cdot (z \neq 0) \cdot \pi(y, x, z)]\},$$

jest jednostkowa. Definicja

$$W \underset{df}{=} (\iota X)\, \Psi(X)$$

określa *zbiór liczb wymiernych.*

3. Ostatni przykład definicji można uogólnić jak następuje.

Niech $\Psi(x)$ będzie funkcją zdaniową o jednej zmiennej wolnej x typu c. Załóżmy, że w rozpatrywanej teorii występują zmienne typu (c); niech np. X i Y będą takimi zmiennymi.

Funkcja zdaniowa

$$\prod_x [x \in X \equiv \Psi(x)]$$

jest wówczas jednostkowa. Istotnie, zdanie $\sum_X \prod_x [x \in X \equiv \Psi(x)]$ jest twierdzeniem na mocy pewnika definicyjnego, zdanie zaś

$$\prod_x [x \in X \equiv \Psi(x)] \cdot \prod_x [x \in Y \equiv \Psi(x)] \to X = Y$$

jest również twierdzeniem z uwagi na to, że równość między zbiorami pojmujemy jako równość zakresową (por. Rozdział IX, § 1, str. 226).

W myśl reguły definiowania możemy więc przyjąć definicję

$$\lambda \underset{df}{=} (\iota X) \prod_x [x \in X \equiv \Psi(x)].$$

Zbiór λ oznaczaliśmy w poprzednich rozdziałach symbolem $(\hat{x})[\Psi(x)]$.

W podobny sposób dowodzi się, że dla każdej funkcji zdaniowej $\Psi(x, y)$ o dwu zmiennych wolnych, których typy są rzędu niższego niż rząd teorii, można przyjąć definicję

$$\varrho \underset{df}{=} (\iota R) \prod_{xy} [xRy \equiv \Psi(x, y)].$$

Zamiast symbolu ϱ używaliśmy w poprzednich rozdziałach symbolu $(\hat{x}, \hat{y})[\Psi(x, y)]$.

4. W arytmetyce liczb naturalnych (Rozdział IX, § 4, str. 243, teoria VIII) można udowodnić, że następująca funkcja zdaniowa $\Phi(U)$:

$$(10) \quad \begin{aligned} &(U \textit{ jest jednoznaczne względem pierwszego argumentu}) \cdot \\ &\cdot \prod_{x \in L} U(x, x, 0) \cdot \prod_{x,y,z,u,v \in L} [U(x, y, z) \cdot N(x, u) \cdot N(z, v) \to U(u, y, v)] \end{aligned}$$

jest jednostkowa. Definicja

$$\sigma \underset{df}{=} (\iota U)\, \Phi(U)$$

określa relację trójczłonową σ, która zachodzi między liczbami x, y i z wtedy i tylko wtedy, gdy x jest sumą y i z.

Rozpatrzmy w związku z tym przykładem, jak z punktu widzenia omówionych dotychczas reguł definiowania przedstawia się poprawność tak zwanych definicji indukcyjnych, które rozpatrywaliśmy w Rozdziale VII, § 6. Równości (30), podane tam na str. 187, po związaniu zmiennych $\mathfrak{X}$ i $\mathfrak{Y}$ kwantyfikatorami ogólnymi stają się funkcją zdaniową o jednej zmiennej wolnej, przebiegającej zbiór relacji trójczłonowych jednoznacznych względem pierwszego argumentu. Aby móc wprowadzić definicję, w której ta funkcja zdaniowa gra rolę definiensu, trzeba najpierw wykazać, że jest ona funkcją zdaniową jednostkową. Inaczej mówiąc, zanim przyjmiemy definicję, musimy dowieść, że istnieje dokładnie jedna relacja trójczłonowa jednoznaczna (względem pierwszego argumentu), spełniająca dla dowolnych $\mathfrak{X}$ i $\mathfrak{Y}$ wzory (30). Taki też był w zasadzie sens dowodów tam podanych. Dowód, że funkcja zdaniowa (10) jest jednostkowa, przebiega w sposób zbliżony do nich.

5. W teorii przestrzeni topologicznych (Rozdział IX, § 4, str. 247, teoria X) wprowadza się m. in. definicje następujące:

$$W \underset{df}{=} (\iota \mathfrak{R}) \prod_{X,Y \subset P} [\mathfrak{R}(X, Y) \equiv D(P - X, P - Y)],$$

$$F \underset{df}{=} (\iota \mathfrak{R}) \prod_{X,Y \subset P} \{\mathfrak{R}(X, Y) \equiv \sum_{Z,T \subset P} [D(X, Z) \cdot D(P - X, T) \cdot (Y = Z \cdot T)]\}.$$

Funkcję zdaniową $W(X, Y)$ czytamy: *Y jest wnętrzem X*, a funkcję zdaniową $F(X, Y)$ czytamy: *Y jest ograniczeniem zbioru X* [1]).

Na zakończenie zbadajmy jeszcze, czy można tak zmodyfikować regułę definiowania, by definiens nie musiał być funkcją zdaniową jednostkową.

Otóż okazuje się, że gdybyśmy dopuścili jako definiensy funkcje zdaniowe $\Phi(x)$, nie spełniające warunku

$$\vdash \sum_x \Phi(x),$$

to moglibyśmy łatwo dojść do sprzeczności.

Rozpatrzmy np. funkcję zdaniową

$$(x \in L) \cdot \prod_{y \in L} [(y < x) + (y = x)].$$

[1]) Por. K. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne, tom 3, Warszawa-Lwów 1933, str. 24.

Gdyby wolno było przyjąć w elementarnej teorii nierówności (Rozdział IX, § 3, str. 232, teoria I) definicję

$$(11) \qquad \lambda \underset{df}{=} (\iota x)\{(x \in L)\cdot \prod_{y \in L}[(y<x)+(y=x)]\},$$

to mielibyśmy w tej teorii twierdzenie

$$\vdash (\lambda \in L)\cdot \prod_{y \in L}[(y<\lambda)+(y=\lambda)],$$

skąd wynikłoby na mocy twierdzenia 19 (str. 234) $\vdash \prod_{y \in L}(\lambda < y)'$, a więc też

$$\vdash \sum_{x \in L}\prod_{y \in L}(x<y)'.$$

Po dołączeniu definicji (11) teoria I stałaby się więc sprzeczna, bo wśród jej twierdzeń figurowałoby zaprzeczenie aksjomatu I4 i wobec tego każde wyrażenie (mające sens w tej teorii) stałoby się twierdzeniem (por. dalej, Rozdział XI, § 3, twierdzenie 1).

Przyczyną powstania sprzeczności jest tu oczywiście to, że w definicji (11) definiens nie jest funkcją zdaniową jednostkową, a mianowicie nie spełnia warunku (1); warunek (2) jest — jak łatwo dowieść — spełniony.

Na podstawie tych uwag łatwo pojąć, jaki popełnia się błąd logiczny, gdy w matematyce szkolnej określa się pierwiastek kwadratowy z a jako liczbę dodatnią, której kwadrat równa się a, czy też $\lg a$ jako wykładnik potęgi, do której należy podnieść 10, aby otrzymać a. Na to, by te wyrażenia można było istotnie uznać za definicje, trzeba najpierw dowieść istnienia (dokładnie jednej) takiej liczby dodatniej, że jej kwadrat jest równy a, jak również istnienia (dokładnie jednej) takiej liczby x, że $10^x = a$.

Inaczej zupełnie ułożyłyby się stosunki, gdybyśmy od definiensu wymagali wprawdzie spełnienia warunku (1), lecz nie wymagali spełnienia warunku (2). Można wykazać, że definicje takie nie prowadziłyby do sprzeczności, ale nie zachodziłyby dla nich równoważności (6); zamiast tych równoważności można by udowodnić tylko implikacje (7) i (8). Wskutek tego znikłaby możność wyeliminowania stałych zdefiniowanych i każda definicja byłaby czymś więcej niż prostym nadaniem nazwy [1]).

[1]) Definicje, w których definiens nie spełnia warunku (2), są zbliżone do t. zw. *aksjomatu epsilonowego*, rozpatrywanego przez Hilberta i jego szkołę. Por. D. Hilbert i P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, tom 2, Lipsk-Berlin 1939, § 1, str. 9 i następne.

ĆWICZENIA. 1. Przeprowadzić w arytmetyce liczb naturalnych (Rozdział IX, § 4, str. 243, teoria VIII) dowód, że funkcja zdaniowa (10) jest jednostkowa, i wykazać łączność działania σ, zdefiniowanego tą funkcją zdaniową.

2. Opierając się na wyniku ćwiczenia 1 i wprowadzając definicje:

$$1 \underset{df}{=} (\iota x)[(x \in L)\cdot N(0,x)], \qquad 2 \underset{df}{=} (\iota x)[(x \in L)\cdot N(1,x)],$$

$$3 \underset{df}{=} (\iota x)[(x \in L)\cdot N(2,x)], \qquad 4 \underset{df}{=} (\iota x)[(x \in L)\cdot N(3,x)],$$

udowodnić, że $\vdash \sigma(4,2,2)$.

Wsk.: Z definicji wynika, że $\vdash \sigma(4,3,1)$, $\vdash \sigma(3,2,1)$ i $\vdash \sigma(2,1,1)$, po czym stosujemy łączność działania σ [1]).

§ 3. Twierdzenia o eliminowaniu definicji. Jak to zaznaczyliśmy już w § 1 (str. 251), przyjęcie reguły definiowania stanowi rozszerzenie listy reguł dowodzenia, w związku z czym zasób twierdzeń teorii wyposażonej w regułę definiowania jest obszerniejszy niż teorii, w której reguły definiowania się nie przyjmuje.

Jest jasne, że zdanie zawierające symbol zdefiniowany nie może być udowodnione bez odwoływania się do reguły definiowania, chyba że jest ono tautologią logiczną (por. Rozdział IX, § 1, str. 224). Zjawia się natomiast pytanie, czy zdanie nie zawierające żadnego symbolu zdefiniowanego może stać się po przyjęciu odpowiednich definicji twierdzeniem teorii, mimo że poprzednio, przed wprowadzeniem definicji, nie było twierdzeniem.

Udowodnimy dwa twierdzenia, które dają odpowiedź przeczącą na to pytanie.

Pierwsze twierdzenie o eliminowaniu definicji. Jeśli $\Phi(x)$ jest funkcją zdaniową jednostkową teorii sformalizowanej T i przyjęta jest definicja

$$(12) \qquad \lambda \underset{df}{=} (\iota x)\,\Phi(x),$$

jeśli dalej $\Psi(\lambda)$ jest twierdzeniem teorii T rozbogaconej definicją (12), a zmienna x nie występuje w $\Psi(\lambda)$, to zdania

$$\prod_x[\Phi(x) \to \Psi(x)] \qquad i \qquad \sum_x[\Phi(x)\cdot\Psi(x)]$$

są także twierdzeniami i istnieją takie ich dowody sformalizowane, w których nie figuruje stała λ.

[1]) Dowód ten pochodzi od Leibniza, który zresztą nie zauważył, że założenie łączności działania σ gra w nim istotną rolę; por. G. Frege, *Grundlagen der Arithmetik*, Wrocław 1934, str. 7.

Dowód. Z założenia, że $\Psi(\lambda)$ jest twierdzeniem teorii rozszerzonej przez przyjęcie definicji (12), wnosimy, że istnieje dowód sformalizowany zdania $\Psi(\lambda)$, t. j. taki ciąg zdań lub funkcji zdaniowych

$$A_0, A_1, \ldots, A_n, \tag{13}$$

że A_n jest identyczne z $\Psi(\lambda)$, każde zaś A_i dla $i=0,1,2,\ldots,n$ spełnia jeden z następujących warunków:

1^0 A_i powstaje przez podstawienie z tautologii rachunku zdań, lub z aksjomatu definicyjnego, lub z aksjomatu ekstensjonalności, albo też A_i jest jednym z aksjomatów teorii lub zdaniem $\Phi(\lambda)$;

2^0 A_i powstaje z jednej lub z dwu funkcji zdaniowych A_j, A_k (gdzie $j<i$ oraz $k<i$) przez zastosowanie operacji podstawiania, albo odrywania, albo opuszczania kwantyfikatora (dużego lub małego), albo dołączania kwantyfikatora (dużego lub małego), albo uogólniania.

Możemy założyć, że zmienna x nie występuje w żadnym z wyrażeń $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Będziemy oznaczali symbolem $A_i(x)$ wyrażenie powstające z A_i przez zastąpienie stałej λ zmienną x. Jeśli więc A_i nie zawiera w ogóle stałej λ, to $A_i(x)$ jest tym samym wyrażeniem co A_i.

Wykażemy teraz przez indukcję względem i, że wyrażenie

$$\Phi(x) \to A_i(x) \tag{14}$$

jest twierdzeniem i że istnieje taki jego dowód sformalizowany, w którym nie występuje stała λ.

Załóżmy najpierw, że $i=0$; wówczas zachodzi oczywiście przypadek 1^0. Jest jasne, że jeśli A_0 powstaje z tautologii rachunku zdań przez podstawienie za zmienne zdaniowe pewnych funkcji zdaniowych, to $A_0(x)$ powstaje też z tej samej tautologii rachunku zdań przez podstawienie. Wobec tautologii $\vdash q \to (p \to q)$ wnosimy stąd, że $\Phi(x) \to A_0(x)$ jest tautologią logiczną, w której dowodzie nie figuruje stała λ.

Jeśli A_0 powstaje z aksjomatu definicyjnego lub z aksjomatu ekstensjonalności przez podstawienie stałych specyficznych rozważanej tu teorii $\boldsymbol{T}$ zamiast pewnych zmiennych, to $A_0(x)$ powstaje również przez podstawienie z tych samych aksjomatów. Wystarczy mianowicie zastąpić stałą λ przez zmienną x, aby

z podstawienia prowadzącego do A_0 otrzymać podstawienie prowadzące do $A_0(x)$. Zatem $A_0(x)$, a więc i $\Phi(x) \to A_0(x)$, jest twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$ i w dowodzie tego twierdzenia nie figuruje stała λ.

Jeśli, dalej, A_0 jest aksjomatem teorii $\boldsymbol{T}$, to $A_0(x)$ jest identyczne z A_0, a więc $\Phi(x) \to A_0(x)$ jest twierdzeniem, w którego dowodzie, polegającym na zastosowaniu reguły odrywania do tautologii logicznej $A_0 \to [\Phi(x) \to A_0]$, nie figuruje stała λ.

Jeśli, wreszcie, A_0 jest wyrażeniem $\Phi(\lambda)$, to $\Phi(x) \to A_0(x)$ jest tautologią logiczną $\Phi(x) \to \Phi(x)$.

Dla $i=0$ twierdzenie jest więc udowodnione.

Załóżmy teraz, że $0<j\leqslant n$ i że wyrażenie (14) jest dla $i<j$ twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$, w którego dowodzie nie występuje stała λ. Wykażemy, że tę samą własność ma wyrażenie (14) dla $i=j$.

Jeśli A_j spełnia warunek 1^0, to możemy rozumować tak samo jak w przypadku $i=0$. Załóżmy zatem, że A_j spełnia warunek 2^0, t. j. że A_j powstaje z jednej lub dwu funkcji zdaniowych A_k, A_l (gdzie $k<j$ oraz $l<j$) przez zastosowanie jednej z reguł wnioskowania. Musimy rozpatrzeć siedem różnych przypadków, stosownie do tyluż reguł wnioskowania (por. Rozdział III, § 3).

Reguła podstawiania. Jeśli A_j powstaje z A_k przez podstawienie zamiast pewnej zmiennej wolnej, występującej w A_k, innej zmiennej wolnej lub stałej specyficznej, różnej od stałej λ, to — z uwagi na założenie, że zmienna x nie występuje ani w A_j, ani w A_k — wnosimy łatwo, że wyrażenie $A_j(x)$ otrzymamy z $A_k(x)$, dokonując tego samego podstawienia, które prowadziło od A_k do A_j.

Jeśli natomiast A_j powstaje z A_k przez podstawienie zamiast zmiennej y stałej λ, to $A_j(x)$ powstaje z $A_k(x)$ przez podstawienie zmiennej x za zmienną y.

Ponieważ w $\Phi(x)$ jedyną zmienną wolną jest zmienna x, więc w obu wypadkach wyrażenie $\Phi(x) \to A_j(x)$ powstaje z $\Phi(x) \to A_k(x)$ przez podstawienie. W myśl założenia wyrażenie $\Phi(x) \to A_k(x)$ jest twierdzeniem, w którego dowodzie nie występuje stała λ; tę samą własność ma zatem wyrażenie $\Phi(x) \to A_j(x)$, gdyż stała λ nie pojawia się przy podstawianiu.

Reguła odrywania. Jeśli A_j powstaje z A_k i z A_l przez odrywanie, to A_k ma postać $A_l \to A_j$. Wynika stąd, że $A_k(x)$ ma postać $A_l(x) \to A_j(x)$. W myśl założenia wyrażenia $\Phi(x) \to A_l(x)$ i $\Phi(x) \to [A_l(x) \to A_j(x)]$ są twierdzeniami teorii $\boldsymbol{T}$, w których dowodach nie figuruje stała λ. Wobec tautologii

$$\vdash [p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$$

wnosimy stąd, stosując regułę odrywania, że i wyrażenie

$$[\Phi(x) \to A_l(x)] \to [\Phi(x) \to A_j(x)]$$

jest takim twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$. Stosując raz jeszcze regułę odrywania, wnosimy dalej, że wyrażenie $\Phi(x) \to A_j(x)$ jest twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$, w którego dowodzie nie figuruje stała λ.

Reguła opuszczania dużego kwantyfikatora. Jeśli A_j powstaje z A_k przez stosowanie reguły opuszczania dużego kwantyfikatora, to A_k ma postać $B \to \prod_v C(v)$, A_j zaś — postać $B \to C(v)$, gdzie v jest dowolną zmienną (oczywiście różną od zmiennej x). Wnosimy stąd, że $A_k(x)$ ma postać $B(x) \to \prod_v C(v,x)$, A_j zaś — postać $B(x) \to C(v,x)$, gdzie symbole $B(x)$ i $C(v,x)$ oznaczają wyrażenia powstające z B i $C(v)$ przez zastąpienie stałej λ zmienną x. Z założenia wynika, że wyrażenie

$$\Phi(x) \to [B(x) \to \prod_v C(v,x)]$$

jest twierdzeniem, w którego dowodzie nie figuruje stała λ. Wobec tautologii $\vdash [p \to (q \to r)] \equiv (p \cdot q \to r)$ wnosimy stąd, że tę samą własność ma też wyrażenie $\Phi(x) \cdot B(x) \to \prod_v C(v,x)$, a więc (na mocy reguły opuszczania dużego kwantyfikatora) również wyrażenie $\Phi(x) \cdot B(x) \to C(v,x)$. Stosując raz jeszcze użytą poprzednio tautologię rachunku zdań, wnosimy stąd, że i wyrażenie $\Phi(x) \to [B(x) \to C(v,x)]$ czyli wyrażenie $\Phi(x) \to A_j(x)$ ma też tę samą własność.

Rozumowanie w przypadku, gdy A_j powstaje z A_k przez stosowanie reguły opuszczania małego kwantyfikatora, jest zbliżone do poprzedniego i nie będziemy go tu przytaczali.

Reguła dołączania dużego kwantyfikatora. Jeśli A_j powstaje z A_k przez stosowanie reguły dołączania dużego kwantyfikatora, to A_k ma postać $B \to C(v)$, przy czym zmienna v, nie występuje w B jako zmienna wolna, A_j zaś ma postać $B \to \prod_v C(v)$. Na mocy założenia wyrażenie $\Phi(x) \to [B(x) \to C(v,x)]$ jest twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$ i w dowodzie tego twierdzenia nie figuruje stała λ. Dokonując tego samego przekształcenia co poprzednio, wnosimy stąd, że wyrażenie $\Phi(x) \cdot B(x) \to C(v,x)$ ma tę samą własność. Ponieważ zmienna v nie jest wolna w poprzedniku, więc i wyrażenie $\Phi(x) \cdot B(x) \to \prod_v C(v,x)$ jest też twierdzeniem, w którego dowodzie nie figuruje stała λ, skąd opierając się na tej samej tautologii rachunku zdań co poprzednio, wnosimy, że tę samą własność ma również wyrażenie $\Phi(x) \to [B(x) \to \prod_v C(v,x)]$ czyli $\Phi(x) \to A_j(x)$.

Pomijamy zbliżone do poprzedniego rozumowanie w przypadku, gdy A_j powstaje z A_k przez stosowanie reguły dołączania małego kwantyfikatora.

Reguła uogólniania. Jeśli A_j powstaje z A_k przez stosowanie reguły uogólniania, to A_j jest identyczne z $\prod_v A_k$, gdzie v jest pewną zmienną (oczywiście różną od zmiennej x). Wynika stąd, że $A_j(x)$ jest identyczne z $\prod_v A_k(x)$, ponieważ zaś z założenia wiemy, że implikacja $\Phi(x) \to A_k(x)$ jest takim twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$, w którego dowodzie nie figuruje stała λ, więc stosując regułę dołączania dużego kwantyfikatora w następniku, wnosimy stąd, że i wyrażenie $\Phi(x) \to \prod_v A_k(x)$ czyli $\Phi(x) \to A_j(x)$ ma tę samą własność.

Dowód indukcyjny został tym samym zakończony.

Przyjmując teraz w (14) $i = n$, wnosimy, że implikacja

$$\Phi(x) \to \Psi(x)$$

jest twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$, w którego dowodzie nie figuruje stała λ. Stosując regułę uogólniania, wnosimy stąd, że tę samą własność ma wyrażenie

$$\prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)]. \tag{15}$$

Ponieważ nadto zachodzi tautologia logiczna

$$\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \to \{\sum_x \Phi(x) \to \sum_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)]\},$$

więc stosując dwukrotnie regułę odrywania i założenie, że $\sum_x \Phi(x)$ jest twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$, wnosimy, że i wyrażenie

$$\sum_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)] \tag{16}$$

jest twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$, w którego dowodzie nie figuruje stała λ.

Pierwsze twierdzenie o eliminowaniu definicji jest tym samym dowiedzione.

Zauważmy, że z założenia jednostkowości funkcji zdaniowej $\Phi(x)$ korzystaliśmy tylko po to, aby móc napisać definicję (12); w ostatnim zaś punkcie dowodu skorzystaliśmy tylko z tego, że

$\Phi(x)$ czyni zadość warunkowi (1). Warunek (2) nie był w ogóle użyty w dowodzie, część zaś twierdzenia dotycząca wyrażenia (15) jest niezależna zarówno od (1) jak od (2). Ta okoliczność ma pewne znaczenie przy rozważaniu definicji, w których definiens nie spełnia warunku (2); por. końcowe uwagi w § 2, str. 256.

Znaczenie udowodnionego twierdzenia wyjaśnia następująca uwaga: z twierdzenia udowodnionego w § 1 (str. 251) wiemy, że każde z wyrażeń (15) i (16) jest w teorii wzbogaconej przez definicję (12) równoważne wyrażeniu $\Psi(\lambda)$. Obecnie dowiedzieliśmy się, że jeśli $\Psi(\lambda)$ jest twierdzeniem, to wyrażenia (15) i (16) są twierdzeniami teorii $\boldsymbol{T}$, nie wzbogaconej przez tę definicję. Rola definicji (12) sprowadza się więc do tego, aby od wyrażeń (15) i (16) przejść do krótszego wyrażenia $\Psi(\lambda)$; jeśli zatem nie idzie nam o skrócenie wzoru, to definicja (12) jest zbędna.

Jako prosty wniosek otrzymujemy teraz

Drugie twierdzenie o eliminowaniu definicji. Przy założeniach pierwszego twierdzenia o eliminowaniu definicji każde wyrażenie Ψ, które

1° *jest twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$ wzbogaconej definicją* (12),

2° *nie zawiera stałej λ,*

jest też twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$ nie wzbogaconej definicją (12).

Dowód. $\Psi(x)$ jest w danym razie identyczne z Ψ, ponieważ zaś w myśl pierwszego twierdzenia o eliminowaniu definicji wyrażenie $\prod_x[\Phi(x) \to \Psi]$ jest twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$ nie wzbogaconej definicją (12), więc stosując tautologię logiczną

$$\vdash \prod_x[\Phi(x) \to \Psi] \to [\sum_x \Phi(x) \to \Psi]$$

(por. Rozdział III, § 4, wzór (9), str. 62), regułę odrywania oraz założenie $\vdash \sum_x \Phi(x)$, otrzymamy wniosek, że Ψ jest twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$ nie zawierającej definicji (12), c. b. d. o.

Drugie twierdzenie o eliminowaniu definicji wykazuje, że reguła definiowania nie może wzbogacić listy twierdzeń wyrażeniami, w których nie występuje stała zdefiniowana.

Teoretycznie biorąc, definicje są zatem zbędne. Wprawdzie pozwalają one skracać wzory, ale na tym kończy się ich rola. Należy jednakże podkreślić ich doniosłość psychologiczną: „jeśli

porzucimy punkt widzenia ściśle logiczny" — pisze Whitehead[1]) — „to spostrzeżemy od razu, że definicje, pozostając formalnie tylko nadaniem nazwy, stają się najważniejszą częścią teorii. Akt nadawania nazw jest w istocie rzeczy dokonaniem wyboru rozmaitych pojęć złożonych, które mają być przedmiotem badań".

ĆWICZENIE. Wykazać, że definicje postaci $\lambda \underset{df}{=} (\iota x)\,\Phi(x)$ nie prowadzą do sprzeczności, jeśli $\vdash \Sigma_x \Phi(x)$.

Wsk.: W przeciwnym razie w teorii uzupełnionej takimi definicjami można by udowodnić twierdzenie $\Psi \cdot \Psi'$, gdzie Ψ nie zawiera stałych zdefiniowanych. Stosując rozumowanie takie jak w dowodzie pierwszego twierdzenia o eliminowaniu, doszlibyśmy do wniosku, że $\Pi_x[\Phi(x) \to \Psi \cdot \Psi']$ jest twierdzeniem teorii nie wzbogaconej definicjami, skąd wynikłoby, że negacja zdania $\Sigma_x \Phi(x)$ jest twierdzeniem. Pierwotnie dana teoria byłaby więc sprzeczna.

§ 4. Uzupełnienia i rozszerzenia reguły definiowania. Reguła definiowania, przyjęta w § 1, domaga się istotnego uzupełnienia. Sformułowanie tej reguły umożliwia wprowadzenie stałej specyficznej typu c tylko wtedy, gdy w wyrażeniach teorii występują zmienne typu c (w przeciwnym bowiem razie nie mielibyśmy możności napisania twierdzeń (1) i (2), które muszą poprzedzać wprowadzenie definicji). W teorii elementarnej nie możemy więc wprowadzić na podstawie tej reguły żadnej nowej stałej specyficznej typu różnego od *. Tak np. w elementarnej teorii nierówności nie możemy na podstawie dotychczasowej reguły definiowania wprowadzić symbolu $\geqslant$.

Aby umożliwić wprowadzanie tych definicji, przyjmujemy dla teorii rzędu n następującą regułę:

Uzupełniona reguła definiowania. Jeśli $\Phi(x, y, \ldots, u)$ jest funkcją zdaniową o k zmiennych wolnych, odpowiednio typów $c_1, c_2, \ldots, c_k$, i jeśli choć jeden z tych typów ma rząd n, to wolno powiększyć listę stałych specyficznych o stałą A, która przed tym w wyrażeniach teorii nie występowała; stałej tej przypisujemy typ $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$. Jednocześnie uznajemy za nowy aksjomat zdanie

$$\prod_{xy\ldots u}[A(x, y, \ldots, u) \equiv \Phi(x, y, \ldots, u)]. \tag{17}$$

Stosując tę regułę definiowania, będziemy pisali krótko

$$A \underset{df}{=} (\hat{x}, \hat{y}, \ldots, \hat{u})\,\Phi(x, y, \ldots, u).$$

[1]) A. N. Whitehead, *Axioms of projective geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics and Physics, № 4 (1913), str. 2.

PRZYKŁADY. W elementarnej teorii nierówności (Rozdział IX, § 3, str. 252, teoria I) definiujemy symbol $\geqslant$ wzorem

$$\geqslant \overline{\underline{df}} (\hat{x}, \hat{y})[(x \in L)\cdot(y \in L)\cdot(x < y)'].$$

W elementarnej teorii grup (Rozdział IX, § 3, str. 234, teoria II) definiujemy centrum grupy wzorem

$$C \overline{\underline{df}} (\hat{x})\{(x \in L)\cdot \prod_{z,y \in L}[\sigma(z,x,y) \equiv \sigma(z,y,x)]\}.$$

W elementarnej geometrii rzutowej (Rozdział IX, § 3, str. 240, teoria VI) definiujemy relację współpłaszczyznowości czterech punktów wzorem

$$W \overline{\underline{df}} (\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{t})\left((x,y,z,t \in P)\cdot\{L(x,y,z) + \sum_{v \in P}[L(v,y,z)\cdot L(v,x,t)]\}\right)$$

oraz relację harmonicznego sprzężenia dwu par punktów wzorem

$$H \overline{\underline{df}} (\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{t})\{(x,y,z,t \in P)\cdot$$
$$\cdot \sum_{u,v,w,s \in P}[(u \neq v)\cdot(u \neq w)\cdot(u \neq s)\cdot(v \neq w)\cdot(v \neq s)\cdot(w \neq s)\cdot$$
$$\cdot L(x,u,v)\cdot L(x,w,s)\cdot L(y,u,w)\cdot L(y,v,s)\cdot L(x,y,z)\cdot$$
$$\cdot L(z,v,w)\cdot L(x,y,t)\cdot L(t,u,s)]\}.$$

Twierdzenia o eliminowaniu definicji przenoszą się na definicje typu (17), nie będziemy się tym jednak bliżej zajmowali.

Wspomnieliśmy w Rozdziale IX, § 1, str. 228, że przy zapisywaniu twierdzeń teorii sformalizowanych dogodnie jest w wielu wypadkach używać symbolów, oznaczających wartość funkcji. Symbole takie można wprowadzać na podstawie następującej reguły definiowania:

Rozszerzona reguła definiowania. Jeśli $\Phi(x,y,\ldots,u)$ jest funkcją zdaniową o zmiennych wolnych $x,y,\ldots,u$ jakiegokolwiek typu i jeśli

(18) $\vdash \Pi_{y\ldots u}\Sigma_x \Phi(x,y,\ldots,u)$,

(19) $\vdash \Pi_{x_1 x_2 y\ldots u}[\Phi(x_1,y,\ldots,u)\cdot\Phi(x_2,y,\ldots,u)\to(x_1 = x_2)]$,

to wolno wprowadzić do teorii symbol λ oraz aksjomat

$$\Phi[\lambda(y,\ldots,u),y,\ldots,u].$$

Symbol λ nazywa się *funktorem nazwotwórczym*.

Wyrażeniu $\lambda(y,\ldots,u)$ przypisujemy ten sam typ co zmiennej x. Wyrażenie to może być podstawiane za zmienne tego samego typu i mogą w nim być podstawiane za zmienne $y,\ldots,u$ (argumenty funktora) inne zmienne lub stałe, albo funktory nazwotwórcze tego samego typu. Przy stosowaniu reguły podstawiania obowiązują te same zastrzeżenia, jakie były sformułowane w Rozdziale III (§ 3, str. 53, reguła 2).

Intuicyjne znaczenie rozszerzonej reguły definiowania jest jasne: warunki (18) i (19) orzekają, że dla wszelkich $y,\ldots,u$ istnieje dokładnie jedno x takie, że $\Phi(x,y,\ldots,u)$. To jedyne x oznaczamy właśnie symbolem $\lambda(y,\ldots,u)$.

Stosując rozszerzoną regułę definiowania, możemy pisać podobnie jak w § 1

(20) $$\lambda(y,\ldots,u) \overline{\underline{df}} (\iota x)\,\Phi(x,y,\ldots,u).$$

PRZYKŁADY. W teorii grup (Rozdział IX, § 3, teoria II, str. 234) wprowadzić możemy definicję

$$y^{-1} \overline{\underline{df}} (\iota x)[(x \in L)\cdot\sigma(e,x,y)];$$

symbol funktora piszemy tu za zmienną. Podobnie wprowadzić możemy definicję

$$x\cdot y \overline{\underline{df}} (\iota z)[(z \in L)\cdot\sigma(z,x,y)].$$

W teorii liczb rzeczywistych (Rozdział IX, § 3, teoria IV, str. 237) wprowadzić możemy definicje:

$$x+y \overline{\underline{df}} (\iota z)[(z \in L)\cdot\sigma(z,x,y)], \qquad x-y \overline{\underline{df}} (\iota z)[(z \in L)\cdot\sigma(x,z,y)],$$

$$x\cdot y \overline{\underline{df}} (\iota z)[(z \in L)\cdot\pi(z,x,y)] \qquad \text{i t. p.}$$

Już z tych kilku przykładów widzimy, że dopiero wprowadzając definicje tego typu, możemy upodobnić symbolikę do tej, jaka jest zazwyczaj używana w matematyce.

Mimo to nie będziemy rozważali teorii, w których przyjęta jest rozszerzona reguła definiowania i wspominamy tu o tej regule tylko ubocznie. Przyjęcie jej bowiem komplikuje w znacznym stopniu opis teorii: prócz stałych specyficznych oznaczających indywidua, zbiory lub relacje, zjawiają się w wyrażeniach teorii stałe specyficzne innego rodzaju (funktory nazwotwórcze) i trzeba dokładnie je uwzględniać zarówno przy definiowaniu funkcji zdaniowych jak przy należytym formułowaniu reguły podstawiania.

ĆWICZENIA. 1. Czy definicja $x:y \overline{\underline{df}} (\iota z)[(z \in L)\cdot\pi(x,y,z)]$ jest poprawna w arytmetyce liczb rzeczywistych?

Odp.: Nie, gdyż nie jest spełniony wzór (19).

2. Dowieść drugiego twierdzenia o eliminacji dla definicji (17).

Wsk.: Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będzie dowodem wyrażenia A_n; przez odpowiednią zmianę zmiennych związanych, występujących w Φ, możemy uzyskać to, że żadna ze zmiennych związanych wyrażenia Φ nie występuje w żadnym z wyrażeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Oznaczmy teraz przez A^*_i wyrażenie, które powstaje z A_i przez zastąpienie każdego z występujących w A_i wyrażeń postaci $\Lambda(x_1,y_1,\ldots,u_1)$ przez $\Phi(x_1,y_1,\ldots,u_1)$; podstawienie prowadzące od $\Phi(x,y,\ldots,u)$ do $\Phi(x_1,y_1,\ldots,u_1)$ jest wykonalne, bo żadna ze zmiennych $x_1,y_1,\ldots,u_1$ nie jest związana w $\Phi(x,y,\ldots,u)$. Ciąg wyrażeń $A^*_1, A^*_2, \ldots, A^*_n$ jest dowodem sformalizowanym dla A^*_n i w dowodzie tym nie figuruje stała zdefiniowana Λ.

ROZDZIAŁ XI

ZAGADNIENIA METODOLOGICZNE

Rozwojowi każdego niemal działu nauki towarzyszą rozważania metodologiczne dotyczące tego działu. Tematem tych rozważań jest swoistość metod rozpatrywanego działu nauki, jego tendencje rozwojowe, współzależność różnych jego dziedzin i t. d. Rozważania te z natury rzeczy mają charakter humanistyczny, niededukcyjny. Poszczególne nauki nie są na ogół czymś sprecyzowanym i mogą być uważane np. za zespoły stanów psychicznych niektórych ludzi, raczej niż za ścisłe pojęcia.

Pojęcie sformalizowanej teorii matematycznej nie ma tego mglistego charakteru. Widzieliśmy w Rozdziale IX, że teorię sformalizowaną można określić z tym samym stopniem ścisłości, jaki panuje w matematyce. Teoria sformalizowana jest w zupełności wyznaczona przez podanie zbioru jej wyrażeń, aksjomatów i reguł wnioskowania.

Wobec tej określoności, jaka przysługuje pojęciu teorii sformalizowanej, możliwe są zastosowania dedukcyjnych metod rozumowania w metodologii nauk sformalizowanych. Teorię sformalizowaną możemy badać w taki sposób, jak w matematyce badamy np. liczby albo punkty.

Metodologię teorii sformalizowanych, zbudowaną w sposób dedukcyjny, nazywamy *meta-matematyką* [1]).

[1]) Słowo to wprowadził D. Hilbert. Jedynym zadaniem meta-matematyki miał być jego zdaniem dowód niesprzeczności teorii sformalizowanej, obejmującej całą matematykę. W chwili obecnej wiemy, że teoria taka nie istnieje, a dowód niesprzeczności choćby fragmentarycznych systemów matematyki jest niemożliwy w tych ramach, jakie Hilbert nakreślił meta-matematyce. Tak zwany *program Hilberta* nie został więc wykonany i zapewne nigdy wykonany nie będzie. Program ten pobudził jednak matematyków do studium metodologii dedukcyjnej.

Zapoznamy się obecnie z niektórymi ogólnymi pojęciami i wynikami meta-matematyki, które znajdują zastosowanie przy badaniu każdej teorii sformalizowanej. Rozważania nasze dotyczyć będą dowolnej teorii sformalizowanej $\boldsymbol{T}$, w której nie przyjmuje się reguł definiowania. Zakładać będziemy, że teoria $\boldsymbol{T}$ wspiera się na skończonej liczbie aksjomatów.

§ 1. Twierdzenie o dedukcji [1]). Twierdzenie to orzeka:

Jeśli A jest koniunkcją wszystkich aksjomatów teorii $\boldsymbol{T}$, a T twierdzeniem tej teorii, to implikacja $A \to T$ jest tautologią logiczną.

Dowód. Z założenia wynika, że istnieje dowód sformalizowany wyrażenia T czyli ciąg $T_0, T_1, \ldots, T_n$ wyrażeń teorii $\boldsymbol{T}$, spełniający następujące warunki:

1° T_n jest identyczne z T;

2° dla $i \leqslant n$ wyrażenie T_i jest albo aksjomatem teorii $\boldsymbol{T}$, albo powstaje przez podstawienie z tautologii rachunku zdań lub z jednego z aksjomatów logicznych (definicyjnego lub ekstensjonalności), albo wreszcie istnieją takie liczby $j<i$ oraz $k<i$, że T_i powstaje z T_j i T_k lub tylko z T_j przez zastosowanie jednej z reguł wnioskowania.

Udowodnimy przez indukcję względem i, że implikacja

$$A \to T_i \tag{1}$$

jest tautologią logiczną.

Jeśli $i=0$, to T_i jest albo aksjomatem teorii $\boldsymbol{T}$ albo powstaje z tautologii rachunku zdań lub z aksjomatu logicznego przez podstawienie. W obu przypadkach implikacja (1) jest tautologią logiczną: w pierwszym, gdyż A jest koniunkcją kilku czynników, z których jeden jest identyczny z T_i; w drugim, gdyż implikacja, której następnik jest tautologią logiczną, sama jest też tautologią logiczną.

Załóżmy teraz, że $0<l\leqslant n$ i że twierdzenie jest prawdziwe dla $0\leqslant i<l$. Wykażemy, że implikacja (1) jest dla $i=l$ tautologią logiczną.

[1]) Ważne to twierdzenie udowodnili jednocześnie (i niezależnie od siebie) J. Herbrand w pracy *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, Nr 33 (1930), str. 61 i A. Tarski w pracy *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik*, Sprawozdania Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, tom 23 (1930), str. 22–29.

Jeśli T_l powstaje przez podstawienie z tautologii rachunku zdań lub z aksjomatów logicznych, to rozumujemy tak jak w przypadku $i=0$. Możemy więc założyć, że T_l powstaje z jednego lub dwu wyrażeń T_j, T_k (gdzie $j<l$ i $k<l$) przez zastosowanie jednej z reguł wnioskowania. Musimy rozpatrzyć 7 przypadków, stosownie do 7 reguł wnioskowania.

