

Widzimy z tych przykładów, że postaci normalne tautologii nie różnią się niczym szczególnym od postaci normalnych dowolnych wyrażeń. W przeciwieństwie więc do rachunku zdań (por. Rozdział II, §11, str. 35, tw. 9) nie można przez analizę struktury wyrażenia o postaci normalnej rozstrzygnąć od razu, czy jest ono tautologią.

ĆWICZENIA. 1. Sprowadzić do postaci normalnej tautologie (1)-(21).

2. Każde wyrażenie można przekształcić na równoważne mu wyrażenie o postaci normalnej, którego charakterystyka rozpoczyna się dużym kwantyfikatorem, a kończy małym.

Wsk.: Oprzeć się na tautologii

$$\vdash W \equiv [W + \prod_x \varnothing(x) \cdot \sum_x \varnothing'(x)]$$

i sprowadzić prawą jej stronę do postaci normalnej.

CZĘŚĆ DRUGA

ROZDZIAŁ IV

ALGEBRA ZBIORÓW I RELACJI

§ 1. Zbiory i relacje. W Części pierwszej tej książki zajmowaliśmy się badaniem praw logicznych, na których opiera się każde rozumowanie matematyczne. W Części drugiej badamy będziemy treść pojęć, z którymi mamy do czynienia w matematyce, a więc pojęć takich jak liczba, funkcja, działanie i in. Wykażemy, że wszystkie te pojęcia dają się sprowadzić do dwu: *zbioru* i *relacji*, których już określać nie będziemy; objaśnimy jednak ich znaczenie na przykładach.

Będziemy zakładali, że w każdym rozumowaniu dany jest pewien dowolny, lecz w ciągu tego rozumowania już nie ulegający zmianie, zespół przedmiotów. Będziemy go nazywali *zbiorem pełnym* i oznaczali przez 1.

Aby dopomóc wyobraźni, możemy np. założyć, że 1 składa się z liczb naturalnych, albo z punktów płaszczyzny, albo z figur geometrycznych i t. p.

Każda własność przedmiotów wyodrębnia ze zbioru pełnego pewien na ogół inny zespół przedmiotów, mianowicie zespół tych przedmiotów, należących do zbioru pełnego, które tę własność posiadają. Takie zespoły przedmiotów nazywamy *zbiorami*.

Pojęcie zbioru utożsamiamy zatem z pojęciem własności w tym sensie, że wyrażenie: *przedmiot x ma własność X* uważamy za równoznaczne z wyrażeniem: *przedmiot x należy do zbioru X*.

Np. własność: *być liczbą pierwszą* utożsamiamy w tym sensie ze zbiorem utworzonym z liczb naturalnych 2, 3, 5, 7, 11, ...

Zamiast więc mówić: *liczba x jest liczbą pierwszą*, możemy mówić: *liczba x należy do zbioru liczb pierwszych*¹⁾. Zamiast: *należy do zbioru* mówimy też: *jest elementem zbioru*.

Jeśli zbiór pełny składa się ze skończonej liczby przedmiotów, np. z przedmiotów $a, b, \dots, k$, to każdą własność (czyli zbiór) opisać możemy tabelką postaci

a	b	$\dots$	k
$\pm$	$\pm$	$\dots$	$\pm$

stawiając w dolnym wierszu pod każdą literą znak $+$ albo $-$ w zależności od tego, czy przedmiot tą literą oznaczony ma rozpatrywaną własność (t. j. należy do rozważanego zbioru), czy nie.

Zbiory punktów prostej lub płaszczyzny można też oczywiście ilustrować geometrycznie. Takie geometryczne ilustracje są bardzo pożyteczne, w dwu jednak przypadkach zawodzą: mianowicie w przypadku zbioru *pustego* i *zbiorów jednostkowych*.

Zbiór pusty odpowiada własności, nie przysługującej żadnemu przedmiotowi spośród elementów zbioru pełnego. Z własnościami takimi spotykamy się w matematyce bardzo często. Jeśli np. zbiór pełny 1 składa się z liczb rzeczywistych, to własność wyrażona nierównością $x^2 < 0$ jest pusta. Tabelka, opisująca własność pustą, ma więc w dolnym wierszu wyłącznie znaki $-$. Oczywiście, interpretacja geometryczna zbioru pustego jest niemożliwa.

Zbiór jednostkowy zawiera tylko jeden element; inaczej mówiąc jest to własność, przysługująca jednemu tylko przedmiotowi. Np. własność: *być liczbą parzystą i pierwszą* jest jednostkowa, gdyż przysługuje jednej tylko liczbie 2. W tabelce każdej własności jednostkowej występuje znak $+$ tylko raz jeden.

Interpretacja geometryczna własności jednostkowej jest wprawdzie możliwa, ale prowadzi intuicję na fałszywe tory, gdyż nie uwydatnia różnicy między zbiorem jednostkowym a jego jedynym elementem. Różnica jest jednak zasadnicza: zbiór czyli własność nie jest nigdy przedmiotem do tegoż zbioru należącym. Szczególnie widoczne jest to na przykładzie wyżej rozpatrywa-

¹⁾ Utożsamienie pojęć zbioru i własności jest celowe wówczas, gdy ograniczamy się tylko do rozpatrywania przedmiotów, należących do ustalonego raz na zawsze zbioru pełnego 1. Na tym stanowisku stać będziemy konsekwentnie w tej książce.

nym: liczba 2 nie jest tym samym co własność: *być liczbą pierwszą i parzystą*¹⁾.

O ile zbiory są własnościami pojedynczych przedmiotów, to *relacje dwuczłonowe*, zwane też *stosunkami dwuczłonowymi*, są własnościami (zbiorami) uporządkowanych par przedmiotów.

Mówimy np., że między liczbami 2 i 3, albo 7 i 11, albo -5 i 0 i t. d. zachodzi relacja mniejszości (albo stosunek $<$). Relacja mniejszości jest to więc własność, przysługująca uporządkowanym parom liczb

(2, 3), (7, 11), (-5 , 0), ...

— i ogólnie parom (x, y) , w których pierwszy człon jest mniejszy od drugiego — a nie przysługująca żadnej innej parze liczb.

Jeśli zbiór pełny ma skończoną liczbę elementów, np. $a, b, \dots, k$, to każdą relację dwuczłonową opisać możemy tabelką postaci

	a	b	$\dots$	k
a				
b				
$\vdots$				
k				

w której na przecięciu wiersza o nagłówku h i kolumny o nagłówku j stawiamy znak $+$ albo $-$ w zależności od tego, czy omawiana relacja zachodzi między przedmiotami h i j , czy nie.

Jeśli wszystkie pola tabliczki wypełnione są znakami $-$, to relacja nazywa się *pustą*. Jest to więc relacja, która nie zachodzi między żadnymi dwoma przedmiotami, należącymi do zbioru 1.

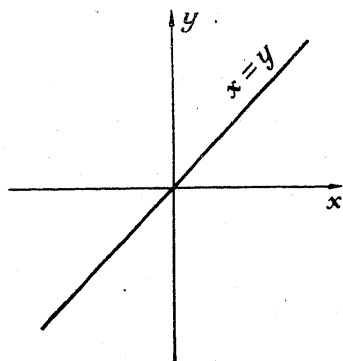
Jeśli wszystkie pola tabliczki wypełnione są znakami $+$, to relacja nazywa się *pełną*. Relacja pełna zachodzi między do-

¹⁾ Ostatecznie sens, jaki nadajemy słowu *zbiór* — jak i każdej nazwie — jest w znacznym stopniu kwestią umowy. Idzie o to, aby sens ten ustalić, gdyż w przeciwnym razie wynikać mogą nieporozumienia, nieuniknione wówczas, gdy tego samego słowa używamy w różnych znaczeniach. Istnieją systemy, w których twierdzi się, że zbiór pusty nie istnieje, a zbiór jednostkowy jest identyczny z jedynym swoim elementem. System taki stworzył m. in. polski logik S. Leśniewski (1886-1939). W tych systemach słowo *zbiór* użyte jest w innym znaczeniu niż przez nas przyjęte.