Niech T_l powstaje z T_k przez podstawienie. Z uwagi na to, że w A nie występują zmienne wolne, wnosimy, że implikacja $A\to T_l$ powstaje z $A\to T_k$ przez to samo podstawienie. $A\to T_k$ jest tautologią logiczną na mocy założenia, a zatem $A\to T_l$ też jest tautologią logiczną.

Niech T_l powstaje z T_j i T_k przez operację odrywania. Wówczas T_j jest implikacją $T_k\to T_l$. Z założenia wiemy, że implikacje $A\to T_k$ i $A\to(T_k\to T_l)$ są tautologiami logicznymi, skąd wynika (wobec prawa rachunku zdań

$$\vdash[p\to(q\to r)]\to[(p\to q)\to(p\to r)]),$$

że i wyrażenie $(A\to T_k)\to(A\to T_l)$ też jest tautologią logiczną. Stosując regułę odrywania, wnosimy stąd, że implikacja $A\to T_l$ jest tautologią logiczną.

Niech T_l powstaje z T_j przez operację opuszczania kwantyfikatora: dużego w następniku lub małego w poprzedniku. T_l ma wtedy postać implikacji $C\to D$, a T_j — postać

$$C\to\prod_x D \quad\text{lub}\quad \sum_x C\to D,$$

gdzie zmienna x ma typ dowolny. W myśl założenia implikacje

$$A\to(C\to\prod_x D), \qquad A\to\left(\sum_x C\to D\right)$$

są tautologiami logicznymi. Na mocy praw rachunku zdań:

(2) $\vdash[p\to(q\to r)]\equiv(p\cdot q\to r), \qquad \vdash[p\to(q\to r)]\equiv[q\to(p\to r)]$

wnosimy stąd, że również implikacje

$$A\cdot C\to\prod_x D, \qquad \sum_x C\to(A\to D)$$

są tautologiami logicznymi. Stosując do nich regułę opuszczania kwantyfikatora (dużego i małego), wnosimy, że implikacje

$$A\cdot C\to D, \qquad C\to(A\to D)$$

są tautologiami logicznymi, a przez zastosowanie praw (2) wnosimy stąd w obu przypadkach, że implikacja $A\to(C\to D)$ czyli $A\to T_l$ jest tautologią logiczną.

Niech T_l powstaje z T_j przez operację dołączania kwantyfikatora: dużego w następniku lub małego w poprzedniku. T_l ma wówczas postać implikacji

$$C\to\prod_x D \quad\text{lub}\quad \sum_x C\to D,$$

przy czym w pierwszej z nich zmienna x nie jest wolna w C, a w drugiej — w D. Natomiast T_j ma postać

$$C\to D.$$

W myśl założenia implikacja $A\to(C\to D)$ jest tautologią logiczną. Stosując prawa (2), wnosimy stąd, że implikacje

$$A\cdot C\to D, \qquad C\to(A\to D)$$

też są tautologiami logicznymi. Do tautologii tych zastosować możemy reguły dołączania kwantyfikatorów, gdyż w pierwszej zmienna x nie jest wolna w poprzedniku, a w drugiej — w następniku. W ten sposób dochodzimy do wniosku, że implikacje

$$A\cdot C\to\prod_x D, \qquad \sum_x C\to(A\to D)$$

są tautologiami logicznymi. Stosując raz jeszcze prawa (2), wyprowadzamy stąd wniosek, że implikacje

$$A\to(C\to\prod_x D), \qquad A\to\left(\sum_x C\to D\right)$$

są tautologiami logicznymi. Zatem w obu przypadkach $A\to T_l$ jest tautologią logiczną.

Niech wreszcie T_l powstaje z T_j przez operację uogólniania. Wówczas T_l ma postać $\prod_x T_j$ i wystarczy zastosować do tautologii logicznej $A\to T_j$ regułę dołączania dużego kwantyfikatora w następniku, aby otrzymać tautologię $A\to T_l$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że implikacja $A\to T_i$ jest tautologią logiczną dla wszystkich $i\leqslant n$. Otrzymujemy stąd tezę twierdzenia o dedukcji również dla $i=n$, c. b. d. o.

Z twierdzenia o dedukcji wynika, że postać tautologii logicznych może być nieraz bardzo zawiła. Zagadnienie polegające na zbadaniu, czy z góry dane wyrażenie jest tautologią logiczną, jest równie trudne jak zbadanie, czy daje się ono wyprowadzić z aksjomatów teorii sformalizowanej. Jak trudne może być to zagadnienie, świadczy fakt, że mimo długoletnich, a nawet czasem wielo-

wiekowych wysiłków, matematycy nie wiedzą dotąd o wielu wyrażeniach, czy dają się one wyprowadzić z aksjomatów Peano (por. np. sformułowanie twierdzenia Goldbacha, podane w Rozdziale III, § 2, str. 50).

ĆWICZENIA. 1. Uogólnić twierdzenie o dedukcji na przypadek, gdy ilość aksjomatów nie jest skończona, w następujący sposób: jeśli T jest twierdzeniem teorii T, to istnieje skończona ilość aksjomatów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takich, że implikacja $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \to T$ jest tautologią logiczną.

2. Jakie tautologie logiczne można otrzymać na podstawie twierdzenia o dedukcji z twierdzeń sformalizowanej teorii grup, podanych w Rozdziale IX (§ 3, str. 235-236)?

§ 2. Modele teorii sformalizowanych. Rozpatrzmy dwie teorie sformalizowane T i T^* (niekoniecznie różne) i załóżmy, że pojęciami pierwotnymi teorii T są $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$. Dla każdego $i \leqslant k$ pojęcie ω_i jest więc bądź indywiduum, bądź zbiorem, bądź relacją pewnego typu. Oznaczmy przez c_i typ pojęcia ω_i.

Załóżmy dalej, że teoria T^* jest wyposażona w zwykłą i uzupełnioną regułę definiowania (por. Rozdział X, § 1, str. 250 i § 4, str. 263) oraz że wprowadziliśmy do niej na mocy odpowiednich definicji stałe specyficzne $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$, które są odpowiednio typów $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Dla wszelkich $i \leqslant k$ stała ϱ_i oznacza więc bądź indywiduum, bądź zbiór, bądź relację tego samego typu co pojęcie ω_i.

Rozpatrzmy teraz dowolne wyrażenie W teorii T. Zastępując w nim nazwy pojęć pierwotnych $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ przez stałe $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_k$, otrzymamy wyrażenie W^* teorii T^*.

Jeśli wyrażenie W^* jest twierdzeniem teorii T^*, to mówimy, że układ pojęć oznaczonych stałymi

(3) $$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$$

stanowi *model* dla wyrażenia W w teorii T^*.

Jeśli układ pojęć oznaczonych stałymi (3) jest modelem (w teorii T^*) dla wszystkich aksjomatów teorii T, to mówimy krótko, że jest on *modelem teorii T w teorii T^**.

Zamiast mówić, że istnieje model teorii T w teorii T^*, mówimy też często, że teoria T ma *interpretację* w teorii T^*.

Korzystając z wprowadzonych pojęć, udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie. Każdy układ pojęć, który jest modelem teorii T w teorii T^*, jest też modelem dla dowolnego twierdzenia teorii T.

Dowód. Niech T będzie twierdzeniem teorii T, a A — koniunkcją wszystkich jej aksjomatów. W myśl twierdzenia o dedukcji implikacja $A \to T$ jest tautologią logiczną, a zatem pozostanie nią, gdy nazwy pojęć $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ zastąpimy symbolami $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ (gdyż wybór symboli, służących do oznaczania pojęć, nie wpływa na to, czy wyrażenie, w którym jest mowa o tych pojęciach, jest lub nie jest tautologią). Wnosimy stąd, że implikacja $A^* \to T^*$ jest tautologią logiczną, ponieważ zaś A^* jest w myśl założenia twierdzeniem teorii T^*, więc i T^* jest twierdzeniem teorii T^*, c. b. d. o.

Udowodnione twierdzenie moglibyśmy wyrazić mniej ściśle, lecz bardziej dobitnie w następujący sposób: *jeśli w teorii T^* można udowodnić, że układ indywiduów, zbiorów i relacji oznaczonych stałymi* (3) *posiada wszystkie własności, wymienione w aksjomatach teorii T, to można też udowodnić, że układ ten posiada wszystkie własności, wymienione w twierdzeniach tej teorii.*

Następujące uwagi pozwolą nam zorientować się w znaczeniu tego wyniku.

Budując teorię matematyczną, badamy przede wszystkim własności przedmiotów (dowolnego typu), które nazywamy pojęciami pierwotnymi teorii. Okazuje się, że wszystkie własności, przysługujące pojęciom pierwotnym, przysługują też jakimkolwiek innym pojęciom zdefiniowanym w tej samej lub innej teorii, byleby stanowiącym model aksjomatów. Dla prawdziwości twierdzeń teorii nie jest więc ważne, co właściwie oznaczają stałe specyficzne teorii; ważne jest tylko to, że oznaczają one układ pojęć, który jest modelem dla wszystkich aksjomatów.

Russell wyraził ten fakt w słuszny, choć nieco paradoksalny sposób: „W matematyce nie wiemy, o czym właściwie mówimy". Istotnie, dowodząc twierdzeń matematycznych, możemy całkowicie abstrahować od treści pojęć pierwotnych, a opierać się tylko na tym, że stanowią one model dla aksjomatów. Znajduje to czasami praktyczne zastosowanie, zdarza się bowiem nieraz, że w rozważaniach matematycznych, obracających się w ramach pewnej teorii T^*, natrafiamy na układ pojęć, który jest (w tej teorii) modelem znanej nam już skądinąd teorii T. Nie ma wówczas potrzeby dowodzić oddzielnie własności tych pojęć, gdyż wiemy, że wszystkie twierdzenia, znane nam z teorii T, pozostaną prawdziwe w teorii T^*. W Rozdziale IV (§ 5, str. 105) natrafiliśmy już na taką sytuację w związku z algebrą Boole'a.

Zauważmy na koniec, że określone tu pojęcie modelu jest do niektórych zastosowań zbyt wąskie: zastrzeżenie, by pojęcia oznaczone stałymi $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ miały te same typy logiczne co pojęcia pierwotne teorii T, jest bowiem w niektórych przypadkach zbyt krępujące [1]).

PRZYKŁAD. Teorią T niech będzie elementarna teoria nierówności (Rozdział IX, § 3, teoria I, str. 232), a teorią T^* — pełna teoria liczb rzeczywistych.

W teorii T^* można zdefiniować zbiór W liczb wymiernych, zbiór N liczb niewymiernych, zbiór A liczb algebraicznych i zbiór P liczb przestępnych. Każdy z 8 układów pojęć:

$$W,=,\neq,< \qquad N,=,\neq,< \qquad A,=,\neq,< \qquad P,=,\neq,<$$
$$W,=,\neq,> \qquad N,=,\neq,> \qquad A,=,\neq,> \qquad P,=,\neq,>$$

stanowi model teorii T w teorii T^*. Zgodnie więc ze wspomnianą uwagą Russell'a, wypowiadając zdania teorii T, nie wiemy, czy wypowiadamy twierdzenia dotyczące zbioru liczb wymiernych i relacji mniejszości, czy zbioru liczb niewymiernych i relacji mniejszości, czy zbioru liczb przestępnych i relacji większości etc.

Podobna sytuacja powstaje przy rozpatrywaniu każdej teorii sformalizowanej, gdyż każda taka teoria posiada wiele modeli (por. dalej, § 9, str. 305).

ĆWICZENIA. 1. Następujące zbiory i relacje stanowią modele teorii grup w teorii liczb rzeczywistych (por. Rozdział IX, § 3, str. 237 i § 4, str. 242):

$$L, \sigma, =, \neq; \qquad (\hat{x})[(x \in L) \cdot (x > 0)], \pi, =, \neq.$$

2. Zbiór L wraz z relacjami $=, \neq$ i $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[(x<y)\cdot(y<z)]$ stanowi model elementarnej teorii relacji *leżenia między* w elementarnej teorii nierówności (por. Rozdział IX, § 3, teoria I, str. 232 i teoria V, str. 239).

3. Następujące indywidua, zbiory i relacje stanowią modele teorii liczb naturalnych (Rozdział IX, § 4, teoria VIII, str. 243) w niej samej:

liczba 2, *zbiór liczb parzystych dodatnich, relacja* $(\hat{x}, \hat{y})[x+2=y]$;

liczba 0, *zbiór liczb postaci* x^p, *relacja* $(\hat{x}, \hat{y})[(x+1)^p = y]$;

liczba 1, *zbiór wszystkich potęg liczby naturalnej* p, *relacja* $(\hat{x}, \hat{y})[p \cdot x = y]$.

[1]) Por. R. Carnap i F. Bachmann, *Über Extremalaxiome*, Erkenntnis, tom 6 (1936), str. 166-188. Por. także dalej § 5, str. 282.

§ 3. Niesprzeczność. Teoria sformalizowana nazywa się *niesprzeczna*, jeśli wśród jej twierdzeń nie występuje żadna para wyrażeń postaci W i W' czyli para wyrażeń, z których jedno jest negacją drugiego.

Definicję tę możemy przekształcić na podstawie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1. Na to, żeby teoria była niesprzeczna, potrzeba i wystarcza, by istniało w niej choć jedno wyrażenie, które nie jest twierdzeniem.

Dowód. Jeśli teoria jest niesprzeczna i W jest wyrażeniem tej teorii, to z dwu wyrażeń W i W' jedno nie jest twierdzeniem. Istnieją więc wyrażenia, które nie są twierdzeniami teorii.

Załóżmy na odwrót, że wyrażenie V nie jest twierdzeniem teorii. Implikacja $W \to (W' \to V)$ jest dla każdego wyrażenia W twierdzeniem teorii, gdyż jest ona podstawieniem tautologii rachunku zdań. Wnosimy stąd, że gdyby W i W' były twierdzeniami teorii, to V byłoby też twierdzeniem tej teorii, wbrew założeniu. Dla każdego wyrażenia W bądź ono samo, bądź W' nie jest więc twierdzeniem teorii, czyli teoria ta jest niesprzeczna, c. b. d. o.

Twierdzenie 1 pokazuje, dlaczego od każdej teorii matematycznej wymagać musimy, by była niesprzeczna. W teorii sprzecznej każde wyrażenie jest twierdzeniem, jest to więc teoria jałowa. Z drugiej strony widzimy, jak słaby jest postulat niesprzeczności (w myśl którego choć jedno wyrażenie nie ma być twierdzeniem) i jak dalece myliłby się ten, kto by przypuszczał, że niesprzeczność teorii pociąga za sobą intuicyjną prawdziwość jej twierdzeń.

Pojęcie niesprzeczności nie pozostaje w żadnym bliskim związku z *prawem sprzeczności* (zwanym przez niektórych *prawem niesprzeczności*), t. j. tautologią rachunku zdań (zob. Rozdział II, § 9, str. 27)

$$\vdash (p \cdot p')'.$$

W teorii sprzecznej prawo sprzeczności jest twierdzeniem, bo wszystkie wyrażenia są twierdzeniami takiej teorii.

Z drugiej strony istnieją teorie niesprzeczne, w których nie obowiązuje prawo sprzeczności. Można nawet zbudować systemy rachunku zdań, w których koniunkcja $p \cdot p'$ jest twierdzeniem, a które mimo to są niesprzeczne. O sprzeczności teorii decyduje bowiem nie samo przyjęcie takiego czy innego aksjomatu, lecz

dopiero to, co można z tego aksjomatu wyprowadzić, a więc zespół wszystkich aksjomatów i reguł wnioskowania [1]). Tak np. przyjmując w rachunku zdań koniunkcję $p \cdot p'$ za aksjomat, a odrzucając niektóre inne prawa (np. $p \cdot p' \to q$) lub modyfikując regułę odrywania, możemy nie otrzymać sprzeczności.

W dawniejszej logice nie odróżniano należycie prawa sprzeczności od własności, którą nazwaliśmy niesprzecznością teorii. Zachodzi jednak między nimi zasadnicza różnica: prawo sprzeczności jest jednym z twierdzeń teorii podobnie jak inne tautologie logiczne, jest więc ono wypowiadane *w samej teorii*; niesprzeczność zaś jest pewną własnością całej teorii, mogącą jej przysługiwać lub nie, w każdym jednak razie dającą się wysłowić tylko *w meta-teorii*, t. j. w nauce o teorii sformalizowanej (por. dalej, Rozdział XII, § 2 i § 3).

Udowodnimy teraz proste twierdzenie, które w wielu wypadkach pozwala ustalić niesprzeczność teorii:

Twierdzenie 2. *Jeśli teoria* T *ma interpretację w niesprzecznej teorii* T^*, *to i teoria* T *jest niesprzeczna.*

Dowód. Gdyby teoria T była sprzeczna, to istniałoby takie wyrażenie W tej teorii, że zarówno W jak i W' byłyby jej twierdzeniami. Zastąpmy w W stałe specyficzne teorii T przez nazwy pojęć zdefiniowanych w teorii T^* i stanowiących model teorii T. Zgodnie z twierdzeniem udowodnionym w § 2, str. 270, zarówno otrzymane w ten sposób wyrażenie W^* jak i jego negacja byłyby więc twierdzeniami teorii T^* wbrew założeniu niesprzeczności tej teorii, c. b. d. o.

W myśl twierdzenia 2, *aby wykazać niesprzeczność teorii* T, *wystarczy znaleźć dla niej model w jakiejkolwiek niesprzecznej teorii* T^*.

Dowody niesprzeczności uzyskane w taki sposób noszą nazwę *dowodów przez interpretację*.

PRZYKŁADY. 1. W elementarnej teorii nierówności można zdefiniować model dla teorii relacji *leżenia między* (por. § 2, ćwiczenie 2). Z niesprzeczności elementarnej teorii nierówności wynika więc niesprzeczność elementarnej teorii relacji *leżenia między*.

[1]) Por. w związku z tym uwagi, jakie czyni na temat nie-klasycznych systemów rachunku zdań S. Jaśkowski w artykule *Zagadnienia logiczne a matematyka*, Myśl Współczesna, Nr 7-8 (14-15), Warszawa-Łódź 1947, str. 67-68.

2. Naszkicujemy dowód niesprzeczności fragmentu geometrii rzutowej, rozpatrywanego w Rozdziale IX (§ 3, str. 240), zakładając niesprzeczność teorii liczb rzeczywistych.

W teorii liczb rzeczywistych zdefiniować można bez trudu trzy funkcje $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, które ustalają odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru wszystkich liczb różnych od 0 na zbiór trójek uporządkowanych liczb rzeczywistych, z których co najmniej jedna jest różna od 0.

Określmy relację dwuczłonową $\sim$ i relację trójczłonową λ między liczbami rzeczywistymi różnymi od 0, jak następuje:

$$\sim \underset{df}{=} (\hat{x}, \hat{y}) \{(x \neq 0) \cdot (y \neq 0) \cdot [p_1(x) \cdot p_2(y) - p_1(y) \cdot p_2(x) = 0] \cdot$$

$$\cdot [p_2(x) \cdot p_3(y) - p_2(y) \cdot p_3(x) = 0] \cdot [p_3(x) \cdot p_1(y) - p_3(y) \cdot p_1(x) = 0]\},$$

$$\lambda \underset{df}{=} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \{(x \neq 0) \cdot (y \neq 0) \cdot (z \neq 0) \cdot \begin{vmatrix} p_1(x), p_2(x), p_3(x) \\ p_1(y), p_2(y), p_3(y) \\ p_1(z), p_2(z), p_3(z) \end{vmatrix} = 0\}.$$

Pojęciami pierwotnymi fragmentarycznej geometrii rzutowej, były

$$P, \quad =, \quad \neq, \quad L.$$

Wykazać można z łatwością, że układ pojęć

$$(\hat{x})[x \neq 0], \quad \sim, \quad \sim', \quad \lambda$$

stanowi model tej teorii w teorii liczb rzeczywistych, co dowodzi, że jeśli teoria liczb rzeczywistych jest niesprzeczna, to i omawiany fragment geometrii rzutowej jest niesprzeczny.

3. Rozpatrzmy następującą niezmiernie prostą teorię elementarną T^*: stałymi specyficznymi są znaki $=$ i $\neq$, oznaczające relacje równości i różności, oraz stałe a i b. Poza aksjomatami równości przyjmujemy jeszcze aksjomat $a \neq b$.

Zdefiniujmy w teorii T^* zbiór G i relację trójczłonową S, jak następuje:

$$G \underset{df}{=} (\hat{x})[(x = a) + (x = b)],$$

$$S \underset{df}{=} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[(x = a) \cdot (y = z) + (x = b) \cdot (y \neq z)].$$

W zwykłej terminologii matematycznej powiedzielibyśmy, że zbiór G jest grupą względem działania S i że tabliczka tego działania jest następująca:

	a	b
a	a	b
b	b	a

Z łatwością można dowieść, że układ, złożony ze zbioru G, relacji równości i różności oraz relacji S stanowi model elementarnej teorii grup w teorii T^*. Z niesprzeczności teorii T^* wynika więc niesprzeczność elementarnej teorii grup.

Omówiona w tym przykładzie interpretacja teorii grup jest ciekawa ze względu na swój finitystyczny charakter. Ilość przedmiotów, o których mówimy w teorii T^*, jest skończona (dokładnie 2), każdy więc zbiór i każdą relację opisać można przy pomocy skończonego układu równości lub przy pomocy tablic, o których wspominaliśmy w Rozdziale IV (§ 1, str. 84-85). Sprawdzenie jakichkolwiek własności takich zbiorów lub relacji również nie nastręcza trudności, zawsze mamy bowiem do czynienia ze skończoną ilością przypadków. W teorii T^* kwantyfikatory są zbędne, gdyż sprowadzają się do koniunkcji i alternatywy (por. Rozdział III, § 1, str. 47).

Interpretacje takiego typu, jak opisana w tym przykładzie, nazywamy *interpretacjami skończonymi.*

Nie każda jednak teoria ma interpretacje skończone; nie istnieją one np. dla teorii grup uporządkowanych, ani tym mniej dla żadnej z teorii nie-elementarnych, rozważanych w Rozdziale IX (§ 4).

Wzmianka historyczna. Metoda dowodów niesprzeczności przez interpretację powstała w związku z rozwojem geometrii nie-euklidesowych, t.j. takich, w których piąty postulat Euklidesa: *przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do dowolnie danej prostej* jest fałszywy.

Pierwszy model dla geometrii nie-euklidesowych w przestrzeni euklidesowej podał matematyk włoski E. Beltrami w 1866 r. Teorią T jest więc tutaj geometria nie-euklidesowa, teorią T^* — geometria euklidesowa, a istnienie modelu teorii T w teorii T^* prowadzi do dość na pozór paradoksalnego wniosku, że niesprzeczność geometrii euklidesowej pociąga za sobą niesprzeczność geometrii nie-euklidesowej.

Inny model dla geometrii nie-euklidesowej w geometrii euklidesowej podał H. Poincaré w 1882 r. Sformułował on także w jasny sposób istotę dowodów

niesprzeczności przez interpretację. Rolę modelu porównał on trafnie do roli słownika, który pozwala tłumaczyć wyrażenia teorii T na wyrażenia teorii T^* i to w taki sposób, że twierdzenia pierwszej przechodzą w twierdzenia drugiej[1]).

Tym samym badaniom zawdzięcza matematyka również zrozumienie formalnego charakteru teorii sformalizowanych lub zaksjomatyzowanych, o czym wspominaliśmy na końcu § 2, a także wyjaśnienie istotnej natury aksjomatów jako zdań, które przyjmujemy umownie za podstawę teorii. Poprzednio aksjomaty uważano za tzw. prawdy oczywiste.

ĆWICZENIA 1. Udowodnić niesprzeczność algebry Boole'a (Rozdział IV, § 5, str. 102) metodą interpretacji skończonej.

2. Udowodnić, że nie istnieje żadna interpretacja skończona dla elementarnej teorii relacji *leżenia między* (por. Rozdział IX, § 3, teoria V, str. 239).

3. Udowodnić, że istnieje interpretacja skończona dla fragmentu geometrii rzutowej (Rozdział IX, § 3, teoria VI, str. 240) i że najmniejsza liczba elementów w takiej interpretacji wynosi 7.

Wsk.: Przyjąć za elementy 3 wierzchołki trójkąta, 3 środki boków i punkt przecięcia środkowych. Relacja L zachodzi między trzema punktami, gdy:

1^0 co najmniej dwa z nich są równe,

2^0 wszystkie trzy leżą na jednej prostej,

3^0 każdy jest środkiem boku trójkąta.

§ 4. Uwaga o tzw. absolutnych dowodach niesprzeczności.

Dla dowodów niesprzeczności przez interpretację charakterystyczne jest to, że pozwalają one sprowadzić zagadnienie niesprzeczności jednej teorii do zagadnienia niesprzeczności innej. Stosując metodę interpretacji, nie dojdziemy więc nigdy do twierdzenia postaci: *ta a ta teoria jest niesprzeczna*; zawsze musimy dodawać założenie: *o ile inna teoria jest niesprzeczna.*

Rodzi się stąd potrzeba znalezienia innej metody dowodów niesprzeczności, zwanych *absolutnymi*, które pozwoliłyby ustalać niesprzeczność teorii bez założenia niesprzeczności innej teorii. Potrzeba takich dowodów jest tym bardziej paląca, że w różnych systemach logiki pojawiły się w swoim czasie sprzeczności, zwane *antynomiami* (por. Rozdział VIII, § 2, str. 208), mimo że założenia tkwiące u podstaw tych systemów zdawały się prawdziwe. Aby uniknąć antynomii, zbudowano systemy logiczne oparte np. na teorii typów i stwierdzono, że żadna ze znanych antynomii nie może pojawić się w tych systemach (por. Rozdział VIII, § 3, str. 218-219). Pozostaje jednak zawsze wątpliwość, czy w trakcie dalszej budowy systemu nie natkniemy się na inne sprzeczności.

[1]) Por. H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Paryż 1929, str. 57.

Dla niektórych działów logiki można bardzo łatwo przeprowadzić absolutny dowód niesprzeczności. Np. rachunek zdań, rozpatrywany w Rozdziale II, nie jest sprzeczny. Gdyby bowiem wyrażenia W i W' były jednocześnie tautologiami rachunku zdań, to oba te wyrażenia miałyby wartość 1, gdy za zmienne zdaniowe podstawić symbole 0 i 1 w dowolny zresztą sposób. Wniosek ten jest jawnie niedorzeczny, gdyż w rachunku zdań W' musi mieć wartość 0, gdy W ma wartość 1. Również bez większych trudności można udowodnić niesprzeczność pełnego systemu prostej teorii typów, nie zawierającej pewnika nieskończoności [1]).

Przeprowadzenie obsolutnego dowodu niesprzeczności czy to systemu logiki z pewnikiem nieskończoności, czy którejkolwiek z teorii, rozpatrywanych w § 4 Rozdziału IX, nie wydaje się na pozór zagadnieniem bardzo trudnym. Wystarczy tylko wykazać, że nie istnieje ciąg wyrażeń

$$W_0, W_1, W_2, \ldots, W_n,$$

który posiada własności dowodu sformalizowanego (por. Rozdział IX, § 1, str. 227), a zakończony jest negacją któregokolwiek z aksjomatów. Wydaje się więc, że jest to zagadnienie tego samego mniej więcej rodzaju co dowód, że pewne określone położenie figur szachowych nie da się nigdy uzyskać w toku poprawnie rozgrywanej partii. Można by sądzić, że pewne rozumowania kombinatoryczne doprowadzą do wniosku, że stosując do aksjomatów i tautologii logicznych (które grają tu rolę podobną do wyjściowych pozycji w partii szachów) reguły wnioskowania (odpowiadające regułom gry), nie dojdziemy nigdy do negacji żadnego aksjomatu.

Znalezienie takiego dowodu miało być — według Hilberta — naczelnym zadaniem meta-matematyki; przy tym Hilbert żądał, by w trakcie dowodu nie korzystać z żadnych praw matematycznych poza najelementarniejszymi, bezpośrednio dostępnymi intuicji, a więc takimi, które niewątpliwie nie zawierają sprzeczności [2]).

[1]) Zob. prace cytowane na str. 219.

[2]) Ani Hilbert, ani jego współpracownicy i uczniowie nigdy właściwie ściśle nie określili środków logicznych, jakie uważali za jeszcze dozwolone w rozumowaniach meta-matematycznych, zadowalając się dość ogólnikowymi uwagami na temat tzw. *rozumowań finitystycznych*. Por. D. Hilbert i P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, tom 1, Lipsk-Berlin 1934, § 2, str. 20-42

Głębsze badania wykazały jednak, że rozumowania kombinatoryczne, na których miał opierać się dowód niesprzeczności, musiałyby operować pojęciami bardzo złożonymi, bardziej jeszcze złożonymi niż pojęcia teorii, poddawanej właśnie dowodowi niesprzeczności [1]). Pierwotny program Hilberta jest zatem niewykonalny.

Mimo to absolutne dowody niesprzeczności dają się uzyskać na tej drodze dla niektórych prostych teorii sformalizowanych, np. dla podanych w Rozdziale IX, § 3.

§ 5. Niezależność aksjomatów. Załóżmy, że aksjomatami teorii $\boldsymbol{T}$ są wyrażenia

$$A_1, A_2, \ldots, A_n. \tag{4}$$

Mówimy, że aksjomat A_i jest *niezależny* od aksjomatów $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$, jeśli A_i nie daje się udowodnić na podstawie tautologii logicznych i aksjomatów $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ za pomocą przyjętych w teorii $\boldsymbol{T}$ reguł wnioskowania.

Jeśli każdy z aksjomatów układu (4) jest niezależny od pozostałych, to mówimy krótko, że *układ* (4) *jest niezależny*.

Dwa układy aksjomatów teorii $\boldsymbol{T}$ nazywamy *równoważnymi*, jeśli każdy aksjomat pierwszego układu daje się wyprowadzić z tautologii logicznych i z aksjomatów drugiego układu i, na odwrót, każdy aksjomat drugiego układu daje się wyprowadzić z tautologii logicznych i z aksjomatów pierwszego układu.

Twierdzenie 1. Jeśli (4) *jest układem aksjomatów teorii, to istnieje niezależny układ aksjomatów tej teorii, równoważny układowi* (4).

Dowód. Jeśli (4) nie jest układem niezależnym, to jeden z aksjomatów jest zależny od pozostałych. Usuwając ten aksjomat, otrzymujemy układ równoważny układowi (4). Z nowym układem postępujemy w ten sam sposób i t. d. Po skończonej liczbie kroków dojdziemy wreszcie do układu niezależnego, równoważnego układowi (4), c. b. d. o.

[1]) Wynik ten uzyskał w 1931 roku K. Gödel w podstawowej dla badań meta-matematycznych pracy *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I*, Monatshefte für Mathematik und Physik, tom 38 (1931), str. 173-198. Te wyniki Gödla zreferowane są dokładnie w II tomie cytowanego dzieła D. Hilberta i P. Bernaysa (1939), § 4 i § 5, str. 205-360.

Wychodząc wprost z definicji, nie moglibyśmy na ogół przekonać się w konkretnych przypadkach, czy jeden z aksjomatów badanego układu aksjomatów teorii sformalizowanej jest niezależny od pozostałych. Wielką pomoc przy takich badaniach oddaje następujące

Twierdzenie 2. Na to, by aksjomat A_i był niezależny od pozostałych aksjomatów układu (4), *potrzeba i wystarcza by teoria oparta na aksjomatach*

$$(*) \qquad A_1, \ldots, A_{i-1}, A'_i, A_{i+1}, \ldots, A_n$$

była niesprzeczna.

Dowód. Jeśli teoria oparta na aksjomatach (*) jest sprzeczna, to A_i jest twierdzeniem tej teorii. Zgodnie z twierdzeniem o dedukcji (§ 1, str. 267) wynika stąd, że implikacja

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_{i-1} \cdot A'_i \cdot A_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_n \to A_i$$

jest tautologią logiczną. Na mocy tautologii rachunku zdań

$$\vdash (p \cdot q' \cdot r \to q) \to (p \cdot r \to q)$$

wynika stąd, że implikacja

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_{i-1} \cdot A_{i+1} \cdot \ldots \cdot A_n \to A_i$$

jest tautologią logiczną, skąd wnosimy, że aksjomat A_i jest zależny od pozostałych aksjomatów układu (4).

Na odwrót, jeśli aksjomat A_i jest zależny od pozostałych aksjomatów układu (4), to teoria oparta na aksjomatach (*) jest sprzeczna, bo A_i i A'_i są jej twierdzeniami.

Twierdzenie 2 jest w ten sposób udowodnione.

Wynika z niego na mocy twierdzenia 2 z § 3 (str. 274) następujące

Twierdzenie 3. Jeśli teoria T^* jest niesprzeczna i istnieje w niej model dla zdań (*), *to aksjomat A_i jest niezależny od pozostałych aksjomatów układu* (4).

Twierdzenie to pozwala stosować metodę interpretacji przy dowodach niezależności.

PRZYKŁADY. 1. Niech $\boldsymbol{T}$ będzie fragmentem geometrii rzutowej, rozpatrywanym w Rozdziale IX (§ 3, teoria VI, str. 240), a $\boldsymbol{T}^*$ — zwykłą geometrią euklidesową.

Niech symbol P^* oznacza zbiór punktów przestrzeni euklidesowej, a symbol L^* relację współliniowości trzech punktów w tej przestrzeni. Z łatwością sprawdzamy, że zastępując w aksjomatach VI 1-VI 6 teorii $\boldsymbol{T}$ stałe P i L przez stałe P^* i L^*, otrzymamy twierdzenia teorii $\boldsymbol{T}^*$. Natomiast aksjomat VI 7 przejdzie na zdanie teorii $\boldsymbol{T}^*$, którego negacja jest twierdzeniem. Jeśli więc teoria $\boldsymbol{T}^*$ jest niesprzeczna, to aksjomat VI 7 jest niezależny od aksjomatów VI 1-VI 6.

2. Udowodnimy, że jeśli aksjomatyczna teoria liczb naturalnych jest niesprzeczna, to układ złożony z aksjomatów VIII 1-VIII 6 (Rozdział IX, § 4, teoria VIII, str. 243), jest niezależny. Teorią $\boldsymbol{T}$ jest więc tu aksjomatyczna teoria liczb naturalnych (zob. tamże), a teorią $\boldsymbol{T}^*$ — ta sama teoria wzbogacona regułami definiowania.

Aby przeprowadzić dowód niezależności, musimy zdefiniować 6 różnych modeli, po jednym dla pięciu aksjomatów i dla negacji pozostałego, szóstego, aksjomatu teorii $\boldsymbol{T}$.

Niezależność aksjomatu VIII 1 uzyskujemy przez następującą interpretację: L interpretujemy jako zbiór złożony z liczb 0 i 1, 0 — jako 0 i N — jako relację $(\hat{x}, \hat{y})[(x=0)\cdot(y=1)+(x=1)\cdot(y=0)]$.

Niezależności aksjomatu VIII 2 dowodzi następująca interpretacja: L interpretujemy jako zbiór złożony z liczb różnych od 0, a 0 i N interpretujemy same przez siebie.

Niezależności aksjomatu VIII 3 dowodzi następująca interpretacja: L interpretujemy jako zbiór złożony z liczb 0 i 1, 0 — jako 0, a N — jako relację $(\hat{x}, \hat{y})[x+1=y]$.

Aby wykazać niezależność aksjomatu VIII 4, interpretujemy N jako relację

$$(\hat{x}, \hat{y})\{(x+2=y)\cdot(x\neq 0)+(x=0)\cdot[(y=1)+(y=2)]\},$$

a 0 i L same przez siebie.

Niezależność aksjomatu VIII 5 wykazujemy następującą interpretacją: L interpretujemy jako zbiór złożony z liczb 0 i 1, relację N — jako relację $(\hat{x}, \hat{y})[(x=0)\cdot(y=1)+(x=1)\cdot(y=1)]$, a 0 — jako 0.

Wreszcie, niezależności aksjomatu VIII 6 dowodzi następująca interpretacja: L i 0 interpretujemy same przez siebie, N zaś — jako relację $(\hat{x}, \hat{y})[x+2=y]$.

3. Udowodnimy niezależność aksjomatu ciągłości od pozostałych aksjomatów pełnej teorii liczb rzeczywistych (zob. Rozdział IX, § 4, teoria VII, str. 242), zakładając niesprzeczność teorii funkcji zmiennej rzeczywistej.

W tym celu interpretujemy L jako zbiór wszystkich funkcji wymiernych $f(t)$ zmiennej t, przebiegającej zbiór liczb dodatnich. Relacje σ i π interpretujemy jako relacje zachodzące między funkcjami $f(t)$, $g(t)$ i $h(t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t)=g(t)+h(t)$ lub $f(t)=g(t)\cdot h(t)$. Relację $<$ interpretujemy jako relację R zachodzącą między funkcjami $f(t)$ i $g(t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dostatecznie dużych wartości t liczba $f(t)$ jest mniejsza od liczby $g(t)$. Wreszcie 0 interpretujemy jako funkcję stale równą zeru, a 1 — jako funkcję stale równą jedności [1]).

Aksjomat ciągłości przechodzi przy tej interpretacji w zdanie, którego negacja jest twierdzeniem teorii funkcji zmiennej rzeczywistej. Aby się o tym przekonać, rozpatrujemy dwa zbiory funkcyj wymiernych: jeden, zawierający wszystkie funkcje stałe, i drugi, zawierający te z pozostałych funkcji, których wartość wzrasta nieograniczenie wraz z t rosnącym nieograniczenie. Łatwo sprawdzić, że każda funkcja pierwszego zbioru pozostaje w relacji R do każdej funkcji drugiego zbioru, a mimo to nie istnieje taka funkcja wymierna f, że gRf i fRh dla każdej funkcji g z pierwszego zbioru i każdej funkcji h z drugiego.

Wszystkie inne aksjomaty teorii liczb rzeczywistych przechodzą w zdania, które dają się udowodnić w teorii funkcji zmiennej rzeczywistej, co dowodzi niezależności aksjomatu ciągłości.

Przykład ten jest interesujący m. in. z następującego powodu. Pojęcie funkcji zmiennej rzeczywistej można zdefiniować w pełnej teorii liczb rzeczywistych, gdyż funkcja jest to relacja jednoznaczna. Nie możemy jednak twierdzić, że opisana tu interpretacja została przeprowadzona w ramach teorii liczb rzeczywistych, gdyż definiując pojęcie modelu (§ 2, str. 270), zastrzegliśmy, by każde pojęcie było interpretowane jako pojęcie tego samego typu. Dlatego też — aby pozostać w zgodzie z definicją modelu — założyliśmy, że teorią T^* jest nie teoria liczb rzeczywistych, lecz teoria funkcji zmiennej rzeczywistej, w której funkcje mają typ * [2]).

Widoczne jest stąd, że zastrzeżenie, by każde pojęcie było interpretowane przez pojęcie tego samego typu, bywa niepotrzebnie krępujące (por. § 2, str. 272).

[1]) Por. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, wyd. 7-e, Lipsk-Berlin 1930, str. 47.

[2]) Aksjomatykę takiej teorii podaje K. Menger, *Algebra of Analysis*, Notre Dame Mathematical Lectures, № 3 (1944).

Budując teorię sformalizowaną, staramy się zazwyczaj oprzeć ją na niezależnym układzie aksjomatów. Aksjomaty zależne od pozostałych są bowiem niepotrzebne: możemy je uzyskać jako twierdzenia. Z drugiej strony, może być nieraz dogodnie zrezygnować z postulatu niezależności np. wówczas, gdy przez uzupełnienie układu aksjomatów aksjomatem zależnym od pozostałych otrzymujemy znaczne uproszczenie dowodów lub pewną symetrię założeń teorii.

Istotniejszą jest rola zagadnienia niezależności w dyskusjach dotyczących takich aksjomatów, które wydają się mało oczywiste lub co do których celowości matematycy nie są zgodni. Tak np. badania nad niezależnością pewnika o równoległych były podyktowane istotnymi potrzebami naukowymi, a nie tylko dość w gruncie rzeczy powierzchownym dążeniem do oparcia geometrii na niezależnym układzie aksjomatów. Podobnie ma się rzecz z prowadzonymi w ostatnich czasach badaniami nad niezależnością pewnika wyboru od innych aksjomatów teorii mnogości [1]).