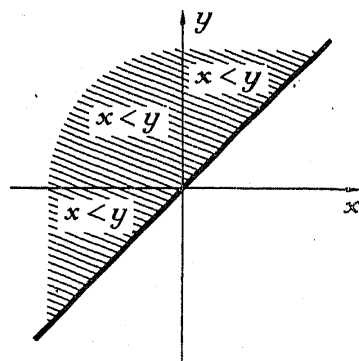
wolnymi dwoma przedmiotami (niekoniecznie różnymi) zbioru pełnego.

Relacje dwuczłonowe między liczbami rzeczywistymi albo między punktami prostej można ilustrować geometrycznie. Do wykresu geometrycznego relacji należą mianowicie te i tylko te punkty, dla których rozważana relacja zachodzi między odcietą a rzędną.

Oto np. wykresy relacji równości (rys. 6) i mniejszości (rys. 7):



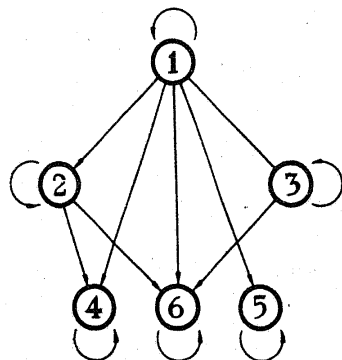
Rys. 6.



Rys. 7.

Inny sposób ilustrowania relacji dwuczłonowych polega na łączeniu strzałkami par punktów, reprezentujących przedmioty, między którymi relacja ta zachodzi.

Oto np. wykres relacji podzielności wśród liczb 1, 2, 3, 4, 5 i 6 (rys. 8).



Rys. 8.

kimi spotykamy się w matematyce na każdym niemal kroku.

Zakrzywione strzałki przy każdej z liczb oznaczają ich podzielność przez siebie.

Prócz relacji dwuczłonowych ważną rolę grają relacje (stosunki) trójczłonowe, czteroczłonowe i — ogólnie — relacje n -członowe. Relacje trójczłonowe są to własności uporządkowanych trójek przedmiotów, relacje czteroczłonowe — własności uporządkowanych czwórek przedmiotów i t.d. Z relacjami ta-

Ograniczymy się do podania kilku przykładów.

Funkcja zdaniowa: *punkt x leży między punktami y a z* wyraża pewną relację trójczłonową między punktami. Wzory

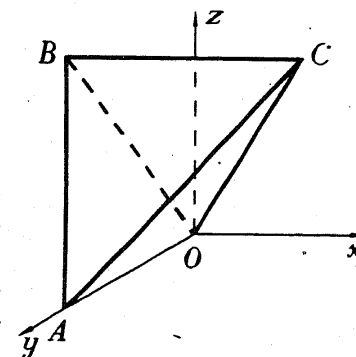
$$x = y + z, \quad x = y \cdot z, \quad x = y^z, \quad x = \sqrt[y]{z}$$

wyrażają pewne relacje trójczłonowe między liczbami. Funkcja zdaniowa: *punkt x jest tak odległy od y jak z od t* wyraża pewną relację czteroczłonową między punktami. Wzór $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < 0$ wyraża pewną relację czteroczłonową między liczbami. W zbiorze liczb rzeczywistych, przyjętym za pełny, relacja ta jest pusta, t. zn. nie przysługuje żadnej czwórce uporządkowanej liczb rzeczywistych; należy ją jednak odróżniać od pustej relacji dwuczłonowej. Jeśli za zbiór pełny przyjąć zbiór liczb zespolonych, to omawiana relacja nie jest pusta („nierówność ma rozwiązania” — mówiąc językiem algebraicznym): zachodzi ona np. dla czwórki uporządkowanej $(\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-4})$.

Ilustracja geometryczna relacji trójczłonowych jest możliwa za pomocą wykresów przestrzennych (trójwymiarowych). Oto naszkicowany wykres relacji: *z leży między x a y* (rys. 9), przy czym za zbiór pełny przyjęliśmy zbiór punktów odcinka 01 . Wykres składa się z punktów położonych wewnątrz czworościanu $OABC$.

Mówiąc o relacjach, będziemy zawsze podawali ich liczbę argumentów (członów) i rozważali oddzielnie relacje dwuczłonowe, trójczłonowe itp. Mogłoby wydawać się dogodne wprowadzenie ogólnego pojęcia relacji o dowolnej liczbie argumentów, które obejmowałyby w sobie jako szczególny przypadek zarówno pojęcie relacji o pewnej ustalonej liczbie argumentów jak również pojęcie zbioru (relacji o jednym argumentem). Ze względów, które wyjaśnimy w Rozdziale VIII, nie będziemy jednak nigdy korzystali z tak ogólnego pojęcia relacji.

Omawialiśmy dotychczas zbiory, których elementy należały do zbioru 1, oraz relacje (dwu-, trójczłonowe i t. d.), zachodzące między elementami zbioru 1. Zbiory te i relacje tworzą nowy zespół przedmiotów, różnych od przedmiotów, tworzących zbiór 1.



Rys. 9.

Między tymi nowymi, abstrakcyjnymi przedmiotami zachodzą mogą znowu pewne relacje (dwuczłonowe, trójczłonowe i t. d.), a także przedmioty te posiadać mogą pewne własności. W ten sposób pojawiają się w rozważaniach zbiory utworzone ze zbiorów, zbiory utworzone z relacji, a także relacje (o tej lub innej liczbie argumentów) zachodzące między zbiorami, między relacjami, wreszcie między przedmiotami należącymi do zbioru 1 a zbiorami, między przedmiotami należącymi do zbioru 1 a relacjami i t. p.

Proces tworzenia coraz to nowych *typów* zbiorów i relacji może być oczywiście kontynuowany: możemy rozważać zbiory utworzone ze zbiorów, których elementami są zbiory, relacje zachodzące między zbiorami zbiorów i t. d. Systematyką tych tworów pojęciowych, powstających stopniowo z przedmiotów najprostszych (elementów zbioru 1), zajmujemy się bliżej w Rozdziale VIII.

ĆWICZENIA. 1. Jeśli zbiór pełny składa się z n elementów, to istnieje 2^n różnych zbiorów, 2^{2^n} różnych relacji dwuczłonowych i 2^{2^k} różnych relacji k -członowych.

2. Niech zbiór pełny składa się z n elementów i niech symbol $\binom{n}{k}$ oznacza liczbę różnych zbiorów k -elementowych. Wówczas:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \quad \text{dla } k \geq 1;$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

§ 2. Funkcje zdaniowe a zbiory i relacje. Symbol abstrakcji.

Aby móc mówić o dowolnych zbiorach i relacjach, dogodnie będzie wprowadzić zmienne, przebiegające zbiór wszystkich własności, zmienne, przebiegające zbiór wszystkich relacji, i t. d. Będziemy używali liter $X, Y, Z, \dots$ jako zmiennych, przebiegających zbiór wszystkich własności, liter $R, S, T, \dots$ jako zmiennych, przebiegających zbiór wszystkich relacji dwuczłonowych, i liter $U, V, W, \dots$ jako zmiennych, przebiegających zbiór relacji trójczłonowych. Relacji o większej liczbie argumentów nie będziemy rozpatrywali; w razie potrzeby można, oczywiście, wprowadzić dalsze zmienne, przebiegające zbiór tych relacji.

Aby zaznaczyć, że przedmiot x należy do zbioru X (czyli ma własność X) piszemy ¹⁾:

$$(1) \quad x \in X \quad \text{albo} \quad X(x)$$

i czytamy: x jest elementem zbioru X .

Aby zaznaczyć, że między przedmiotami x a y zachodzi relacja dwuczłonowa R , piszemy:

$$(2) \quad x R y \quad \text{albo} \quad R(x, y).$$

Podobnie wzór

$$(3) \quad U(x, y, z)$$

czytamy: relacja (trójczłonowa) U zachodzi między przedmiotami x, y, z .

Wyrażenia (1), (2) i (3) są funkcjami zdaniowymi. Pierwsze z nich ma dwie zmienne: x , przebiegającą zbiór pełny 1, i X , przebiegającą zbiór własności (zbiór zbiorów). W wyrażeniu (2) zmiennymi są x, y i R , w (3) — x, y, z i U .

Jeśli w wyrażeniu (2) zastąpimy zmienną R nazwą dowolnej relacji dwuczłonowej, np. znakiem $<$ lub $=$, to otrzymamy pewną funkcję zdaniową $\Phi(x, y)$ o dwu zmiennych wolnych. Przedmioty a i b spełniają tę funkcję zdaniową wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi między nimi relacja, której nazwą zastąpiliśmy literę R we wzorze (2).

Widać stąd wyraźnie, że nie należy utożsamiać z sobą pojęć: relacji (lub zbioru) i funkcji zdaniowej. Funkcje zdaniowe są to pewne wzory logiczne i matematyczne, relacje zaś i zbiory są to pewne twory abstrakcyjne, o których jest nam dogodnie założyć, że istnieją i że mają szereg własności, z którymi zapoznamy się w dalszym ciągu ²⁾.

Zachodzi jednak pewien związek między pojęciem funkcji zdaniowej a pojęciem zbioru i relacji. Funkcje zdaniowe służą

¹⁾ Znaku $\in$ używamy tu zamiast znaku s , który wprowadził G. Peano i który jest pierwszą literą greckiego słowa *esti* (= jest).

²⁾ Stanowisko takie jest krytykowane przez wielu filozofów, upatrujących w nim pewną formę idealizmu: wiary w istnienie przedmiotów idealnych, t. zn. abstrakcyjnych. Istnieją systemy logiczne, budowane z myślą uniknięcia wszelkich takich »idealistycznych« założeń. W systemach tych zbiory i relacje utożsamia się z funkcjami zdaniowymi. Budowa takich systemów nie jest bynajmniej prosta i nasuwa wiele obiekcji zasadniczych, związanych z potrzebą różnicowania pojęć matematycznych i meta-matematycznych (por. Rozdział XII).

mianowicie do zapisywania własności jednego lub wielu przedmiotów, w związku z czym możemy powiedzieć, że każda funkcja zdaniowa o n zmiennych wolnych wyznacza pewną relację n -członową (lub zbiór, o ile $n=1$).

Aby kwestię tę wyjaśnić bliżej, powróćmy do jednego z przykładów, omówionych w § 1: wzór (czyli funkcja zdaniowa)

$$x = y + z$$

wyraża pewną relację trójczłonową. Mówiąc tak, mamy na myśli, że istnieje pewna relacja trójczłonowa U (a więc pewien twór abstrakcyjny: zbiór trójek uporządkowanych), która zachodzi między dowolnymi liczbami wtedy i tylko wtedy, gdy liczby te spełniają wypisaną wyżej funkcję zdaniową, t. zn. gdy pierwsza z tych liczb jest sumą drugiej i trzeciej.

Istnienie takiej relacji nie jest bynajmniej samo przez się oczywiste i nie dałoby się np. udowodnić na podstawie tautologii logicznych, omówionych w Rozdziałach II i III. Przyjmiemy wobec tego specjalny aksjomat, który w braku lepszego terminu nazwiemy *aksjomatem definicyjnym*¹⁾.

Aksjomat definicyjny. Dla każdej funkcji zdaniowej $\Phi(x, y, \dots, u)$ o co najmniej n zmiennych wolnych istnieje dokładnie jedna taka relacja n -członowa N , że

$$\vdash \prod_{x,y,\dots,u} [N(x, y, \dots, u) \equiv \Phi(x, y, \dots, u)].$$

Podane tutaj sformułowanie aksjomatu definicyjnego nie jest ostateczne. Ścisłejsze sformułowanie podamy w Rozdziale V, § 2, zupełnie zaś dokładne dopiero w Rozdziale VIII, § 3, w związku z teorią typów. Na razie zauważymy tylko, iż nieścisłość obecnego sformułowania wywołana jest tym, że nie określiliśmy dotychczas dokładnie, jakie wzory czy napisy uważamy za funkcje zdaniowe. Aksjomat definicyjny uważać więc będziemy za schemat, w który zamiast „ $\Phi(x, y, \dots, u)$ ” wstawić można dowolną z funkcji zdaniowych, jakie rozpatrywać będziemy w tym i w następnych rozdziałach.

¹⁾ Jest on zbliżony treścią do t. zw. *aksjomatu sprowadzalności* („axiom of reducibility”), przyjętego przez Russell’a i Whitehead’a w *Principia Mathematica* (tom I, str. 161-167), jak również do przyjmowanego w teorii mnogości pewnika o wyróżnianiu. Zob. E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Mathematische Annalen 65 (1908), str. 107-128.

Relację R , zachodzącą między dwoma przedmiotami wtedy i tylko wtedy, gdy przedmioty te spełniają funkcję zdaniową $\Phi(x, y)$, oznaczamy symbolem

$$(\hat{x}, \hat{y}) \Phi(x, y).$$

Symbol ten jest zatem nazwą relacji, wyznaczonej przez funkcję zdaniową $\Phi(x, y)$. Aksjomat definicyjny dla relacji dwuczłonowych możemy więc napisać w postaci

$$(4) \quad \vdash u[(\hat{x}, \hat{y}) \Phi(x, y)] v \equiv \Phi(u, v).$$

Występujące w tych wzorach daszki nad zmiennymi nazywają się *znakami abstrakcji*.

Poprzedzając funkcję zdaniową zmiennymi, zaopatrzonymi w znaki abstrakcji, tworzymy nazwę abstrakcyjnego tworu (relacji), wyznaczonego przez tę funkcję zdaniową.

Pewnik definicyjny dla zbiorów piszemy w postaci wzoru

$$(5) \quad \vdash u \epsilon (\hat{x}) \Phi(x) \equiv \Phi(u).$$

Symbol $(\hat{x}) \Phi(x)$ jest zatem nazwą zbioru tych przedmiotów, należących do zbioru pełnego, które spełniają funkcję zdaniową $\Phi(x)$ ¹⁾. Podobnie, aksjomat definicyjny dla relacji trójczłonowych ma postać

$$[(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \Phi(x, y, z)] (u, v, w) \equiv \Phi(u, v, w).$$

Funkcje zdaniowe we wzorach (4) i (5) zawierać mogą prócz uwidocznionych zmiennych x, y inne jeszcze zmienne wolne, grające rolę *parametrów*.

Np. $(\hat{x}, \hat{y}) (x < y + t)$ jest relacją dwuczłonową, zależną od parametru t . Podstawiając zamiast litery t nazwy rozmaitych liczb, otrzymamy rozmaite konkretne relacje dwuczłonowe.