ĆWICZENIA. 1. Dowieść niezależności aksjomatów elementarnej teorii nierówności (Rozdział IX, § 3, teoria I, str. 232), konstruując odpowiednie modele w arytmetyce liczb rzeczywistych.

2. Rozwiązać analogiczne zadanie dla elementarnej teorii grup (Rozdział IX, § 3, teoria II, str. 234).

3. Udowodnić, że prawo przemienności mnożenia jest zależne od pozostałych aksjomatów pełnej teorii liczb rzeczywistych (Rozdział IX, § 4, teoria VII, str. 242) [2]).

§ 6. Niezależność pojęć pierwotnych [3]). Niech T będzie teorią sformalizowaną o pojęciach pierwotnych

$$\Omega,\ \Omega_1,\ \Omega_2,\ \ldots,\ \Omega_k,$$

których nazwami (stałymi specyficznymi teorii) są

$$\omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_k.$$

[1]) Dowód niezależności pewnika IX 9 od pozostałych pewników teorii mnogości, podanych w Rozdziale IX, § 4, str. 245, nie sprawiałby trudności. Zagadnienie staje się jednak naprawdę trudnym i ważnym problemem (dotąd nie rozstrzygniętym), gdy uzupełnimy układ aksjomatów pewnikiem określającym liczbę kardynalną zbioru $P\cdot M'$, czyli ilość przedmiotów, nie będących mnogościami (najprościej jest przyjąć założenie, że liczba ta jest równa zeru).

[2]) Por. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, wyd. 7-e (1930), str. 105-107.

[3]) Por. pracę: A. Tarski, *Z badań metodologicznych nad definiowalnością terminów*, Przegląd Filozoficzny, tom 37 (1934), str. 438-460.

Jeśli T jest np. elementarną teorią liczb rzeczywistych (Rozdział IX, § 3, teoria IV, str. 237), to $\Omega, \Omega_1, \ldots, \Omega_k$ są odpowiednio zbiorem liczb, relacją równości, relacją różności, relacją mniejszości, działaniem dodawania i działaniem mnożenia, zerem i jednością, a $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_k$ są symbolami L, $=$, $\neq$, $<$, σ, π, 0 i 1, stanowiącymi nazwy wymienionych zbiorów, relacyj, działań i indywiduów.

Aksjomatami teorii T niech będą wyrażenia

(5) $$A_1, A_2, \ldots, A_n.$$

Mówimy, że pojęcie Ω jest *zależne* od pojęć $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ na gruncie aksjomatów (5), jeśli istnieje funkcja zdaniowa $\Phi(x)$ o jednej zmiennej wolnej x tego samego typu co ω, nie zawierająca stałej specyficznej ω i taka, że równoważność

(6) $$(x=\omega)\equiv\Phi(x)$$

jest twierdzeniem teorii T.

Możemy założyć, że zmienna x nie występuje w aksjomatach (5). Oznaczać będziemy symbolem $A_i(x)$ funkcję zdaniową, która powstaje z A_i przez zastąpienie ω zmienną x $(i=1,2,\ldots,n)$.

Twierdzenie 1. Jeśli równoważność (6) *jest twierdzeniem teorii* T, *to zdania (nie zawierające* ω*)*

(7) $$\sum_x\Phi(x) \qquad \prod_{xy}[\Phi(x)\cdot\Phi(y)\to(x=y)],$$

(8) $$\prod_x[\Phi(x)\to A_i(x)] \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

są twierdzeniami teorii T.

Dowód. Zdania (7) otrzymujemy na mocy (6) z tautologii logicznych

$$\sum_x(x=\omega), \qquad \prod_{xy}[(x=\omega)\cdot(y=\omega)\to(x=y)].$$

Zdania (7) są więc twierdzeniami teorii T. Z aksjomatów ekstensjonalności mamy dalej

$$\vdash A_i\to[(x=\omega)\to A_i(x)],$$

skąd wynika na mocy (6), że implikacja

$$A_i\to[\Phi(x)\to A_i(x)],$$

a więc też i zdania (8), są twierdzeniami teorii T, c. b. d. o.

Niech teraz T^* będzie teorią sformalizowaną tego samego rzędu co T, o stałych specyficznych

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$$

oraz o aksjomatach (7) i (8).

Twierdzenie 2. W teorii T^* *wzbogaconej definicją*

(9) $$\omega \underset{df}{=} (\iota x)\Phi(x)$$

zdania (5) *są twierdzeniami.*

Dowód. Definicja (9) jest poprawna z uwagi na to, że zdania (7) są aksjomatami teorii T^*, a ω nie figuruje wśród stałych specyficznych tej teorii.

Z twierdzenia dowiedzionego w § 1 Rozdziału X (str. 251) wynika, że równoważność

$$\prod_x[\Phi(x)\to A_i(x)]\equiv A_i$$

jest twierdzeniem teorii T^* wzbogaconej definicją (9). Lewa strona tej równoważności jest jednym z aksjomatów (8); wnosimy stąd, że A_i jest twierdzeniem teorii T^*, c. b. d. o.

Twierdzenia 1 i 2 wykazują, że jeśli jedno z pojęć pierwotnych teorii T jest zależne od pozostałych na gruncie aksjomatów tej teorii, to można teorię T zastąpić inną równoważną jej teorią T^*, w której występuje o jedno pojęcie pierwotne mniej. Po wprowadzeniu w T^* odpowiedniej definicji można wszystkie aksjomaty teorii T, a więc i wszystkie twierdzenia tej teorii, uzyskać jako twierdzenia teorii T^*.

Układ aksjomatów teorii T^* zawiera o dwa zdania więcej niż układ aksjomatów teorii T. Na ogół jednak niektóre spośród zdań (7) i (8) są tautologiami logicznymi lub są zależne od pozostałych, dzięki czemu układ aksjomatów teorii T^* ulega uproszczeniu. W szczególności, jeśli Ω jest relacją np. trójczłonową, a zdanie (6) ma postać

$$(U=\omega)\equiv\prod_{uvw}[U(u,v,w)\equiv\Psi(u,v,w)],$$

to zdania (7) są tautologiami logicznymi (na mocy pewnika definicyjnego i pewnika ekstensjonalności), a więc układ aksjomatów teorii T^* redukuje się tylko do zdań (8).

PRZYKŁADY. 1. W arytmetyce liczb naturalnych (Rozdział IX, § 4, teoria VIII, str. 243) udowodnić można twierdzenie

$$(v=0)\equiv(v\in L)\cdot\prod_{w\in L}N'(w,v),$$

0 jest więc zależne od pozostałych pojęć pierwotnych tej teorii. Teoria T^* ma w tym przypadku stałe specyficzne L i N oraz aksjomaty VIII 3, VIII 4, VIII 5 i następujące trzy aksjomaty:

$$\sum_{v\in L}\prod_{w\in L}N'(w,v), \qquad \prod_{v,t\in L}\{\prod_{w\in L}[N'(w,v)\cdot N'(w,t)]\to(v=t)\},$$

$$\prod_{v\in L}(\prod_{w\in L}N'(w,v)\to$$

$$\to\prod_{X\subset L}\{(v\in X)\cdot\prod_{x,y\in L}[(x\in X)\cdot N(x,y)\to(y\in X)]\to\prod_{x\in L}(x\in X)\}).$$

Dwa spośród tych aksjomatów odpowiadają zdaniom (7), trzeci zaś zdaniu (8), gdzie za A_i wybrano aksjomat indukcji zupełnej VIII 6. Zdania (8) dla A_i identycznych z aksjomatami VIII 1 i VIII 2 są tu tautologiami logicznymi i nie muszą być włączone do układu aksjomatów.

Teoria T^* ma więc tyleż aksjomatów co teoria T, ale za to o jedno pojęcie pierwotne mniej. Stałą 0 można w tej teorii wprowadzić definicją

$$0\underset{df}{=}(\iota x)[(x\in L)\cdot\prod_{w\in L}N'(w,x)].$$

2. W pełnej teorii liczb rzeczywistych (Rozdział IX, § 4, str. 242) relacja π jest zależna od pozostałych pojęć pierwotnych. Konstrukcja funkcji zdaniowej $\Phi(U)$, która nie zawierałaby stałej specyficznej π i dla której równoważność

$$(U=\pi)\equiv\Phi(U)$$

byłaby twierdzeniem, nie jest w tym wypadku prosta i musimy zadowolić się podaniem wskazówek, jak funkcję tę można utworzyć.

Budujemy najpierw funkcję zdaniową $\Psi_1(u,v,w)$, która spełniona jest przez liczby a,b,c wtedy i tylko wtedy, gdy c jest liczbą naturalną i $a=bc$. Korzystamy przy tym z dwu okoliczności:

1° w rozważanej teorii można zdefiniować bez pomocy relacji π zbiór liczb naturalnych (por. Rozdział X, § 2, str. 253, przykład 2);

2° mnożenie przez liczbę naturalną daje się zdefiniować indukcyjnie za pomocą dodawania, teoria zaś wyłożona w Rozdziale VIII, § 6, str. 187 pozwala każdą t. zw. *definicję indukcyjną* (zob. tamże) zastąpić definicją zwykłą.

Mając już funkcję zdaniową $\Psi_1(u,v,w)$, z łatwością budujemy funkcję zdaniową $\Psi_2(u,v,w)$, którą spełniają liczby a,b,c wtedy i tylko wtedy, gdy c jest liczbą wymierną i $a=bc$.

Konstruujemy wreszcie funkcję zdaniową $\Psi_3(u,v,w)$, którą spełniają liczby a,b,c wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z następujących trzech przypadków:

(i) $b=0$ i $a=0$;

(ii) $b>0$ i dla dowolnych liczb c_1, c_2, a_1, a_2 jeśli $c_1<c<c_2$ oraz a_1, b, c_1 i a_2, b, c_2 spełniają funkcję zdaniową $\Psi_2(u,v,w)$, to $a_1<a<a_2$;

(iii) $b<0$ i dla dowolnych liczb c_1, c_2, a_1, a_2 jeśli $c_1<c<c_2$ oraz a_1, b, c_1 i a_2, b, c_2 spełniają funkcję zdaniową $\Psi_2(u,v,w)$, to $a_2<a<a_1$.

Liczby a,b,c spełniają funkcję zdaniową $\Psi_3(u,v,w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a=bc$.

Za $\Phi(U)$ możemy teraz przyjąć funkcję zdaniową

$$\prod_{uvw}[U(u,v,w)\equiv\Psi_3(u,v,w)].$$

Zgodnie z twierdzeniami 1 i 2 możemy zastąpić rozpatrywaną tu arytmetykę liczb rzeczywistych T teorią T^*, w której stała π nie jest stałą specyficzną i która po dołączeniu odpowiedniej definicji relacji π staje się równoważna teorii T.

Aksjomaty (7) są w tym wypadku — jak już wspomnieliśmy (zob. str. 285) — tautologiami logicznymi. Również aksjomaty (8) odpowiadające tym A_i, które zawierają stałą π, są w teorii T^* zbędne, gdyż — jak można wykazać — są one zależne od pozostałych, a aksjomaty (8) odpowiadające tym A_i, które nie zawierają stałej π, mogą być oczywiście zastąpione samymi A_i. Wynika stąd, że pełną teorię liczb rzeczywistych można zastąpić teorią, w której stałymi specyficznymi są L, σ, $<$, 0 i 1, aksjomatami zaś zdania I 1-6, II 1-6, III 1-2, IV 9-12 i VII 1, a w której stała π wprowadzona jest odpowiednią definicją. Teoria T^* ma

więc o jedno pojęcie pierwotne i o dziewięć aksjomatów mniej niż teoria T [1]).

Z podanych przykładów widać, że teoria, w której jedno z pojęć pierwotnych jest zależne od pozostałych, może być nieraz znacznie uproszczona. Jest więc rzeczą ważną posiadanie metody, pozwalającej badać wzajemną niezależność pojęć pierwotnych. Do tego celu służy metoda następująca:

Niech T będzie — jak poprzednio — teorią o pojęciach pierwotnych $\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ i stałych specyficznych $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$.

Załóżmy, że w teorii T^* zdefiniowane są dwa ciągi stałych:

$$\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k,$$
$$\sigma, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k,$$

które oznaczają dwa układy pojęć, stanowiące dwa modele teorii T w teorii T^* (pojęcia $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ są więc w obu modelach interpretowane tak samo).

Przy tych założeniach zachodzi następujące

Twierdzenie 3 [2]). *Jeśli teoria T^* jest niesprzeczna i można w niej udowodnić nierówność*

$$\varrho \neq \sigma, \tag{10}$$

to Ω jest niezależne od $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ na gruncie aksjomatów teorii T.

Dowód. Załóżmy, że istnieje funkcja zdaniowa $\Phi(x)$, nie zawierająca ω i taka, że zdanie (6) jest twierdzeniem teorii T. Zgodnie z definicją modelu (§ 2, str. 270) możemy ze zdania (6) otrzymać dwa twierdzenia teorii T^*, zastępując $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_k$ raz przez $\varrho, \varrho_1, \ldots, \varrho_k$, a drugi raz przez $\sigma, \varrho_1, \ldots, \varrho_k$. Ponieważ ω nie występuje w $\Phi(x)$, więc $\Phi(x)$ przejdzie przy obydwu tych podstawieniach w tę samą funkcję zdaniową $\Phi^*(x)$ teorii T^*. Dochodzimy zatem do wniosku, że równoważności

$$(x = \varrho) \equiv \Phi^*(x) \quad \text{i} \quad (x = \sigma) \equiv \Phi^*(x)$$

[1]) Oczywiście redukcja liczby aksjomatów może być zawsze osiągnięta po prostu przez przyjęcie koniunkcji wszystkich aksjomatów teorii jako jedynego aksjomatu. Oczywiste jest również, że nie stanowi to żadnego uproszczenia. Natomiast uproszczenie, uzyskane w danym razie przez zastąpienie teorii T teorią T^*, jest istotne i znacznie głębsze.

[2]) Twierdzenie to pochodzi w zasadzie od logika włoskiego A. Padoa. Por. A. Tarski, *Z badań metodologicznych nad definiowalnością terminów*, Przegląd Filozoficzny, tom 37 (1934), str. 442, odsyłacz [8].

są twierdzeniami teorii T^*, skąd wynika, że i równość $\varrho = \sigma$ jest twierdzeniem teorii T^*.

Teoria T^* byłaby zatem sprzeczna, gdyż nierówność (10) jest z założenia twierdzeniem tej teorii.

Dla żadnej więc funkcji zdaniowej $\Phi(x)$, nie zawierającej stałej ω, zdanie (6) nie może być twierdzeniem teorii T, c.b.d.o.

Treść twierdzenia 3 możemy też ująć w postaci następującej reguły:

Aby stwierdzić niezależność Ω od pozostałych pojęć pierwotnych teorii T (na gruncie aksjomatów tej teorii) staramy się znaleźć w teorii niesprzecznej T^* dwie różne interpretacje układu pojęć pierwotnych teorii T i to tak, by wszystkie pojęcia różne od Ω były obydwa razy interpretowane tak samo, Ω zaś za każdym razem inaczej.

PRZYKŁAD. Stwierdźmy niezależność pojęć pierwotnych (różnych od relacji równości i różności) teorii grup przemiennych uporządkowanych, wzbogaconej zmiennymi typów (*), (*,*) i (*,*,*) (Rozdział IX, § 3, teoria III, str. 237). Pojęciami pierwotnymi tej teorii są L, σ i $<$.

Za T^* bierzemy arytmetykę liczb rzeczywistych.

Modelami teorii III w teorii T^* są m. in.:

zbiór liczb rzeczywistych, działanie dodawania, relacja mniejszości;

zbiór liczb wymiernych, działanie dodawania, relacja mniejszości.

Na podstawie twierdzenia 3 wnosimy stąd, że L jest niezależne od σ i $<$ na gruncie aksjomatów teorii III.

Aby wykazać niezależność σ od L i $<$, rozpatrujemy modele:

zbiór liczb rzeczywistych, działanie $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = y + z]$, relacja mniejszości,

zbiór liczb rzeczywistych, działanie $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = y + z + 1]$, relacja mniejszości.

Wreszcie niezależność $<$ od σ i L wykazują modele:

zbiór liczb rzeczywistych, działanie dodawania, relacja mniejszości,

zbiór liczb rzeczywistych, działanie dodawania, relacja większości.

Przyjęta definicja zależności pojęć pierwotnych (str. 284) nadaje się do takich teorii sformalizowanych, w których występują zmienne co najmniej tych wszystkich typów, jakich są stałe specyficzne. Gdyby założenie to nie było spełnione, pojęcia pierwotne, dla których w teorii nie ma zmiennych tego samego typu, byłyby automatycznie niezależne od pozostałych, gdyż nie można by dla nich w ogóle napisać równoważności (6).

Dlatego jest celowe uzupełnienie definicji zależności pojęć pierwotnych w teoriach T rzędu n. Mówimy mianowicie, że relacja Ω typu $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ rzędu n jest w teorii T *zależna* od pozostałych pojęć pierwotnych tej teorii na gruncie jej aksjomatów, jeśli istnieje taka funkcja zdaniowa $\Phi(x, y, \ldots, u)$ o k zmiennych wolnych, mających typy $c_1, c_2, \ldots, c_k$ która nie zawiera stałej ω (nazwy relacji Ω) i dla której zdanie

$$\omega(x, y, \ldots, u) \equiv \Phi(x, y, \ldots, u)$$

jest twierdzeniem teorii T.

Twierdzenia 1, 2 i 3 zachowują swą moc również w stosunku do tak uzupełnionej definicji zależności pojęć; należy tylko dopuścić w teorii T^*, prócz reguły definiowania, znanej nam z Rozdziału X (§ 1, str. 250) jeszcze uzupełnioną regułę definiowania z tegoż Rozdziału (§ 4, str. 263).

Zasadniczo dążymy do oparcia każdej teorii sformalizowanej na niezależnym układzie pojęć pierwotnych, gdyż w przeciwnym razie wprowadzilibyśmy do teorii jako pojęcie pierwotne pewne pojęcie dające się zdefiniować. W praktyce jednak słusznie odstępuje się nieraz od postulatu niezależności pojęć pierwotnych, gdyż budowa teorii uboższej w aksjomaty i pojęcia pierwotne jest (w początkowym zwłaszcza stadium) znacznie trudniejsza, niż budowa teorii bogatszej. Tak np. eliminując stałą π z pełnej teorii liczb rzeczywistych, otrzymujemy wprawdzie teorię zasadniczo prostszą (o mniejszej liczbie pojęć pierwotnych i aksjomatów), ale za to przy dowodzeniu wszystkich niemal twierdzeń powoływać się musimy na pewnik ciągłości. Zachowując natomiast stałą π, zyskujemy możność łatwego i naturalnego dowodzenia twierdzeń elementarnych.

ĆWICZENIA. 1. Wykazać, że w pełnej teorii liczb rzeczywistych (Rozdział IX, § 4, teoria VII, str. 242) relacja $<$ jest zależna od relacji σ i π na gruncie aksjomatów tej teorii. Przekształcić tę teorię w równoważną jej teorię, nie zawierającą stałej specyficznej $<$.

Wsk.: Oprzeć się na twierdzeniu

$$(x < y) \equiv (x \neq y) \cdot \sum_{zt} [\pi(z, t, t) \cdot \sigma(y, x, z)].$$

2. Wykazać, że liczby 0 i 1 są zależne od relacji σ i π na gruncie aksjomatów pełnej teorii liczb rzeczywistych.

3. Przekształcić pełną teorię liczb rzeczywistych na równoważną teorię T^*, w której nie występują stałe 0 i 1.

4. Udowodnić, że relacja π jest niezależna od innych pojęć pierwotnych teorii T^* z ćwiczenia 3 na gruncie aksjomatów tej teorii.

Wsk.: Pojęcia pierwotne teorii T^*, mianowicie π, σ i $<$, interpretujemy w samej teorii T^* raz przez nie same, a drugi raz jako $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = 2yz]$, σ i $<$.

5. Udowodnić, że w pełnej teorii liczb rzeczywistych relacja σ jest niezależna od pozostałych pojęć pierwotnych na gruncie aksjomatów tej teorii.

Wsk.: Pojęcia pierwotne teorii liczb rzeczywistych, mianowicie σ, π, $<$, 0 i 1, interpretujemy w tej samej teorii raz przez nie same, a drugi raz jako

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = \sqrt[3]{y^3 + z^3}], \quad \pi, \quad <, \quad 0 \quad \text{i} \quad 1.$$

Niezależność relacji σ w zestawieniu z przykładem 2 ze str. 286 pokazuje, że relacje π i σ grają role istotnie różne w teorii liczb rzeczywistych: eliminacja pierwszej z tych relacji jest zasadniczo możliwa, a drugiej — niemożliwa.

6. Udowodnić niezależność relacji π od relacji $<$ i σ oraz liczb 0 i 1 na gruncie aksjomatów elementarnej teorii liczb rzeczywistych (Rozdział IX, § 3, teoria IV, str. 237).

7. Zachowując oznaczenia wprowadzone na str. 284 (przed dowodem twierdzenia 1), wykazać, że Ω jest zależne od $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ na gruncie aksjomatów (5) wtedy i tylko wtedy, gdy równoważność

$$(x = \omega) \equiv A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_n(x)$$

jest twierdzeniem teorii T[1]).

§ 7. Zupełność. Niech T będzie dowolną teorią sformalizowaną. Wyrażenie W tej teorii, nie zawierające zmiennych wolnych, nazywa się *nierozstrzygalne* w teorii T, jeśli ani W, ani W' nie są twierdzeniami tej teorii.

Teoria T nazywa się *zupełna*, jeśli nie istnieją wyrażenia w niej nierozstrzygalne, t. j. jeśli dla każdego wyrażenia W tej teorii, nie zawierającego zmiennych wolnych, bądź samo W, bądź W' jest twierdzeniem tej teorii.

Doniosłość pojęcia zupełności wyjaśnić można w następujący sposób.

Wyrażenie W bez zmiennych wolnych wypowiada pewną własność pojęć pierwotnych. Istnienie w teorii takiego wyrażenia W bez zmiennych wolnych, że ani W, ani W' nie jest twierdzeniem teorii, znaczy zatem, że teoria nie daje możności rozstrzygnąć, czy jej pojęcia pierwotne mają pewną własność, dającą się wyrazić w teorii (mianowicie wyrażoną w W), czy tej włas-

[1]) Por. A. Tarski, *Z badań metodologicznych nad definiowalnością terminów*, Przegląd Filozoficzny, tom 37 (1934), str. 443, twierdzenie 1.

ności nie mają. Natomiast w teorii zupełnej można rozstrzygnąć każde pytanie, dotyczące pojęć pierwotnych, o ile tylko pytanie to daje się w ogóle sformułować w teorii.

Zastrzeżenie uczynione w definicji zupełności, by W nie zawierało zmiennych wolnych, tłumaczy się tym, że tylko wyrażenie bez zmiennych wolnych wypowiada własność wyłącznie pojęć pierwotnych. Np. wyrażenie $\prod_{xy}[(x<y)\to(y<x)']$ stwierdza antysymetrię relacji $<$, natomiast wyrażenie $\prod_{y}[(x<y)\to(y<x)']$ wypowiada pewną własność nie tylko relacji $<$, ale i przedmiotu x.

Nie należy sądzić, że zawsze dążymy do uzyskania teorii zupełnej. Nieraz rozpatrujemy w matematyce pojęcia różnorodne, lecz mające pewne cechy wspólne. Korzystne jest wówczas przyjąć za aksjomaty zdania orzekające, że pojęcia pierwotne teorii mają te cechy. Twierdzenia takiej teorii zachowują swą moc dla każdego z pojęć, od których wyszliśmy.

Nie staramy się wtedy bynajmniej o takie wzmocnienie układu aksjomatów, by powstała teoria zupełna, wzmacniając go bowiem, otrzymalibyśmy teorię nie opisującą już własności tych wszystkich pojęć, które mieliśmy rozpatrywać.

Opisaną sytuację mamy np. w teorii grup, a także w algebrze Boole'a (Rozdział IV, § 5, str. 102). Teorie te właśnie dlatego są interesujące, że mają wiele różnych interpretacji, do których twierdzenia tych teorii stosują się w równym stopniu. Dołączając do aksjomatów algebry Boole'a założenie, że K ma np. 4 elementy, otrzymalibyśmy wprawdzie teorię zupełną, ale jej twierdzenia nie dawałyby się stosować do wszystkich interpretacji algebry Boole'a. Tak samo otrzymalibyśmy teorię zupełną, dołączając do aksjomatów teorii grup założenie, że L ma 15 elementów, ale twierdzenia takiej teorii nie pouczałyby nas o własnościach wszystkich grup, lecz tylko o własnościach grup 15-elementowych.

Inaczej ma się rzecz, gdy budujemy teorię, której celem ma być badanie pewnych określonych pojęć, np. pojęcia liczby naturalnej czy liczby rzeczywistej. Tu oczywiście ideałem byłaby teoria zupełna, jeśli bowiem nie możemy odpowiedzieć na pytanie, czy pojęcia pierwotne mają własność W, czy W', to najwidoczniej nie scharakteryzowaliśmy dostatecznie pojęć pierwotnych i założenia teorii winny ulec wzmocnieniu. Niestety, w wyjątkowych tylko wypadkach można utworzyć teorię zupełną, zwykle zaś teorie sformalizowane są niezupełne.

Podobnie jak pojęcie niesprzeczności teorii nie ma nic wspólnego z tautologią logiczną $(p\cdot p')'$, tak pojęcie zupełności nie jest — mimo pewnych formalnych analogii — niczym związane z prawem wyłączonego środka $p+p'$. Nieporozumienie może powstać, jeśli prawo wyłączonego środka odczytywać będziemy jako: *p jest prawdziwe lub nie-p jest prawdziwe* i utożsamimy słowa: *jest prawdziwe* ze słowami: *jest twierdzeniem* (rozważanej teorii sformalizowanej). Taki sposób odczytywania prawa wyłączonego środka jest jednak błędny.

Dla uniknięcia nieporozumień zaznaczamy z naciskiem, że prawo wyłączonego środka jest jednym z twierdzeń teorii, wypowiadanym w języku tej teorii, podczas gdy zupełność jest własnością całej teorii, mogącą jej przysługiwać lub nie, ale w każdym razie nie dającą się wysłowić w samej teorii lecz dopiero w *meta-teorii* (t. j. nauce o teorii).

Aby wykazać niezupełność teorii T, musimy wskazać takie wyrażenie W bez zmiennych wolnych, że ani W, ani W' nie jest twierdzeniem tej teorii. W tym celu wystarczy zdefiniować w jakichkolwiek dwu teoriach niesprzecznych T_1^* i T_2^* dwa modele dla teorii T, z których jeden jest modelem dla zdania W, a drugi dla zdania W'. Tak można ustalić niezupełność teorii T metodą interpretacji.

Znacznie trudniejsze są dowody zupełności teorii. Dla przykładu naszkicujemy tu dowód zupełności elementarnej teorii nierówności (Rozdział IX, § 3, teoria I, str. 232), wzmocnionej aksjomatem

$$10. \qquad \prod_x(x\in L).$$

Przez przyjęcie tego aksjomatu możemy uprościć aksjomaty I1-6 i twierdzenia I7-12, podane w Rozdziale IX (§ 3, str. 233), zastępując kwantyfikatory o ograniczonym zakresie $\prod_{x\in L}$ i $\sum_{x\in L}$ przez kwantyfikatory zwykłe.

Rozpatrzmy przede wszystkim dowolne wyrażenie W tej teorii, nie zawierające kwantyfikatorów. Wyrażenie W jest więc zbudowane przy pomocy funktorów zdaniotwórczych z wyrażeń postaci:

$$(11)\quad \begin{array}{llll}(x=x), & (x=x)', & (x=y), & (x=y)',\\ (x<x), & (x<x)', & (x<y), & (x<y)'.\end{array}$$

Zgodnie z twierdzeniami 8 i 11 Rozdziału II (§ 11, str. 33 i § 12, str. 38) możemy wyrażenie W przekształcić w równoważne mu wyrażenie o postaci normalnej *dyzjunkcyjnej* [1])

$$K_1+K_2+\cdots+K_n, \tag{12}$$

gdzie każde z wyrażeń K_i jest koniunkcją pewnej liczby wyrażeń postaci (11).

Niech V_0 będzie wyrażeniem $\sum_x(x=x)$. Jest jasne, że następujące równoważności są twierdzeniami rozpatrywanej teorii:

$$(x=x)\equiv V_0, \quad (x=x)'\equiv V_0', \quad (x<x)\equiv V_0', \quad (x<x)'\equiv V_0. \tag{13}$$

Zgodnie z uwagą uczynioną w Rozdziale IX (§ 3, str. 234, wzory I 8 i I 9), mamy nadto w teorii nierówności twierdzenia:

$$(x=y)'\equiv[(x<y)+(y<x)], \quad (x<y)'\equiv[(x=y)+(y<x)]. \tag{14}$$

Zastosujmy te twierdzenia do przekształcenia alternatywy (12). Zastępując w tej alternatywie wyrażenia figurujące po lewej stronie równoważności (13) i (14) przez wyrażenia figurujące po prawej stronie tych równoważności i stosując następnie prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy, sprowadzimy wyrażenie (12) do równoważnego mu wyrażenia

$$L_1+L_2+\cdots+L_p, \tag{15}$$

gdzie każde z wyrażeń L_j jest koniunkcją wyrażeń postaci

$$V_0, \quad V_0', \quad x=y, \quad x<y$$

(przy czym zmienne x i y są różne).

Alternatywy zbudowane tak jak (15) nazywać będziemy *prostymi*.

Wynik, do jakiego doszliśmy, możemy więc wypowiedzieć jak następuje:

(i) *Każde wyrażenie W elementarnej teorii nierówności bez kwantyfikatorów może być przekształcone w równoważną mu alternatywę prostą* (15), *nie zawierającą żadnych innych zmiennych poza tymi, które występowały w W.*

[1]) Jest to forma dwoista do form normalnych, rozpatrywanych w Rozdziale II, § 11, str. 32. Por. też str. 36, ćwiczenie 1.

Przejdźmy teraz do wyrażeń, które mogą zawierać kwantyfikatory. Udowodnimy o nich, że

(ii) *Każde wyrażenie W elementarnej teorii nierówności może być przekształcone w równoważną mu alternatywę prostą, zawierającą tylko takie zmienne, które były wolne w W.*

Dowód. Przypomnijmy najpierw, że w myśl twierdzenia 4 Rozdziału III (§ 8, str. 80) wyrażenie W może być przekształcone w równoważne mu wyrażenie o postaci normalnej, tzn. takiej, że rozpoczyna się ono układem kwantyfikatorów (*charakterystyką*), po których następuje wyrażenie wolne od kwantyfikatorów (*macierz*). Możemy zatem od razu założyć, że wyrażenie W ma postać normalną.

Zastosujemy teraz indukcję według liczby k kwantyfikatorów w charakterystyce wyrażenia W.

Jeśli ta liczba kwantyfikatorów jest 0, to twierdzenie (ii) sprowadza się do twierdzenia (i).

Załóżmy więc, że $k>0$ i że twierdzenie (ii) zachodzi dla takich wyrażeń o postaci normalnej, których charakterystyka zawiera $k-1$ kwantyfikatorów. Niech W będzie wyrażeniem o postaci normalnej, którego charakterystyka zawiera k kwantyfikatorów.

Przypuśćmy najpierw, że W rozpoczyna się od małego kwantyfikatora, a zatem że ma postać $\sum_x W_1$, gdzie W_1 jest wyrażeniem o postaci normalnej, którego charakterystyka zawiera $k-1$ kwantyfikatorów. W myśl więc założenia indukcyjnego W_1 jest równoważne alternatywie prostej (15), nie zawierającej żadnych innych zmiennych poza tymi, które były wolne w W_1.

Wobec prawa rozdzielności małego kwantyfikatora względem alternatywy wnosimy stąd, że wyrażenie W jest równoważne alternatywie

$$\sum_x L_1+\sum_x L_2+\cdots+\sum_x L_p.$$

Na mocy definicji suma logiczna alternatyw prostych jest znów alternatywą prostą; wynika stąd z łatwością, że wystarczy dowieść, iż każde z wyrażeń $\sum_x L_i$ jest równoważne alternatywie prostej, nie zawierającej innych zmiennych poza tymi, które występują w L_i i są różne od x.

Aby tego dowieść, rozpatrzmy rozmaite postacie, jakie może mieć wyrażenie L_i. Jest ich trzy:

(α) Zmienna x nie występuje w L_i. Wyrażenie $\sum_x L_i$ jest wtedy równoważne wyrażeniu L_i, a więc w przypadku (α) twierdzenie (ii) jest prawdziwe.

(β) Zmienna x występuje w jednym z czynników L_i, mającym postać równości. Wobec twierdzenia $(x=y)\equiv(y=x)$ (Rozdział IX, § 3, str. 233, wzór I 7) możemy wówczas sprowadzić L_i do postaci

$$(x=y)\cdot(x<z_1)\cdot\ldots\cdot(x<z_q)\cdot(u_1<x)\cdot\ldots\cdot(u_r<x)\cdot(x=v_1)\cdot\ldots\cdot(x=v_s)\cdot C,$$

gdzie C jest koniunkcją tych czynników L_i, które nie zawierają zmiennej x (liczby q, r i s mogą przy tym być równe 0 i koniunkcja C może nie występować w wyrażeniu L_i).

Na mocy pewników ekstensjonalności, L_i jest równoważne koniunkcji

$$(x=y)\cdot(y<z_1)\cdot\ldots\cdot(y<z_q)\cdot(u_1<y)\cdot\ldots\cdot(u_r<y)\cdot(y=v_1)\cdot\ldots\cdot(y=v_s)\cdot C,$$

a więc $\sum_x L_i$ jest równoważne koniunkcji

$$V_0\cdot(y<z_1)\cdot\ldots\cdot(y<z_q)\cdot(u_1<y)\cdot\ldots\cdot(u_r<y)\cdot(y=v_1)\cdot\ldots\cdot(y=v_s)\cdot C,$$

gdyż $\sum_x(x=y)$ jest twierdzeniem teorii nierówności, a więc jest równoważne wyrażeniu V_0. Tym samym udowodniliśmy twierdzenie (ii) w przypadku (β).

(γ) Zmienna x występuje tylko w tych czynnikach koniunkcji L_i, które mają postać nierówności. L_i ma wówczas jedną z trzech następujących postaci:

(16) $$(x<y_1)\cdot\ldots\cdot(x<y_q)\cdot C,$$

(17) $$(z_1<x)\cdot\ldots\cdot(z_r<x)\cdot C,$$

(18) $$(z_1<x)\cdot\ldots\cdot(z_r<x)\cdot(x<y_1)\cdot\ldots\cdot(x<y_q)\cdot C,$$

gdzie q i r są dodatnie, a C jest koniunkcją tych czynników L_i, które nie zawierają zmiennej x (C może więc znikać z wyrażeń (16)-(18)). W przypadkach (16) i (17) $\sum_x L_i$ jest równoważne $V_0\cdot C$, gdyż oba wyrażenia

$$\sum_x[(x<y_1)\cdot\ldots\cdot(x<y_q)],\qquad \sum_x[(z_1<x)\cdot\ldots\cdot(z_r<x)]$$

są twierdzeniami teorii nierówności, a więc są równoważne wyrażeniu V_0 (por. Rozdział IX, § 3, str. 234, wzory I 10 i I 11). W przypadku (18) $\sum_x L_i$ jest na mocy wzoru I 12 z Rozdziału IX (zob. tamże) równoważne koniunkcji

$$(z_1<y_1)\cdot\ldots\cdot(z_1<y_q)\cdot\ldots\cdot(z_r<y_1)\cdot\ldots\cdot(z_r<y_q)\cdot C.$$

Twierdzenie (ii) jest w ten sposób sprawdzone również w przypadku (γ).

Udowodniliśmy zatem twierdzenie (ii) dla wszelkich takich wyrażeń W, których charakterystyka rozpoczyna się od małego kwantyfikatora.

Jeśli zaś charakterystyka wyrażenia W rozpoczyna się od dużego kwantyfikatora, to charakterystyka wyrażenia W' rozpoczyna się od małego kwantyfikatora, a więc (na mocy już udowodnionej części twierdzenia) W' jest równoważne alternatywie prostej P, nie zawierającej żadnej zmiennej poza tymi, które były wolne w W'. Stąd W jest równoważne P', a ponieważ na mocy twierdzenia (i) P' może być przekształcone w równoważną mu alternatywę prostą Q o tych samych zmiennych co P', więc i W jest równoważne alternatywie prostej Q, której zmienne są wolne w W.

Twierdzenie (ii) zostało w ten sposób udowodnione także w przypadku, gdy charakterystyka W rozpoczyna się od dużego kwantyfikatora.

Możemy teraz już łatwo wykazać zupełność elementarnej teorii nierówności.

Niech W będzie wyrażeniem bez zmiennych wolnych. W myśl (ii) istnieje alternatywa prosta (15) równoważna wyrażeniu W i również nie zawierająca żadnych zmiennych wolnych. Czynnikami koniunkcji L_i mogą więc być tylko wyrażenia V_0 i V_0'. Wnosimy stąd z łatwością, że alternatywa prosta (15) jest równoważna jednemu z czterech następujących wyrażeń:

$$V_0,\qquad V_0',\qquad V_0+V_0',\qquad V_0\cdot V_0'.$$

W pierwszym i trzecim przypadku W jest twierdzeniem, w drugim zaś i czwartym W' jest twierdzeniem. Zatem zawsze albo W, albo W' jest twierdzeniem, czyli rozważana teoria nierówności jest zupełna.

Użyta tu metoda dowodu nazywa się metodą *eliminacji kwantyfikatorów.*

Jak widzimy, polega ona na kolejnym przekształcaniu dowolnego wyrażenia W na wyrażenie bez kwantyfikatorów [1]).

PRZYKŁAD. Rozpatrzmy wyrażenie

$$(19) \qquad \prod_x \prod_z \sum_y [(x=y)' \cdot (y<z) + (y<z)' \cdot (z=z) \cdot (x<y)].$$

Przekształcimy najpierw macierz M tego wyrażenia, opierając się na równoważnościach (13) i (14).

$$\vdash M \equiv \{[(x<y)+(y<x)] \cdot (y<z) + [(y=z)+(z<y)] \cdot (z=z) \cdot (x<y)\} \equiv$$
$$\equiv \{(x<y) \cdot (y<z) + (y<x) \cdot (y<z) + V_0 \cdot (y=z) \cdot (x<y) + V_0 \cdot (z<y) \cdot (x<y)\}.$$

Przekształciliśmy więc M na równoważną jej alternatywę prostą. Mamy teraz

$$\vdash \sum_y M \equiv \{\sum_y [(x<y) \cdot (y<z)] + \sum_y [(y<x) \cdot (y<z)] +$$
$$+ V_0 \cdot \sum_y [(y=z) \cdot (x<y)] + V_0 \cdot \sum_y [(z<y) \cdot (x<y)]\},$$

skąd stosując przekształcenia opisane w (β) i (γ), otrzymujemy

$$\vdash \sum_y M \equiv [(x<z) + V_0 + V_0 \cdot (x<z) + V_0] \equiv [(x<z) + V_0].$$

Wynika stąd, że

$$\vdash (\prod_z \sum_y M)' \equiv \sum_z (\sum_y M)' \equiv \sum_z [(x<z)' \cdot V_0'] \equiv$$
$$\equiv V_0' \cdot \sum_z [(x=z) + (z<x)] \equiv \{V_0' \cdot \sum_z (x=z) + V_0' \cdot \sum_z (z<x)\} \equiv$$
$$\equiv V_0' \cdot V_0,$$

a więc

$$\vdash \prod_z \sum_y M \equiv V_0' + V_0 \quad \text{i} \quad \vdash \prod_x \prod_z \sum_y M \equiv V_0' + V_0.$$

Wyrażenie (19) jest zatem twierdzeniem teorii nierówności.