Dla wielu specjalnych funkcji zdaniowych $\Phi(x)$ lub $\Phi(x, y)$ będziemy zbiór $(\hat{x}) \Phi(x)$ lub relację $(\hat{x}, \hat{y}) \Phi(x, y)$ oznaczali jednym krótkim symbolem. Piszemy wówczas t. zw. *równości definicyjne*

$$\dots \equiv_{df} (\hat{x}) \Phi(x) \quad \text{lub} \quad \dots \equiv_{df} (\hat{x}, \hat{y}) \Phi(x, y),$$

¹⁾ Symbolika ta pochodzi od Russell’a. W literaturze matematycznej zbiór $(\hat{x}) \Phi(x)$ oznacza się częściej symbolem $E_x \Phi(x)$ (literę E wybrano jako pierwszą literę francuskiego słowa *ensemble*). Natomiast nie ma w literaturze matematycznej ogólnie przyjętego symbolu na oznaczenie relacji określonej funkcją zdaniową o dwu lub więcej zmiennymi wolnymi.

których lewe strony wypełnić należy przez wpisanie symbolu, mającego służyć za skrót prawej strony.

Przyjmujemy za tautologię logiczną każdą równoważność, której lewa strona powstaje z prawej w ten sposób, że symbol, stojący po lewej stronie równości definicyjnej, zastąpiono wyrażeniem, stojącym po prawej stronie tej równości (lub na odwrót). Wynika stąd, że wprowadzenie równości definicyjnych jest dla teorii zasadniczo zbędne: każde wyrażenie, zawierające symbole wprowadzone w równościach definicyjnych, można przekształcić na równoważne mu wyrażenie, nie zawierające tych symboli. Z drugiej strony, wprowadzenie równości definicyjnych pozwala na znaczne skrócenie wzorów, jest więc niezmiernie dogodne w praktyce.

Przyjmując np. równość definicyjną

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}) \Phi(x, y),$$

możemy symbol $(\hat{x}, \hat{y}) \Phi(x, y)$, występujący po lewej stronie aksjomatu definicyjnego (4), zastąpić przez ε . Otrzymujemy tautologię

$$(6) \quad \vdash u \varepsilon v \equiv \Phi(u, v).$$

Podobnie, z równości definicyjnej $Z \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}) \Phi(x)$ otrzymamy wobec (5):

$$(7) \quad \vdash u \varepsilon Z \equiv \Phi(u).$$

Jest jasne, że wprowadzenie równości definicyjnych oraz przyjęcie reguły, pozwalającej na wzajemne zastępowanie symboli stojących po lewej i prawej stronie równości definicyjnej, stanowi rozszerzenie przyjętych w Rozdziale III reguł wnioskowania. Podobnie, przyjęcie aksjomatu definicyjnego stanowi rozszerzenie zasobu tautologii podstawowych, którymi w Rozdziale III były tylko tautologie rachunku zdań i ich podstawienia, a którymi obecnie są, prócz nich, wszystkie równoważności postaci takiej jak (4) i (5) oraz analogiczne równoważności dla funkcji zdaniowych o większej liczbie zmiennych wolnych.

CWICZENIA. 1. Zmienne $x, y, \dots$ niech przebiegają zbiór liczb rzeczywistych. Jakimi relacjami są

$$(\hat{x}, \hat{y}) \left[\sum_{z>0} (x = y + z) \right], \quad (\hat{x}, \hat{y}) \left[\sum_{z>0} (x = y \cdot z) \right] ?$$

2. Jaki zbiór i jaka relacja określone są wzorami $(\hat{x}) (x \in X)$ i $(\hat{x}, \hat{y}) (x R y)$?

§ 3. Inkluzja, równość zakresowa. Działania na zbiorach i relacjach. Przyjmujemy następującą równość definicyjną:

$$(8) \quad \subset \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{X}, \hat{Y}) [\prod_x (x \in X \rightarrow x \in Y)].$$

Znak $\subset$ jest więc nazwą relacji dwuczłonowej, zwanej relacją *zawierania* albo *inkluzji*.

Relacja ta zachodzi między zbiorami.

Z (8) otrzymujemy na mocy pewnika definicyjnego (por. § 2, str. 92, wzór (6))

$$(9) \quad \vdash (X \subset Y) \equiv \prod_x (x \in X \rightarrow x \in Y).$$

Zbiór X jest więc zawarty w zbiorze Y , jeśli każdy element zbioru X jest też elementem zbioru Y .

W podobny sposób określamy stosunek zawierania dla relacji dwuczłonowych:

$$(10) \quad \subset \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{R}, \hat{S}) [\prod_{xy} (x R y \rightarrow x S y)]^1).$$

Mamy zatem

$$(11) \quad \vdash (R \subset S) \equiv \prod_{xy} (x R y \rightarrow x S y),$$

t. zn. że relacja R jest zawarta w S , jeśli każde dwa przedmioty, które pozostają do siebie w relacji R , pozostają też do siebie w relacji S .

Jest jasne, jak należy określić pojęcie zawierania dla relacji wieloczłonowych.

Z twierdzeń, dotyczących stosunku zawierania, wymienimy następujące:

1. Prawo zwrotności dla inkluzji:

$$(12) \quad \vdash X \subset X.$$

2. Prawo przechodniości dla inkluzji:

$$(13) \quad \vdash (X \subset Y) \cdot (Y \subset Z) \rightarrow (X \subset Z).$$

Mimo, że dowody tych praw są bardzo proste, przeprowadzimy je, aby zilustrować rolę, jaką w takich dowodach grają prawa rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów.

¹⁾ Ścisłe rzecz biorąc, należałoby wprowadzić inny symbol dla relacji inkluzji między zbiorami, a inny dla relacji inkluzji między relacjami. Ze względu jednak na to, że używamy innych zmiennych dla zbiorów, a innych dla relacji, możemy używać tego samego symbolu $\subset$ bez obawy, że doprowadzi to do nieporozumień. Oczywiście, wzory takie jak $X \subset R$ są pozbawione sensu.

Z prawa tożsamości $\vdash p \rightarrow p$ otrzymujemy $\vdash x \in X \rightarrow x \in X$, skąd na mocy reguły uogólniania wynika $\vdash \prod_x [x \in X \rightarrow x \in X]$. Zgodnie z (9) otrzymujemy stąd wzór (12).

Z tautologii $\vdash (p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ wynika

$$\vdash (x \in X \rightarrow x \in Y) \cdot (x \in Y \rightarrow x \in Z) \rightarrow (x \in X \rightarrow x \in Z).$$

Stosując regułę uogólniania, prawo rozkładania dużego kwantyfikatora i prawo rozdzielnosci dużego kwantyfikatora względem koniunkcji, otrzymujemy stąd

$$\vdash \prod_x [x \in X \rightarrow x \in Y] \cdot \prod_x [x \in Y \rightarrow x \in Z] \rightarrow \prod_x [x \in X \rightarrow x \in Z].$$

Wzór ten zgodnie z (9) daje nam od razu (13).

Stosunek *równości zakresowej* dla zbiorów i relacji określamy wzorami:

$$= \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{X}, \hat{Y}) [(X \subset Y) \cdot (Y \subset X)], \quad = \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{R}, \hat{S}) [(R \subset S) \cdot (S \subset R)].$$

Mamy zatem:

$$(14) \quad \vdash (X = Y) \equiv (X \subset Y) \cdot (Y \subset X),$$

$$(15) \quad \vdash (R = S) \equiv (R \subset S) \cdot (S \subset R).$$

Znak $=$ we wzorze (14) jest nazwą relacji dwuczłonowej, zachodzącej między zbiorami, a we wzorze (15) — relacji dwuczłonowej, zachodzącej między relacjami.