[1]) Metoda ta pochodzi od Th. Skolema, który użył jej po raz pierwszy w pracy: *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen,* Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 1919, nº 3, str. 30-37. Metodę tę stosował w wielu pracach A. Tarski; por. jego *Grundzüge des Systemenkalküls II,* Fundamenta Mathematicae, tom 26 (1936), str. 283-301, § 5. Por. także C. H. Langford, *Some theorems on deducibility,* Annals of Mathematics 2 s., tom 28 (1927), str. 16-40, tegoż autora *Theorems on deducibility (Second paper),* tamże, str. 459-471, wreszcie C. I. Lewis i C. H. Langford, *Symbolic Logic,* New York 1932, rozdział XII.

Prócz teorii I jeszcze teoria V, rozważana w Rozdziale IX (§ 3, str. 239), staje się zupełna, o ile dołączymy do niej jeden nowy aksjomat: $\prod_x (x \in P)$.

Wszystkie inne teorie podane w Rozdziale IX są niezupełne nawet po podobnym wzmocnieniu aksjomatów. Dowody niezupełności teorii nie-elementarnych, są jednakże nadzwyczaj trudne [1]).

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić niezupełność teorii nierówności nie wzbogaconej aksjomatem I0 (p. str. 293).

Wsk.: Ani I0, ani jego negacja nie są twierdzeniami tej teorii.

2. Udowodnić niezupełność teorii II, III, IV i VI z Rozdziału IX, § 3.

3. Rozpatrzyć teorię elementarną o stałych specyficznych L i $<$ oraz aksjomatach I0, I1-I3 i I6. Wykazać, że istnieją dokładnie cztery sposoby takiego wzmocnienia układu aksjomatów tej teorii, które prowadzą do teorii zupełnej.

Wsk.: Cztery te sposoby polegają na dołączeniu bądź zdań I4 i I5, bądź ich negacji, bądź zdania I4 i negacji zdania I5, bądź wreszcie zdania I5 i negacji zdania I4 [2]).

§ 8. Rozstrzygalność. Teoria T nazywa się *rozstrzygalna,* jeśli istnieje metoda pozwalająca o każdym wyrażeniu tej teorii rozstrzygnąć za pomocą skończonej liczby prób, czy jest ono twierdzeniem, czy nie.

Przykładem teorii rozstrzygalnej jest elementarna teoria nierówności, wzbogacona pewnikiem I0. Widzieliśmy istotnie w § 7, że każde wyrażenie tej teorii bez zmiennych wolnych bądź jest w niej twierdzeniem, bądź negacją twierdzenia, i poznaliśmy sposób, pozwalający o każdym konkretnym wyrażeniu W sprawdzić w skończonej liczbie kroków, który z tych dwu przypadków zachodzi.

Innym, prostszym przykładem teorii rozstrzygalnej jest rachunek zdań, którym zajmowaliśmy się w Rozdziale II [3]). Metoda

[1]) Niezupełność tych teorii odkrył K. Gödel w cytowanej już na str. 279 pracy *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I.* Monatshefte für Mathematik und Physik, tom 38 (1931), str. 173-198. Gödel wykazał też, że nie można uzyskać zupełności przez wzbogacenie układu pewników tych teorii żadną skończoną liczbą pewników w pewnym sensie prawdziwych.

[2]) Por. A. Tarski, *Grundzüge des Systemenkalküls II,* Fundamenta Mathematicae, tom 26 (1936), str. 293.

[3]) Co prawda rachunek zdań nie podpada pod ogólny opis teorii sformalizowanych, podany w Rozdziale IX (§ 1, str. 222), nie ma to jednak istotnego znaczenia.

sprawdzania zerowo-jedynkowego istotnie pozwala rozstrzygnąć za pomocą skończonej liczby prób, czy dowolnie dane wyrażenie sensowne rachunku zdań jest tautologią, czy nie.

Teoria rozstrzygalna jest w pewnym sensie nieciekawa dla matematyka: przy dowodzeniu twierdzeń takiej teorii niepotrzebny jest żaden „akt twórczy"; wystarczy tylko sformułować zagadnienie i mechanicznie sprawdzić, czy otrzymane wyrażenie jest twierdzeniem. Gdyby np. teoria liczb rzeczywistych VII (Rozdział IX, § 4, str. 242) była rozstrzygalna, moglibyśmy mechanicznie sprawdzać, czy odpowiedź na takie zagadnienia jak wielkie twierdzenie Fermata albo hipoteza continuum wypada twierdząco, czy przecząco (czy też problemy te są nierozstrzygalne na gruncie aksjomatów tej teorii). Należy się więc spodziewać, że bogatsze teorie sformalizowane okażą się nierozstrzygalne, trudno bowiem przypuszczać, żeby można było znaleźć mechaniczną metodę rozwiązywania zagadnień, nad którymi od dziesięcioleci lub nawet stuleci pracują najwybitniejsi matematycy bez wyniku.

Chcąc ściśle dowodzić nierozstrzygalności jakiejkolwiek teorii, natrafia się na specyficzną trudność: pojęcie *metody rozstrzygania w skończonej liczbie kroków, czy wyrażenie jest twierdzeniem*, jest bardzo nieokreślone. Podana na początku definicja, jakkolwiek intuicyjnie jasna, jest za mało ścisła, aby można było wykazać istnienie teorii, nie podpadającej pod pojęcie teorii rozstrzygalnej.

Na podobną trudność natrafiamy, gdy chcemy zdefiniować pojęcie funkcji *obliczalnej* o argumencie naturalnym, t. j. takiej funkcji $f(n)$, dla której istnieje metoda, pozwalająca obliczyć w skończonej liczbie kroków wartość funkcji dla każdej efektywnie danej wartości argumentu.

Jest jasne, że funkcję $(\hat{m},\hat{n})(m=n+1)$ chcielibyśmy nazywać obliczalną, natomiast funkcja

$(\hat{m},\hat{n})$ [*m jest równe* 0, *o ile nie ma liczb* $p \geqslant n$, *dla których twierdzenie Fermata jest prawdziwe, albo m jest równe najmniejszej z takich liczb p*]

być może nie jest obliczalna.

Istnieje wiele sposobów określania pojęcia obliczalności funkcji[1]; wszystkie te sposoby są zresztą równoważne. Opiszemy jeden z nich, pochodzący od Gödla[2].

Rozpatrywać będziemy zbiór liczb naturalnych określonych np. tak, jak w Rozdziale VII (§ 5, str. 183). Niech zmienne $m,n,\ldots$ przebiegają zbiór tych liczb naturalnych. Ponieważ będziemy mówili dalej o innych jeszcze liczbach naturalnych, więc dla odróżnienia będziemy nazywali liczby określone w Rozdziale VII *liczbami naturalnymi intuicyjnymi*.

Zadanie nasze polega na wyodrębnieniu spośród wszystkich funkcyj, których argumenty i wartości przebiegają zbiór liczb naturalnych intuicyjnych, węższej klasy funkcyj, dla których istnieje metoda obliczania ich wartości.

W tym celu rozpatrujemy sformalizowaną arytmetykę liczb naturalnych, opartą na układzie aksjomatów Peano, t.j. teorię VIII z Rozdziału IX (§ 4, str. 243). Teoria ta bada indywidua typu $*$, które w tej teorii też nazywają się liczbami naturalnymi, choć nie mają one zasadniczo nic wspólnego z liczbami naturalnymi intuicyjnymi. Te nowe liczby będziemy dla odróżnienia nazywali *liczbami naturalnymi formalnymi*.

Wzbogaćmy teorię VIII definicjami:

$$Z_1 \underset{df}{=} (\iota x)N(0,x), \qquad Z_2 \underset{df}{=} (\iota x)N(Z_1,x), \qquad Z_3 \underset{df}{=} (\iota x)N(Z_2,x), \qquad \ldots$$

Symbole $Z_1, Z_2, \ldots$ są nazwami liczb naturalnych formalnych. Każdej liczbie naturalnej intuicyjnej n odpowiada dokładnie jeden znak Z_n, który jest nazwą określonej liczby naturalnej formalnej.

Funkcję $f(n)$, której argument i wartość przebiegają zbiór liczb naturalnych intuicyjnych, nazywać będziemy *obliczalną*,

[1] Nie możemy tu omawiać dokładnie zagadnień związanych z pojęciem funkcyj obliczalnych, mimo że zagadnienia te mają znaczenie dla wielu działów logiki. Z teorią funkcyj obliczalnych zapoznać się można z książki: D. Hilbert i P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, tom 2 (1939), Supplement II, oraz z prac: S. C. Kleene, *General recursive functions of natural numbers*, Mathematische Annalen, tom 112 (1936), str. 727-742, i tegoż autora *Recursive predicates and quantifiers*, Transactions of the American Mathematical Society, tom 53 (1943), str. 41-73. Funkcje obliczalne nazywają się w literaturze angielskiej *general recursive functions*.

[2] Por. K. Gödel, *Über die Länge von Beweisen*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, zeszyt 7, Wiedeń 1936, str. 23-24.

jeśli istnieje taka funkcja zdaniowa $\Phi(x,y)$ teorii VIII o dwu zmiennych wolnych x i y typu $*$, że dla dowolnych liczb naturalnych intuicyjnych n i m zdanie $\Phi(Z_n, Z_m)$ (powstające z $\Phi(x,y)$ przez podstawienie symbolu Z_n za zmienną x i symbolu Z_m za zmienną y) jest wtedy i tylko wtedy twierdzeniem teorii VIII, gdy $m=f(n)$.

Zgodnie z tą definicją funkcja $(\hat{m},\hat{n})[m=n+1]$ jest obliczalna, gdyż zdanie $N(Z_n,Z_m)$ jest wtedy i tylko wtedy twierdzeniem teorii VIII, gdy $m=n+1$. Również nietrudno wykazać, że takie funkcje jak $(\hat{m},\hat{n})[m=2^n]$, $(\hat{m},\hat{n})[m=n^n]$ i t. p. są obliczalne.

Znacznie trudniej byłoby określić funkcję nieobliczalną; istnienie takich funkcji jest jednak oczywiste, gdyż istnieje nieprzeliczalnie wiele różnych funkcji (o argumencie i wartościach naturalnych), a funkcji obliczalnych jest tylko przeliczalnie wiele.

Podana tu definicja obliczalności wyda się zapewne na pierwszy rzut oka sztuczna. Następujące rozważania — które zresztą nie roszczą pretensji do ścisłości — mają na celu wyjaśnienie intuicyjnego sensu przyjętej definicji.

Intencją naszą przy układaniu definicji obliczalności jest to, aby dla każdej funkcji obliczalnej istniała metoda obliczania wartości tej funkcji dla każdej efektywnie danej wartości argumentu. Metoda taka polegać ma na wykonywaniu pewnych działań rachunkowych, prowadzących od liczby n do wartości $f(n)$. Otóż arytmetyka sformalizowana w teorii VIII jest tak bogata, że wszystkie zwykle rozpatrywane działania rachunkowe dają się w niej wyrazić. Możemy zatem wyrazić w teorii VIII działanie prowadzące od liczby n do liczby $m=f(n)$ i otrzymać taką funkcję zdaniową $\Phi(x,y)$, że jeśli $m=f(n)$, to zdanie $\Phi(Z_n,Z_m)$ jest twierdzeniem teorii VIII, a jeśli $m\neq f(n)$, to negacja tego zdania jest twierdzeniem teorii VIII. Zakładając niesprzeczność tej teorii, wnosimy stąd, że zdanie $\Phi(Z_n,Z_m)$ jest twierdzeniem teorii VIII wtedy i tylko wtedy, gdy $m=f(n)$, a więc funkcja $f(n)$ jest obliczalna w myśl podanej poprzednio definicji.

Załóżmy na odwrót, że istnieje taka funkcja zdaniowa $\Phi(x,y)$, iż zdanie $\Phi(Z_n,Z_m)$ jest twierdzeniem teorii VIII, o ile $m=f(n)$, a nie jest twierdzeniem tej teorii, o ile $m\neq f(n)$. Możemy wówczas podać pewną systematyczną metodę obliczania wartości $f(n)$ dla każdej efektywnie danej wartości n. Istotnie $f(n)$ jest jedyną taką intuicyjną liczbą naturalną m, że zdanie $\Phi(Z_n,Z_m)$ jest twierdzeniem teorii VIII. Aby więc liczbę tę znaleźć, należy wypisywać po kolei wszystkie dowody sformalizowane teorii VIII dopóty, dopóki nie natrafimy na dowód zakończony wyrażeniem postaci $\Phi(Z_n,Z_m)$. Liczba m jest wówczas wartością funkcji f dla argumentu równego n.

W związku z definicją obliczalności nasuwa się pytanie, czy istotny był wybór akurat teorii VIII jako teorii liczb naturalnych formalnych i czy zakres pojęcia funkcji obliczalnej zmieniłby się, gdybyśmy zamiast teorii VIII wybrali jakąś inną teorię, np. gdybyśmy wyposażyli teorię VIII w nowe aksjomaty lub wzbogacili ją zmiennymi wyższego typu logicznego. Otóż można wykazać, że zmiany takie nie miałyby wpływu na zakres pojęcia funkcji obliczalnej, co również przemawia za trafnością przyjętej tutaj definicji obliczalności.

Powróćmy teraz do definicji rozstrzygalności.

Wyrażenia teorii sformalizowanej $\boldsymbol{T}$ można z łatwością ustawić w ciąg nieskończony

$$W_1, W_2, W_3, \ldots, \tag{20}$$

w którym każde wyrażenie figuruje dokładnie jeden raz. Ciąg ten określamy w ten sposób, by dla każdego konkretnie danego wyrażenia dał się obliczyć przy pomocy skończonej liczby prób numer miejsca, jakie to wyrażenie zajmuje w ciągu. Można to uzyskać na wiele sposobów, np. tak, że ustawiamy najpierw w ciąg wszystkie wyrażenia utworzone z jednego znaku, następnie wyrażenia utworzone z dwu znaków, potem wyrażenia utworzone z trzech znaków i t. d., przestrzegając przy tym ustalonych z góry reguł *uporządkowania leksykograficznego* (czyli *słownikowego*) polegających np. na tym, aby wyrażenie będące koniunkcją następowało zawsze po wyrażeniu będącym implikacją i t. d.). Wreszcie, porządkujemy otrzymany w ten sposób ciąg podwójny (w którego pierwszym wierszu znajdują się wyrażenia złożone z jednego znaku, w drugim — wyrażenia złożone z dwu znaków i t. d.) w ciąg zwykły (20), np. metodą przekątnych, znaną z teorii mnogości [1]).

Niech $f(n)=0$, o ile W_n jest twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$; w przeciwnym razie niech $f(n)=1$.

Ścisłe określenie pojęcia rozstrzygalności brzmi teraz jak następuje: *teoria* $\boldsymbol{T}$ *nazywa się rozstrzygalna, jeśli funkcja* $f(n)$ *jest obliczalna.*

[1]) Prostsza metoda polega na wypisywaniu wyrażeń w kolejności wzrastania ich numerów. Por. dalej, Rozdział XII, § 4, str. 321-322.

Dostrzegamy bez trudu, że definicja ta wyraża te same intuicje, co nieścisłe określenie, podane na początku. Istotnie, dla dowolnego wyrażenia W potrafimy obliczyć (za pomocą skończonej liczby prób) jego numer n w ciągu (20). Zagadnienie, czy W jest, czy nie jest twierdzeniem teorii $\boldsymbol{T}$, jest równoważne zagadnieniu, czy $f(n)$ jest równe 0, czy 1. Jeśli więc funkcja $f(n)$ jest obliczalna, to istnieje systematyczna metoda sprawdzania, czy dowolne wyrażenie teorii $\boldsymbol{T}$ jest jej twierdzeniem; jeśli zaś funkcja $f(n)$ nie jest obliczalna, to metoda taka nie istnieje.

Ta definicja rozstrzygalności stanowi podstawę poprawnych dowodów rozstrzygalności i nierozstrzygalności teorii sformalizowanych.

Wyniki, jakie w tym kierunku uzyskano, są nieraz nieoczekiwane: już tak prosta teoria logiczna, jaką jest węższy rachunek funkcyjny, okazuje się nierozstrzygalna [1]). Tym bardziej więc nierozstrzygalny jest pełny system prostej teorii typów, którym zajmowaliśmy się w Rozdziale VIII (§ 3). Z teorii, rozpatrywanych w Rozdziale IX (§ 3) elementarna teoria grup jest nierozstrzygalna [2]), a elementarna teoria grup przemiennych uporządkowanych — rozstrzygalna [3]). Teorie nie-elementarne z Rozdziału IX (§ 4) okazały się wszystkie nierozstrzygalne, tak jak należało oczekiwać.

§ 9. Kategoryczność. Niech $\boldsymbol{T}$ będzie teorią sformalizowaną, której pojęciami pierwotnymi są indywidua, zbiory typu (*) i relacje typu (*,*). Dla prostoty założymy, że w teorii $\boldsymbol{T}$ mamy jedno pojęcie pierwotne typu *, jedno typu (*) i jedno typu (*,*). Koniunkcję wszystkich aksjomatów teorii $\boldsymbol{T}$ oznaczymy symbolem $\Phi(\lambda, \xi, \varrho)$, gdzie litera λ jest stałą typu *, litera ξ — stałą typu (*) i litera ϱ — stałą typu (*,*).

Dążenie do zupełności teorii wywołane było dążeniem do uzyskania tak silnych aksjomatów, żeby charakteryzowały one całkowicie pojęcia pierwotne. Uważaliśmy przy tym, że aksjomaty charakteryzują całkowicie pojęcia pierwotne, jeśli pozwalają

[1]) Twierdzenie to udowodnił A. Church w pracach: *An unsolvable problem of elementary number theory*, American Journal of Mathematics, tom 58 (1936), str. 345-363, *A note on the Entscheidungsproblem*, The Journal of Symbolic Logic, tom 1 (1936), str. 40-41 i *Correction to a note on the Entscheidungsproblem*, tamże, str. 101-102.

[2]) Wynik ten (dotychczas nie ogłoszony) uzyskał A. Tarski w 1943 r.

[3]) Twierdzenie to udowodniła W. Szmielew w 1940 r. Dowód nie jest dotąd ogłoszony.

one rozstrzygnąć każde zagadnienie, dotyczące tych pojęć, które daje się wysłowić za pomocą środków logicznych, jakimi rozważana teoria rozporządza.

Można jednak podejść do zagadnienia zupełnie inaczej. Można stanąć na stanowisku, że układ aksjomatów $\Phi(\lambda, \xi, \varrho)$ charakteryzuje pojęcia pierwotne λ, ξ i ϱ całkowicie, jeśli prócz tych pojęć nie ma żadnego innego układu pojęć, spełniającego te aksjomaty.

Nie trudno stwierdzić, że definicja taka byłaby jałowa: żaden układ aksjomatów nie charakteryzowałby pojęć pierwotnych. Wiemy bowiem z twierdzenia, dowiedzionego w Rozdziale VII (§ 8, str. 200), że jeśli λ, ξ i ϱ spełniają funkcję zdaniową Φ, a R jest relacją doskonałą, odwzorowującą zbiór pełny na siebie, to przedmiot λ_1 taki, że $\lambda R \lambda_1$, zbiór ξ_1 taki, że $\xi \sim_R \xi_1$, i relacja ϱ_1 taka, że $\varrho \sim_R \varrho_1$, też spełniają funkcję zdaniową Φ. Układ aksjomatów nie może więc mieć tylko jednego modelu: jeśli ma on jeden model, to ma ich wiele, ponieważ każda relacja doskonała, odwzorowująca zbiór pełny na siebie, przekształca dany model na inny (izomorficzny). Maksimum tego, czego oczekiwać możemy od aksjomatów, to żeby dwa różne modele były zawsze izomorficzne.

Po tych uwagach powinna już być zrozumiała następująca definicja:

Teoria $\boldsymbol{T}$ nazywa się *kategoryczna*, jeśli następujące zdanie jest tautologią logiczną:

$$\Phi(x_1, X_1, R_1,) \cdot \Phi(x_2, X_2, R_2) \rightarrow$$
$$(21) \quad \rightarrow \sum_S \{(S \in 1\text{-}1) \cdot [\mathfrak{D}(S) = 1] \cdot [\mathfrak{C}(S) = 1] \cdot (x_1 S x_2) \cdot (X_1 \sim_S X_2) \cdot (R_1 \sim_S R_2)\}$$ [1]).

Krócej (i mniej ściśle) wypowiada się tę definicję w następujący sposób: *teoria $\boldsymbol{T}$ jest kategoryczna, jeśli każde dwa jej modele są izomorficzne* [2]).

Rozciągnięcie określenia kategoryczności na teorie, których pojęcia pierwotne nie redukują się do trzech wyżej rozpatrzonych rodzajów, nie nastręcza trudności (por. dalej, ćwiczenie 4, str. 307).

[1]) Symbol $\Phi(x_1, X_1, R_1)$ oznacza oczywiście wyrażenie, jakie powstaje z $\Phi(\lambda, \xi, \varrho)$, gdy za literę λ wstawić zmienną x_1, za literę ξ — zmienną X_1 i za literę ϱ — zmienną R_1. Zakładamy przy tym, że zmienne x_i, X_i, R_i $(i = 1,2)$ nie występują w wyrażeniu $\Phi(\lambda, \xi, \varrho)$.

[2]) Pojęcie kategoryczności pochodzi od amerykańskiego matematyka O. Veblena. Zob. jego pracę *A system of axioms for geometry*, Transactions of the American Mathematical Society, tom 5 (1904), str. 343-384.

Wobec zasadniczej niezupełności wszelkich bogatszych systemów sformalizowanych (por. str. 299, odsyłacz) kategoryczność teorii jest jedynym znanym ścisłym odpowiednikiem intuicyjnego pojęcia całkowitego scharakteryzowania pojęć pierwotnych przez aksjomaty.

Jako przykład teorii kategorycznej służyć może aksjomatyczna teoria liczb naturalnych (Rozdział IX, § 4, teoria VIII, str. 243), o ile wzbogacimy ją aksjomatem

VIII 0. $\prod_x (x \in L)$.

Można wykazać, *że jeśli* $\Phi(0, L, N)$ *jest koniunkcją aksjomatów* VIII 0-VIII 6 *tej teorii, to zdanie* (21) *jest tautologią logiczną.*

Zadowolimy się podaniem tylko pobieżnego szkicu dowodu. Załóżmy więc, że przedmioty x_1, x_2, zbiory X_1, X_2 i relacje R_1, R_2 czynią zadość warunkom $\Phi(x_1, X_1, R_1)$ i $\Phi(x_2, X_2, R_2)$. Określmy S jako najmniejszą relację, czyniącą zadość następującym dwom warunkom:

1^0 $x_1 S x_2$,

2^0 *jeżeli* $u_1 R_1 v_1$, $u_2 R_2 v_2$ *i* $u_1 S u_2$, *to* $v_1 S v_2$.

Pojęcia x_1, X_1, R_1 tworzą zatem jeden model teorii VIII, a pojęcia x_2, X_2, R_2 — drugi model. Relacja S przyporządkowuje zeru z pierwszego modelu zero z drugiego modelu, następnikowi zera z pierwszego modelu (czyli jedności z pierwszego modelu) następnik zera z drugiego modelu, następnikowi jedności z pierwszego modelu następnik jedności z drugiego modelu i t. d. Można stąd z łatwością wywnioskować, że relacja S jest doskonała, dziedziną jej jest X_1, przeciwdziedziną X_2 oraz że wzory $u_1 R_1 v_1$ i $u_2 R_2 v_2$ są równoważne dla $u_1 S u_2$ i $v_1 S v_2$.

Wobec VIII 0 zarówno X_1 jak X_2 są równe zbiorowi pełnemu; relacja S czyni więc istotnie zadość wymienionym w (21) warunkom.

Przykładem teorii niekategorycznej jest elementarna teoria nierówności (Rozdział IX, § 3, teoria I, str. 232). W teorii liczb rzeczywistych można z łatwością zdefiniować dwie relacje porządkujące zbiór wszystkich liczb rzeczywistych w sposób gęsty, nie mające ani pierwszego, ani ostatniego elementu i nie izomorficzne. Jedną z tych relacji jest zwykła relacja $\leqslant$, drugą zaś relacja

$$(\hat{x}, \hat{y})[(x \textit{ jest wymierne}) \cdot (y \textit{ jest wymierne}) \cdot (x \leqslant y) +$$
$$+ (x \textit{ jest wymierne}) \cdot (y \textit{ jest niewymierne}) +$$
$$+ (x \textit{ jest niewymierne}) \cdot (y \textit{ jest niewymierne}) \cdot (x \leqslant y)].$$

Dwie te relacje są (wraz ze zbiorem liczb rzeczywistych) nieizomorficznymi modelami elementarnej teorii nierówności, co dowodzi, że teoria ta nie jest kategoryczna.

Z podanych przykładów jest widoczne, że pojęcia kategoryczności i zupełności nie są niczym z sobą związane. Istnieją teorie kategoryczne i niezupełne oraz teorie niekategoryczne, a zupełne.

ĆWICZENIA. 1. Wykazać, że teoria liczb rzeczywistych (Rozdział IX, § 4, str. 242) jest kategoryczna.

2. Zbadać kategoryczność elementarnych teorii z Rozdziału IX, § 3.

O d p.: Żadna z tych teorii nie jest kategoryczna.

3. Wykazać, że aksjomatyczna teoria liczb naturalnych bez aksjomatu VIII 0 nie jest kategoryczna.

4. Jak określić stosunek izomorfizmu dla zbiorów typu $((*))$ i relacji typu $((*),(*))$? Uogólnić tę definicję na przedmioty dowolnego typu logicznego.

W s k.: Relacja R ustala izomorfizm zbiorów $\mathfrak{X}$ i $\mathfrak{Y}$ typu $((*))$, jeśli

$$R \in 1\text{-}1, \quad \mathfrak{D}(R) = 1, \quad \mathfrak{C}(R) = 1 \quad \text{i} \quad \prod_{XY}\{(X \sim_R Y) \to [(X \in \mathfrak{X}) \equiv (Y \in \mathfrak{Y})]\}.$$

Na wzór tej definicji łatwo określić izomorfizm dla wyższych typów.

ROZDZIAŁ XII

O META-MATEMATYCE

1. Meta-matematyka jako odrębna nauka dedukcyjna. W Rozdziale XI poznaliśmy niektóre ważniejsze pojęcia meta-matematyki przy ogólnym omawianiu pojęć dotyczących właściwie wszelkich teorii sformalizowanych. Jasne jest jednak, że dla poszczególnych takich teorii z osobna badania metodologiczne można posunąć znacznie dalej, dochodząc do wyników głębszych.

W tym Rozdziale zajmiemy się specjalnie meta-matematyką, pojętą jako odrębna nauka.

Z rozważań podanych w Rozdziale XI widać wyraźnie, że meta-matematyka jest nauką dedukcyjną, że jej rozumowania odznaczają się tą samą ścisłością, co zwykłe rozumowania matematyczne.

Jak każda teoria matematyczna, tak i meta-matematyka budowana być może bądź na podstawach intuicyjnych, bądź jako teoria zaksjomatyzowana, bądź wreszcie jako teoria sformalizowana.

W Rozdziale XI staliśmy na stanowisku intuicyjnym. Nic nie stoi jednak na przeszkodzie zbudowaniu meta-matematyki w sposób zaksjomatyzowany, a nawet sformalizowany. Pojęciami pierwotnymi takiej sformalizowanej meta-matematyki byłyby: zbiór wszystkich wyrażeń teorii sformalizowanej oraz pewne relacje między wyrażeniami (np. relacja: *A powstaje przez napisanie wyrażenia B po wyrażeniu C*). Pojęcia pierwotne należałoby dalej scharakteryzować odpowiednimi aksjomatami i wyposażyć układ aksjomatów w odpowiednią podbudowę logiczną [1]).

[1]) Aksjomaty meta-matematyki podaje A. Tarski w pracy *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, Nr. 34 (1933), str. 24.

Ta podbudowa logiczna może być oczywiście bogatsza lub uboższa zależnie od zadań, jakie się stawia meta-matematyce [1]).

Słabsze środki logiczne wystarczają, gdy idzie o badanie w meta-matematyce takich własności wyrażeń, które zależą tylko od ich zewnętrznej struktury. Badanie tych własności tworzy dział meta-matematyki, zwany *składnią* (po angielsku: *syntax*) sformalizowanych teoryj.

Wszystkie własności teoryj, rozpatrywane w Rozdziale XI, należą do składni. Określając bowiem pojęcie twierdzenia, jak i pojęcia niesprzeczności, zupełności, niezależności i t. d., odwoływaliśmy się tylko do własności wyrażeń, zależnych od ich budowy, od znaków, wchodzących w skład wyrażenia, i od kolejności tych znaków.

Mocniejsze środki logiczne stają się natomiast potrzebne, gdy przechodzimy do badania zależności między wyrażeniami a pojęciami logicznymi i matematycznymi, które te wyrażenia oznaczają lub opisują. Ten dział meta-matematyki nazywany jest *semantyką* teoryj sformalizowanych. W Rozdziałach XIII i XIV zapoznamy się z niektórymi pojęciami semantycznymi.

Zarówno przy uprawianiu składni jak semantyki wydaje się celowe przyjąć logikę tak obszerną, by na terenie meta-matematyki można było operować pojęciem liczby naturalnej. Jeśli np. jedną z teorii sformalizowanych, jakie zamierzamy badać w meta-matematyce, jest arytmetyka liczb naturalnych, to mamy do czynienia z dwoma różnymi pojęciami liczby naturalnej: jedno jest pojęciem samej sformalizowanej teorii, drugie zaś określone jest w meta-matematyce i służy za narzędzie do badania tej teorii. Z sytuacją taką zetknęliśmy się już w Rozdziale XI (§ 8, str. 301), mówiąc o liczbach naturalnych intuicyjnych, należących do meta-matematyki, i o liczbach naturalnych formalnych, badanych w sformalizowanej teorii.

Nie będziemy tu dokonywali formalizacji meta-matematyki, zwrócimy tylko uwagę na dwie okoliczności, związane z możli-

[1]) Hilbert i jego uczniowie byli początkowo zdania, że w meta-matematyce wolno korzystać tylko z bardzo wąskiej logiki, nie dopuszczającej żadnych t. zw. infinistycznych metod wnioskowania. Obecnie przedstawiciele szkoły Hilberta zrezygnowali z tego ograniczenia środków meta-matematyki. Por. P. Bernays, *Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration*, Les Entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, Zürich 1941, str. 144-152.

wością zbudowania meta-matematyki tak, jak buduje się inne teorie matematyczne.

1° Przy budowie każdej nauki matematycznej okazało się korzystne wprowadzenie zmiennych, przebiegających zbiór przedmiotów badanych w tej nauce. Ponieważ meta-matematyka bada wyrażenia teorii sformalizowanych, więc zmienne występujące w twierdzeniach i — ogólniej — w funkcjach zdaniowych meta-matematyki powinny przebiegać zbiór wyrażeń. Jako takich zmiennych używaliśmy liter A, B, M, ... i niekiedy bardziej skomplikowanych symboli, jak np. $\Phi(x,y,\ldots,u)$, $\Psi(x,y,\ldots,u)$, ...[1]). Jest jasne, że za zmienne te nie wolno nam podstawiać nazw przedmiotów badanych w teorii (np. nazw liczb), lecz jedynie nazwy tworów badanych w meta-matematyce.

Poza tymi zmiennymi korzystamy w meta-matematyce ze zmiennych, przebiegających zbiór liczb naturalnych, a czasem z innych jeszcze zmiennych.

2° Rozmaite stałe, występujące w twierdzeniach meta-matematyki, są nazwami przedmiotów badanych w meta-matematyce, a więc nazwami wyrażeń lub relacji między wyrażeniami. Np. słowa: *duży kwantyfikator* są nazwą pewnego znaku, którego używamy przy formułowaniu twierdzeń teorii.

Korzystamy tu ze sposobności, aby bliżej omówić różnicę, jaka zachodzi między *wyrażeniem* a *nazwą wyrażenia*.

§ 2. Wyrażenia i nazwy wyrażeń. Nazwa przedmiotu jest to słowo lub wyrażenie (pisane lub mówione), którego używa się dla oznaczenia tego przedmiotu. Np. słowo, składające się z drugiej, osiemnastej, czternastej i piętnastej litery alfabetu łacińskiego, jest nazwą pewnego miasta.

Jeśli przedmiot nie jest sam słowem (ani wyrażeniem), to nazwa jego jest od niego różna, gdyż nazwa jest w każdym razie słowem albo wyrażeniem: miasto *Brno* nie jest tym samym, co słowo, które jest jego nazwą. Różnica między przedmiotem a jego nazwą nie jest jednak równie wyraźna, gdy badany przedmiot sam jest słowem lub wyrażeniem.

[1]) Symboli tych używaliśmy jako zmiennych przebiegających zbiór funkcji zdaniowych, które zawierały litery $x, y, \ldots, u$ jako zmienne wolne. Używanie jednak w meta-matematyce takich symboli jako zmiennych nie jest zupełnie poprawne. Przy formalizowaniu meta-matematyki należałoby takich zmiennych w ogóle zaniechać.

Aby odróżniać wyrażenie od jego nazwy, dogodnie jest przyjąć następującą regułę: nazwę wyrażenia tworzymy, ujmując to wyrażenie w jakiś specjalny znak pisarski, np. w cudzysłów, albo też pisząc je kursywą i poprzedzając jednym ze słów: *wyrażenie, słowo* i t. p.

Zgodnie z tym piszemy np.:

(1) *woda składa się z wodoru i tlenu,*

(2) *„woda" składa się z liter,*

(3) słowo *woda* składa się z liter.

W drugim i trzecim zdaniu mowa jest o wyrazie języka polskiego, nie zaś o płynie; występuje więc w nim nazwa słowa, nie zaś nazwa płynu. Zdanie: *woda składa się z liter* uznalibyśmy z punktu widzenia przyjętej reguły za fałszywe [1]).

Oto kilka przykładów, ilustrujących różnicę między wyrażeniami a ich nazwami:

1. Zdanie:

$$\prod_x[(x>t)\to(z>t)] \quad \textit{powstaje z} \quad \prod_x[(x>y)\to(z>y)]$$
$$\textit{przez podstawienie } t \textit{ na miejsce } y$$

nie jest poprawne. W zdaniu tym mowa jest o wyrażeniach i o zmiennych, powinny w nim więc figurować nie same wyrażenia i zmienne, lecz ich nazwy (podobnie jak w zdaniu (1) występuje słowo *woda*, a nie ciecz, którą to słowo oznacza). Poprawnie powinniśmy zatem powiedzieć albo:

$$\text{„}\textstyle\prod_x[(x>t)\to(z>t)]\text{“ } \textit{powstaje z } \text{„}\prod_x[(x>y)\to(z>y)]\text{“}$$
$$\textit{przez podstawienie „}t\textit{“ na miejsce „}y\textit{“},$$

albo:

$$\textit{Wyrażenie } \textstyle\prod_x[(x>t)\to(z>t)] \textit{ powstaje z wyrażenia}$$
$$\textstyle\prod_x[(x>y)\to(z>y)] \textit{ przez podstawienie zmiennej } t$$
$$\textit{na miejsce zmiennej } y.$$

2. Jeśli litery $A, B, \ldots$ przyjęte są (w meta-matematyce) za zmienne przebiegające zbiór wyrażeń, to wyrażenie:

(4) *B powstaje z A przez podstawienie „t“ zamiast „y“*

[1]) W logice tradycyjnej mówi się, że słowo *woda* użyte jest w zdaniach (2) i (3) w *supozycji materialnej*, a w zdaniu (1) w *supozycji formalnej*.

uznamy za najzupełniej poprawną funkcję zdaniową meta-matematyki. Nie należy tutaj ujmować liter A i B w cudzysłowy, gdyż otrzymalibyśmy wówczas zdanie o pierwszej i drugiej dużej literze alfabetu łacińskiego, orzekające, że jedna z nich przechodzi w drugą, gdy literę t zastąpimy literą y (co oczywiście jest nieprawdą). Zamiast (4) możemy też napisać:

B powstaje z A przez podstawienie litery t zamiast litery y.

3. Konsekwentne rozróżnianie wyrażeń i ich nazw jest nieraz uciążliwe. Zwrócimy przy tej sposobności uwagę czytelnika na pewne niekonsekwencje, których sami dopuszczaliśmy się wielokrotnie w poprzednich rozdziałach.

W trakcie rozważań meta-matematycznych używaliśmy wyrażeń $A \equiv B$, $A \to B$ i t. d., traktując je jako nazwy wyrażeń badanej teorii, zbudowanych z A i B oraz z funktorów $\equiv$ i $\to$. Symbole $\equiv$ i $\to$ były więc traktowane tak, jak gdyby były one swymi własnymi nazwami. Chcąc zachować różnicę między funktorem a jego nazwą, powinniśmy byli zamiast wyrażenia $A \equiv B$ pisać wszędzie:

(5) *wyrażenie, powstające z A i B przez wypisanie funktora $\equiv$ między nimi.*

Tutaj słowo i znak (*funktor* $\equiv$) stanowią nazwę symbolu równoważności. Można by też zamiast (5) pisać:

wyrażenie, powstające z A i B przez wypisanie „$\equiv$“ między nimi.

Logik amerykański Quine proponuje, by zamiast (5) pisać krótki wzór

$$\ulcorner A \equiv B \urcorner$$

i stale tak postępować w analogicznych sytuacjach. Symbole $\ulcorner$ i $\urcorner$ nazywa Quine *quasi-cudzysłowami* [1]).

Również nieściśle postępowaliśmy w poprzednich rozdziałach, pisząc zdania po znaku asercji, t. j. po symbolu $\vdash$. Zdanie $\vdash A$ jest pewnym twierdzeniem o wyrażeniu A, nie powinno w nim więc figurować samo wyrażenie, lecz jego nazwa. Nie powinniśmy zatem byli pisać np. $\vdash p \to p$, lecz $\vdash$ „$p \to p$“.

[1]) W. V. Quine, *Mathematical Logic*, New York, 1940, str. 35.

Podobnie nie należało pisać:

dla wszelkich wyrażeń A i B jest $\vdash (A \to B) \equiv (B' \to A')$

lecz:

dla wszelkich wyrażeń A i B jest $\vdash \ulcorner (A \to B) \equiv (B' \to A') \urcorner$.

4. W książkach matematycznych popełnia się nieraz rażące błędy, mówiąc o wstawianiu liczb za zmienne. Liczba nie jest przecież znakiem, lecz pewnym tworem myślowym i nie może być za nic wstawiana. Natomiast nazwa liczby jest znakiem, który możemy wstawiać do wyrażeń zamiast innego znaku. Nie powinniśmy więc mówić:

wstawiamy 5 za x do $x^2 - 6x + 5 = 0$,

lecz:

do funkcji zdaniowej $x^2 - 6x + 5 = 0$ *wstawiamy zamiast zmiennej x znak 5*

(czyli nazwę liczby 5) albo też przy użyciu cudzysłowów:

do „$x^2 - 6x + 5 = 0$“ zamiast „x“ wstawiamy „5“

(czyli nazwę liczby 5) [1]).

5. Nieodróżnianie wyrażeń od ich nazw jest szczególnym przypadkiem błędów ogólniejszego rodzaju, polegających na nieodróżnianiu pojęć matematycznych od meta-matematycznych [2]). Wskażemy tutaj na kilka takich błędów, które zresztą nie są zbyt niebezpieczne same przez się.

[1]) Różnicę między przedmiotem a jego nazwą, w szczególności między wyrażeniem a nazwą wyrażenia, podkreślał z wielkim naciskiem G. Frege (por. jego *Grundgesetze der Arithmetik*, tom 2, Jena 1903, str. 105-107). Tworzenie nazw wyrażeń przez ujmowanie tych wyrażeń w specjalne znaki pisarskie jest pomysłem Frege'go. Używanie do tego celu cudzysłowów (mimo iż dość rozpowszechnione) nie jest może najszczęśliwsze, gdyż cudzysłowów używa się z dawien dawna także w innych wypadkach, np. po prostu przy cytowaniu cudzych słów. Z tych względów w książce tej używamy innego sposobu: przyjmujemy mianowicie, że wypisanie wyrażenia kursywą i poprzedzenie go jednym ze słów: *wyrażenie, znak, zdanie, litera* i t. p. ma to samo znaczenie, co ujęcie wyrażenia w cudzysłów, wskazujący, że idzie o nazwę (Przedmowa, str. VI).

[2]) Wykazanie zasadniczej różnicy między matematyką (jako teorią sformalizowaną) a meta-matematyką (jako nauką o tej teorii) jest główną zasługą Hilberta w zakresie jego prac logicznych. Jest rzeczą ciekawą, że najwybitniejsi nawet logicy i matematycy przed Hilbertem (np. Russell lub Poincaré) nie wyczuwali zupełnie potrzeby tego rozróżnienia. Wyjątek stanowi tylko Frege, prace jego jednak — jak już wspominaliśmy — nie były zrozumiane przez współczesnych mu uczonych.

Zamiast:

(6) *jeśli* $x>y$ *i* $z>t$, *to* $x+z>y+t$

mówi się często:

(7) *nierówności wolno dodawać stronami.*

Dwa te zdania są jednak istotnie różne: w pierwszym jest mowa o liczbach i o relacji większości, w drugim zaś — o wyrażeniach pewnego specjalnego kształtu (nierównościach) i o regułach, pozwalających z dwu zdań prawdziwych tego kształtu otrzymać trzecie zdanie prawdziwe. Zdanie (6) jest więc twierdzeniem arytmetyki, a zdanie (7) — twierdzeniem meta-matematycznym.

Inny często popełniany błąd wiąże się z takimi pojęciami, jak ułamek, licznik, mianownik i t. p. Mówi się np. o mianowniku liczby wymiernej, jak gdyby to była pewna liczba, przyporządkowana jednoznacznie każdej liczbie wymiernej. Dlaczego jednak mianownikiem liczby $\frac{1}{2}$ ma być liczba 2, a mianownikiem liczby $\frac{4}{8}$ — liczba 8, wydaje się przy takim ujęciu niezrozumiałe, skoro $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$ [1]). Jest też wątpliwe, czy ktokolwiek zgodziłby się na twierdzenie, że mianownikiem liczby

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)$$

jest 2, mimo że liczba ta jest dokładnie równa $\frac{1}{2}$. Trudność zniknie, gdy zgodzimy się uważać ułamek za nazwę liczby wymiernej, mianownik zaś za tę część ułamka, która jest wypisana pod kreską poziomą. Jedna i ta sama liczba wymierna ma różne nazwy, z których pewne są ułamkami i posiadają mianowniki, inne zaś, jak np. $\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)$, nie są ułamkami i nie mają mianowników. W tym sensie mianownik nie jest liczbą, lecz nazwą liczby.

Podobnie, takie słowa jak *równość, nierówność, równanie* i t. p. należą do meta-matematyki, nie zaś do matematyki.

[1]) Niektórzy dawniejsi logicy wysnuwali stąd nawet wniosek, że należy odrzucić pewnik ekstensjonalności lub Leibniz'owską definicję równości. Por. J. Śleszyński, *Teoria dowodu*, tom 1, Kraków 1925, str. 163.

ĆWICZENIA. 1. Wskazać w Rozdziałach II i III twierdzenia o charakterze meta-matematycznym.

2. Porównać ze sobą zdania:

Jeśli $a\neq 0$ *i* $y\neq 0$, *to* $\frac{x}{y}=\frac{ax}{ay}$.

Licznik i mianownik ułamka wolno pomnożyć przez liczbę różną od 0.

Które z tych zdań należy do matematyki, a które do meta-matematyki? Jak poprawnie wypowiedzieć drugie zdanie?

3. Wyjaśnić z punktu widzenia poznanych wyżej zasad różnicę między cyfrą a liczbą.

4. Które z następujących czterech zdań są poprawne:

Niech a oznacza najmniejszy pierwiastek równania $f(x)=0$.
Niech „a" oznacza najmniejszy pierwiastek równania „$f(x)=0$*".*
Niech „a" będzie najmniejszym pierwiastkiem równania „$f(x)=0$*".*
Niech a będzie najmniejszym pierwiastkiem równania „$f(x)=0$*".*

Odp.: Drugie i czwarte [1]).

§ 3. Antynomie semantyczne. Odróżnianie wyrażeń od ich nazw jest przykładem rozróżniania, ogólnie, pojęć matematycznych od meta-matematycznych. Pedantyczne rozróżnianie jednych i drugich wydać się może początkującemu czytelnikowi przysłowiowym rozszczepianiem włosa na czworo. Jest jednak faktem historycznym, że mieszanie ze sobą tych pojęć doprowadziło do sprzeczności, z którymi nie umieli poradzić sobie najwybitniejsi filozofowie i matematycy na początku naszego wieku. Sprzeczności te okazały się pozorne. Nazywamy je antynomiami *semantycznymi* (dla odróżnienia od antynomii, z którymi zapoznaliśmy się w Rozdziale VIII, a które wynikały z nieumiarkowanego przekraczania zasady czystości typów).

Podamy tu kilka najbardziej znanych antynomii semantycznych.

1. Antynomia Berry'ego [2]). Rozpatrzmy wyrażenia języka polskiego, określające pewne liczby naturalne, jak np. *dziesięć, ilość ziarn piasku na ziemi, najmniejszy pierwiastek równania* $x^2-5x+6=0$ i t. d.

Wyrażeń w języku polskim jest oczywiście nieskończenie wiele, jeśli jednak rozpatrywać tylko wyrażenia o ograniczonej

[1]) Por. G. Frege, op. cit., tom 2, str. 106.

[2]) Opublikowana przez Russell'a i Whiteheada w *Principia Mathematica*, tom 1 (1925), str. 65.

długości, np. składające się co najwyżej z 1000 liter, to spostrzegamy od razu, że ilość takich wyrażeń jest skończona [1]). Tym bardziej więc skończona jest ilość liczb naturalnych, które mogą być zdefiniowane przez takie wyrażenia. Istnieje zatem najmniejsza liczba naturalna, której nie można w języku polskim określić za pomocą żadnego wyrażenia, zawierającego mniej niż tysiąc liter. Tymczasem właśnie wyrażenie:

najmniejsza liczba naturalna, której nie można w języku polskim określić za pomocą żadnego wyrażenia, zawierającego mniej niż tysiąc liter

określa tę właśnie liczbę, a ma tylko 138 liter. Doszliśmy w ten sposób do sprzeczności.

Aby bliżej wyjaśnić istotę tej antynomii, spróbujmy zrekonstruować ją w systemie sformalizowanym, nie zaś w niekonsekwentnym z punktu widzenia zasad logiki języku potocznym. Jako system sformalizowany przyjmijmy np. aksjomatyczną teorię liczb naturalnych Peano (Rozdział IX, § 4, teoria VIII, str. 243) wzbogaconą definicjami:

$$\mathrm{I} \underset{df}{=} (\iota x) N(0,x), \qquad \mathrm{II} \underset{df}{=} (\iota x) N(\mathrm{I},x), \qquad \mathrm{III} \underset{df}{=} (\iota x) N(\mathrm{II},x), \qquad \ldots$$

Znaki I, II, III, ... nazwiemy liczebnikami. Niech l_n będzie n-tym liczebnikiem, tzn. znakiem składającym się z n kresek pionowych i dwu poziomych. To określenie liczebnika i znaku l_n jest zupełnie poprawną definicją z meta-matematyki (w samej bowiem meta-matematyce możemy operować pojęciem liczby naturalnej, o ile oprzemy meta-matematykę np. na pełnym systemie prostej teorii typów i zdefiniujemy liczby naturalne tak jak w Rozdziale VII, § 5, str. 183).

Będziemy mówili, że funkcja zdaniowa $\Phi(x)$ aksjomatycznej teorii liczb naturalnych o jednej zmiennej wolnej x *określa liczbę naturalną* n, jeśli n jest jedyną taką liczbą naturalną, że zdanie $\Phi(l_n)$, powstające z $\Phi(x)$ przez podstawienie n-tego liczebnika zamiast litery x, jest prawdziwe. Jest to znów poprawna definicja z meta-matematyki, gdyż — jak zobaczymy w Rozdziale XIII (§ 3) — pojęcie zdania prawdziwego daje się zdefiniować w meta-matematyce.

[1]) Mniejsza, niż 37^{1000}, przyjmując, że wszystkich liter (do których zaliczamy tu znaki przestankowe i odstępy między słowami) jest 37.

W meta-matematyce możemy z łatwością udowodnić, że istnieje tylko skończona ilość funkcji zdaniowych, składających się co najwyżej z 1000 znaków, a ponieważ każda funkcja zdaniowa określa co najwyżej jedną liczbę naturalną (zgodnie z podaną wyżej definicją), więc wnosimy stąd, że istnieją liczby naturalne, które nie dają się zdefiniować za pomocą żadnej funkcji zdaniowej, zawierającej co najwyżej 1000 znaków. Wyrażenie:

(8) *najmniejsza liczba naturalna, nie dająca się zdefiniować za pomocą żadnej funkcji zdaniowej sformalizowanego systemu arytmetyki, zawierającej co najwyżej 1000 znaków*

jest zatem poprawną definicją pewnej liczby naturalnej n_0 *na terenie meta-matematyki.* Liczba n_0 może więc w meta-matematyce być zdefiniowana za pomocą stosunkowo krótkiego wyrażenia, ale w sformalizowanym systemie arytmetyki — tylko za pomocą funkcji zdaniowych, zawierających ponad 1000 znaków. To zaś, że jedna i ta sama liczba może mieć różne definicje w dwu różnych naukach, nie jest jednak ani sprzecznością, ani nawet niespodzianką: meta-matematyka jest nauką bogatszą niż sformalizowana arytmetyka, nie ma więc nic dziwnego w tym, że definicja rozwlekła (zawierająca ponad 1000 znaków) z dziedziny arytmetyki daje się napisać krócej w meta-matematyce.

Rozumiemy teraz przyczynę powstania antynomii w jej pierwotnym sformułowaniu: gdyby wyrażenie (8) było jedną z funkcji zdaniowych systemu arytmetyki, to istotnie mielibyśmy sprzeczność. *Antynomia Berry'ego powstała zatem wskutek nieodróżniania funkcji zdaniowych meta-matematycznych od matematycznych,* wskutek traktowania ich równorzędnie jako funkcji zdaniowych jednego uniwersalnego systemu logicznego.

Nie należy stąd zresztą wnosić, że nie może istnieć teoria niesprzeczna, która obejmowałaby pewną teorię sformalizowaną, np. arytmetykę, oraz pewien fragment meta-matematyki. Fragment ten musiałby jednak być dość ubogi, a mianowicie tak ubogi, by wyrażenie (8) nie dało się w nim wysłowić. Gdybyśmy natomiast chcieli skonstruować system logiczny, obejmujący zarówno arytmetykę jak i całą meta-matematykę, zawierającą badania arytmetyki, to musielibyśmy zachować specjalne ostrożności, idące dalej jeszcze niż zakazy związane z prostą teorią typów [1]).

[1]) Próbę stworzenia takiej teorii przedsięwziął m.in. L. Chwistek w książce *Granice Nauki*, Warszawa-Lwów, 1935; zamiast prostej teorii typów znajdujemy w systemie Chwistka tzw. teorię *typów konstruktywnych.*

2. Antynomia Richarda [1]). Rozpatrujemy wyrażenia języka polskiego, określające własności pewnych liczb naturalnych, jak np. *być liczbą parzystą, być liczbą pierwszą* (i ich gramatyczne odmiany). Ustawmy wszystkie wyrażenia języka polskiego w ciąg nieskończony

$$W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n, \ldots,$$

wypisując najpierw wszystkie wyrażenia jedno-literowe, potem dwu-literowe i t. d., oraz porządkując wyrażenia o tej samej ilości liter *leksykograficznie*, t. j. tak jak w słowniku. Usuwając z tego ciągu wyrażenia, które nie określają własności liczb naturalnych, otrzymamy ciąg nieskończony

$$V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n, \ldots, \tag{9}$$

składający się ze wszystkich wyrażeń języka polskiego, określających własności liczb naturalnych.

Dla każdej pary liczb naturalnych n i q możliwe są dwa przypadki: albo q ma własność, określoną wyrażeniem V_n, albo q tej własności nie posiada. W szczególności (dla $q=n$) liczba n albo ma własność określoną przez wyrażenie V_n albo nie ma własności określonej przez to wyrażenie.

Weźmy teraz pod uwagę wyrażenie

(10) *n nie ma własności, określonej wyrażeniem V_n.*

Jest to wyrażenie języka polskiego, określające własność liczb naturalnych, musi zatem pokrywać się z jednym z wyrażeń V_p, występujących w ciągu (9) jako ciągu wszystkich takich wyrażeń. Dla każdego więc n liczba n ma własność określoną wyrażeniem V_p wtedy i tylko wtedy, gdy n nie ma własności, określonej wyrażeniem V_n. W szczególności dla $n=p$ otrzymujemy stąd wniosek że zdania:

p ma własność, określoną wyrażeniem V_p,

p nie ma własności, określonej wyrażeniem V_p

są równoważne, co jest niemożliwe, gdyż żadne zdanie nie jest równoważne swemu zaprzeczeniu.

[1]) Opublikowana po raz pierwszy w pracy: J. Richard, *Les principes des mathématiques et le problème des ensembles*, Revue générale des sciences pures et appliquées, tom 16 (1905), str. 541-543.

Podobnie jak antynomia Berry'ego, antynomia Richarda wywołana jest nieodróżnianiem pojęć matematycznych od pojęć meta-matematycznych. Język potoczny nie czyni różnicy między funkcjami zdaniowymi matematycznymi a meta-matematycznymi i dlatego prowadzi do sprzeczności. Stając na gruncie jakiejkolwiek teorii sformalizowanej, antynomii tej nie można by otrzymać, gdyż ciąg (9) składałby się z funkcji zdaniowych tej teorii, a wyrażenie (10) byłoby funkcją zdaniową meta-matematyki i nie byłoby bynajmniej prawdą, że wyrażenie (10) pokrywa się z jednym z wyrażeń ciągu (9).

3. Antynomia kłamcy. *Zdanie, które piszę w tej chwili, jest fałszywe.* Czy napisałem tu zdanie prawdziwe, czy fałszywe? Jeśli prawdziwe, to jest tak, jak to zdanie orzeka, czyli jest ono fałszywe. Jeśli zaś zdanie to jest fałszywe, to jest przeciwnie niż ono orzeka, czyli zdanie to jest prawdziwe [1]).

Wyjaśnienie tej antynomii jest może trochę trudniejsze niż poprzednich, ale i ono opiera się na różnicy między pojęciami matematycznymi a meta-matematycznymi. Prawdziwość i fałszywość — są to własności zdań, jeśli więc w ogóle mogą one być zdefiniowane, to tylko na terenie meta-matematyki i to tylko jako własności zdań pewnego już skonstruowanego systemu logicznego. Zdanie, od którego zaczyna się antynomia kłamcy, nie może więc być w ogóle wypowiedziane w żadnym ścisłym języku logicznym, odróżniającym teorię od jej meta-teorii, gdyż z jednej strony zawiera ono słowo *fałszywy*, co wskazywałoby na to, że jest to zdanie z meta-matematyki, a z drugiej strony przypisuje samemu sobie własność fałszywości, skąd wynikałoby, że jest to zdanie z teorii (gdyż fałszywość jest własnością zdań teorii).

[1]) Antynomia ta znana była jeszcze w starożytności. Często formułuje się ją w następujący sposób: Epimenides, Kreteńczyk, mówi „wszyscy Kreteńczycy zawsze kłamią". Czy powiedział on prawdę, czy fałsz? Jest to jednak sformułowanie wadliwe. Z założenia, że Epimenides mówił prawdę, wynika wprawdzie, że Epimenides kłamał (bo Epimenides sam był Kreteńczykiem, a powiedział zdanie prawdziwe). Natomiast z założenia, że Epimenides kłamał, wynika tylko, że istnieje Kreteńczyk, który choć raz powiedział prawdę, i antynomia nie powstaje, bo nie wiemy, czy tym wyjątkowym Kreteńczykiem był właśnie Epimenides i to w chwili, gdy wypowiadał swoje zdanie.

Mimo, że antynomia nie powstaje, wniosek, do którego prowadzi to rozumowanie, jest dość osobliwy: okazuje się, że z przesłanek czysto logicznych wynika istnienie Kreteńczyka, który co najmniej raz powiedział prawdę.

Antynomie semantyczne, podobnie jak antynomie omówione w Rozdziale VIII (§ 2, str. 207-213), pokazują, że język naukowy (jeśli ma być wolny od sprzeczności) nie może być tworzony w sposób zupełnie dowolny. Antynomia Russell'a i inne z nią spokrewnione świadczą o tym, że niczym nie ograniczone używanie słowa *każdy* prowadzi do sprzeczności. Sprzeczności tej można uniknąć, dostosowując system logiki np. do wymagań prostej teorii typów. Antynomie zaś semantyczne świadczą o tym, że jednoczesne używanie pojęć matematycznych i meta-matematycznych również prowadzić może do sprzeczności. Sprzeczność tę omijamy, traktując meta-matematykę jako naukę odrębną od poszczególnych teorii logicznych i matematycznych.

W obu wypadkach stwierdzamy to samo zjawisko: *system zbyt uniwersalny, w którym «daje się za dużo wysłowić», musi być sprzeczny.* Mechanizm powstawania antynomii zdaje się dowodzić, że całości naszej wiedzy (nawet tylko matematycznej) nie podobna wyrazić w jednym sformalizowanym języku.

ĆWICZENIE. Zbadać następującą antynomię, zwaną *antynomią wyrazu «heterologiczny»* [1]:

Przymiotnik nazywa się *autologiczny*, gdy sam ma własność, którą wyraża; w przeciwnym razie nazywa się *heterologiczny*. Np. przymiotnik *krótki* jest autologiczny, bo sam jest krótki, przymiotnik zaś *długi* jest heterologiczny, bo nie jest długi. Czy przymiotnik *heterologiczny* jest autologiczny, czy heterologiczny? Gdyby był on heterologiczny, to nie miałby własności, którą sam wyraża, czyli nie byłby heterologiczny; gdyby zaś był autologiczny, to miałby własność, którą sam wyraża, czyli byłby heterologiczny.

Wsk.: Zwrócić uwagę na to, że przymiotnik, określający własności przymiotników, odpowiada funkcji zdaniowej meta-teorii, a przymiotniki, do których może on być zastosowany, odpowiadają funkcjom zdaniowym teorii. Przymiotnik *heterologiczny* musiałby zatem należeć zarówno do teorii, jak i do meta-teorii, a więc nie mógłby być zdefiniowany w żadnym systemie logicznym, odróżniającym teorię, będącą przedmiotem badań, od meta-teorii, w której badania te się prowadzi.

§ 4. Metoda arytmetyzacji. Wyrażenia teorii sformalizowanej są, zewnętrznie rzecz biorąc, skończonymi ciągami znaków. Znakami tymi są zmienne rozmaitych typów, funktory zdaniotwórcze, kwantyfikatory, stałe specyficzne i wreszcie nawiasy oraz przecinki.

[1] Antynomia ta pochodzi od Grellinga. Por. K. Grelling i L. Nelson, *Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti*, Abhandlungen der Fries'schen Schule, tom 2 (1908), str. 300-334.

Jeśli meta-matematyka jest dostatecznie bogata na to, by można w niej było zdefiniować pojęcie liczby naturalnej i działania arytmetyczne na liczbach (np. na wzór Rozdziału VII), to każdemu ze znaków, występujących w wyrażeniach teorii, można przyporządkować pewną liczbę naturalną, którą nazywać by można *numerem* tego *znaku*.

Można np. za numery znaków

$$',\quad +,\quad \cdot,\quad \to,\quad \equiv,\quad \Pi,\quad \Sigma,\quad (,\quad),\quad ,$$

przyjąć kolejne liczby pierwsze:

$$5,\quad 7,\quad 11,\quad 13,\quad 17,\quad 19,\quad 23,\quad 29,\quad 31,\quad 37.$$

Aby określić numery zmiennych i stałych specyficznych, ustawmy w ciąg nieskończony wszystkie możliwe symbole, oznaczające typy:

$$*,\ (*),\ ((*)),\ (*,*),\ \ldots,\ c_k,\ \ldots$$

Za numery zmiennych typu c_k przyjmijmy liczby:

$$41^{2k},\quad 43^{2k},\quad 47^{2k},\quad 53^{2k},\quad \ldots,$$

a za numery stałych specyficznych typu c_k — liczby:

$$41^{2k-1},\quad 43^{2k-1},\quad 47^{2k-1},\quad 53^{2k-1},\quad \ldots$$

Każdemu wyrażeniu odpowiadać więc będzie ściśle określony ciąg liczb naturalnych — mianowicie ciąg numerów znaków, składających się na to wyrażenie. Np. wyrażeniu

$$(11)\qquad \Pi_X\left(\Pi_Y\left(\Sigma_x(X(x)\equiv Y(x))\right)\right),$$

składającemu się z 21 znaków, odpowiada ciąg, składający się z 21 liczb naturalnych:

$$19,\ 41^4,\ 29,\ 19,\ 43^4,\ 29,\ 23,\ 41^2,\ 29,\ 41^4,\ 29,\ 41^2,$$
$$31,\ 17,\ 43^4,\ 29,\ 41^2,\ 31,\ 31,\ 31,\ 31.$$

Na ogół dogodnie jest zamiast ciągów liczb rozpatrywać pojedyncze liczby. W tym celu wystarczy ciągowi liczb

$$n_1, n_2, \ldots, n_k$$

przyporządkować jako jego numer liczbę

$$3^{n_1}\cdot 5^{n_2}\cdot 7^{n_3}\cdot\ldots\cdot p_{k+1}^{n_k},$$

gdzie p_k jest k-tą co do wielkości liczbą pierwszą. Numer ciągu odróżniamy od numeru znaku przez pierwszy czynnik 3, który nie figuruje w numerach znaków.

Dzięki temu sposobowi każdemu wyrażeniu odpowiada ściśle określona liczba naturalna, którą nazywać będziemy *numerem tego wyrażenia.*

Np. numerem wyrażenia (11) jest liczba

$$3^{19}\cdot 5^{41^4}\cdot 7^{29}\cdot 11^{19}\cdot 13^{43^4}\cdot 17^{29}\cdot 19^{23}\cdot 23^{41^2}\cdot 29^{29}\cdot 31^{41^4}\cdot 37^{29}\cdot 41^{41^2}\cdot$$
$$\cdot 43^{31}\cdot 47^{17}\cdot 53^{43^4}\cdot 59^{29}\cdot 61^{41^2}\cdot 67^{31}\cdot 71^{31}\cdot 73^{31}\cdot 79^{31}.$$

Widać stąd, że numery prostych nawet wyrażeń są liczbami bardzo dużymi.

W podobny sposób można też ciągowi wyrażeń przyporządkować liczbę. Jeśli mianowicie

(12) $$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

jest ciągiem wyrażeń o numerach

$$l_1, l_2, \ldots, l_m,$$

to za numer ciągu (12) przyjmiemy liczbę

$$2^{l_1}\cdot 3^{l_2}\cdot \ldots \cdot p_m^{l_m},$$

przy czym czynnik 2 pozwoli nam odróżnić *numery ciągów wyrażeń* od numerów wyrażeń.

Za ciąg (12) przyjąć możemy w szczególności jakikolwiek dowód sformalizowany. Każdy dowód sformalizowany otrzymuje tym sposobem swój ściśle określony numer.

Wynika stąd, że uprawianie meta-matematyki nie różni się zasadniczo od uprawiania arytmetyki liczb naturalnych. Zamiast bowiem określać operacje na wyrażeniach i dowodzić o nich twierdzeń, możemy określać odpowiadające im operacje na numerach wyrażeń i dowodzić twierdzeń o tych numerach.

Na tym polega tzw. *metoda arytmetyzacji meta-matematyki.*

PRZYKŁAD. Wyrażenie A powstaje z wyrażeń B i C przez operację odrywania, jeśli B jest identyczne z $(C)\rightarrow(A)$. Niech a, b i c będą numerami wyrażeń A, B i C. Na to, by A powstawało z B i C przez operację odrywania, potrzeba i wystarcza, by

$$b = 3^{29}\cdot 5^{c}\cdot 7^{31}\cdot 11^{13}\cdot 13^{29}\cdot 17^{a}\cdot 19^{31}.$$

Z przykładu tego widoczne jest, że metoda arytmetyzacji pozwala niejako przekładać pojęcia meta-matematyczne na pojęcia arytmetyczne. Każdemu wyrażeniu odpowiada liczba, każdemu zbiorowi wyrażeń — zbiór liczb, każdej relacji między wyrażeniami — relacja między liczbami. Liczby te, zbiory i relacje mogą przy tym być zdefiniowane na drodze czysto arytmetycznej, bez użycia pojęć meta-matematycznych.

Nie należy stąd zresztą wnosić, że wszystkie te definicje arytmetyczne dają się wyrazić w sformalizowanym systemie arytmetyki, opartym np. na aksjomatach Peano. Przeciwnie, z rozważań wyłożonych w § 3 można wnosić, że niektóre z tych definicji na pewno nie dadzą się napisać w arytmetyce sformalizowanej, w przeciwnym bowiem razie można by powtórzyć na terenie arytmetyki rozumowanie, prowadzące do jednej z antynomii semantycznych i uzyskać sprzeczność w samej arytmetyce.

Metoda arytmetyzacji nie obala zatem wypowiedzianego w § 3 poglądu na istotną odmienność teorii od odpowiadającej jej meta-teorii; pokazuje ona tylko, że arytmetyka sformalizowana nie obejmuje całokształtu arytmetyki intuicyjnej, że istnieją pojęcia arytmetyczne (stanowiące przekład pewnych pojęć meta-matematycznych), których definicje nie dają się wyrazić w arytmetyce sformalizowanej.

Do zagadnień tych powrócimy w Rozdziale XIV. Na razie metoda arytmetyzacji służyć nam może za potwierdzenie wypowiedzianego w § 1 (p. str. 308) poglądu o dedukcyjnym charakterze meta-matematyki [1]).

[1]) Metodę arytmetyzacji wprowadził K. Gödel w cytowanej już na str. 279 pracy *Über formal unentscheidbare Sätze...* Wcześniej jeszcze wskazywał na możliwość interpretowania meta-matematyki w arytmetyce A. Tarski. Por. jego *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych,* Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Nr. 34, Wydział III, 1933, str. 35.

ROZDZIAŁ XIII

ZAGADNIENIE PEŁNOŚCI REGUŁ WNIOSKOWANIA

Rozdział niniejszy i następny poświęcone są zagadnieniu, o którym wspominaliśmy już w Rozdziale III (§ 3, str. 53): *czy przyjęte w logice reguły wnioskowania pozwalają wyprowadzić wszystkie intuicyjnie prawdziwe twierdzenia logiczne, czy tylko niektóre z nich?*

Postawione w ten sposób zagadnienie, które nazywamy zagadnieniem *pełności* reguł wnioskowania[1]) nie jest oczywiście jeszcze sformułowane w sposób ostateczny, gdyż pojęcie intuicyjnej prawdziwości twierdzenia jest płynne i nie było przez nas sprecyzowane. Dlatego zaczniemy od podania definicji formalnej pojęcia zdania prawdziwego.

§ 1. System L_n. Rozważać będziemy system logiczny L_n; będziemy go nazywali *logiką rzędu n.*

W systemie tym występują tylko zmienne, których typy mają rzędy co najwyżej $n+1$ (por. Rozdział VIII, § 1, str. 205). Wyrażenia systemu L_n powstają z najprostszych wyrażeń, t. zw. *funkcji zdaniowych molekularnych*, postaci

$$x^{(c_1, c_2, \ldots, c_k)}(y^{c_1}, z^{c_2}, \ldots, u^{c_k}), \tag{1}$$

które czytamy: *relacja* $x^{(c_1, \ldots, c_k)}$ *zachodzi między* $y^{c_1}, z^{c_2}, \ldots, u^{c_k}$.

Z funkcji zdaniowych molekularnych powstają dalsze wyrażenia za pomocą następujących operacji: łączenie dwu wyrażeń jakimkolwiek funktorem zdaniotwórczym, stawianie po wyrażeniu znaku negacji i poprzedzanie wyrażenia kwantyfikatorem dużym lub małym z wypisaną u dołu jakąkolwiek zmienną, której

[1]) W literaturze niemieckiej używa się terminu *zupełność* (Vollständigkeit) reguł wnioskowania. Słowu *zupełność* nadaliśmy jednak już inne znaczenie w Rozdziale XI, § 7.

typ ma rząd co najwyżej n. Zmienne, których typy mają rząd $n+1$, mogą więc występować tylko jako zmienne wolne.

Za tautologie systemu L_n przyjmiemy:

1^0 wyrażenia, powstające z tautologii rachunku zdań przez podstawienie,

2^0 pewniki ekstensjonalności i pewniki definicyjne (por. Rozdział VIII, § 3, str. 215 i 216),

3^0 wszystkie wyrażenia, które dają się otrzymać z wyrażeń 1^0 i 2^0 przez stosowanie reguł wnioskowania, podanych w Rozdziale III, § 3, str. 53-56.

Liczba n jest dowolna, lecz ustalona raz na zawsze na przeciąg rozważań tego Rozdziału. Jeśli $n=0$, to system L_n pokrywa się z węższym rachunkiem funkcyjnym (por. Rozdział VIII, § 3, str. 217).

System L_n będzie przedmiotem badań na terenie meta-matematyki. Zakładamy, że w meta-matematyce występują zmienne dowolnych typów i że rozporządzamy w niej pojęciem liczby naturalnej oraz innymi potrzebnymi nam pojęciami matematycznymi. Wszystkie twierdzenia i definicje, jakie podamy, należeć będą do meta-matematyki. Zagadnienie, czy podane dalej rozumowania można zamknąć w ramach meta-matematyki sformalizowanej, pozostawimy na uboczu i staniemy na gruncie meta-matematyki intuicyjnej.

Niech B będzie jakimkolwiek zbiorem niepustym. Elementy zbioru B nazywać będziemy *przedmiotami typu * o bazie B.*

Zbiory zawarte w B nazywać będziemy *przedmiotami typu* (*) *o bazie B.*

Relacje dwuczłonowe między elementami zbioru B nazywać będziemy *przedmiotami typu* (*,*) *o bazie B.*

Ogólnie, gdy $c=(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ jest jakimkolwiek symbolem oznaczającym typ (Rozdział VIII, § 1, str. 205) i określone są już przedmioty typów $c_1, c_2, \ldots, c_k$ o bazie B, określamy *przedmioty typu c o bazie B* jako relacje k-członowe, których i-ta dziedzina ($i=1, 2, \ldots, k$) składa się wyłącznie z przedmiotów typu c_i *o bazie B.* Dla $k=1$ zamiast słowa *relacja* należy tu oczywiście napisać słowo *zbiór.*

Jeśli zbiór B sam składa się ze zbiorów lub relacji, to pojęcia *typ* i *typ o bazie B* nie pokrywają się. Np. zbiór zawarty w B ma wówczas typ różny od (*), natomiast jego typ o bazie B jest równy (*).

§ 2. Pojęcie spełniania. Po tych wstępnych uwagach możemy przejść do omówienia ważnego pojęcia *spełniania*, które umożliwi nam sformułowanie definicji prawdziwości zdań.

Zorientujmy się najpierw na prostych przykładach, jaki jest intuicyjny sens pojęcia spełniania.

1. Relacja $<$ oraz liczby 2 i 3 spełniają funkcję zdaniową $x^{(*,*)}(y^*, z^*)$, gdyż między liczbami 2 i 3 zachodzi relacja $<$.

2. Relacja podzielności $|$ oraz liczby 15 i 10 spełniają funkcję zdaniową $\sum_u [x^{(*,*)}(u,v) \cdot x^{(*,*)}(u,w)]$ [1]), gdyż istnieje liczba naturalna, która pozostaje w relacji $|$ do liczb 15 i 10.

3. Zbiór liczb naturalnych N_0 i relacja $S = (\hat{m}, \hat{n})[m+1=n]$ spełniają funkcję zdaniową $\prod_{uv} [x^*(u) \cdot y^{(*,*)}(u,v) \to x^*(v)]$, gdyż przy wszelkich naturalnych m i n jeśli $m \in N_0$ i mSn, to $n \in N_0$.

4. Relacja inkluzji $\subset$, zbiór liczb parzystych P i zbiór liczb naturalnych N_0 spełniają funkcję zdaniową $x^{((*),(*))}(u^{(*)}, v^{(*)})$, gdyż zbiór P pozostaje w stosunku $\subset$ do N_0.

Mamy w tych przykładach z jednej strony funkcję zdaniową Φ czyli pewien napis, z drugiej zaś — pewną ilość przedmiotów $P_1, P_2, \ldots, P_k$ o pewnej bazie B (w przykładach 1-4 bazą B jest zbiór liczb naturalnych). Ustalone jest przy tym przyporządkowanie między zmiennymi wolnymi funkcji zdaniowej Φ a tymi przedmiotami: np. w przykładzie 1 zmiennej y^* odpowiada liczba 2, a zmiennej z^* — liczba 3.

Mówiąc, że przedmioty $P_1, P_2, \ldots, P_k$ *spełniają* funkcję zdaniową Φ w dziedzinie B, chcemy zwykle wyrazić, co następuje: *dla tych przedmiotów jest tak, jak orzeka funkcja zdaniowa* Φ. Albo nieco dokładniej: funkcja zdaniowa Φ przejdzie w zdanie prawdziwe, gdy na miejsce zmiennych wolnych w funkcji zdaniowej Φ podstawimy odpowiednio nazwy przedmiotów $P_1, P_2, \ldots, P_k$.

Oczywiście, nie jest to jeszcze określenie ścisłe, bo nie wiemy, co to jest zdanie prawdziwe ani czy każdy przedmiot ma nazwę.

Właściwą drogą do określenia pojęcia spełniania jest droga indukcyjna. Określimy najpierw, kiedy układ przedmiotów o bazie B spełnia w dziedzinie B funkcję zdaniową molekularną, a następnie — zakładając, że wiemy już, jakie układy przedmiotów

[1]) Ze względów typograficznych pomijamy tu wskaźnik oznaczający typ przy zmiennych najniższego rzędu.

o bazie B spełniają w dziedzinie B funkcje zdaniowe Φ i Ψ — określimy, które układy przedmiotów o bazie B spełniają w dziedzinie B funkcje zdaniowe, powstające z Φ i Ψ przez operacje rachunku zdań lub poprzedzanie kwantyfikatorami[1]). Dla prostoty będziemy przy zmiennych pomijali wskaźniki oznaczające ich typ.

To, że zmiennym $x, y, \ldots, u$ przyporządkowane zostały przedmioty $P, Q, \ldots, N$ tego samego typu o bazie B, piszemy w postaci wzoru

$$\binom{x, y, \ldots, u}{P, Q, \ldots, N}. \tag{2}$$

Zamiast mówić, że przy tym przyporządkowaniu przedmioty $P, Q, \ldots, N$ o bazie B *spełniają* w dziedzinie B funkcję zdaniową Φ, której zmiennymi wolnymi są $x, \ldots, u$, pisać będziemy

$$(B)!\,\Phi\binom{x, y, \ldots, u}{P, Q, \ldots, N}. \tag{3}$$

Nie wyłączamy przy tym przypadku, gdy Φ nie ma w ogóle zmiennych wolnych: układ (2) staje się wtedy „pusty".

Definicja spełniania rozpada się na cztery części:

I. Definicja spełniania dla funkcji zdaniowych molekularnych. Jeśli Φ jest funkcją zdaniową molekularną (1), *to wzór* (3) *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy przedmioty $Q, \ldots, N$ pozostają do siebie w relacji P.*

Rozpatrzmy dalej dwie funkcje zdaniowe Φ i Ψ. Na ogół mają one pewną ilość zmiennych wolnych wspólnych; niech to będą zmienne $x, \ldots, z$, pozostałymi zaś zmiennymi wolnymi w Φ niech będą $r, \ldots, t$, a w Ψ — $u, \ldots, w$.

Załóżmy, że dla dowolnych przedmiotów (o bazie B) $P, \ldots, R$, $L, \ldots, N, F, \ldots, H$, takich samych typów (o bazie B) jak zmienne $x, \ldots, z, r, \ldots, t, u, \ldots, w$, określone jest już znaczenie wzorów

$$(B)!\,\Phi\binom{x, \ldots, z, r, \ldots, t}{P, \ldots, R, L, \ldots, N} \quad \text{i} \quad (B)!\,\Psi\binom{x, \ldots, z, u, \ldots, w}{P, \ldots, R, F, \ldots, H}. \tag{4}$$

[1]) Pojęcie spełniania i taka jego definicja pochodzą od A. Tarskiego, który podał je w cytowanej już (na str. 323) pracy: *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*. Poprzednio posługiwano się tym pojęciem tylko intuicyjnie, oczywiście z wielką szkodą dla ścisłości dowodów.

II. Definicja spełniania dla funkcji zdaniowych $\Phi\cdot\Psi$, $\Phi+\Psi$, $\Phi\to\Psi$ *i* $\Phi\equiv\Psi$. *Jeśli* Θ *jest koniunkcją* $\Phi\cdot\Psi$, *to wzór*

$$(B)!\Theta\binom{x,\ldots,z,r,\ldots,t,u,\ldots,w}{P,\ldots,R,L,\ldots,N,F,\ldots,H} \tag{5}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą obydwa wzory (4).

Jeśli Θ *jest alternatywą* $\Phi+\Psi$, *to wzór* (5) *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi co najmniej jeden ze wzorów* (4).

Jeśli Θ *jest implikacją* $\Phi\to\Psi$, *to wzór* (5) *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy bądź nie zachodzi pierwszy ze wzorów* (4), *bądź zachodzi drugi.*

Jeśli wreszcie Θ *jest równoważnością* $\Phi\equiv\Psi$, *to wzór* (5) *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy bądź zachodzą oba wzory* (4), *bądź nie zachodzi żaden.*

III. Definicja spełniania dla funkcji zdaniowej Φ'. *Wzór*

$$(B)!\Phi'\binom{x,y,\ldots,u}{P,Q,\ldots,N}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi wzór (3).

Podamy na koniec definicję spełniania dla funkcji zdaniowych, zaczynających się od kwantyfikatorów. Każda taka funkcja zdaniowa Θ ma bądź postać $\prod_x\Phi$, bądź postać $\sum_x\Phi$. Niech $y,\ldots,z$ będą wszystkimi zmiennymi wolnymi funkcji zdaniowej Θ. Zmienne te są jednocześnie zmiennymi wolnymi funkcji zdaniowej Φ, która ponadto może, lecz nie musi, zawierać zmienną wolną x.

IV. Definicja spełniania dla funkcji zdaniowych $\prod_x\Phi$ *i* $\sum_x\Phi$. *Jeśli* Θ *jest*

1⁰ funkcją zdaniową $\prod_x\Phi$

lub

2⁰ funkcją zdaniową $\sum_x\Phi$

i zmienna x *nie jest zmienną wolną w* Φ, *to wzór*

$$(B)!\Theta\binom{y,\ldots,u}{Q,\ldots,N} \tag{6}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi wzór

$$(B)!\Phi\binom{y,\ldots,u}{Q,\ldots,N}.$$

Jeżeli natomiast zmienna x *jest zmienną wolną w* Φ, *to w przypadku 1⁰ wzór* (6) *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego przedmiotu* P *o bazie* B, *tego samego typu co zmienna* x, *zachodzi wzór* (3), *a w przypadku 2⁰ — gdy istnieje przedmiot* P *o bazie* B, *tego samego typu co zmienna* x, *dla którego zachodzi wzór* (3).