Z (14) wynika na mocy (11) i prawa rozdzielnosci dużego kwantyfikatora względem koniunkcji (Rozdział III, § 5, wzór (11), str. 64):

$$(16) \quad \vdash (X = Y) \equiv \prod_x [x \in X \rightarrow x \in Y] \cdot \prod_x [x \in Y \rightarrow x \in X] \equiv \\ \equiv \prod_x [(x \in X \rightarrow x \in Y) \cdot (x \in Y \rightarrow x \in X)] \equiv \prod_x [x \in X \equiv x \in Y].$$

W podobny sposób wykazuje się, że

$$(17) \quad \vdash (R = S) \equiv \prod_{xy} [x R y \equiv x S y].$$

Z praw (12) i (13) otrzymujemy z łatwością:

3. Prawo tożsamości dla równości zakresowej:

$$\vdash X = X.$$

4. Prawo przechodniości dla równości zakresowej:

$$\vdash (X = Y) \cdot (Y = Z) \rightarrow (X = Z).$$

Z (14) otrzymujemy wobec prawa przemienności dla koniunkcji

5. Prawo symetrii dla równości zakresowej:

$$\vdash (X = Y) \equiv (Y = X).$$

Stosunek *różności zakresowej* dla zbiorów i relacji określamy wzorami:

$$(18) \quad \neq \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{X}, \hat{Y}) (X = Y)', \quad \neq \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{R}, \hat{S}) (R = S)'.$$

W § 1 określiliśmy już zbiór *pusty* (czyli własność pustą) jako taki zbiór, który nie posiada żadnego elementu. Korzystając z symbolu abstrakcji, możemy teraz określić zbiór pusty jako $(\hat{x}) \Phi(x)$, gdzie $\Phi(x)$ jest jakąkolwiek funkcją zdaniową fałszywą, t. j. nie spełnioną przez żaden przedmiot. Przyjmijmy za $\Phi(x)$ np. funkcję zdaniową $(x \in 1) \cdot (x \in 1)'$. Zbiór pusty określimy więc wzorem:

$$0 \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{x}) [(x \in 1) \cdot (x \in 1)'].$$

Mamy stąd (por. § 2, wzór (7), str. 92) $\vdash x \in 0 \equiv (x \in 1) \cdot (x \in 1)'$, skąd na mocy tautologii $\vdash (p \equiv q \cdot q') \rightarrow p'$ otrzymamy

$$(19) \quad \vdash (x \in 0)'.$$

Udowodnimy, że zbiór pusty jest zawarty w każdym zbiorze:

$$(20) \quad \vdash 0 \subset X.$$

Istotnie, z prawa Duns Scotusa (Rozdział II, § 9, str. 25) wynika

$$\vdash (x \in 0)' \rightarrow [x \in 0 \rightarrow x \in X],$$

skąd wobec (19)

$$\vdash x \in 0 \rightarrow x \in X.$$

Stosując operację uogólniania, otrzymujemy stąd dalej

$$\vdash \prod_x [x \in 0 \rightarrow x \in X],$$

t. zn. na mocy (9) wzór (20).

Z dowodu tego widoczne jest, że twierdzenie (20) ma swe źródło w prawie Duns Scotusa, a w szczególności w wyrażonej tym prawem znanej nam już własności implikacji: okres warunkowy o poprzedniku fałszywym jest prawdziwy.

Podobne do pojęcia zbioru pustego jest pojęcie *relacji pustej* 0^* , t. j. nie zachodzącej między żadnymi dwoma przedmiotami:

$$0^* \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{x}, \hat{y}) [(x \in 0) \cdot (y \in 0)].$$

W podobny sposób jak dla zbioru pustego udowodnić możemy twierdzenia:

$$\vdash (x \cdot 0' y)', \quad \vdash 0' \subset R.$$

Przeciwstawieniem relacji pustej jest *relacja pełna* 1^* , zachodząca między każdymi dwoma przedmiotami (elementami zbioru pełnego 1):

$$1^* \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}) [(x \cdot 0' y)'].$$

Dowodzimy z łatwością, że

$$\vdash x \cdot 1^* y, \quad \vdash R \subset 1^*.$$

Analogicznie, dla zbioru pełnego zachodzi równość

$$\vdash 1 = (\hat{x}) (x \epsilon 0'),$$

z której wynikają twierdzenia:

$$\vdash x \epsilon 1, \quad \vdash X \subset 1.$$

Zauważmy, że pojęcie relacji pełnej jest różne w różnych zastosowaniach, gdyż zależy ono oczywiście od wyboru zbioru pełnego 1.

Sumę dwu zbiorów i sumę dwu relacji określamy wzorami:

$$(21) \quad X + Y \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}) [x \epsilon X + x \epsilon Y], \quad R + S \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}) [x R y + x S y].$$

Mamy zatem:

$$(22) \quad \vdash (x \epsilon X + Y) \equiv [x \epsilon X + x \epsilon Y], \quad \vdash x(R + S)y \equiv [x R y + x S y].$$

Wykres zbioru $X + Y$ (relacji $R + S$) składa się ze wszystkich punktów, należących bądź do wykresu zbioru X , bądź do wykresu zbioru Y (bądź do wykresu relacji R , bądź do wykresu relacji S).

Iloczyn czyli część wspólną dwu zbiorów, jako też dwu relacji, określamy wzorami:

$$(23) \quad X \cdot Y \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}) [(x \epsilon X) \cdot (x \epsilon Y)], \quad R \cdot S \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}) [(x R y) \cdot (x S y)].$$

Z określeń tych wynikają prawa:

$$(24) \quad \vdash x \epsilon X \cdot Y \equiv (x \epsilon X) \cdot (x \epsilon Y), \quad \vdash x R \cdot S y \equiv (x R y) \cdot (x S y).$$

Wykres zbioru $X \cdot Y$ (relacji $R \cdot S$) składa się z punktów wspólnych wykresów obu czynników.

Dopełnienie zbioru X i dopełnienie relacji R definiujemy wzorami:

$$(25) \quad X' \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}) (x \epsilon X)', \quad R' \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}) (x R y)'.$$

W podobny sposób jak dla sumy i iloczynu wyprowadzamy stąd prawa:

$$(26) \quad \vdash x \epsilon X' \equiv (x \epsilon X)', \quad \vdash x R' y \equiv (x R y)'.$$

Wykres zbioru X' składa się z punktów, nie należących do wykresu zbioru X ; podobnie, wykres relacji R' składa się z punktów, nie należących do wykresu relacji R .

CWICZENIA. 1. Niech zbiór pełny 1 składa się ze wszystkich liczb rzeczywistych. Czym jest: (a) suma relacji $> i =$; (b) iloczyn tych relacji; (c) dopełnienie relacji $<$; (d) suma relacji $> i <$?

2. Niech $\sup \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{X}, \hat{Y}) (Y \subset X)$. Czym jest iloczyn relacji $\subset i \sup$?