Definicje I-IV stanowią łącznie *indukcyjną definicję pojęcia spełniania.*

Aby pokazać, jak stosuje się te definicje, powróćmy do przykładu 2 (str. 326), przy czym dla uproszczenia będziemy pisać literę x zamiast $x^{(*,*)}$. Zgodnie z definicją I mamy (wobec 5|10 i 5|15)

$$(B)!x(u,v)\binom{x,u,v}{|,5,10} \quad \text{i} \quad (B)!x(u,w)\binom{x,u,w}{|,5,15},$$

gdzie B jest zbiorem liczb naturalnych. Na mocy definicji II wynika stąd

$$(B)![x(u,v)\cdot x(u,w)]\binom{x,u,v,w}{|,5,10,15}.$$

Istnieje zatem taki przedmiot n typu $*$ o bazie B, że

$$(B)![x(u,v)\cdot x(u,w)]\binom{x,u,v,w}{|,n,10,15},$$

skąd wynika na mocy definicji IV

$$(B)!\{\textstyle\sum_u[x(u,v)\cdot x(u,w)]\}\binom{x,v,w}{|,10,15}.$$

Relacja | oraz liczby 10 i 15 spełniają więc istotnie daną funkcję zdaniową w dziedzinie liczb naturalnych.

Jako drugi przykład rozpatrzmy wyrażenie

$$\textstyle\sum_x\prod_{uv}x(u,v),$$

gdzie zmienna x jest typu $(*,*)$, a zmienne u i v — typu $*$.

Jeśli A jest relacją, zachodzącą między dwiema dowolnymi liczbami naturalnymi, to oczywiście

$$(B)!\{\textstyle\prod_{uv}x(u,v)\}\binom{x}{A},$$

gdzie B jest znów zbiorem liczb naturalnych. Na mocy definicji IV wynika stąd

$$(B)!\sum_x \prod_{uv} x(u,v).$$

Układ (2) jest w danym razie pusty, gdyż rozpatrywane wyrażenie nie zawiera w ogóle zmiennych wolnych.

Tak określone pojęcie spełniania jest więc samo przez się niezmiernie proste i intuicyjny jego sens jest oczywisty.

To zaś, że ścisłe jego określenie ma postać długą i skomplikowaną, związane jest z naturą tego pojęcia: spełnianie jest relacją między funkcją zdaniową a układem przedmiotów, dokładniej: między funkcją zdaniową a układem (2), ustalającym przyporządkowanie przedmiotów zmiennym wolnym funkcji zdaniowej. Złożona struktura definicji pochodzi stąd, że istnieje duża rozmaitość funkcji zdaniowych.

§ 3. Zdania prawdziwe, fałszywe i spełnialne. Funkcję zdaniową Φ o zmiennych wolnych $x, y, \ldots, u$ nazywamy *prawdziwą w dziedzinie* B, gdy dla każdego układu (2) przedmiotów o bazie B zachodzi wzór

$$(7) \qquad (B)!\,\Phi\binom{x, y, \ldots, u}{P, Q, \ldots, N}.$$

W szczególności, *jeśli funkcja zdaniowa Φ nie ma zmiennych wolnych, to jest ona prawdziwa w dziedzinie B, gdy układ pusty spełnia wzór* (7).

Funkcję zdaniową Φ nazywamy *fałszywą w dziedzinie B*, jeśli dla żadnego układu (2) nie jest spełniony wzór (7).

Funkcję zdaniową Φ nazywamy *spełnialną w dziedzinie B*, jeśli istnieją układy (2), dla których zachodzi wzór (7).

Dla funkcji zdaniowych bez zmiennych wolnych pojęcie spełnialności pokrywa się więc z pojęciem prawdziwości, gdyż jedynym układem (2), jaki wchodzi w grę, jest układ pusty [1]).

Funkcję zdaniową Φ nazywamy *prawdziwą*, jeśli dla każdego niepustego zbioru B jest ona prawdziwą w dziedzinie B.

[1]) W literaturze niemieckiej używa się dla prawdziwości, fałszywości i spełnialności funkcji zdaniowych terminów „Allgemeingültigkeit", „Unerfüllbarkeit" i „Erfüllbarkeit", których używają często również autorowie anglosascy.

To pojęcie prawdziwości jest więc absolutne, niezależne od dziedziny B, podczas gdy poprzednie pojęcia były względne, zależne od B. Pojęcia absolutne, odpowiadające względnym pojęciom fałszywości i spełnialności w dziedzinie, nie będą nam w dalszym ciągu potrzebne.

Z przyjętych definicji łatwo wynikają następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1. Jeśli Φ jest funkcją zdaniową prawdziwą w dziedzinie B, to Φ' jest funkcją zdaniową fałszywą w dziedzinie B i na odwrót.

Twierdzenie 2. Jeśli funkcja zdaniowa Φ nie jest spełnialna w dziedzinie B, to funkcja zdaniowa Φ' jest prawdziwa w dziedzinie B i na odwrót.

Twierdzenie 3. Jeśli funkcja zdaniowa Φ nie jest prawdziwa w dziedzinie B, to jej negacja, Φ', jest spełnialna w dziedzinie B i na odwrót.

Dla przykładu udowodnimy twierdzenie 1.

Załóżmy, że funkcja zdaniowa Φ jest prawdziwa w dziedzinie B, czyli że dla każdego układu (2) przedmiotów o bazie B zachodzi wzór (7). Gdyby Φ' nie było funkcją zdaniową fałszywą w dziedzinie B, to w myśl definicji istniałby układ (2), spełniający w dziedzinie B funkcję zdaniową Φ'. Zgodnie z definicją III układ ten nie spełniałby więc w dziedzinie B funkcji zdaniowej Φ, wbrew założeniu. W podobny sposób dowodzi się wynikania odwrotnego.

Określone pojęcia mają doniosłe znaczenie dla badań metodologicznych [1]). Wspomnieliśmy już, że mówiąc, iż funkcja zdaniowa Φ jest prawdziwa, mamy na myśli to, że dla dowolnych przedmiotów jest właśnie tak, jak orzeka ta funkcja zdaniowa. Podana wyżej definicja pozwala nam zastąpić to niejasne i wieloznaczne wyjaśnienie określeniem poprawnym, nadającym się do przeprowadzania na jego podstawie ścisłych, dedukcyjnych dowodów.

[1]) W filozofii rozważa się również znaczenie tych pojęć dla filozoficznego zagadnienia prawdy. Por. A. Tarski, *The semantic conception of truth and the foundation of semantics*, Philosophy and Phenomenological Research, tom 4 (1944), str. 341-376 oraz ocenę krytyczną w pracy: M. Black, *The semantic definition of thruth*, Analysis, tom 8 (1948), str. 49-63.

Zagadnienie, któremu poświęcony jest ten Rozdział i o którym wspomnieliśmy na początku (p. str. 324), może być teraz sformułowane zupełnie ściśle: *czy aksjomaty i reguły wnioskowania przyjęte w logice prowadzą tylko do funkcji zdaniowych prawdziwych i czy prowadzą one do wszystkich funkcji zdaniowych prawdziwych?*

Słowo *prawdziwych* rozumiemy tu oczywiście już w sensie podanej definicji.

Jeśli odpowiedź na te pytania jest twierdząca, to formalizację logiki, przeprowadzoną w Rozdziałach III i VIII, uznać możemy za zadowalającą, w przeciwnym zaś razie powinniśmy zmodyfikować logikę tak, by wykreślić z niej ewentualne zdania fałszywe (w pewnych dziedzinach), jak również by zyskać możność wyprowadzenia w niej tych zdań prawdziwych, których przy dotychczasowej formalizacji wyprowadzić nie mogliśmy.

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że pewniki definicyjne i pewniki ekstensjonalności (Rozdział VIII, § 3, str. 215-216) są funkcjami zdaniowymi prawdziwymi.

2. Dowieść, że pewnik nieskończoności (Rozdział VII, § 5, str. 185) jest prawdziwy w każdej dziedzinie B nieskończonej, a fałszywy w każdej skończonej.

§ 4. Twierdzenie o pełności dla funkcji zdaniowych bez kwantyfikatorów. Będziemy rozpatrywali wyrażenie Γ, zbudowane z pewnej liczby funkcji zdaniowych $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ oraz z funktorów zdaniotwórczych.

Funkcje zdaniowe różniące się tylko zmiennymi uważamy przy tym za różne. Np. wyrażenie

$$x^{(*,*)}(u^*, v^*) \to x^{(*,*)}(v^*, u^*)$$

składa się z dwu różnych funkcji zdaniowych oraz z funktora $\to$.

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_m$ będą zmiennymi, występującymi w wyrażeniu Γ jako zmienne wolne; B niech będzie dowolnym zbiorem, a $P_1, P_2, \ldots, P_m$ — przedmiotami o bazie B, których typy są równe odpowiednio typom zmiennych $x_1, \ldots, x_m$.

Zastąpmy w Γ każdą z funkcji zdaniowych Φ_i przez zmienną zdaniową p_i tak, by różne funkcje zdaniowe były zastąpione przez różne zmienne.

Wreszcie, niech Z_Γ będzie powstałym w ten sposób wyrażeniem rachunku zdań.

Twierdzenie 1. Wzór

$$(8) \qquad (B)!\,\Gamma\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ P_1, P_2, \ldots, P_m \end{pmatrix}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy Z_Γ przybiera wartość 1 przy następującym podstawieniu symboli 0 i 1 za zmienne zdaniowe: p_i zastępujemy przez 1, gdy

$$(B)!\,\Phi_i\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ P_1, P_2, \ldots, P_m \end{pmatrix}$$ [1]),

w przeciwnym zaś razie przez 0.

Dowód. Jeśli Γ jest jedną z funkcji zdaniowych Φ_i, to Z_Γ redukuje się do zmiennej p_i i twierdzenie jest oczywiste.

Dla dowodu twierdzenia wystarczy więc okazać, że jeśli twierdzenie zachodzi dla wyrażeń Γ i Γ_1, to zachodzi też dla wyrażeń Γ', $\Gamma+\Gamma_1$, $\Gamma\cdot\Gamma_1$, $\Gamma\to\Gamma_1$ i $\Gamma\equiv\Gamma_1$.

Zgodnie z definicją III wzór

$$(9) \qquad (B)!\,\Gamma'\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ P_1, P_2, \ldots, P_m \end{pmatrix}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachodzi wzór (8) czyli — w myśl założenia indukcyjnego — gdy Z_Γ przyjmuje wartość 0 przy podstawieniu określonym w wysłowieniu twierdzenia. Ponieważ $Z_{\Gamma'}$ jest identyczne z $(Z_\Gamma)'$, a zatem jest negacją Z_Γ, więc wynika stąd, że wzór (9) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $Z_{\Gamma'}$ przyjmuje wartość 1, co dowodzi twierdzenia dla wyrażenia Γ'.

Niech teraz Γ_1 będzie wyrażeniem zbudowanym podobnie jak Γ i posiadającym zmienne wolne $x_1, \ldots, x_j$, gdzie $j \leqslant m$, oraz $y_1, \ldots, y_p$. Załóżmy, że twierdzenie 1 jest prawdziwe dla wyrażeń Γ i Γ_1. Wzór

$$(10) \qquad (B)!\,[\Gamma+\Gamma_1]\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_p \\ P_1, P_2, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_p \end{pmatrix}$$

spełniony jest wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi bądź wzór (8), bądź wzór

$$(B)!\,\Gamma_1\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_p \\ P_1, P_2, \ldots, P_j, Q_1, \ldots, Q_p \end{pmatrix}.$$

[1]) Jeśli nie wszystkie zmienne x_j są wolne w Φ_i, to należy pominąć tu pewną ilość zmiennych tak, by pozostały tylko te, które są wolne w Φ_i.

W myśl założenia indukcyjnego warunek ten jest równoważny następującemu: Z_Γ albo Z_{Γ_1} otrzymują wartość $\frac{1}{2}$ przy podstawieniu określonym w twierdzeniu. Z określenia alternatywy wynika stąd równoważność wzoru (10) i warunku: $Z_\Gamma + Z_{\Gamma_1}$ przybiera wartość 1, a ponieważ $Z_{\Gamma+\Gamma_1}$ jest identyczne z alternatywą $Z_\Gamma + Z_{\Gamma_1}$, więc twierdzenie jest udowodnione dla wyrażenia $\Gamma + \Gamma_1$.

W podobny sposób dowodzi się tego twierdzenia dla wyrażeń $\Gamma \cdot \Gamma_1$, $\Gamma \to \Gamma_1$ i $\Gamma \equiv \Gamma_1$.

Z twierdzenia 1 wynika łatwo

Twierdzenie 2. Jeśli wyrażenie Γ powstaje z tautologii rachunku zdań przez podstawienie dowolnych funkcji zdaniowych za zmienne zdaniowe, to wyrażenie Γ jest prawdziwe.

Dowód. Z_Γ jest wówczas tautologią rachunku zdań, a więc otrzymuje wartość 1 przy jakimkolwiek podstawieniu za zmienne symboli 0 i 1. W myśl twierdzenia 1 wzór (8) jest więc spełniony dla dowolnego B i dowolnych przedmiotów $P_1, \ldots, P_m$ o bazie B, czyli wyrażenie Γ jest prawdziwe, c. b. d. o.

Twierdzenie 2 nie daje się odwrócić: zdanie Γ może być prawdziwe, mimo że Z_Γ nie jest tautologią rachunku zdań, gdyż poszczególne funkcje zdaniowe, z których składa się Γ, mogą być tak z sobą powiązane, że pewne podstawienia symboli 0 i 1 za zmienne zdaniowe w wyrażeniu Z_Γ nie będą się nigdy realizowały. Jest tak np., gdy Γ jest zdaniem $\prod_u \prod_v (x(u) \to x(v))$ dla którego Z_Γ jest implikacją $p \to q$.

Okażemy natomiast, że twierdzenie 2 daje się odwrócić, gdy Γ nie zawiera kwantyfikatorów. W tym celu udowodnimy najpierw

Twierdzenie 3. Jeśli funkcje zdaniowe $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ są molekularne i Z_Γ przyjmuje wartość 1 przy pewnym podstawieniu za zmienne p_i symbolów 0 i 1, to Γ jest spełnialne w dziedzinie B liczb naturalnych.

Dowód. Zgodnie z założeniem funkcje zdaniowe Φ_i mają postać (1) dla $i = 1, 2, \ldots, k$.

Wykażemy, że istnieją przedmioty $P_1, P_2, \ldots, P_m$ o bazie B, dla których zachodzi wzór (8). Za przedmioty najniższego typu $*$ weźmy dowolne różne między sobą liczby naturalne. Mając określone te z przedmiotów $P_1, P_2, \ldots, P_m$, których typy są rzędu mniejszego niż i $(i > 0)$ i zakładając, że zmienna x_{k_j} ma typ $c = (c_1, c_2, \ldots, c_r)$ rzędu i, określimy przedmiot P_{k_j} jak następuje:

Jeśli żadna z funkcji zdaniowych $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ nie jest funkcją zdaniową molekularną, zaczynającą się od zmiennej x_{k_j}, to za P_{k_j} przyjmiemy dowolny przedmiot typu c o bazie B. W przeciwnym razie niech $\Phi_{s_1}, \Phi_{s_2}, \ldots, \Phi_{s_t}$ będą wszystkimi takimi funkcjami zdaniowymi. Możemy przyjąć, że Φ_{s_q} jest funkcją zdaniową

$$x_{k_j}\left(x_{l_1^{(q)}}, x_{l_2^{(q)}}, \ldots, x_{l_r^{(q)}}\right),$$

gdzie $q = 1, 2, \ldots, t$.

Przypuśćmy, że w podstawieniu, które Z_Γ nadaje wartość 1, zmienne $p_{s_1}, p_{s_2}, \ldots, p_{s_h}$ otrzymywały wartość 1, a zmienne $p_{s_{h+1}}, \ldots, p_{s_t}$ — wartość 0. Określamy teraz P_{k_j} jako relację r-członową, która zachodzi między przedmiotami $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $q \leqslant h$ układ $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_r)$ jest identyczny z układem $(P_{l_1^{(q)}}, P_{l_2^{(q)}}, \ldots, P_{l_r^{(q)}})$.

W ten sposób określiliśmy przez indukcję przedmioty

$$P_1, P_2, \ldots, P_m.$$

Z określenia tego wynika, że wzór

$$(B)!\,\Phi_i\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ P_1, P_2, \ldots, P_m \end{pmatrix}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy w podstawieniu, które wyrażeniu Z_Γ nadawało wartość 1, zmienna p_i przyjmuje wartość 1. Z twierdzenia 1 wnosimy zatem, że przedmioty $P_1, P_2, \ldots, P_m$ spełniają Γ w dziedzinie B, c. b. d. o.

Uwaga. Z tego dowodu widoczne jest, że jeśli zmienne $x_1, \ldots, x_t$ mają typ $*$, a $n_1, n_2, \ldots, n_t$ są dowolnymi liczbami naturalnymi, to istnieje taki układ spełniający funkcję zdaniową Γ w dziedzinie B, w którym zmiennym $x_1, \ldots, x_t$ odpowiadają liczby $n_1, n_2, \ldots, n_t$.

Twierdzenie 4. Jeśli wyrażenie Γ nie zawiera kwantyfikatorów, to Γ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Z_Γ jest tautologią rachunku zdań.

Dowód. Dostateczność tego warunku wynika z twierdzenia 2. Załóżmy na odwrót, że Γ jest prawdziwe. Wynika stąd, że Γ jest prawdziwe w dziedzinie B liczb naturalnych, a więc Γ' nie jest spełnialne w B. Gdyby Z_Γ nie było tautologią rachunku zdań, to wyrażenie $Z_{\Gamma'}$, które jest negacją Z_Γ, osiągałoby war-

tość 1 przy pewnym podstawieniu symbolów 0 i 1 za zmienne, a więc z uwagi na to, że Γ' jest zbudowane z funkcji zdaniowych molekularnych, i zgodnie z twierdzeniem 3 wyrażenie Γ' byłoby spełnialne w B. Sprzeczność ta dowodzi, że Z_Γ musi być tautologią rachunku zdań, c. b. d. o.

Twierdzenie 4 rozwiązuje zagadnienie pełności reguł wnioskowania w zakresie funkcji zdaniowych bez kwantyfikatorów: *każda taka funkcja zdaniowa jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy powstaje przez podstawienie z tautologii rachunku zdań, a więc gdy może być udowodniona za pomocą reguł wnioskowania, przyjętych w logice.*

§ 5. Prawdziwość tautologii logicznych. Wykażemy teraz, że tautologie logiczne są zdaniami prawdziwymi. Dowód opiera się na kilku twierdzeniach pomocniczych.

Twierdzenie 1. Jeśli Φ jest funkcją zdaniową o zmiennych wolnych $x, y, \ldots, u$ i jeśli zmienna w tego samego typu co u po wstawieniu na miejsce u do Φ wszędzie tam, gdzie u było zmienną wolną, nie staje się związana w powstającej w ten sposób funkcji zdaniowej Φ_1, to wzory

$$(B)!\Phi\begin{pmatrix} x, y, \ldots, u \\ P, Q, \ldots, N \end{pmatrix} \quad i \quad (B)!\Phi_1\begin{pmatrix} x, y, \ldots, w \\ P, Q, \ldots, N \end{pmatrix}$$

są równoważne dla dowolnego B i dowolnych przedmiotów $P, Q, \ldots, N$ o bazie B.

Dowód. Twierdzenie jest oczywiste dla funkcji zdaniowych molekularnych, pozostaje zatem do wykazania, że jeśli zachodzi ono dla funkcji zdaniowych Φ i Ψ, to musi też zachodzić dla funkcji zdaniowych Φ', $\Phi \cdot \Psi$, $\Phi + \Psi$, $\Phi \to \Psi$, $\Phi \equiv \Psi$, $\sum_x \Phi$ i $\prod_x \Phi$. Ograniczymy się tylko do rozpatrzenia funkcji zdaniowych $\Phi \cdot \Psi$ i $\prod_x \Phi$, gdyż w pozostałych przypadkach można rozumować analogicznie.

Myśl dowodu będzie dostatecznie jasna, gdy przyjmiemy, że zmiennymi wolnymi w Φ są zmienne x, y i u, a zmiennymi wolnymi w Ψ — zmienne t, y i u.

Zastąpmy w koniunkcji $\Phi \cdot \Psi$ zmienną u przez w tam, gdzie zmienna u była wolna w $\Phi \cdot \Psi$, i załóżmy, że zmienna w nie stanie się nigdzie przy takim podstawieniu zmienną związaną.

Φ przejdzie przez to podstawienie w funkcję zdaniową Φ_1, a Ψ — w funkcję zdaniową Ψ_1, przy czym w myśl założenia wzory

$$(11) \qquad (B)!\Phi\begin{pmatrix} x, y, u \\ P, Q, R \end{pmatrix} \quad i \quad (B)!\Psi\begin{pmatrix} t, y, u \\ L, Q, N \end{pmatrix}$$

są odpowiednio równoważne wzorom

$$(12) \qquad (B)!\Phi_1\begin{pmatrix} x, y, w \\ P, Q, R \end{pmatrix} \quad i \quad (B)!\Psi_1\begin{pmatrix} t, y, w \\ L, Q, N \end{pmatrix}.$$

Ponieważ zaś wzór

$$(13) \qquad (B)![\Phi \cdot \Psi]\begin{pmatrix} x, t, y, u \\ P, L, Q, N \end{pmatrix}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą oba wzory (11), wzór zaś

$$(14) \qquad (B)![\Phi_1 \cdot \Psi_1]\begin{pmatrix} x, t, y, w \\ P, L, Q, N \end{pmatrix}$$

— wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą oba wzory (12), więc istotnie (13) jest równoważne (14).

Rozpatrzmy teraz funkcję zdaniową $\prod_x \Phi$ i załóżmy, że zastępując w niej zmienną u przez zmienną w wszędzie tam, gdzie zmienna u jest zmienną wolną, otrzymamy funkcję zdaniową $\prod_x \Phi_1$, w której zmienna w jest wolną na wszystkich tych miejscach, gdzie zmienna u była zastąpiona zmienną w. Kwantyfikator wiąże zatem zmienną różną od zmiennych u i w. W myśl założenia wzory (11) i (12) są równoważne dla każdego przedmiotu P (odpowiedniego typu), ponieważ zaś wzory

$$(15) \qquad (B)![\prod_x \Phi]\begin{pmatrix} y, u \\ Q, N \end{pmatrix} \quad i \quad (B)![\prod_x \Phi_1]\begin{pmatrix} y, w \\ Q, N \end{pmatrix}$$

orzekają, że dla każdego P zachodzą odpowiednio wzory (11) i (12), więc oba wzory (15) są równoważne.

Twierdzenie 1 możemy zatem uważać za udowodnione.

Natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia 1 jest

Twierdzenie 2. Przy założeniach twierdzenia 1: jeśli Φ jest funkcją zdaniową prawdziwą, to i Φ_1 jest funkcją zdaniową prawdziwą.

Twierdzenie to orzeka, że stosowanie reguły podstawiania nie wyprowadza poza obręb zdań prawdziwych.

Twierdzenie 3. Jeśli funkcje zdaniowe Φ i $\Phi \to \Psi$ są prawdziwe, to i funkcja zdaniowa Ψ jest prawdziwa.

Dowód. Ograniczymy się znów do przypadku, gdy zmiennymi wolnymi funkcji zdaniowej Φ są zmienne x, y, u, a zmiennymi wolnymi funkcji zdaniowej Ψ są zmienne t, y, u.

Gdyby Ψ nie było prawdziwe, to istniałby zbiór niepusty B i takie trzy przedmioty P, Q, R o bazie B, że nie zachodzi wzór

$$(B)!\,\Psi\begin{pmatrix} t, y, u \\ P, Q, R \end{pmatrix}.$$

Oznaczając przez L dowolny przedmiot o bazie B, tego samego typu co zmienna x, mamy

$$(B)!\,\Phi\begin{pmatrix} x, y, u \\ L, Q, R \end{pmatrix},$$

gdyż Φ jest z założenia prawdziwe. Zgodnie z definicją II (§ 2, str. 328) wnosimy stąd, że nie zachodzi wzór

$$(B)![\Phi \to \Psi]\begin{pmatrix} x, t, y, u \\ L, P, Q, R \end{pmatrix},$$

a więc że $\Phi \to \Psi$ nie jest prawdziwe, wbrew założeniu. Funkcja zdaniowa Ψ musi więc być prawdziwa, c. b. d. o.

Twierdzenie 3 pokazuje, że stosując regułę odrywania do zdań prawdziwych, otrzymujemy znów zdania prawdziwe.

Twierdzenie 4. Jeśli $\Phi \to \prod_x \Psi$ jest funkcją zdaniową prawdziwą, to i $\Phi \to \Psi$ jest funkcją zdaniową prawdziwą.

Dowód. Pominiemy banalny wypadek, w którym zmienna x nie jest wolna w Ψ, i założymy, że zmiennymi wolnymi w Ψ są zmienne x, y i t, a zmiennymi wolnymi w Φ — zmienne x, y i u.

Gdyby funkcja zdaniowa $\Phi \to \Psi$ nie była prawdziwa, to istniałby zbiór niepusty B i takie przedmioty P, Q, R, L o bazie B, odpowiednio takich samych typów jak zmienne x, y, u i t, że zachodzi wzór

$$(B)!\,\Phi\begin{pmatrix} x, y, u \\ P, Q, R \end{pmatrix}, \tag{16}$$

lecz nie zachodzi wzór

$$(B)!\,\Psi\begin{pmatrix} x, y, t \\ P, Q, L \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Ponieważ funkcja zdaniowa $\Phi \to \prod_x \Psi$ jest prawdziwa, więc przedmioty P, Q, R, L spełniają ją w dziedzinie B, skąd na mocy (16) wnosimy, że przedmioty Q i L spełniają funkcję zdaniową $\prod_x \Psi$ w dziedzinie B.

Zgodnie z definicją IV (§ 2, str. 328) wnosimy stąd, że dla każdego przedmiotu X o bazie B, tego samego typu co zmienna x, spełniony jest wzór

$$(B)!\,\Psi\begin{pmatrix} x, y, t \\ X, Q, L \end{pmatrix}.$$

Wzór ten musiałby więc zachodzić w szczególności dla $X = P$, skąd otrzymalibyśmy sprzeczność z (17). Funkcja zdaniowa $\Phi \to \Psi$ musi więc być prawdziwa, c. b. d. o.

W zupełnie podobny sposób dowodzi się następującego twierdzenia:

Twierdzenie 5. Jeśli funkcja zdaniowa $\sum_x \Phi \to \Psi$ jest prawdziwa, to i funkcja zdaniowa $\Phi \to \Psi$ jest prawdziwa.

W myśl twierdzeń 4 i 5 stosowanie reguły opuszczania dużego kwantyfikatora w następniku lub małego w poprzedniku prowadzi od zdań prawdziwych do zdań prawdziwych.

Twierdzenie 6. Jeśli funkcja zdaniowa $\Phi \to \Psi$ jest prawdziwa, a zmienna x nie jest wolna w Φ, to funkcja zdaniowa $\Phi \to \prod_x \Psi$ jest też prawdziwa.

Dowód. Pominiemy znów banalny przypadek, gdy zmienna x nie występuje w Ψ jako zmienna wolna, i założymy, że zmiennymi wolnymi w Φ są zmienne y i u, a zmiennymi wolnymi w Ψ — zmienne x, y i t.

Gdyby funkcja zdaniowa $\Phi \to \prod_x \Psi$ nie była prawdziwa, to istniałby zbiór niepusty B i takie przedmioty P, Q, R o bazie B, tegoż typu co zmienne y, u, t, że spełniony jest wzór

$$(B)!\,\Phi\begin{pmatrix} y, u \\ P, Q \end{pmatrix},$$

lecz nie jest spełniony wzór

$$(B)!\prod_x \Psi\begin{pmatrix} y, t \\ P, R \end{pmatrix}.$$

Zgodnie z definicją IV (§ 2, str. 328) wnosimy stąd, że istnieje taki przedmiot L o bazie B, tegoż typu co zmienna x, że nie zachodzi wzór

$$(B)!\,\Psi\binom{x,y,t}{L,P,R},$$

co dowodzi w myśl definicji II, że przedmioty L, P, Q, R nie spełniają w dziedzinie B funkcji zdaniowej $\Phi \to \Psi$. Wniosek ten jest sprzeczny z założeniem, że $\Phi \to \Psi$ jest funkcją zdaniową prawdziwą. Zatem funkcja zdaniowa $\Phi \to \prod_x \Psi$ jest prawdziwa, c. b. d. o.

W podobny sposób udowodnić można

Twierdzenie 7. Jeśli funkcja zdaniowa $\Phi \to \Psi$ jest prawdziwa i zmienna x nie jest wolna w Ψ, to funkcja zdaniowa $\sum_x \Phi \to \Psi$ też jest prawdziwa.

W myśl twierdzeń 6 i 7 stosowanie reguły dołączania dużego kwantyfikatora w następniku lub małego w poprzedniku nie wyprowadza poza zakres zdań prawdziwych.

Wreszcie, dowód następującego twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi:

Twierdzenie 8. Jeśli funkcja zdaniowa Φ jest prawdziwa, to i funkcja zdaniowa $\prod_x \Phi$ jest prawdziwa.

Z twierdzeń 2-8 wynika jako wniosek

Twierdzenie 9. Każda tautologia logiczna jest prawdziwa.

Dowód. Tautologie logiczne systemu $\boldsymbol{L}_n$ powstają przez stosowanie reguł wnioskowania z tautologii rachunku zdań oraz (w przypadku, gdy $n>0$) z pewników ekstensjonalności i pewników definicyjnych. Zarówno tautologie rachunku zdań jak pewniki definicyjne i pewniki ekstensjonalności są prawdziwe (por. § 2, ćwiczenie 1), ponieważ zaś stosowanie reguł wnioskowania do funkcji zdaniowych prawdziwych daje w rezultacie znów funkcje zdaniowe prawdziwe, więc istotnie wszystkie tautologie logiczne są prawdziwe, c. b. d. o.

Twierdzenie 9 stanowi odpowiedź na pierwszą część zagadnienia pełności reguł wnioskowania (por. str. 324 i 332): *reguły wnioskowania prowadzą tylko do wyrażeń prawdziwych.* W dalszym ciągu zajmiemy się drugą częścią zagadnienia: czy reguły wnioskowania prowadzą do wszystkich zdań prawdziwych?

§ 6. Geometryczna interpretacja pojęcia spełniania w węższym rachunku funkcyjnym. Zajmiemy się teraz, jak również w § 7 i § 8, odwróceniem twierdzenia 9 z § 5 w przypadku, gdy $n=0$, t. j. gdy system logiczny $\boldsymbol{L}_n$, stanowiący przedmiot badania, pokrywa się z węższym rachunkiem funkcyjnym.

Aby zbytnio nie komplikować rozważań pod względem formalnym, ograniczymy się do rozpatrywania wyrażeń, które prócz zmiennych typu * zawierają tylko zmienne typu $(*,*)$ — oczywiście jako zmienne wolne, gdyż w węższym rachunku funkcyjnym związanymi mogą być jedynie zmienne najniższego typu *.

Podobnie jak w Rozdziałach IV i VI, używać będziemy jako zmiennych typu $(*,*)$ liter $R, S, T, \ldots$ (ewentualnie ze wskaźnikami) zamiast niewygodnych symboli $x^{(*,*)}, \ldots$ Jako zmiennych typu * używać będziemy znaków $x_1, x_2, x_3, \ldots$ oraz $y, z, u, \ldots$ i t. p.

Symbol N oznaczać będzie zbiór liczb naturalnych [1]); elementy jego będziemy oznaczali literami $m, n, \ldots$, natomiast relacje dwuczłonowe między liczbami naturalnymi oznaczać będziemy literami $A, B, \ldots$, opatrując je ewentualnie wskaźnikami.

Każdej relacji dwuczłonowej A przyporządkujemy liczbę rzeczywistą

$$\xi_A = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q}{3^q},$$

gdzie

$$c_{2^{r-1}(2s-1)} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } r \text{ nie pozostaje} \\ 2, & \text{gdy } r \text{ pozostaje} \end{cases} \quad \text{w relacji } A \text{ do } s.$$

Aby wyjaśnić tę definicję, zauważmy, że relacja A jest wyznaczona całkowicie przez zbiór takich par uporządkowanych (r,s), że rAs. Parze (r,s) możemy przyporządkować w sposób wzajemnie jednoznaczny liczbę $q=2^{r-1}(2s-1)$; relacja A jest więc wyznaczona przez zbiór Z tych liczb q. Zamiast zbioru Z liczb naturalnych rozpatrywać możemy liczbę rzeczywistą, której q-tą cyfrą jest 2 lub 0 zależnie od tego, czy q należy, czy nie należy do Z. Jest to właśnie wyżej określona liczba ξ_A.

Dla każdej relacji dwuczłonowej A liczba ξ_A należy do t. zw. *zbioru Cantora* czyli zbioru wszystkich liczb rzeczywistych ξ,

[1]) W tym rozdziale liczby 0 nie zaliczamy do zbioru liczb naturalnych.

mających rozwinięcie na ułamek trójkowy

$$\xi = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{c_q}{3^q}, \tag{18}$$

w którym cyfry c_q są równe 0 lub 2 [1]).

Na odwrót, jeśli ξ jest liczbą rzeczywistą należącą do zbioru Cantora, to istnieje dokładnie jedna taka relacja A między liczbami naturalnymi, że $\xi = \xi_A$. Istotnie, jeśli (18) jest rozwinięciem liczby ξ na ułamek trójkowy nie zawierający cyfry 1, to taką relacją A jest

$$A_\xi = (\hat{r}, \hat{s})[c_{2^{r-1}(2s-1)} = 2].$$

Oznaczymy jeszcze przez C^k zbiór układów $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, gdzie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ są liczbami rzeczywistymi, należącymi do zbioru Cantora.

Definicje te dają nam możność podania dla pojęcia spełniania (w zakresie wyrażeń węższego rachunku funkcyjnego) przez układ liczb i relacji między liczbami naturalnymi pewnej interpretacji geometrycznej. Mimo, iż interpretacja ta nie jest zbyt prosta, odda nam ona w dalszym ciągu duże usługi.

Niech Φ będzie funkcją zdaniową węższego rachunku funkcyjnego o zmiennych wolnych $R_1, \ldots, R_k, x_1, \ldots, x_l$. Niech $n_1, n_2, \ldots, n_l$ będą liczbami naturalnymi. Oznaczmy przez $\Delta_\Phi(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ zbiór takich układów $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ należących do C^k, dla których

$$(N)!\Phi\begin{pmatrix} R_1, & R_2, \ldots, & R_k, x_1, \ldots, x_l \\ A_{\xi_1}, A_{\xi_2}, \ldots, & A_{\xi_k}, n_1, \ldots, & n_l \end{pmatrix}.$$

Zbiór $\Delta_\Phi(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ leży w k-wymiarowej *przestrzeni* C^k. Każdy układ relacji $A_1, A_2, \ldots, A_k$, który wespół z liczbami $n_1, n_2, \ldots, n_l$ spełnia funkcję zdaniową Φ w dziedzinie N, wyznacza dokładnie jeden punkt zbioru $\Delta_\Phi(n_1, n_2, \ldots, n_l)$. Na odwrót, każdy punkt tego zbioru wyznacza układ relacji $A_1, A_2, \ldots, A_k$, który wespół z liczbami $n_1, n_2, \ldots, n_l$ spełnia funkcję zdaniową Φ w dziedzinie N.

Zbiór $\Delta_\Phi(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ stanowi więc w pewnym sensie *wykres* funkcji zdaniowej Φ.

[1]) Por. np. W. Sierpiński, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, wyd. 2-e, Warszawa 1947, str. 105.

Funkcja zdaniowa Φ jest *prawdziwa* w dziedzinie N, jeśli dla wszelkich liczb naturalnych $n_1, n_2, \ldots, n_l$ zbiór $\Delta_\Phi(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ pokrywa całą przestrzeń C^k.

Funkcja zdaniowa Φ jest *spełnialna* w dziedzinie N, jeśli istnieją takie liczby naturalne $n_1, n_2, \ldots, n_l$, że zbiór $\Delta_\Phi(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ jest niepusty.

Twierdzenie 1. Jeśli Φ jest funkcją zdaniową bez kwantyfikatorów, to zbiór $\Delta_\Phi(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ jest zamknięty [1]) *dla każdego układu l liczb naturalnych $n_1, n_2, \ldots, n_l$.*

Dowód. Zauważmy przede wszystkim, że jeśli ciąg punktów $(\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \ldots, \xi_k^{(j)})$ zbioru C^k jest zbieżny do punktu $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, to dla każdego q naturalnego q-te cyfry rozwinięć trójkowych liczb $\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \ldots, \xi_k^{(j)}$ są, poczynając od pewnego j, równe q-tym cyfrom rozwinięć trójkowych liczb $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$. Wynika stąd, że wszystkie cyfry w rozwinięciach trójkowych liczb $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ są równe 0 lub 2, a więc $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ należy do C^k.

Wyrażenie Φ zbudowane jest przy pomocy funktorów zdaniotwórczych z funkcji zdaniowych molekularnych

$$R_h(x_r, x_s), \tag{19}$$

gdzie $h \leqslant k$, $r \leqslant l$ i $s \leqslant l$. Zastąpmy funkcję zdaniową molekularną (19) przez zmienną zdaniową $p_{h,r,s}$ i oznaczmy przez Z_Φ powstające w ten sposób wyrażenie rachunku zdań (por. § 4, str. 332).

Istnieje oczywiście skończona tylko ilość takich podstawień symboli 0 i 1 na miejsce zmiennych zdaniowych w wyrażeniu Z_Φ, przy których wyrażenie to przyjmuje wartość 1. Niech t oznacza ilość tych podstawień i przypuśćmy, że w i-tym podstawieniu $(i = 1, 2, \ldots, t)$ zmienna $p_{h,r,s}$ otrzymuje wartość $\lambda_{h,r,s}^{(i)}$ (równą 0 lub 1). Przy tym nie wyłączamy przypadku, gdy $t = 0$; Z_Φ jest wtedy negacją tautologii rachunku zdań.

Zgodnie z twierdzeniem 1 z § 4 (str. 333) wzór

$$(N)!\Phi\begin{pmatrix} R_1, \ldots, R_k, x_1, \ldots, x_l \\ A_1, \ldots, A_k, n_1, \ldots, n_l \end{pmatrix} \tag{20}$$

[1]) W tym sensie, że granica każdego zbieżnego ciągu punktów, należących do tego zbioru, też do niego należy.

spełniony jest wtedy i tylko wtedy, gdy Z_Φ przyjmuje wartość 1 przy następującym podstawieniu symboli 0 i 1 za zmienne $p_{h,r,s}$: zmienna $p_{h,r,s}$ zostaje zastąpiona przez 1, gdy A_h, n_r i n_s spełniają funkcję zdaniową (19), a w przeciwnym razie — przez 0. Wynika stąd, że wzór (20) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna $i \leqslant t$, że warunek

(21) *relacja A_h zachodzi między liczbami n_r i n_s*

oraz warunek

$$\lambda^{(i)}_{h,r,s} = 1$$

są równoważne dla wszystkich takich h, r i s, że $h \leqslant k$, $r \leqslant l$ i $s \leqslant l$.

Jeśli A_h jest relacją przyporządkowaną liczbie η_h ze zbioru Cantora ($h = 1, 2, \ldots, k$), to warunek (21) jest równoważny następującemu: $2^{n_r-1}(2n_s-1)$-ta cyfra rozwinięcia trójkowego liczby η_h jest równa 2.

Wnosimy stąd, że wzór (20) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $i \leqslant t$, że dla wszystkich $h \leqslant k$, $r \leqslant l$ i $s \leqslant l$ powyższa cyfra w rozwinięciu trójkowym liczby η_h jest równa $2 \cdot \lambda^{(i)}_{h,r,s}$.

Wyznaczmy teraz liczbę j_0 tak dużą, by $2^{n_r-1}(2n_s-1)$-te cyfry w rozwinięciach trójkowych liczb $\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \ldots, \xi_k^{(j)}$ dla $j \geqslant j_0$ były dla $r \leqslant l$ i $s \leqslant l$ równe odpowiednim cyfrom w rozwinięciach trójkowych liczb $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$. Taka liczba j_0 istnieje na mocy założenia, że ciąg $(\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \ldots, \xi_k^{(j)})$ jest zbieżny do $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$.