3. Udowodnić wzory $0' = 1$ i $0'' = 1'$.

§ 4. Związek między rachunkiem zbiorów i relacji a rachunkiem zdań. Wzory (21)-(26) sugerują wprowadzenie innych jeszcze działań na zbiorach (i relacjach), odpowiadających innym funktorom zdaniotwórczym. W szczególności wprowadzić możemy działania $\equiv$ i $\rightarrow$ za pomocą wzorów:

$$(27) \quad X \equiv Y \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}) [x \epsilon X \equiv x \epsilon Y], \quad X \rightarrow Y \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}) [x \epsilon X \rightarrow x \epsilon Y]$$

i dwu podobnych wzorów dla relacji. Mamy więc twierdzenia:

$$(28) \quad \vdash (x \epsilon X \equiv Y) \equiv (x \epsilon X \equiv x \epsilon Y),$$

$$(29) \quad \vdash (x \epsilon X \rightarrow Y) \equiv (x \epsilon X \rightarrow x \epsilon Y).$$

Podobnie jak w końcowych definicjach § 3, tak i tu użyliśmy dla oznaczenia działań na zbiorach tych samych symboli, których w Rozdziale II użyliśmy dla oznaczenia funktorów zdaniotwórczych. Dwuznaczność ta nie prowadzi do nieporozumień, gdyż symbol stojący między zdaniem lub funkcjami zdaniowymi jest funktorem zdaniotwórczym, a symbol stojący między nazwanymi zbiorów lub zmiennymi $X, Y, \dots$ jest nazwą działania na zbiorach. Z drugiej strony, równoległość symboliki w rachunku zdań i w rachunku zbiorów pozwala ustalić związek między tymi dwoma działaniami logiki i wyrazić go w sposób łatwy do zapamiętania.

Oznaczać będziemy przez $\Phi(p, q, \dots, t)$ wyrażenie sensowne rachunku zdań, zawierające uwidocznione zmienne zdaniowe.

Wiemy z Rozdziału II, § 8, str. 18, że wyrażenia takie powstają ze zmiennych zdaniowych przy pomocy funktorów zdaniotwórczych. Jeśli w wyrażeniu $\Phi(p, q, \dots, t)$ zastąpimy zmienne zdaniowe odpowiednio przez funkcje zdaniowe $x \in X, x \in Y, \dots, x \in Z$, otrzymamy funkcję zdaniową $\Phi(x \in X, x \in Y, \dots, x \in Z)$ o zmiennych wolnych $x, X, \dots, Z$. Z drugiej strony, zastępując w wyrażeniu $\Phi(p, q, \dots, t)$ zmienne zdaniowe przez zmienne zbiorowe $X, Y, \dots, Z$, otrzymamy nazwę zbioru $\Phi(X, Y, \dots, Z)$, zależnego od zbiorów $X, Y, \dots, Z$.

Twierdzenie 1. Dla dowolnego wyrażenia sensownego $\Phi(p, q, \dots, t)$ jest

$$(30) \quad \vdash \Phi(x \in X, x \in Y, \dots, x \in Z) \equiv x \in \Phi(X, Y, \dots, Z).$$

Dowód. Jeśli wyrażenie $\Phi(p, q, \dots, t)$ redukuje się do zmiennej zdaniowej, np. do zmiennej p , to po lewej i prawej stronie wzoru (30) mamy $x \in X$, skąd wynika, że twierdzenie jest w tym wypadku prawdziwe. Pozostaje więc jeszcze do udowodnienia, że jeśli twierdzenie to zachodzi dla wyrażeń sensownych Φ i Ψ , to zachodzi ono także dla wyrażeń $\Phi', \Phi + \Psi, \Phi \cdot \Psi, \Phi \rightarrow \Psi$ i $\Phi \equiv \Psi$.

Załóżmy zatem, że zachodzi wzór (30) i wzór

$$(31) \quad \vdash \Psi(x \in X, x \in Y, \dots, x \in Z) \equiv x \in \Psi(X, Y, \dots, Z).$$

Z (30) wynika na mocy tautologii $\vdash (p \equiv q) \rightarrow (p' \equiv q')$ wzór

$$(32) \quad \vdash \Phi'(x \in X, x \in Y, \dots, x \in Z) \equiv [x \in \Phi(X, Y, \dots, Z)].$$

Wobec (26) mamy jednak

$$\vdash [x \in \Phi(X, Y, \dots, Z)]' \equiv x \in \Phi'(X, Y, \dots, Z),$$

skąd na mocy (32) i prawa sylogizmu wynika

$$\vdash \Phi'(x \in X, x \in Y, \dots, x \in Z) \equiv x \in \Phi'(X, Y, \dots, Z).$$

Twierdzenie 1 jest więc prawdziwe dla wyrażenia Φ' .

Z (30) i (31) wyprowadzamy na mocy tautologii

$$\vdash [(p \equiv q) \rightarrow \{(r \equiv s) \rightarrow [(p + r) \equiv (q + s)]\}]$$

wzór

$$\begin{aligned} \vdash & [\Phi(x \in X, x \in Y, \dots, x \in Z) + \Psi(x \in X, x \in Y, \dots, x \in Z)] \equiv \\ & \equiv [x \in \Phi(X, Y, \dots, Z) + x \in \Psi(X, Y, \dots, Z)]. \end{aligned}$$

Ponieważ zaś na mocy (22) jest

$$\vdash [x \in \Phi(X, Y, \dots, Z) + x \in \Psi(X, Y, \dots, Z)] \equiv x \in [\Phi(X, Y, \dots, Z) + \Psi(X, Y, \dots, Z)],$$

więc wnosimy stąd, że

$$\begin{aligned} \vdash & [\Phi(x \in X, x \in Y, \dots, x \in Z) + \Psi(x \in X, x \in Y, \dots, x \in Z)] \equiv \\ & \equiv x \in [\Phi(X, Y, \dots, Z) + \Psi(X, Y, \dots, Z)]. \end{aligned}$$

Twierdzenie 1 jest więc prawdziwe dla wyrażenia $\Phi + \Psi$ ¹⁾.

W zupełnie podobny sposób dowodzi się prawdziwości twierdzenia 1 dla wyrażeń $\Phi \cdot \Psi, \Phi \rightarrow \Psi$ i $\Phi \equiv \Psi$. W dowodzie powołujemy się na wzory (24), (28) i (29) zamiast na wzór (22).

Twierdzenie 2. Jeśli $\vdash \Phi(p, q, \dots, t)$, to

$$(33) \quad \vdash \Phi(X, Y, \dots, Z) = 1.$$

Dowód. Z (30) wynika wobec $\vdash \Phi(x \in X, x \in Y, \dots, x \in Z)$:

$$\vdash x \in \Phi(X, Y, \dots, Z),$$

a więc tym bardziej

$$\vdash x \in 1 \rightarrow x \in \Phi(X, Y, \dots, Z).$$

Stosując operację uogólniania, otrzymujemy stąd

$$\vdash \prod x [x \in 1 \rightarrow x \in \Phi(X, Y, \dots, Z)] \quad \text{czyli} \quad \vdash 1 \subset \Phi(X, Y, \dots, Z).$$

Z tautologii $\vdash X \subset 1$ (str. 96) otrzymujemy przez podstawienie

$$\vdash \Phi(X, Y, \dots, Z) \subset 1,$$

w myśl więc (14) otrzymujemy stąd równość (33), c. b. d. o.

Twierdzenie 2 wykazuje, że z każdej tautologii rachunku zdań można automatycznie wyprowadzić twierdzenie rachunku zbiorów. Wystarczy w tym celu zastąpić każdą zmienną zdaniową przez jedną ze zmiennych $X, Y, \dots$ i przyrównać otrzymane w ten sposób wyrażenie do 1. Zupełnie analogiczne wyniki uzyskuje się dla relacji.

¹⁾ W dowodzie tym nie musimy zakładać, że wyrażenia Φ i Ψ zawierają te same zmienne zdaniowe. W ogólnym przypadku Φ i Ψ mają pewną ilość zmiennych wspólnych, a ponadto każde z tych wyrażeń zawiera pewną ilość zmiennych, które nie występują w drugim.