Weźmy dowolne $j \geqslant j_0$. Ponieważ punkt $(\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \ldots, \xi_k^{(j)})$ należy do zbioru $\Delta_\Phi(n_1, n_2, \ldots, n_l)$, więc relacje $A_{\xi_1^{(j)}}, \ldots, A_{\xi_k^{(j)}}$ spełniają wespół z liczbami $n_1, n_2, \ldots, n_l$ funkcję zdaniową Φ. Wnosimy stąd, że dla pewnego $i \leqslant t$ $2^{n_r-1}(2n_s-1)$-te cyfry w rozwinięciach trójkowych liczb $\xi_h^{(j)}$ są (dla dowolnych $h \leqslant k$ i $r, s \leqslant l$) równe $2 \cdot \lambda^{(i)}_{h,r,s}$. Zatem te same cyfry w rozwinięciach trójkowych liczb ξ_h są równe $2 \cdot \lambda^{(i)}_{h,r,s}$, co dowodzi, że układ relacji $A_{\xi_1}, \ldots, A_{\xi_k}$ spełnia wraz z liczbami $n_1, n_2, \ldots, n_l$ funkcję zdaniową Φ, czyli że punkt $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ należy do zbioru $\Delta_\Phi(n_1, n_2, \ldots, n_l)$. Zbiór ten jest więc zamknięty, c. b. d. o.

ĆWICZENIE. Udowodnić, że zbiór $\Delta_\Phi(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ jest otwarty w C^k, czyli że granica zbieżnego ciągu punktów zbioru C^k nie należących do $\Delta_\Phi(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ też nie należy do tego zbioru.

§ 7. Twierdzenie Gödla o pełności węższego rachunku funkcyjnego. Wszystkie rozważania tego paragrafu dotyczyć będą wyrażenia

(22) $$\Pi_x \Sigma_y \Pi_z \Sigma_u \Pi_v \Sigma_w \Phi,$$

gdzie Φ jest funkcją zdaniową węższego rachunku funkcyjnego o zmiennych wolnych $R_1, \ldots, R_h, x, y, z, u, v, w$ i nie zawierającą kwantyfikatorów. Będziemy oznaczali przez $\Phi(x_m, x_n, x_p, x_q, x_r, x_s)$ wyrażenie, powstające z Φ przez podstawienie zamiast zmiennych $x, y, \ldots$ odpowiednio zmiennych $x_m, x_n, \ldots$

Ograniczenie się do wyrażeń postaci (22) nie jest podyktowane względami istotnymi, wszystkie bowiem rozumowania dałyby się też przeprowadzić dla dowolnych wyrażeń postaci normalnej (Rozdział III, § 8, str. 79). Nie chcemy jednak zbytnio komplikować wzorów, a wyrażenie (22) jest dostatecznie ogólne na to, by można było na jego przykładzie uwydatnić wszystkie istotne punkty dowodu.

Nazywać będziemy *funkcjami liczbowymi* funkcje o dowolnej liczbie argumentów, przebiegających zbiór N liczb naturalnych i których wartości są też liczbami naturalnymi. Funkcje liczbowe oznaczać będziemy małymi literami greckimi.

Twierdzenie 1. Na to, aby relacje $A_1, \ldots, A_h$ spełniały funkcję zdaniową (22) *w dziedzinie N, potrzeba i wystarcza, by istniały takie funkcje liczbowe $\varphi(k)$, $\psi(k, l)$ i $\vartheta(k, l, m)$, że dla wszelkich naturalnych k, l, m*

(23) $$(N)!\Phi\begin{pmatrix} R_1, \ldots, & R_h, & x, & y, & z, & u, & v, & w \\ A_1, \ldots, & A_h, & k, & \varphi(k), & l, & \psi(k,l), & m, & \vartheta(k,l,m) \end{pmatrix}.$$

Dowód. Załóżmy, że relacje $A_1, \ldots, A_h$ spełniają wyrażenie (22) w dziedzinie N. Zgodnie z definicją IV (§ 2, str. 328) dla każdego k spełniony jest wzór

(i) $$(N)![\Sigma_y \Pi_z \Sigma_u \Pi_v \Sigma_w \Phi]\begin{pmatrix} R_1, \ldots, & R_h, & x \\ A_1, \ldots, & A_h, & k \end{pmatrix},$$

skąd wnosimy, znów na mocy definicji IV, że dla każdego k istnieje taka liczba k_1, iż

(ii) $$(N)![\Pi_z \Sigma_u \Pi_v \Sigma_w \Phi]\begin{pmatrix} R_1, \ldots, & R_h, & x, & y \\ A_1, \ldots, & A_h, & k, & k_1 \end{pmatrix}.$$

Oznaczając przez $\varphi(k)$ najmniejszą z tych liczb k_1, otrzymujemy dla każdego naturalnego k

(iii) $$(N)![\prod_z \sum_u \prod_v \sum_w \Phi]\begin{pmatrix} R_1,\dots,R_h,x,\ y \\ A_1,\dots,A_h,k,\varphi(k)\end{pmatrix}.$$

Ze wzoru tego wynika na mocy definicji IV, że przy wszelkim l jest

(iv) $$(N)![\sum_u \prod_v \sum_w \Phi]\begin{pmatrix} R_1,\dots,R_h,x,\ y,\ z \\ A_1,\dots,A_h,k,\varphi(k),l\end{pmatrix},$$

a więc dla dowolnych k i l istnieje taka liczba l_1, że

(v) $$(N)![\prod_v \sum_w \Phi]\begin{pmatrix} R_1,\dots,R_h,x,\ y,\ z,u \\ A_1,\dots,A_h,k,\varphi(k),l,l_1\end{pmatrix}.$$

Oznaczając przez $\psi(k,l)$ najmniejszą z tych liczb l_1, mieć będziemy dla wszelkich naturalnych k i l

(24) $$(N)![\prod_v \sum_w \Phi]\begin{pmatrix} R_1,\dots,R_h,x,\ y,\ z,\ u \\ A_1,\dots,A_h,k,\varphi(k),l,\psi(k,l)\end{pmatrix}.$$

Powtarzając raz jeszcze to samo rozumowanie, dochodzimy do funkcji $\vartheta(k,l,m)$ i wzoru (23).

Załóżmy na odwrót, że zachodzi wzór (23) dla pewnych funkcji liczbowych φ, ψ i ϑ. Dla każdego m istnieje więc takie n (mianowicie $n=\psi(k,l,m)$), że $A_1,\dots,A_h,k,\varphi(k),l,\psi(k,l),m$ i n spełniają w dziedzinie N wyrażenie Φ. Na mocy definicji IV otrzymujemy stąd łatwo wzór (24) i przekonujemy się podobnymi rozumowaniami, że spełnione są też wszystkie poprzedzające go wzory (i)-(v). Relacje $A_1,A_2,\dots,A_h$ spełniają zatem wyrażenie (22), c. b. d. o.

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy trzy stałe funkcje liczbowe $\varphi(k)$, $\psi(k,l)$ i $\vartheta(k,l,m)$, poddane następującym warunkom:

(25) $$\begin{cases} \text{jeśli } k\neq k', \text{ to } \varphi(k)\neq\varphi(k');\\ \text{jeśli } k\neq k' \text{ lub } l\neq l', \text{ to } \psi(k,l)\neq\psi(k',l');\\ \text{jeśli } k\neq k' \text{ lub } l\neq l' \text{ lub } m\neq m', \text{ to } \vartheta(k,l,m)\neq\vartheta(k',l',m').\end{cases}$$

(26) $\varphi(k)\neq\psi(k',l')$, $\varphi(k)\neq\vartheta(k'',l'',m'')$ i $\psi(k',l')\neq\vartheta(k'',l'',m'')$ *dla wszelkich liczb* k,k',k'',l',l'',m'';

(27) $k<\psi(k)$, $k,l<\psi(k,l)$ i $k,l,m<\vartheta(k,l,m)$ *dla wszelkich liczb* k,l,m.

Dowód, że takie funkcje liczbowe istnieją, nie nastręcza trudności.

Relacje $A_1,A_2,\dots,A_h$ nazywamy *realizacją stopnia* a wyrażenia (22), jeżeli dla dowolnych k,l,m nie większych od a jest spełniony wzór (23).

Twierdzenie 2. Jeśli dla każdego naturalnego a istnieje realizacja stopnia a wyrażenia (22), *to wyrażenie to jest spełnialne w dziedzinie liczb naturalnych.*

Dowód [1]. Niech Δ_a będzie częścią wspólną zbiorów zamkniętych

(28) $$\Delta_\Phi[k,\varphi(k),l,\psi(k,l),m,\vartheta(k,l,m)]$$

dla $k,l,m\leqslant a$. Jeśli $A_1,A_2,\dots,A_h$ jest realizacją stopnia a, to układ liczb rzeczywistych $(\xi_{A_1},\xi_{A_2},\dots,\xi_{A_h})$ należy do zbioru (28) dla wszystkich $k,l,m\leqslant a$, skąd wnosimy, że Δ_a jest zbiorem niepustym. Zbiory Δ_a tworzą więc dla $a=1,2,3,\dots$ ciąg zbiorów niepustych i zamkniętych (gdyż część wspólna skończonej ilości zbiorów zamkniętych (28) jest znów zbiorem zamkniętym), przy czym zbiór Δ_{a+1} jest zawarty w Δ_a. Wynika stąd [2], że istnieje punkt $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_h)$, należący do wszystkich tych zbiorów.

Dla wszelkich k,l,m punkt $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_h)$ należy zatem do zbioru (28), skąd wnosimy w myśl określenia tego zbioru, że relacje $A_{\xi_1},A_{\xi_2},\dots,A_{\xi_h}$ czynią zadość warunkowi

$$(N)!\,\Phi\begin{pmatrix} R_1,\dots,R_h,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w \\ A_{\xi_1},\dots,A_{\xi_h},k,\varphi(k),l,\psi(k,l),m,\vartheta(k,l,m)\end{pmatrix}$$

dla wszelkich k,l,m. Zgodnie z twierdzeniem 1 relacje $A_{\xi_1},A_{\xi_2},\dots,A_{\xi_h}$ spełniają wyrażenie (22) w dziedzinie N, a wobec tego wyrażenie (22) jest spełnialne w N, c. b. d. o.

Zbadamy następnie wnioski, płynące z założenia, że nie istnieje realizacja stopnia a. Dogodnie będzie przy tym posługiwać się następującym skróconym sposobem pisania: koniunkcję $\Psi_1\cdot\Psi_2\cdot\dots\cdot\Psi_m$ zapisywać będziemy jako $\prod_{i=1}^{m}\Psi_i$, alternatywę zaś $\Psi_1+\Psi_2+\dots+\Psi_m$ — jako $\sum_{i=1}^{m}\Psi_i$.

[1] Por. A. Blake, *Canonical expressions in Boolean algebra*, Chicago 1938, str. 53.

[2] Na mocy t. zw. *twierdzenia Cantora*. Por. książeczkę W. Sierpińskiego, cytowaną na str. 342, rozdział III, § 20, str. 92.

Udowodnimy najpierw pomocnicze

Twierdzenie 3. Jeśli zmienne $y_1, y_2, \ldots, y_r$ są wszystkie różne i zmienna y_i występuje jako zmienna wolna tylko w funkcji zdaniowej Ψ_i, a nie występuje jako zmienna wolna ani w funkcji zdaniowej Z, ani w funkcjach zdaniowych Ψ_j dla $j \neq i$ $(i,j=1,2,\ldots,r)$, to z założenia, że $Z+\sum_{i=1}^{r}\Psi_i$ jest tautologią logiczną wynika, że

$$Z+\sum_{i=1}^{r}\prod_y \Psi_i(y), \tag{29}$$

gdzie wyrażenie $\Psi_i(y)$ powstaje z Ψ_i przez podstawienie za zmienną y_i zmiennej y nie występującej w Ψ_i, jest też tautologią logiczną.

Dowód. Z założenia wynika, że

$$\prod_{y_r}\left[Z+\sum_{i=1}^{r}\Psi_i\right]$$

jest tautologią logiczną, skąd wnosimy (por. Rozdział III, § 5, wzór (15), str. 66), że wyrażenie

$$Z+\sum_{i=1}^{r-1}\Psi_i+\prod_{y_r}\Psi_r$$

jest tautologią. Przemianowując w ostatnim składniku zmienną związaną y_r na y (por. Rozdział III, § 4, wzór (4), str. 60), wnosimy, że suma

$$Z+\sum_{i=1}^{r-1}\Psi_i+\prod_y \Psi_r(y)$$

jest tautologią logiczną. Powtarzając r-krotnie to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że alternatywa (29) jest tautologią logiczną, c. b. d. o.

Twierdzenie 4. Jeśli nie istnieje realizacja stopnia a wyrażenia (22), *to następująca alternatywa Θ:*

$$\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{a}\sum_{m=1}^{a}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, x_{\psi(k,l)}, x_m, x_{\vartheta(k,l,m)}) \tag{30}$$

jest tautologią logiczną.

Dowód. Gdyby zdanie Θ nie było tautologią logiczną, to zdanie Z_Θ nie byłoby tautologią rachunku zdań (por. § 4, twierdzenie 4, str. 335), a więc Z_Θ przyjmowałoby wartość 1 przy pewnym podstawieniu symboli 0 i 1 za zmienne zdaniowe. Wynika stąd

(por. § 4, twierdzenie 3 i uwaga na str. 335), że zdanie Θ' jest spełnione w dziedzinie N przez pewien układ relacji $A_1, A_2, \ldots A_h$ i układ liczb naturalnych, w którym zmiennej x_i odpowiada liczba i (dla $i=1,2,\ldots$). Układ tych relacji i liczb nie może więc spełniać żadnego ze składników alternatywy Θ, a to znaczy, że dla dowolnych $k,l,m \leqslant a$ jest

$$(N)!\Phi\begin{pmatrix}R_1,\ldots,R_h, x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, x_{\psi(k,l)}, x_m, x_{\vartheta(k,l,m)}\\ A_1,\ldots,A_h, k, \varphi(k), l, \psi(k,l), m, \vartheta(k,l,m)\end{pmatrix}.$$

Relacje $A_1, A_2, \ldots, A_h$ stanowiłyby zatem realizację stopnia a wyrażenia (22) wbrew założeniu, że realizacja taka nie istnieje.

Alternatywa (30) musi więc być tautologią logiczną, c. b. d. o.

Twierdzenie 5. Jeśli dla pewnego a alternatywa (30) *jest tautologią logiczną, to negacja wyrażenia* (22) *jest też tautologią logiczną.*

Dowód. Niech $b \leqslant a$ będzie liczbą naturalną. Załóżmy, że następująca alternatywa Θ_b:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=1}^{b}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, x_{\psi(k,l)}, x_m, x_{\vartheta(k,l,m)})+\\ &+\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{b}[\textstyle\sum_v\prod_w\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, x_{\psi(k,l)}, v, w)]+\\ &+\sum_{k=1}^{b}[\textstyle\sum_z\prod_u\sum_v\prod_w\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, z, u, v, w)]+\\ &+\textstyle\sum_x\prod_y\sum_z\prod_u\sum_v\prod_w\Phi'(x,y,z,u,v,w)\end{aligned} \tag{31}$$

jest tautologią logiczną. Jest jasne, że jeśli alternatywa (30) jest tautologią, to tym bardziej Θ_a musi być tautologią; założenie zachodzi więc dla $b=a$.

Wykażemy, że jeśli założenie to jest spełnione dla liczby naturalnej b (gdzie $0<b\leqslant a$), to jest ono też spełnione dla liczby o jedność mniejszej. Wyniknie stąd, że Θ_0 także jest tautologią logiczną, a tym samym twierdzenie będzie udowodnione, gdyż Θ_0 redukuje się do ostatniego składnika w alternatywie (31), t. j. do wyrażenia równoważnego negacji wyrażenia (22).

Dla dowodu wyodrębnijmy z Θ_b te składniki, w których co najmniej jeden ze wskaźników k,l,m jest równy b. Otrzymamy wówczas

$$\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=1}^{b}{}^{*}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, x_{\psi(k,l)}, x_m, x_{\vartheta(k,l,m)})+$$

$$+\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{b}{}^{*}[\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, x_{\psi(k,l)}, v, w)]+ \tag{32}$$

$$+\sum_{z}\prod_{u}\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_b, x_{\varphi(b)}, z, u, v, w)+$$

$$+\Theta_{b-1},$$

gdzie $\sum^{*}$ oznacza, że należy wziąć sumę tylko tych składników, w których co najmniej jeden ze wskaźników równy jest b.

Rozpatrzmy najpierw składniki potrójnej sumy, wypisanej w pierwszym wierszu. W składnikach tych występują zmienne $x_{\vartheta(k,l,m)}$, gdzie $k,l,m \leqslant b$, przy czym co najmniej jeden z tych wskaźników jest równy b.

Każda z tych zmiennych występuje dokładnie w jednym składniku sumy (32). Istotnie, jeśli choć jedna z liczb k,l,m jest równa b, to $\vartheta(k,l,m)$ jest różne od liczb $1,2,\ldots,b$ na mocy (27) oraz od liczb $\varphi(k')$ i $\psi(k',l')$ dla dowolnych k' i l' na mocy (26). Wreszcie, na mocy (25) $\vartheta(k,l,m)$ jest tylko wtedy równe $\vartheta(k',l',m')$, gdy $k'=k$, $l'=l$ i $m'=m$.

Wnosimy stąd, że do alternatywy (32) możemy zastosować twierdzenie pomocnicze 3, biorąc jako Z sumę składników, wypisanych w trzech ostatnich wierszach wzoru (32), jako Ψ_i składniki sumy potrójnej, występującej w tym wzorze, wreszcie jako zmienne y_i zmienne $x_{\vartheta(k,l,m)}$. Dochodzimy w ten sposób do wniosku, że alternatywa

$$\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{b}\sum_{m=1}^{b}{}^{*}[\prod_{w}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, x_{\psi(k,l)}, x_m, w)]+\mathrm{Z},$$

gdzie symbol Z oznacza sumę składników wypisanych w ostatnich trzech wierszach wzoru (32), jest tautologią logiczną.

Z uwagi na tautologię

$$\prod_{w}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, x_{\psi(k,l)}, x_m, w)\to\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, x_{\psi(k,l)}, v, w)$$

wnosimy stąd dalej, że

$$\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{b}[\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, x_{\psi(k,l)}, v, w)]+\mathrm{Z}$$

jest tautologią logiczną.

Składniki objęte w niej znakiem sumy podwójnej powtarzają się w sumie Z, a mianowicie zawarte są w drugim wierszu wzoru (32), o ile jeden ze wskaźników k,l jest równy b, w przeciwnym zaś razie zawarte są w Θ_{b-1}. Na podstawie prawa $\vdash(p+p)\equiv p$ wnosimy stąd, że samo Z, czyli alternatywa

$$\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{b}{}^{*}[\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, x_{\psi(k,l)}, v, w)]+ \tag{33}$$

$$+\sum_{z}\prod_{u}\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_b, x_{\varphi(b)}, z, u, v, w)+\Theta_{b-1},$$

jest tautologią.

Do wyrażenia (33) stosujemy teraz podobne przekształcenie, jakie zastosowaliśmy do wyrażenia (32). W składnikach sumy podwójnej, wypisanej w pierwszym wierszu, występują zmienne $x_{\psi(k,l)}$, gdzie $k=b$ lub $l=b$. Z (25)-(27) wynika, że każda z tych zmiennych występuje tylko w jednym składniku sumy (33), możemy więc znowu zastosować twierdzenie pomocnicze 3, otrzymując tautologię

$$\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{b}{}^{*}[\prod_{u}\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, u, v, w)]+ \tag{34}$$

$$+\sum_{z}\prod_{u}\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_b, x_{\varphi(b)}, z, u, v, w)+\Theta_{b-1}.$$

Ponieważ zaś implikacja

$$\prod_{u}\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, x_l, u, v, w)\to\sum_{z}\prod_{u}\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, z, u, v, w)$$

jest tautologią, więc z (34) wynika tautologia

$$\sum_{k=1}^{b}[\sum_{z}\prod_{u}\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_k, x_{\varphi(k)}, z, u, v, w)]+$$

$$+\sum_{z}\prod_{u}\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_b, x_{\varphi(b)}, z, u, v, w)+\Theta_{b-1}.$$

Składniki sumy, wypisanej w pierwszym wierszu, występują w Θ_{b-1} dla $k\neq b$, składnik zaś odpowiadający wartości $k=b$ jest już wypisany w drugim wierszu. Zatem

$$\sum_{z}\prod_{u}\sum_{v}\prod_{w}\Phi'(x_b, x_{\varphi(b)}, z, u, v, w)+\Theta_{b-1}$$

jest tautologią logiczną.

Dołączymy do tego wyrażenia kwantyfikator $\prod_{x_{\varphi(b)}}$ na podstawie reguły uogólniania. Ponieważ w myśl (25)-(27) zmienna $x_{\varphi(b)}$ nie występuje w Θ_{b-1}, więc stosując wzór (15) z Rozdziału III (§ 5, str. 66), otrzymujemy tautologię

$$\prod_{x_{\varphi(b)}} \sum_z \prod_u \sum_v \prod_w \Phi'(x_b, x_{\varphi(b)}, z, u, v, w) + \Theta_{b-1},$$

która na mocy tautologii

$$\prod_{x_{\varphi(b)}} \sum_z \prod_u \sum_v \prod_w \Phi'(x_b, x_{\varphi(b)}, z, u, v, w) \rightarrow$$
$$\rightarrow \sum_x \prod_y \sum_z \prod_u \sum_z \prod_w \Phi'(x, y, z, u, v, w)$$

daje tautologię

$$\sum_x \prod_y \sum_z \prod_u \sum_v \prod_w \Phi'(x, y, z, u, v, w) + \Theta_{b-1}.$$

Pierwszy składnik zawarty jest w Θ_{b-1} (por. wzór (31), str. 349); zatem Θ_{b-1} jest tautologią logiczną.

Tym samym twierdzenie 5 zostało dowiedzione.

Z twierdzeń 2, 4 i 5 wynika łatwo

Twierdzenie 6. Wyrażenie (22) *jest bądź spełnialne w dziedzinie liczb naturalnych, bądź jego negacja jest tautologią logiczną.*

Dowód. Jeśli dla każdego a istnieje realizacja stopnia a, to zgodnie z twierdzeniem 2 wyrażenie (22) jest spełnialne w dziedzinie liczb naturalnych. Jeśli natomiast dla pewnego a nie istnieje realizacja stopnia a, to w myśl twierdzenia 4 alternatywa (30), a więc zgodnie z twierdzeniem 5 i negacja wyrażenia (22), jest tautologią logiczną, c. b. d. o.

Jak już zauważyliśmy na str. 345, wszystkie rozumowania dotyczące wyrażenia (22) dają się uogólnić na dowolne wyrażenia postaci normalnej węższego rachunku funkcyjnego. Twierdzenie 6 zachodzi więc dla każdego wyrażenia postaci normalnej.

W Rozdziale III (§ 8, twierdzenie 4, str. 80) udowodniliśmy, że dla każdego wyrażenia Θ węższego rachunku funkcyjnego istnieje takie wyrażenie Φ tego rachunku o postaci normalnej, że równoważność $\Theta \equiv \Phi$ jest tautologią logiczną. Wynika stąd z łatwością (por. § 5, twierdzenie 9, str. 340), że jeśli Φ jest spełnialne w dziedzinie liczb naturalnych, to i Θ jest w tej dziedzinie spełnialne. Dalej jest jasne, że jeśli Φ' jest tautologią, to i Θ' jest tautologią. Na mocy twierdzenia 6 (uogólnionego na dowolne wyrażenia postaci normalnej węższego rachunku funkcyjnego) otrzymujemy stąd następujące twierdzenie o pełności reguł wnioskowania dla węższego rachunku funkcyjnego [1]):

[1]) Twierdzenie to udowodnił K. Gödel w swej rozprawie doktorskiej *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, Monatshefte für Mathematik und Physik, tom 37 (1930), str. 349-360.

Twierdzenie 7. Każde wyrażenie węższego rachunku funkcyjnego jest bądź spełnialne w dziedzinie liczb naturalnych, bądź jego negacja jest tautologią logiczną.

Prostym wnioskiem z twierdzenia 7 jest

Twierdzenie 8. Jeśli wyrażenie Θ węższego rachunku funkcyjnego jest prawdziwe, to jest ono tautologią.

Dowód. Jeśli Θ nie jest tautologią logiczną, to wyrażenie Θ'', czyli negacja wyrażenia Θ', nie jest tautologią, gdyż jest ona równoważna wyrażeniu Θ. W myśl twierdzenia o pełności węższego rachunku funkcyjnego wyrażenie Θ' musi być spełnialne w zbiorze liczb naturalnych, a więc Θ nie może być prawdziwe, gdyż na mocy twierdzenia 2 (§ 3, str. 331) negacja wyrażenia spełnialnego nie jest prawdziwa. Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

Twierdzenie 8 rozwiązuje dla wyrażeń węższego rachunku funkcyjnego zagadnienie zasadnicze, któremu Rozdział ten jest poświęcony: *w zakresie wyrażeń węższego rachunku funkcyjnego reguły wnioskowania prowadzą tylko do zdań prawdziwych i przy tym do wszystkich zdań prawdziwych.*

Z twierdzeń 1-8 wyprowadzić jeszcze można następujące

Twierdzenie 9 [1]). *Każdemu wyrażeniu W węższego rachunku funkcyjnego o postaci normalnej przyporządkować można w efektywny sposób nieskończony ciąg wyrażeń nie zawierających kwantyfikatorów*

$$W_1, W_2, \ldots, W_a, \ldots \tag{35}$$

w taki sposób, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by W było tautologią logiczną, jest, żeby choć jeden z wyrazów ciągu (35) *powstawał przez podstawienie z tautologii rachunku zdań.*

Dowód. Ograniczymy się do przypadku, gdy W jest postaci

$$\sum_x \prod_y \sum_z \prod_u \sum_v \prod_w \Phi' \tag{36}$$

(por. wzór (22), str. 345).

[1]) Twierdzenie to udowodnił J. Herbrand w pracy *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, nº 33, 1930, rozdział V, § 5, str. 112 i następne.

Niech W_a będzie alternatywą (30). Ponieważ W_a nie zawiera kwantyfikatorów, więc na podstawie twierdzenia 4 (§ 4, str. 335) wnosimy, że W_a jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy powstaje z tautologii rachunku zdań przez podstawienie funkcji zdaniowych molekularnych na miejsce zmiennych zdaniowych.

Zgodnie z twierdzeniem 5, jeśli W_a jest tautologią, to i wyrażenie (36) jest tautologią. Jeśli natomiast żadne z wyrażeń (35) nie jest tautologią, to negacja każdego z tych wyrażeń jest spełnialna w zbiorze liczb naturalnych (por. § 4, twierdzenie 3 i uwagę na str. 335), skąd wnosimy, że dla każdego a istnieje realizacja stopnia a dla wyrażenia (22). Zgodnie z twierdzeniem 2 wyrażenie (22) jest więc spełnialne w zbiorze liczb naturalnych, a zatem jego negacja, czyli wyrażenie (36), nie może być prawdziwa i tym bardziej nie może być tautologią.

Doniosłość twierdzenia 9 polega na tym, że — jak to z niego wynika — wszystkie dowody tautologii logicznych w zakresie węższego rachunku funkcyjnego mogą być przeprowadzane w pewien szablonowy sposób: mając dane wyrażenie, o którym przypuszczamy, że może być tautologią, sprowadzamy je najpierw do postaci normalnej W, po czym budujemy dla tego wyrażenia ciąg (35) i sprawdzamy po kolei, czy występujące w tym ciągu wyrażenia powstają przez podstawienie z tautologii rachunku zdań (t. j. czy wyrażenie Z_{W_a} jest tautologią). Dla każdego a sprawdzenie takie daje się wykonać mechanicznie, metodą zerowo-jedynkową. Jeśli dane wyrażenie istotnie jest tautologią, to po skończonej liczbie prób musi się dojść do takiego a, dla którego Z_{W_a} jest tautologią. Wtedy dowód W, a więc i danego wyrażenia, prowadzi się rozumowaniem, użytym do dowodu twierdzenia 5.

Gdybyśmy potrafili z samego kształtu wyrażenia W ocenić liczbę a, ponad którą dalsze próby są już zbędne, rozwiązalibyśmy zagadnienie rozstrzygalności dla węższego rachunku funkcyjnego. Jak wspomnieliśmy jednak w Rozdziale XI (§ 8, str. 304), węższy rachunek funkcyjny nie jest teorią rozstrzygalną, a więc ocena taka nie istnieje.

PRZYKŁAD. Niech Ω będzie wyrażeniem

$$\prod_y \sum_z \prod_u \sum_v [R'(y,z)+R(v,u)].$$

Przekształcamy je na równoważne mu wyrażenie

$$\sum_x \prod_y \sum_z \prod_u \sum_v \prod_w \{[S(x)+S'(x)]\cdot[R'(y,z)+R(v,u)]\cdot[S(w)+S'(w)]\},$$

które ma postać (36). Ciąg (35) składa się w tym przykładzie z wyrażeń

$$\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{a}\sum_{m=1}^{a}\{[S(x_k)+S'(x_k)]\cdot[R'(x_{\varphi(k)},x_l)+R(x_m,x_{\psi(k,l)})]\cdot [S(x_{\vartheta(k,l,m)})+S'(x_{\vartheta(k,l,m)})]\},$$

równoważnych odpowiednio wyrażeniom

$$\sum_{k=1}^{a}\sum_{l=1}^{a}\sum_{m=1}^{a}[R'(x_{\varphi(k)},x_l)+R(x_m,x_{\psi(k,l)})]. \tag{37}$$

Obierzmy a większe od $\varphi(1)$ i $\psi(1,1)$. Alternatywa (37) zawiera wtedy składnik $R'(x_{\varphi(1)},x_{\psi(1,1)})$, odpowiadający wartościom $k=1$ i $l=\psi(1,1)$, oraz składnik $R(x_{\varphi(1)},x_{\psi(1,1)})$, odpowiadający wartościom $k=l=1$ i $m=\varphi(1)$. Alternatywa (37), a więc i wyrażenie Ω, są zatem tautologiami. W danym razie można to było też stwierdzić bezpośrednio, bo Ω jest równoważne implikacji

$$\sum_y \prod_z R(y,z) \to \prod_z \sum_y R(y,z).$$

ĆWICZENIA. 1. Nawiązując do twierdzenia 9, podać prawo tworzenia wyrażeń W_a w przypadku, gdy W ma postać

$$\sum_{x_1}\cdots\sum_{x_k}\prod_{y_1}\cdots\prod_{y_l}\sum_{z_1}\cdots\sum_{z_m}\prod_{t_1}\cdots\prod_{t_n}\cdots\Phi.$$

Wsk.: W_a jest alternatywą składników

$$\Phi\big(x_{\lambda_1},\ldots,x_{\lambda_k},y_{\varphi_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)},\ldots,y_{\varphi_l(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)},z_{\mu_1},\ldots,z_{\mu_m},$$
$$t_{\psi_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\mu_1,\ldots,\mu_m)},\ldots,t_{\psi_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\mu_1,\ldots,\mu_m)},\ldots\big),$$

gdzie $\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\mu_1,\ldots,\mu_m,\ldots$ przebiegają wartości od 1 do a, a $\varphi_1,\ldots,\varphi_l,\psi_1,\ldots,\psi_n,\ldots$ są funkcjami liczbowymi, czyniącymi zadość warunkom analogicznym do (25)-(27). Gdyby wyrażenie zaczynało się od dużych kwantyfikatorów, należałoby za φ_j przyjąć liczby stałe różne między sobą.

2. Wykazać, że na to, by wyrażenie W

$$\prod_{y_1}\cdots\prod_{y_k}\sum_{z_1}\cdots\sum_{z_m}\Phi$$

było tautologią, potrzeba i wystarcza, żeby alternatywa W_k była tautologią.

Wsk.: Jeśli W_a jest tautologią i $a>k$, to podstawiając za zmienne z_λ o wskaźnikach większych od k zmienną z_1, otrzymamy alternatywę W_k [1].

[1]) Twierdzenie to, udowodnione przez P. Bernaysa i M. Schönfinkla w pracy *Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik*. Mathematische Annalen, tom 99 (1928), str. 342-372, wykazuje, że dla wyrażeń pewnej specjalnej postaci zagadnienie rozstrzygalności daje się rozwiązać pozytywnie. Więcej szczegółów na ten temat znaleźć można w tomie I książki D. Hilberta i P. Bernaysa, *Grundlagen der Mathematik*, Berlin 1934.

§ 8. Twierdzenie Skolema-Löwenheima. Omówimy obecnie zastosowania, jakie znajduje twierdzenie o pełności reguł wnioskowania węższego rachunku funkcyjnego w badaniach metamatematycznych nad elementarnymi teoriami sformalizowanymi (p. Rozdział IX, § 1, str. 224).

Ograniczymy się do rozpatrzenia teorii, w których nie występują stałe specyficzne typu $*$. Niech więc stałe specyficzne mają typy $(*)$, $(*,*)$, $(*,*,*)$ i t. d. Założenie to nie jest zresztą istotne.

Niech $\varrho_1,\ldots,\varrho_h$ będą stałymi specyficznymi teorii elementarnej $\boldsymbol{T}$, a Φ — koniunkcją jej aksjomatów. Zastępując stałe ϱ_i przez zmienne R_i tego samego typu, otrzymamy z Φ funkcję zdaniową węższego rachunku funkcyjnego, którą bez obawy nieporozumienia oznaczać możemy tą samą literą.

Jeśli relacje $A_1, A_2, \ldots, A_h$ (o bazie B) tego samego typu co $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ spełniają funkcję zdaniową Φ w dziedzinie B, to mówimy, że relacje te stanowią *model semantyczny* układu aksjomatów Φ w zbiorze B [1]).

Twierdzenie 1 [2]). *Jeśli teoria elementarna jest niesprzeczna, to istnieje co najmniej jeden model semantyczny układu jej aksjomatów w zbiorze N liczb naturalnych.*

Dowód. Gdyby Φ' było tautologią logiczną, to układ aksjomatów Φ byłby sprzeczny. Jeśli więc układ ten nie jest sprzeczny, to w myśl twierdzenia o pełności węższego rachunku funkcyjnego wyrażenie Φ musi być spełnialne w dziedzinie liczb naturalnych, co dowodzi twierdzenia.

[1]) Należy odróżniać tak określone pojęcie modelu od pojęcia modelu jednej teorii w drugiej, określonego w Rozdziale XI (§ 2, str. 270). Z tego powodu użyty jest tu termin *model semantyczny*.

[2]) Twierdzenie to udowodnił L. Löwenheim w pracy *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, Mathematische Annalen, tom 76 (1915), str. 447-470. Matematyk i logik norweski Th. Skolem (czyta się: *Szolem*) poświęcił temu twierdzeniu szereg prac i podał nowe jego dowody; dlatego też zazwyczaj nazywa się to twierdzenie nazwiskami obu tych autorów. Por. Th. Skolem, *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen*, Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Mat.-naturvid. klasse, 1919, n^0 3, oraz *Über einige Grundlagenfragen der Mathematik*, tamże, 1929, n^0 4.

Podany tu dowód pochodzi w zasadzie od Gödla (por. jego pracę doktorską, cytowaną na str. 352); por. też referat Skolema, *Sur la portée du théorème de Skolem-Löwenheim*, Les Entretiens de Zürich sur les Fondements des Sciences Mathématiques, Zürich 1941, str. 25-47.

Twierdzenie Skolema-Löwenheima zasługuje z wielu względów na szczegółowe omówienie.

Przede wszystkim twierdzenie to stanowi ważny przyczynek do wielokrotnie rozważanego w filozofii matematyki zagadnienia: czy niesprzeczność układu aksjomatów zapewnia «istnienie» przedmiotów, posiadających te własności, jakie opisane są przez aksjomaty?

Zagadnienie to było przedmiotem szczególnie gorącej dyskusji w związku z t. zw. *idealistycznymi* i *realistycznymi poglądami na matematykę* [1]). Idealiści (zwani także *formalistami*) byli zdania, że matematyka bada wnioski, wynikające z założenia, że pewne twory matematyczne (pojęcia pierwotne) czynią zadość pewnym aksjomatom; realiści zaś (zwani też *empirystami*) byli zdania, że przedmioty badane w matematyce muszą być w pewien sposób skonstruowane. Dla idealistów niesprzeczność układu aksjomatów stanowiła kryterium istnienia występujących w teorii pojęć, dla realistów zaś kryterium takim była możliwość konstrukcji.

Twierdzenie Skolema-Löwenheima pokazuje, że w stosunku do elementarnych teorii matematycznych (w sensie określonym w Rozdziale IX, § 1, str. 224) poglądy idealistów i realistów są równoważne.

Twierdzenie Skolema-Löwenheima wyświetla dalej rolę, jaką grają pojęcia i aksjomaty nie-elementarne w takich teoriach jak geometria lub teoria liczb rzeczywistych. Jak wiadomo, w teoriach tych można udowodnić twierdzenie, że zbiór wszystkich przedmiotów typu $*$ (t. j. zbiór punktów w geometrii, a liczb rzeczywistych w arytmetyce) nie jest przeliczalny. Otóż bez użycia pewników nie-elementarnych twierdzenia te nie dałyby się udowodnić, gdyż na mocy twierdzenia Skolema-Löwenheima teorie elementarne mają zawsze modele semantyczne w zbiorze liczb naturalnych, a więc w zbiorze *przeliczalnym*. Dla arytmetyki liczb rzeczywistych bez pewnika ciągłości model taki stanowią działania dodawania i mnożenia oraz relacja mniejszości w zbiorze liczb algebraicznych, który — jak wiadomo —

[1]) Por. Z. Janiszewski, *O realizmie i idealizmie w matematyce*, Przegląd Filozoficzny, tom 19 (1916), str. 161-170, a także J. B. Rosser, *Constructibility as a criterion of existence*, The Journal of Symbolic Logic, tom 1 (1936), str. 36-39.

jest przeliczalny. Dla geometrii bez pewnika ciągłości model taki można zbudować w zbiorze punktów o wszystkich współrzędnych algebraicznych, który też jest przeliczalny. Oczywiście, z istnienia modelu semantycznego w jakimkolwiek zbiorze przeliczalnym wynika istnienie modelu semantycznego w zbiorze liczb naturalnych.

Szczególnie paradoksalnie przedstawia się zastosowanie twierdzenia Skolema-Löwenheima do aksjomatycznej teorii mnogości. Układ aksjomatów, który podaliśmy w Rozdziale IX (§ 4, teoria IX, str. 244) nie jest elementarny, znane są jednak elementarne układy aksjomatów teorii mnogości, opierające się na nieco innych pojęciach pierwotnych [1]). Otóż zgodnie z twierdzeniem Skolema-Löwenheima układ taki, o ile jest niesprzeczny, musi posiadać model semantyczny w zbiorze liczb naturalnych. Wniosek ten wydaje się niedorzeczny, gdyż w teorii mnogości można udowodnić istnienie zbiorów nieprzeliczalnych.

Aby wyjaśnić tę pozorną sprzeczność, będziemy — podobnie jak przy omawianiu aksjomatycznej teorii mnogości (Rozdział IX, § 4, str. 244) — nazywać przedmioty, badane w tej teorii, *mnogościami*. W myśl twierdzenia Skolema-Löwenheima istnieje przeliczalny zbiór mnogości:

(38) $$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

oraz pewne relacje (między innymi relacja E należenia do mnogości), określone w tym zbiorze i stanowiące model układu przyjętych w teorii mnogości aksjomatów. Jedna z tych mnogości, np. x_1, zawiera wszystkie liczby naturalne, odpowiednio określone z pomocą pojęć pierwotnych teorii mnogości. Inna mnogość, np. x_2, zawiera wszystkie podmnogości mnogości x_1, czyli takie mnogości x_i, dla których wzór yEx_i pociąga za sobą wzór yEx_1.

W teorii mnogości dowodzi się, że mnogości x_1 i x_2 są różnej mocy. Pozornie jest tu sprzeczność, bo obie te mnogości są przeliczalne; ściślej: istnieje przeliczalnie wiele takich y, że yEx_1, i przeliczalnie wiele takich z, że zEx_2. Sprzeczność znika jednak, jeśli uświadomić sobie dokładnie sens zdania:

mnogość x_2 jest nieprzeliczalna.