Powstające w opisany sposób twierdzenia rachunku zbiorów dają się nieraz przekształcić na podstawie następujących tautologii:

$$(34) \quad \vdash \{X \rightarrow Y = 1\} \equiv X \subset Y,$$

$$(35) \quad \vdash \{X \equiv Y = 1\} \equiv X = Y.$$

Dowód tych tautologii opiera się na wzorach (28) i (29):

$$\vdash \{X \rightarrow Y = 1\} \equiv \prod_x [x \in X \rightarrow Y] \equiv \prod_x [x \in X \rightarrow x \in Y] \equiv (X \subset Y),$$

$$\begin{aligned} & \vdash \{X \equiv Y = 1\} \equiv \prod_x [x \in X \equiv Y] \equiv \prod_x [x \in X \equiv x \in Y] \equiv \\ & \equiv \prod_x [x \in X \rightarrow x \in Y] \cdot \prod_x [x \in Y \rightarrow x \in X] \equiv (X \subset Y) \cdot (Y \subset X) \equiv (X = Y). \end{aligned}$$

PRZYKŁADY. Z praw de Morgana rachunku zdań (Rozdział II, § 9, str. 27) otrzymujemy na mocy twierdzenia 2:

$$(36) \quad \vdash [(X + Y)' \equiv X' \cdot Y'] = 1, \quad \vdash [(X \cdot Y)' \equiv (X' + Y')] = 1,$$

a stąd na mocy (35) wynikają tautologie:

$$(37) \quad \vdash (X + Y)' = X' \cdot Y', \quad \vdash (X \cdot Y)' = X' + Y'.$$

Są to prawa de Morgana rachunku zbiorów ¹⁾.

W zupełnie podobny sposób dowodzi się następujących praw:

6. Prawo podwójnego dopełnienia dla zbiorów:

$$\vdash X = X''.$$

7. Prawo wyłączonego środka dla zbiorów:

$$\vdash X + X' = 1.$$

8. Prawo łączności sumy zbiorów:

$$\vdash X + (Y + Z) = (X + Y) + Z.$$

9. Prawo przemienności sumy zbiorów:

$$\vdash X + Y = Y + X.$$

10. Prawo łączności iloczynu zbiorów:

$$\vdash X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z.$$

¹⁾ Logik angielski A. de Morgan (1806-1871) odkrył te właśnie dwa prawa. Analogiczne do nich prawa rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów, podane na str. 27 i 72, sformułowano dopiero później. Pżyjęte jest jednak nazywać wszystkie te prawa nazwiskiem de Morgana.

11. Prawo przemienności iloczynu zbiorów:

$$\vdash X \cdot Y = Y \cdot X.$$

12. Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania dla zbiorów:

$$\vdash X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z.$$

13. Prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia dla zbiorów:

$$\vdash X + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot (X + Z).$$

14. Prawa tautologii dla zbiorów:

$$\vdash X + X = X, \quad \vdash X \cdot X = X.$$

Jako nieco odmienny przykład udowodnimy jeszcze wzór

$$(38) \quad \vdash (X \subset Y) \equiv (Y' \subset X').$$

Z tautologii $\vdash (p \rightarrow q) \equiv (q' \rightarrow p')$ otrzymujemy na mocy twierdzenia 2 $\vdash [(X \rightarrow Y) \equiv (Y' \rightarrow X')] = 1$, skąd w myśl (35)

$$\vdash X \rightarrow Y = Y' \rightarrow X'.$$

Na mocy prawa przechodności dla stosunku równości zakresowej (§ 3, str. 94, prawo 4) wynika stąd

$$\vdash \{X \rightarrow Y = 1\} \equiv \{Y' \rightarrow X' = 1\},$$

a więc na mocy (34) — tautologia (38).

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić, że:

$$\vdash X \cdot X' = 0, \quad \vdash X \cdot 0 = 0, \quad \vdash X + 0 = X, \quad \vdash X \cdot 1 = X, \quad \vdash X \subset X + Y, \quad \vdash X \cdot Y \subset X.$$

2. Udowodnić równoważności:

$$\vdash (X \subset Y) \equiv (X \cdot Y = X) \equiv (X + Y = Y),$$

$$\vdash (X \cdot Y = 1) \equiv (X = 1) \cdot (Y = 1), \quad \vdash (X + Y = 0) \equiv (X = 0) \cdot (Y = 0).$$

3. Wykazać, że

$$\vdash (X \rightarrow Y) = (X' + Y), \quad \vdash (X \equiv Y) = (X \cdot Y + X' \cdot Y').$$

Podać interpretację geometryczną działań $\rightarrow$ i $\equiv$ na zbiorach.

4. Działanie Δ na zbiorach, określone wzorem

$$X \Delta Y = X \cdot Y' + X' \cdot Y,$$

nazywa się tworzeniem różnicy symetrycznej.

Udowodnić następujące twierdzenia o tym działaniu ¹⁾:

$$X \Delta Y = Y \Delta X, \quad X \Delta (Y \Delta Z) = (X \Delta Y) \Delta Z,$$

$$X \Delta X = 0, \quad X \Delta 0 = X, \quad X \Delta 1 = X',$$

$$X \cdot (Y \Delta Z) = X \cdot Y \Delta X \cdot Z, \quad (X \Delta Y = X \Delta Z) \rightarrow (Y = Z),$$

$$X \Delta Y \Delta (X \cdot Y) = X + Y, \quad (X = Y \Delta Z) \rightarrow (Y = X \Delta Z).$$

5. Udowodnić, że zbiór $X_1 \Delta X_2 \Delta \dots \Delta X_n$ składa się z tych i tylko tych x , które należą do nieparzystej liczby zbiorów X_i .

6. Zachowując symbolikę, wprowadzoną w twierdzeniach 1 i 2, wykazać, że jeśli $\vdash \Phi(X, Y, \dots, Z) = 1$, to $\vdash \Phi(p, q, \dots, r)$.

Wsk.: Równość $\Phi(X, Y, \dots, Z) = 1$ jest spełniona dla $X, Y, \dots, Z$ przyjmujących wartości 0 (zbiór pusty) i 1 (zbiór pełny). Porównać to z metodą zerowojedynkową.

§ 5. Algebra Boole'a. Widzieliśmy w § 3 i § 4, że rachunek zbiorów niczym nie różni się formalnie od rachunku relacji ²⁾. Również rachunek zdań — mimo że pojęciowo odległy od rachunku zbiorów i rachunku relacji — wykazuje duże podobieństwo do tych rachunków.

W takich sytuacjach, gdy znamy wiele działań różnych co do treści, lecz podlegających tym samym prawom formalnym, dogodnie jest abstrahować od specjalnego znaczenia tych działań i stworzyć teorię ogólniejszą, w której rozważa się jakiegokolwiek działania podlegające tym prawom. W dowodach twierdzeń takiej abstrakcyjnej teorii nie odwołujemy się już do znaczenia omawianych w niej działań, a tylko do założeń stwierdzających, że działania te czynią zadość tym lub innym prawom. Założenia te są aksjomatami teorii.

Abstrakcyjna teoria, której szczególnym przypadkiem jest zarówno rachunek zbiorów jak rachunek relacji, a także w pewnym zakresie rachunek zdań, nosi nazwę *algebry Boole'a*.