[1]) Por. pracę P. Bernaysa, cytowaną na str. 246.

Mianowicie, niektóre z mnogości, rozważanych w teorii mnogości, nazywają się *parami uporządkowanymi*, przy czym z aksjomatów teorii mnogości wynika, że dla wszelkich x_i, x_j istnieje dokładnie jedna mnogość, która jest parą uporządkowaną o poprzedniku x_i i następniku x_j. Mnogość tę oznaczać tu będziemy przez $\langle x_i, x_j \rangle$. Dwie mnogości x_k i x_l nazywają się mnogościami *równej mocy*, jeśli istnieje mnogość f par uporządkowanych o następujących własnościach:

(i) *jeśli* $x_i E x_k$, *to istnieje takie* x_j, *że* $x_j E x_l$ *i* $\langle x_i, x_j \rangle E f$,

(ii) *jeśli* $x_j E x_l$, *to istnieje takie* x_i, *że* $x_i E x_k$ *i* $\langle x_i, x_j \rangle E f$,

(iii) *jeśli* $\langle x_i, x_j \rangle E f$ *i* $\langle x_i, x_h \rangle E f$, *to* $x_j = x_h$,

(iv) *jeśli* $\langle x_i, x_j \rangle E f$ *i* $\langle x_h, x_j \rangle E f$ *to* $x_i = x_h$.

Dowodząc w teorii mnogości twierdzenia:

mnogości x_1 i x_2 nie są równej mocy,

dowodzimy właściwie następującego twierdzenia:

nie istnieje mnogość f o własnościach (i)-(iv).

Otóż to twierdzenie może być spełnione w modelu przeliczalnym bez żadnej sprzeczności: w ciągu (38) nie istnieje mnogość o własnościach (i)-(iv). Istnieje oczywiście *relacja* wzajemnie jednoznaczna R, której dziedziną jest *zbiór* $(\hat{y})[y E x_1]$, a przeciwdziedziną — *zbiór* $(\hat{z})[z E x_2]$, ale nie wynika stąd wcale istnienie takiej *mnogości* f, że $\langle y, z \rangle E f$ wtedy i tylko wtedy, gdy yRz. Logiczne pojęcie relacji nie jest bowiem bynajmniej tym samym, co pojęcie mnogości par uporządkowanych: w aksjomatycznej teorii mnogości mnogościami, parami uporządkowanymi i t. p. są indywidua typu $*$ [1]).

Upatrując sprzeczność w istnieniu modelu przeliczalnego dla aksjomatów teorii mnogości, popełniliśmy więc ten sam błąd, jaki prowadzi do antynomii semantycznych (por. Rozdział XII, § 3, str. 315): nie odróżniliśmy pojęć systemu teorii mnogości od pojęć meta-matematycznych.

[1]) Zastosowanie twierdzenia Skolema-Löwenheima do teorii mnogości oraz sformułowanie i wyjaśnienie pojawiającej się tu trudności jest zasługą Th. Skolema. Por. jego pracę *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre*, Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem V. Kongress der Skandinavischeh Mathematiker, Helsingfors, 1923, str. 217-232, oraz prace cytowane na str. 356.

Model teorii mnogości określony jest w meta-matematyce w *zbiorze przeliczalnym*; w modelu tym spełnione jest twierdzenie: istnieją *mnogości nieprzeliczalne*. Słowo *przeliczalny* ma za każdym razem inny sens: w pierwszym przypadku jako pojęcie z meta-matematyki, a w drugim — jako pojęcie z aksjomatycznego systemu teorii mnogości.

Twierdzenie Skolema-Löwenheima można uogólnić w wielu kierunkach. Zamiast teorii, opartych na skończonej liczbie aksjomatów, można rozpatrywać teorie oparte na dowolnej ich ilości. Uogólnienia tego dokonał sam Skolem[1]). Można dalej badać istnienie modeli w zbiorach nieprzeliczalnych i wykazać, że dla każdej teorii elementarnej modele takie istnieją[2]). Można wreszcie w pewnym sensie rozciągnąć twierdzenie Skolema-Löwenheima na teorie nie-elementarne[3]).

Jako jeszcze jedno zastosowanie twierdzenia o pełności węższego rachunku funkcyjnego udowodnimy

Twierdzenie 2. *Jeśli każdy model semantyczny układu aksjomatów Φ teorii elementarnej* **T** *spełnia funkcję zdaniową Ψ, to implikacja $\Phi \to \Psi$ jest tautologią logiczną.*

Dowód. Gdyby implikacja $\Phi \to \Psi$ nie była tautologią, to jej negacja $\Phi \cdot \Psi'$ byłaby spełnialna, a więc nie każdy model semantyczny układu aksjomatów Φ spełniałby funkcję zdaniową Ψ, wbrew założeniu.

PRZYKŁAD. Niech Φ będzie koniunkcją wszystkich aksjomatów elementarnej teorii grup (Rozdział IX § 3, teoria II, str. 234). Φ jest więc funkcją zdaniową o dwu zmiennych wolnych: S typu (*,*,*) i L typu (*).

Jeśli Ψ jest taką funkcją zdaniową o zmiennych wolnych S i L, że dla każdego zbioru I i każdego działania D, względem którego I jest grupą, zachodzi wzór

[1]) Por. prace Skolema, cytowane na str. 356.

[2]) Wynik ten (dotąd nie ogłoszony) pochodzi od A. Tarskiego. Zob. Th. Skolem, *Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen*, Fundamenta Mathematicae, tom 23 (1934), str. 150-161, „*Bemerkungen der Redaktion*" na str. 161.

[3]) Zob. moją notę *On absolute properties of relations*, The Journal of Symbolic Logic, tom 12 (1947), str. 36, twierdzenie (i).

$$(I)!\Phi\begin{pmatrix} S, L \\ D, I \end{pmatrix},$$

to implikacja $\Phi \to \Psi$ jest tautologią logiczną.

Wniosek ten, wypływający natychmiast z twierdzenia 2, nie jest bynajmniej oczywisty. A priori mogłyby istnieć własności przysługujące wszystkim grupom, a nie dające się wyprowadzić (przy pomocy przyjętych pewników logicznych i reguł wnioskowania) z aksjomatów teorii grup. Twierdzenie 2 wykazuje, że własności takie nie istnieją, w czym wyraża się właśnie pełność aksjomatów i reguł wnioskowania, przyjętych w węższym rachunku funkcyjnym.

ROZDZIAŁ XIV

TWIERDZENIE GÖDLA

W Rozdziale XIII (§ 7, twierdzenie 8, str. 353) wykazaliśmy, że formalizacja logiki w zakresie węższego rachunku funkcyjnego jest doskonała: reguły wnioskowania dają możność udowodnić każde zdanie prawdziwe.

Zupełnie inaczej układają się stosunki w obszerniejszych systemach logicznych. Reguły wnioskowania przyjęte w tych systemach nie są *pełne* (por. Rozdział XIII, str. 324), t. zn. nie dają możności udowodnienia wszystkich zdań prawdziwych, i przy tym nie mogą być zastąpione regułami istotnie doskonalszymi, chyba że zdecydujemy się zmienić całkowicie pogląd na istotę teorii sformalizowanych.

Rozdział niniejszy poświęcony jest tym zagadnieniom.

§ 1. Twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności pojęcia spełniania. Rozważać będziemy system $\boldsymbol{L}_n$ (por. Rozdział XIII, § 1, str. 324), gdzie n jest liczbą stałą większą od 3. Jako zmiennych typu ((*)) używać będziemy w systemie $\boldsymbol{L}_n$ dużych liter gotyckich, podobnie jak w Rozdziale VII. Zachowamy też szereg oznaczeń, wprowadzonych w tamtym Rozdziale.

Będziemy używali następującej dogodnej symboliki: jeśli Φ jest funkcją zdaniową o zmiennych wolnych $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots$, to wyrażenie powstające z Φ przez podstawienie zmiennej $\mathfrak{A}$ zamiast $\mathfrak{x}$, zmiennej $\mathfrak{B}$ zamiast $\mathfrak{y}$ i t. d. oznaczać będziemy symbolem $\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots)$. Umowę tę przyjmujemy dla dowolnych liter gotyckich, a nie tylko dla specjalnych liter $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$

Funkcje zdaniowe

$$\mathfrak{x}=0, \qquad \mathfrak{x}=0^*, \qquad \mathfrak{x}=0^{**}, \qquad \ldots$$

zdefiniowane w Rozdziale VII (§ 4, str. 178) będziemy oznaczali krótko symbolami $A_0, A_1, A_2, \ldots$

Zakładamy, że w meta-matematyce, w której prowadzone są te wszystkie rozważania, zbudowana jest arytmetyka liczb naturalnych, np. na podstawie aksjomatów Peano.

Jak wspomnieliśmy już w Rozdziale XII (§ 4, str. 321), w meta-matematyce można określić wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między wyrażeniami systemu $\boldsymbol{L}_n$ a pewnymi liczbami naturalnymi. Inaczej mówiąc, można każdemu wyrażeniu Φ przyporządkować liczbę naturalną, zwaną *numerem* wyrażenia Φ, tak by różnym wyrażeniom przyporządkowane były różne numery. Numer wyrażenia Φ, określony w Rozdziale XII (§ 4, str. 322), będziemy oznaczali przez $N(\Phi)$.

W szczególności wynika stąd, że w meta-matematyce ustalić można wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między liczbami naturalnymi a funkcjami zdaniowymi o jednej zmiennej wolnej $\mathfrak{x}$. Wszystkie takie funkcje zdaniowe można zatem ustawić w ciąg nieskończony

$$W_0, W_1, W_2, \ldots, W_q, \ldots, \tag{1}$$

w którym każda funkcja zdaniowa systemu $\boldsymbol{L}_n$ o jednej zmiennej wolnej $\mathfrak{x}$ figuruje dokładnie raz.

Dla każdego nieskończonego zbioru I będziemy oznaczali przez $q\{I\}$ zbiór, składający się z wszystkich q-elementowych jego podzbiorów ($q=0,1,2,\ldots$).

Z łatwością można udowodnić

Twierdzenie 1. Jeśli q jest liczbą naturalną, a I zbiorem nieskończonym, to jedynym zbiorem podzbiorów l, który spełnia w I funkcję zdaniową A_q, jest $q\{I\}$.

Udowodnić można dalej

Twierdzenie 2. Istnieje taka funkcja zdaniowa Ψ o dwu zmiennych wolnych $\mathfrak{x}$ i $\mathfrak{y}$, że dla każdego nieskończonego zbioru I warunki

$$(I)!\,\Psi\begin{pmatrix}\mathfrak{x}, & \mathfrak{y}\\ l\{I\}, & m\{I\}\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$m=N[(\Lambda l)\to(W'_l)] \tag{3}$$

są równoważne.

Efektywna konstrukcja funkcji zdaniowej Ψ jest zbyt żmudna, aby ją tu w całości przytaczać. Ograniczymy się zatem do ogólnych uwag, w jaki sposób można ją wykonać.

Numery funkcji zdaniowych A_l i W_l' są określonymi funkcjami liczby l, które dają się określić przez indukcję względem l przy użyciu prostych funkcji arytmetycznych, takich jak iloczyn i potęga.

Numerem wyrażenia $(A_l) \to (W_l')$ jest — zgodnie z określeniami przyjętymi w Rozdziale XII (§ 4, str. 321-322) — liczba

$$3^{29} \cdot 5^{N(A_l)} \cdot 7^{31} \cdot 11^{13} \cdot 13^{29} \cdot 17^{N(W_l')} \cdot 19^{5} \cdot 23^{31};$$

jest to więc też funkcja zmiennej l, wyrażająca się za pomocą działań mnożenia i potęgowania.

Z Rozdziału VII (§ 6, str. 193) wiemy, że działania mnożenia i potęgowania liczb naturalnych, jak również wszelkie funkcje określone z pomocą tych działań, dają się zdefiniować w systemie $\boldsymbol{L}_n$ przez indukcję. Wnosimy stąd, że istnieje funkcja zdaniowa Ψ o zmiennych wolnych $\mathfrak{x}$ i $\mathfrak{y}$, która jest sformalizowaną (w systemie $\boldsymbol{L}_n$) indukcyjną definicją funkcji arytmetycznej

$$(\hat{m}, \hat{l})\{N[(A_l) \to (W_l')] = m\}.$$

Jeśli system $\boldsymbol{L}_n$ wzbogacimy pewnikiem nieskończoności, to możemy udowodnić w nim twierdzenie

$$A_l(\mathfrak{x}) \cdot A_m(\mathfrak{y}) \to \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

dla m czyniących zadość równości (3), jak również twierdzenie

$$A_l(\mathfrak{x}) \cdot A_m(\mathfrak{y}) \to \Psi'(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

dla wszystkich m nie czyniących zadość tej równości.

Z uwagi na twierdzenie 1 oraz na łatwe do udowodnienia twierdzenie, że pewnik nieskończoności jest prawdziwy w każdej dziedzinie nieskończonej I (por. Rozdział XIII, § 3, ćwiczenie 2, str. 332), wnosimy stąd, że warunki (2) i (3) są równoważne, c. b. d. o.

Przyjmiemy teraz następujące zasadnicze dla dalszego ciągu określenie [1]):

Zbiór $\boldsymbol{K}$ wyrażeń systemu $\boldsymbol{L}_n$ nazywa się *definiowalny* w $\boldsymbol{L}_n$, jeśli istnieje taka funkcja zdaniowa Θ systemu $\boldsymbol{L}_n$ o jednej zmiennej wolnej $\mathfrak{x}$, że dowolne wyrażenie Φ wtedy i tylko wtedy należy do $\boldsymbol{K}$, gdy istnieje zbiór nieskończony I, dla którego

$$(I)!\Theta\binom{\mathfrak{x}}{N(\Phi)\{I\}}.$$

[1]) Por. A. Tarski, *Sur les ensembles définissables de nombres réels*, Fundamenta Mathematicae, tom 17 (1931), str. 220.

Udowodnimy pomocnicze

Twierdzenie 3. Jeśli zbiór $\boldsymbol{K}$ wyrażeń systemu $\boldsymbol{L}_n$ jest definiowalny w $\boldsymbol{L}_n$, to istnieje taka funkcja zdaniowa H o jednej zmiennej wolnej $\mathfrak{x}$, że dla każdej liczby naturalnej k wyrażenie

$$(A_k) \to (W_k') \tag{4}$$

jest elementem zbioru $\boldsymbol{K}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór nieskończony I, dla którego

$$(I)!H\binom{\mathfrak{x}}{k\{I\}}. \tag{5}$$

Dowód. Zachowując oznaczenia, wprowadzone w twierdzeniu 2 i określeniu pojęcia definiowalności, przyjmijmy za H funkcję zdaniową

$$\sum_{\mathfrak{y} \in \mathrm{Nc\,ind}} [\Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \cdot \Theta(\mathfrak{y})].$$

Jeśli I jest zbiorem nieskończonym i zachodzi wzór (5), to w myśl definicji pojęcia spełniania istnieje zbiór K, złożony z podzbiorów zbioru I, który

1^0 spełnia w I funkcje zdaniowe $\mathfrak{y} \in \mathrm{Nc\,ind}$ oraz $\Theta(\mathfrak{y})$,

2^0 spełnia wraz z $k\{I\}$ funkcję zdaniową $\Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$.

Z warunku 1^0 wynika istnienie takiej liczby naturalnej m, że $K = m\{I\}$. Warunek 2^0 dowodzi w myśl twierdzenia 2, że m jest numerem wyrażenia (4), a wobec tego z uwagi, że zbiór $K = m\{I\}$ spełnia funkcję zdaniową $\Theta(\mathfrak{y})$, wnosimy na mocy określenia definiowalności, że wyrażenie (4) należy do zbioru $\boldsymbol{K}$.

Na odwrót, jeśli wyrażenie (4) należy do $\boldsymbol{K}$, to oznaczając przez m jego numer, wnosimy, że zbiór $m\{I\}$ spełnia w dziedzinie I funkcje zdaniowe $\Theta(\mathfrak{y})$ i $\mathfrak{y} \in \mathrm{Nc\,ind}$ oraz wespół z $k\{I\}$ — funkcję zdaniową $\Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Zatem $k\{I\}$ spełnia w I funkcję zdaniową H, co dowodzi wzoru (5).

Po tych twierdzeniach pomocniczych możemy już sformułować i udowodnić jedno z głównych twierdzeń tego Rozdziału [1]).

[1]) Twierdzenie to udowodnił A. Tarski w cytowanej na str. 323 pracy *Pojęcie prawdy...*, rozdział 5, str. 96. Myśl dowodu pochodzi od Gödla, który użył jej do bezpośredniego dowodu twierdzenia podanego tu w § 3 (str. 371, twierdzenie 4). Por. K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I*, Monatshefte für Mathematik und Physik, tom 38 (1931), str. 173-198 oraz A. Tarski, *On undecidable statements in enlarged systems of logic and the concept of truth*, The Journal of Symbolic Logic, tom 4 (1939), str. 105-112.

Twierdzenie 4. Jeśli K *jest definiowalnym w systemie* L_n *zbiorem funkcji zdaniowych tego systemu, prawdziwych w każdym zbiorze nieskończonym, to istnieje funkcja zdaniowa nie należąca do* K *i też prawdziwa w każdym zbiorze nieskończonym.*

Dowód. Niech Z_k będzie wyrażeniem (4). Zgodnie z twierdzeniem 3 istnieje taka funkcja zdaniowa H o jednej zmiennej wolnej $\mathfrak{x}$, że Z_k jest elementem zbioru K wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego nieskończonego zbioru I zachodzi wzór (5).

Funkcja zdaniowa H występuje w ciągu (1), gdyż ciąg ten zawiera każdą funkcję zdaniową systemu L_n o zmiennej wolnej $\mathfrak{x}$. Istnieje więc taka liczba naturalna q, że

$$H = W_q. \tag{6}$$

Wykażemy, że Z_q spełnia tezę twierdzenia.

Po pierwsze, gdyby Z_q było elementem zbioru K, to istniałby zbiór nieskończony I, dla którego zachodzi wzór (5) przy $k = q$. Z drugiej strony, Z_q byłoby funkcją zdaniową prawdziwą w każdym zbiorze nieskończonym (gdyż własność ta przysługuje z założenia każdej funkcji zdaniowej, należącej do K), skąd na mocy twierdzenia 1 oraz wzorów (4) i (6) wnosimy, że byłoby

$$(I)!H'\left(\begin{matrix}\mathfrak{x}\\ q\{I\}\end{matrix}\right)$$

wbrew temu, że wzór (5) zachodzi — jak wykazaliśmy — dla $k = q$. Sprzeczność ta dowodzi, że Z_q nie jest elementem zbioru K.

Po drugie, gdyby Z_q nie było prawdziwe w każdej dziedzinie nieskończonej, to negacja Z_q, a więc i koniunkcja $A_q \cdot W_q$, byłaby spełnialna w pewnym zbiorze nieskończonym I. Istniałaby więc taka klasa K podzbiorów zbioru I, że

$$(I)!A_q\left(\begin{matrix}\mathfrak{x}\\ K\end{matrix}\right) \quad \text{i} \quad (I)!W_q\left(\begin{matrix}\mathfrak{x}\\ K\end{matrix}\right).$$

Pierwszy z tych warunków daje w myśl twierdzenia 1

$$K = q\{I\},$$

wobec czego drugi daje na mocy (6)

$$(I)!H\left(\begin{matrix}\mathfrak{x}\\ q\{I\}\end{matrix}\right).$$

Zgodnie z twierdzeniem 3, Z_q byłoby więc elementem zbioru K, wbrew temu, co udowodniliśmy poprzednio.

Dowód twierdzenia 4 jest tym samym zakończony.

Jako natychmiastowy wniosek otrzymujemy stąd

Twierdzenie 5. Zbiór K_0 *wszystkich funkcji zdaniowych systemu* L_n*, które są prawdziwe w każdym zbiorze nieskończonym, nie jest definiowalny w* L_n.

Dowód. W przeciwnym razie istniałoby na mocy twierdzenia 4 wyrażenie prawdziwe w każdym zbiorze nieskończonym, a nie należące do K_0, co oczywiście jest niemożliwe.

§ 2. Porównanie twierdzenia Tarskiego z antynomią Richarda. Zanim wyprowadzimy dalsze wnioski z twierdzenia 4, poświęcimy kilka uwag dowodowi tego twierdzenia. Rozumowanie użyte w tym dowodzie wykazuje duże analogie do rozumowania prowadzącego do antynomii Richarda (Rozdział XII, § 3, str. 318) i warto zastanowić się nad tym, dlaczego z dwu tak podobnych rozumowań jedno jest fałszywe, bo prowadzące do antynomii, drugie zaś jest poprawnym dowodem (meta-matematycznym).

Funkcję zdaniową (4) przeczytać możemy jak następuje:

k-ta z kolei liczba naturalna nie posiada własności, wyrażonej przez funkcję zdaniową W_k.

Aby uzyskać antynomię Richarda, rozpatrywaliśmy własność liczby naturalnej k, określoną wyrażeniem:

jest tak, jak orzeka funkcja zdaniowa Z_k.

Operując terminologią wprowadzoną w Rozdziale XIII, możemy powiedzieć, że antynomia Richarda powstaje przez rozpatrywanie funkcji zdaniowej (o zmiennej k):

Z_k *jest prawdziwe w każdym zbiorze nieskończonym* (7)

i przez przypuszczenie, że istnieje funkcja zdaniowa W_q w ciągu (1), która orzeka to samo, co wzór (7).

Przypuszczenie to nie jest jednak niczym uzasadnione. Wyrażenie (7) jest funkcją zdaniową meta-matematyki, nie ma zaś powodu przypuszczać, że znajdziemy równoważną jej funkcję zdaniową systemu L_n, t. zn. taką funkcję zdaniową H, że (7) jest równoważne zachodzeniu wzoru

$$(I)!H\left(\begin{matrix}\mathfrak{x}\\ k\{I\}\end{matrix}\right)$$

w pewnej nieskończonej dziedzinie I.

Przeciwnie, możemy nawet twierdzić, że taka funkcja zdaniowa H nie istnieje, gdyż z istnienia jej wynikłaby sprzeczność.

Antynomia Richarda zamieniła się w ten sposób w poprawny dowód pewnego twierdzenia meta-matematycznego [1]).

Aby zaś otrzymać twierdzenie 4, nie rozważaliśmy — jak w antynomii Richarda — wyrażenia (7), lecz wyrażenie (meta-matematyczne):

$$Z_k \text{ jest elementem } K.$$

Jest to znów funkcja zdaniowa meta-matematyki, na ogół więc nie jest ona równoważna żadnej funkcji zdaniowej systemu L_n. Jeśli jednak K jest zbiorem definiowalnym w L_n, to taka funkcja zdaniowa systemu L_n istnieje, możemy bowiem fakt meta-matematyczny:

$$\Phi \text{ jest elementem } K$$

wyrazić w samym systemie L_n funkcją zdaniową:

$$A_{N(\Phi)} \to \Theta.$$

Myśl dowodu twierdzenia 4 i jego stosunek do antynomii Richarda stają się tym samym jasne.

Rozpatrzymy tu jeszcze jedną wątpliwość, jaką uwagi te wywołać by mogły u uważnego czytelnika. Powiedzieliśmy, że wyrażenie (7) nie jest równoważne żadnej funkcji zdaniowej systemu L_n. W Rozdziale XIII (§ 2 i § 3) podaliśmy jednak definicję pojęcia:

Zdanie prawdziwe w każdym zbiorze nieskończonym.

Można by więc przypuszczać, że formalizując tę definicję w języku logicznym, dojdziemy do funkcji zdaniowej systemu L_n, równoważnej wyrażeniu (7). Przypuszczenie to wydaje się tym bardziej uzasadnione, że system L_n jest dla niewielkich nawet wartości n bardzo bogaty, gdyż obejmuje w sobie całą matematykę klasyczną, i trudno wyobrazić sobie pojęcie, które nie dawałoby się zdefiniować w tym systemie.

Analiza definicji pojęcia spełniania, podanej w Rozdziale XIII (§ 2, str. 327-329), prowadzi jednak do wniosku, że zapisując tę definicję w symbolach logicznych, otrzymamy wyrażenie systemu L_{n+1}, nie zaś wyrażenie systemu L_n.

[1]) Por. w związku z tym uwagę ogólniejszą z Rozdziału VIII, § 2, str. 211.

Istotnie, definicja pojęcia spełniania jest definicją indukcyjną: najpierw określamy układy przedmiotów, spełniające funkcje zdaniowe molekularne, a następnie zakładając, że mamy już pojęcie spełniania dla funkcji zdaniowych Φ i Ψ, określamy je dla bardziej zawiłych funkcji zdaniowych, zbudowanych z Φ i Ψ. Otóż zarówno w pierwszej jak w drugiej części tej definicji używać musimy zmiennych, których typy są rzędu $n+1$. Istotnie jeśli zmienna x^c ma typ c rzędu $n+1$, to układy przedmiotów, spełniające te funkcje zdaniowe molekularne, które rozpoczynają się od zmiennej x^c, zawierają przedmioty typu c; musimy więc użyć w meta-matematyce zmiennych typu c, aby napisać wyrażenia I-IV (str. 327-329), stanowiące łącznie indukcyjną definicję pojęcia spełniania. Definicję indukcyjną możemy teraz zastąpić zwykłą na wzór definicji dodawania, znanej nam z Rozdziału VII (§ 6, str. 187). Taka zamiana definicji indukcyjnej na zwykłą możliwa jest jednak tylko przy użyciu zmiennych *związanych* tych wszystkich typów, które występowały w częściach I-IV definicji indukcyjnej. Aby więc wysłowić definicję spełniania w języku logiki, potrzebne nam są zmienne związane o typach rzędów $0,1,\ldots,n+1$, a zmienne takie mamy dopiero w systemie L_{n+1}, nie zaś w L_n.

Definicji spełniania nie możemy zatem wyrazić przy pomocy tych środków logicznych, jakimi rozporządzamy w systemie L_n.

Wyjaśnia to również końcową uwagę Rozdziału XII (str. 323), w myśl której przy uprawianiu meta-matematyki nie można ograniczać się tylko do tych środków logicznych, które są sformalizowane w systemie poddanym badaniom meta-matematycznym.

§ 3. Twierdzenie Gödla o niepełności bogatszych systemów logicznych. Zakończenie. Oznaczmy przez T zbiór wyrażeń, jakie dają się otrzymać z tautologii logicznych i z pewnika nieskończoności

$$[\mathrm{Nc}(1) \in \mathrm{Nc\,ind}]'$$

przy pomocy reguł wnioskowania przyjętych w systemie L_n.

Z twierdzenia o dedukcji (Rozdział XI, § 1, str. 267) wynika

Twierdzenie 1. Na to, by wyrażenie X należało do T, potrzeba i wystarcza, żeby implikacja

$$[\mathrm{Nc}(1) \in \mathrm{Nc\,ind}]' \to X$$

była tautologią logiczną.

Ponieważ pewnik nieskończoności jest prawdziwy w każdym zbiorze nieskończonym, a tautologie logiczne — w każdym w ogóle zbiorze, więc wynika stąd

Twierdzenie 2. Każde wyrażenie, należące do zbioru T, *jest prawdziwe w dowolnym zbiorze nieskończonym.*

Udowodnić dalej można

Twierdzenie 3. Zbiór T *jest definiowalny w systemie* L_n.

Podobnie jak dla twierdzenia 2 z § 1 (str. 363), zadowolimy się jedynie podaniem ogólnikowych wskazówek, szkicujących dowód, którego szczegółowe wyłożenie byłoby bardzo długie.

Definicja zbioru T (należąca do meta-matematyki) jest definicją indukcyjną. Określamy najpierw tautologie rachunku zdań, pewniki ekstensjonalności, pewniki definicyjne i pewnik nieskończoności. Określamy dalej reguły wnioskowania i definiujemy T jako najmniejszy zbiór, zawierający zdania poprzednio określone i *zamknięty* ze względu na reguły wnioskowania, t. zn. zawierający wraz z wyrażeniami Φ i Ψ wszystkie wyrażenia, jakie z nich powstają przez stosowanie do nich reguł wnioskowania.

Numery tautologii oraz pewników: definicyjnych, ekstensjonalności i nieskończoności tworzą pewien zbiór M liczb naturalnych, który bez większych trudności można określić czysto arytmetycznie. Numery wyrażeń, powstających z Φ i Ψ przez stosowanie jednej z reguł wnioskowania, są określonymi funkcjami φ_i liczb $N(\Phi)$ oraz $N(\Psi)$. Dla funkcji tych można też bez trudu znaleźć definicję arytmetyczną (por. Rozdział XII, § 4, str. 322, przykład). Zbiór numerów wyrażeń należących do T można więc określić arytmetycznie jako najmniejszy zbiór liczb, zawierający M i zamknięty ze względu na funkcje φ_i.

Ponieważ w systemie L_n daje się ugruntować arytmetyka liczb naturalnych (por. Rozdział VII, § 6, str. 193), więc całą tę konstrukcję można napisać w języku systemu L_n. Otrzymamy wówczas funkcję zdaniową Θ o jednej zmiennej wolnej $\mathfrak{x}$ i taką, że implikacja $A_k \to \Theta$ daje się wyprowadzić z tautologii logicznych i z pewnika nieskończoności wtedy i tylko wtedy, gdy k jest numerem wyrażenia, należącego do T. Jeśli natomiast k nie jest numerem takiego wyrażenia, to w systemie L_n daje się wyprowadzić implikacja $A_k \to \Theta'$.

Wynika stąd z łatwością że wszelkie wyrażenie Φ wtedy i tylko wtedy należy do T, gdy jego numer k czyni zadość warunkowi $(I)!\Theta\left(k\,\{I\}^{\mathfrak{x}}\right)$, gdzie I jest dowolnym zbiorem nieskończonym. To dowodzi twierdzenia 3.

Z twierdzenia 3 wynika już nietrudno następujące słynne *twierdzenie Gödla*[1]:

Twierdzenie 4. Istnieją zdania systemu L_n, *które są prawdziwe, ale nie są tautologiami logicznymi.*

Dowód. Z twierdzeń 2 i 3 wynika na podstawie twierdzenia 4 z § 1, (str. 366), że istnieje wyrażenie Z prawdziwe w każdym zbiorze nieskończonym, ale nie należące do T.

Alternatywa

$$[\mathrm{Nc}(1) \in \mathrm{Nc\,ind}] + \mathrm{Z} \tag{8}$$

jest wobec tego prawdziwa w każdym zbiorze I, skończonym lub nie, bo pierwszy jej składnik jest prawdziwy w każdym zbiorze skończonym, a drugi w każdym zbiorze nieskończonym.

Gdyby alternatywa (8) była tautologią logiczną, to i implikacja

$$[\mathrm{Nc}(1) \in \mathrm{Nc\,ind}]' \to \mathrm{Z}$$

byłaby tautologią logiczną, a więc zdanie Z należałoby do T wbrew określeniu tego zdania.

Twierdzenie 4 jest w ten sposób udowodnione.

Twierdzenie to wykazuje, że *dokonana przez nas formalizacja logiki nie jest doskonała: aksjomaty i reguły wnioskowania prowadzą co prawda zawsze do zdań prawdziwych, ale nie do wszystkich takich zdań.*

Przeciwnie, *istnieją zdania o tym samym stopniu oczywistości, co tautologie logiczne, a mimo to nie dające się wyprowadzić z aksjomatów logiki za pomocą przyjętych przez nas reguł wnioskowania.*

Nie trudno stąd wywnioskować, że wobec tego i formalizacja nie-elementarnych teorii matematycznych nie jest doskonała: tak np. *istnieją w nie-elementarnej teorii grup zdania, spełnione przez każde działanie grupowe, a mimo to nie dające się wyprowadzić z aksjomatów* (por. Rozdział XIII, § 8, str. 361). Również przestaje

[1]) Por. cytowaną już kilkakrotnie jego pracę *Über formal unentscheidbare Sätze...*

dla teorii nie-elementarnych obowiązywać twierdzenie, zgodnie z którym niesprzeczność teorii pociąga za sobą istnienie modelu semantycznego (por. Rozdział XIII, § 8, str. 356, twierdzenie 1).

Pierwszym odruchem, jaki budzi w nas opisane wyżej odkrycie Gödla, jest chęć «naprawienia» logiki: skoro przyjęte przez nas aksjomaty i reguły wnioskowania okazały się za słabe dla dowodu wszystkich zdań prawdziwych, to powinniśmy je wzmocnić, przyjąć nowe aksjomaty i nowe reguły wnioskowania. Rzut oka na dowód twierdzenia Gödla odbierze nam jednak od razu nadzieję osiągnięcia na tej drodze istotnie wartościowych rezultatów. Twierdzenie Gödla pozostanie prawdziwe, dopóki tylko zbiór tautologii będzie definiowalny, tak zaś jest dla wszelkich reguł wnioskowania, które polegają na wykonywaniu pewnych mechanicznych operacji nad wyrażeniami.

Twierdzenie Gödla przestałoby obowiązywać dopiero dla takich reguł wnioskowania i aksjomatów, dla których zbiór M i funkcje liczbowe φ_i, opisane w dowodzie twierdzenie 3, nie byłyby definiowalne. System logiki, oparty na takich aksjomatach i regułach wnioskowania, nie mógłby jednak w żadnym razie być uznany za system rachunku logicznego: zastosowanie reguły wnioskowania lub rozpoznanie, czy wyrażenie jest aksjomatem, wymagałoby uprzedniego rozwiązania trudnych (a ze stanowiska przyjętego w poprzednich Rozdziałach — nawet nierozwiązalnych) zagadnień logicznych i matematycznych.

Widzimy stąd, że niedoskonałość logiki sformalizowanej, znajdująca swój wyraz w twierdzeniu 4, leży o wiele głębiej niż to się z początku wydaje. Reguły wnioskowania i aksjomaty nie dlatego nie prowadzą do wszystkich zdań prawdziwych, że poprostu zapomnieliśmy o jednym lub kilku dodatkowych aksjomatach lub regułach wnioskowania, po których dołączeniu formalizacja logiki byłaby już doskonała. Trudność leży gdzie indziej, leży w samych naszych poglądach na istotę logiki.

Budując systemy sformalizowane, czy to logiki, czy matematyki, chcieliśmy upodobnić je jak gdyby do wielkiej gry w szachy. Z pewnych pozycji wyjściowych (aksjomatów) wyprowadzaliśmy za pomocą reguł wnioskowania nowe pozycje (twierdzenia). Niezrozumiałe dla nas pojęcie intuicyjnej prawdziwości zdań znikło z logiki — jak się nam zdawało — na zawsze. Zdania matematyczne były prawdziwe nie dlatego, żeśmy je intuicyjnie rozumieli, lecz dlatego, żeśmy je potrafili udowodnić. Sądziliśmy, że urzeczywistniliśmy (lub jesteśmy tego bliscy) ideę Leibniza, który chciał widzieć w logice „ars calculandi", sztukę liczenia, co pozwoli myślenie zastąpić rachunkiem.

Twierdzenie Gödla rozwiało te złudzenia: logika nie jest grą w szachy, pojęcie intuicyjnej prawdziwości zdania rozsadza sztywne ramy, w jakie chcielibyśmy je wtłoczyć. Znowu powstają przed nami zdania, które są niewątpliwie prawdziwe dla każdego, kto je rozumie, ale których udowodnić nie możemy.

Skąd zatem bierze się nasze głębokie przekonanie o rozróżnialności prawdy i fałszu, nawet tylko w odniesieniu do zdań matematycznych? Musimy otwarcie przyznać, że nie wiemy.

Gödel porównuje oczywistość niektórych praw matematycznych z oczywistością opartą na postrzeganiu zmysłowym [1], a Post pisze [2], że „ ... nieunikniony jest przynajmniej częściowy odwrót od całego aksjomatycznego prądu z końca XIX i początku XX wieku oraz powrót do pojęć *znaczenia* i *prawdy*, będących istotą matematyki".

Te i podobne głosy wielu wybitnych uczonych świadczą o głębokim poruszeniu umysłów, wywołanym odkryciem Gödla.

Nie powinniśmy się temu dziwić: stoimy w obliczu załamania się przedsięwziętej na wielką skalę próby rozwiązania odwiecznego zagadnienia prawdy za pomocą sformalizowanych teorii logicznych i matematycznych. Nieraz przecież w nauce rzeczywistość okazywała się odmienną od naszych o niej wyobrażeń.

Na tych uwagach kończymy kurs logiki.

*

Pożyteczne może będzie jeszcze raz rzucić okiem wstecz na przebytą drogę, w zasadzie nie różną od tej, jaką logika matematyczna naprawdę przebyła w swym rozwoju historycznym.

Rozpoczęliśmy od poszukiwania formalnych kryteriów prawdziwości zdań. Wynik uzyskaliśmy kompletny w rachunku zdań, a nieco mniej kompletny w rachunku kwantyfikatorów, gdyż nie znaleźliśmy dla rachunku kwantyfikatorów metody automatycznego sprawdzania, kiedy wyrażenie jest tautologią.

---

[1]) K. Gödel, *Russell's mathematical logic*, The philosophy of Bertrand Russell, Evanston-Chicago 1944, str. 128.

[2]) E. L. Post, *Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems*, Bulletin of the American Mathematical Society, tom 50 (1944), str. 295.

Zajęliśmy się dalej wyświetleniem natury pojęć matematycznych i stwierdziliśmy, że wszystkie one dają się sprowadzić do dwu wielkich pojęć: zbioru i relacji.

Niestety, te pojęcia nie są oczywiste same przez się. Antynomie logiczne wykazują, że nie można ich traktować tylko intuicyjnie, lecz należy je ściśle określić na drodze aksjomatycznej.

Omówiliśmy jedno z możliwych takich określeń: prostą teorię typów. Wykorzystaliśmy przy tym poznane uprzednio kryteria formalne prawdziwości zdań, gdyż przyjęliśmy za prawdziwe te i tylko te zdania, które dają się wyprowadzić z aksjomatów za pomocą reguł wnioskowania. W ten sposób dążenie do uniknięcia antynomii logicznych doprowadziło nas do stworzenia sformalizowanego systemu logiki.

W dalszym ciągu zapoznaliśmy się z różnymi innymi sformalizowanymi systemami matematyki i stwierdziliśmy, że daje się w nich zamknąć cała niemal znana dziś wiedza matematyczna. Stwierdziliśmy też, że systemy sformalizowane można badać w zasadzie tak samo, jak liczby, punkty, lub dowolne inne pojęcia matematyczne.

Badania meta-matematyczne, do których doszliśmy w ten sposób, prowadzą do licznych, matematycznie ciekawych rezultatów (np. do dowodów niesprzeczności i niezależności). Ponadto pozwalają one wyświetlić naturę innych antynomii, zwanych semantycznymi.

Z drugiej strony, właśnie analiza antynomii semantycznych doprowadziła nas do wniosku, że systemy sformalizowane, o ile tylko nie są bardzo ubogie, są zasadniczo ułomne i nie ma mowy o tym, by mogły one objąć całość matematyki.

Widzimy z tego przeglądu, jak linia rozwojowa logiki oscyluje między Scyllą antynomii a Charybdą formalizacji.

Logika matematyczna jest jeszcze nauką względnie młodą: od opublikowania prac Boole'a, które zapoczątkowały logikę współczesną, mija zaledwie sto lat. Mimo to wiele z dotychczasowego dorobku logiki stanowi cenny wkład do nauki. Poznanie licznych praw rachunku zdań i kwantyfikatorów, analiza pojęcia relacji, Frege'owska teoria liczb naturalnych, rozróżnienie między matematyką a meta-matematyką — są to niewątpliwie odkrycia wielkiej wagi.

Krytycy logiki wysuwają słusznie zarzut, że zasadniczy problemat, polegający na wyjaśnieniu istotnej natury pojęcia prawdy w matematyce, nie został dotychczas rozwiązany. Można jednak mieć nadzieję, że dalszy rozwój logiki przyniesie odpowiedź zarówno na to, jak i na wiele innych dotąd otwartych zagadnień.