Rozpatrujemy w niej zbiór przedmiotów, na których dokonywać można działań dodawania, mnożenia i uzupełniania, oznaczanych symbolami $+$, $\cdot$ i $'$. Zakładamy, że taki zbiór K zawiera co najmniej 2 elementy, pomiędzy którymi znajdują się

¹⁾ M. H. Stone, *Postulates for Boolean algebras and generalized Boolean algebras*, American Journal of Mathematics 57 (1935), str. 703-732.

²⁾ Dotyczy to tej części rachunku relacji, którą zajmowaliśmy się dotychczas. W Rozdziale VI wprowadzimy dalsze działania na relacjach i z tą chwilą zniknie formalna tożsamość rachunku zbiorów i relacji. Na razie, mówiąc o rachunku relacji, mamy na myśli część dotychczasową.

dwa elementy wyróżnione jako 0 i 1. Rozpatrujemy wreszcie relację $=$, określoną między elementami zbioru K i zwaną relacją równości. Jest przy tym obojętne, czym są przedmioty, należące do zbioru K i jakie jest konkretne znaczenie wymienionych działań i relacji; zakładamy tylko, że czynią one zadość następującym warunkom — *aksjomatom algebry Boole'a* ¹⁾ — w których zmienne przebiegają elementy zbioru K :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $0 \in K$, | 2. $(0 = 1)'$, | 3. $1 \in K$, |
| 4. $x + y \in K$, | 5. $x' \in K$, | 6. $x \cdot y \in K$, |
| 7. $(x = y) \rightarrow (y = x)$, | 8. $x = x$, | 9. $(x = y) \cdot (y = z) \rightarrow (x = z)$, |
| 10. $(x = y) \rightarrow (x + z = y + z)$, | 11. $(x = y) \rightarrow (x \cdot z = y \cdot z)$, | |
| 12. $x + 0 = x$, | 13. $x \cdot 1 = x$, | |
| 14. $x + x' = 1$, | 15. $x \cdot x' = 0$, | |
| 16. $x + y = y + x$, | 17. $x \cdot y = y \cdot x$, | |
| 18. $x + (y + z) = (x + y) + z$, | 19. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, | |
| 20. $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$, | 21. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. | |

Jest jasne, że aksjomaty 1-21 są spełnione, jeśli K jest zbiorem wszystkich zbiorów, zawartych w dowolnym nie pustym zbiorze I , a symbole 0 , $+$, $\cdot$, $'$, $=$ oznaczają odpowiednio: zbiór pusty, działania dodawania, mnożenia i uzupełniania określone w § 3 oraz relację zakresowej równości zbiorów. Otrzymujemy w ten sposób jedną z wielu interpretacji algebry Boole'a.

Inną interpretację otrzymamy, przyjmując za K zbiór wszystkich zbiorów, zawartych w zbiorze 0 , o którym zakładamy, że nie jest pusty, i nadając pozostałym pojęciom, figurującym w aksjomatach algebry Boole'a, następujące znaczenia:

- 1 — zbiór pusty,
- $+$ — działanie mnożenia zbiorów,
- $\cdot$ — działanie dodawania zbiorów,
- $'$ — działanie uzupełniania zbiorów,
- $=$ — relacja równości zakresowej zbiorów.

¹⁾ Aksjomaty 1-21 nie są *niezależne*: dwa z nich wynikają z pozostałych (p. dalej, str. 107). Można by też pominąć aksjomat 2, którego rola polega jedynie na wyłączeniu interpretacji trywialnej, t. j. przy której relacja $=$ zachodzi między każdymi dwoma elementami zbioru K .

Jeszcze inną interpretację otrzymamy, przyjmując za K zbiór wszystkich wyrażeń sensownych rachunku zdań, za 0 i 1 odpowiednio wyrażenia $p \cdot p'$ i $p + p'$, za $+$, $\cdot$ i $'$ działania tworzenia alternatywy, koniunkcji i negacji, wreszcie za $=$ relację $(x, y) [\vdash x = y]$.

Następująca interpretacja algebry Boole'a ma zastosowanie w elektrotechnice ¹⁾.

Niech K będzie zbiorem wszelkich możliwych sieci elektrycznych o dwu zakończeniach i niech w każdej z sieci występują tylko połączenia dwu typów: szeregowo i równoległe ²⁾; każdy przewód niech będzie zaopatrzony w wyłącznik, który może być zarówno otwarty, jak zamknięty.

Sumę dwu sieci (które mogą w szczególności być identyczne) określamy jako sieć, powstającą przez ich połączenie szeregowo, a iloczyn — jako sieć, powstającą przez ich połączenie równoległe. 0 niech będzie siecią, utworzoną z jednego tylko przewodu o wyłączniku zamkniętym, a 1 — o otwartym. Relacja $=$ niechaj zachodzi między sieciami x i y wtedy i tylko wtedy, gdy bądź obie one przewodzą prąd, bądź obie prądu nie przewodzą. Wreszcie, x' niech oznacza sieć, powstającą z sieci x przez następującą operację: zmieniamy położenie wszystkich wyłączników w sieci x (t. j. zamykamy wyłączniki otwarte i otwieramy zamknięte), po czym zastępujemy każde połączenie równoległe szeregowym i na odwrót. W przypadku więc, gdy x jest pojedynczym przewodem, przejście od x do x' jest prosto włączeniem lub wyłączeniem w nim prądu (zmianą położenia wyłącznika).

Nie trudno sprawdzić, że przy tym znaczeniu zbioru K , relacji $=$ oraz działań $+$, $\cdot$ i $'$ spełnione są aksjomaty 1-21 ³⁾.

¹⁾ C. E. Shannon, *A symbolic analysis of relay and switching circuits*, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers 57 (1938), str. 1-11, oraz W. J. Szestakow, *Predstawienie charakterystycznych funkcji predłożonych posrednictwem wyrażenij, realizujemych rieliejno-kontaktnymi schemami*, Izwiestia Akademii Nauk S.S.S.R. 10 (1946), str. 529-554.

²⁾ Nie ma zatem takiego np. połączenia, jakie występuje w mostku Wheatstone'a.

³⁾ Prócz nich spełnione jest jednak prawo $(x=0) + (x=1)$, podobnie zresztą jak w przytoczonej już interpretacji rachunku zdań w algebrze Boole'a; natomiast w rachunku zbiorów prawo to nie jest spełnione.

Można by podać jeszcze szereg innych interpretacji algebry Boole'a ¹⁾. Różnorodność tych interpretacji pokazuje, dlaczego algebra Boole'a jest tak pożyteczną nauką. Każde twierdzenie, wyprowadzone z aksjomatów 1-21, jest prawdziwe w każdej interpretacji algebry Boole'a. Zamiast więc dowodzić osobno twierdzeń z rachunku zbiorów, z rachunku relacji i z wielu innych jeszcze dziedzin nauki, wystarczy udowodnić jedno tylko twierdzenie w algebrze Boole'a. Trzeba jednak zaznaczyć, że przy wyprowadzaniu twierdzeń z aksjomatów 1-21 opieramy się na prawach rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów. Algebra Boole'a nie może więc zastąpić rachunku zdań, mimo, że rachunek zdań jest jedną z jej interpretacji.

Pokażemy na kilku przykładach, w jaki sposób wyprowadza się twierdzenia z aksjomatów 1-21. Ponieważ rozumowania te są bardzo łatwe, więc wystarczy, gdy zamiast objaśnień słownych wypiszemy obok każdego wzoru numery ważniejszych aksjomatów lub twierdzeń, z których korzystamy przy wyprowadzeniu tego wzoru.

Prawa tautologii:

$$22. \quad x = x \cdot x,$$

$$25. \quad x = x + x.$$

Dowód ²⁾.

$x = x \cdot 1$	[13, 7]	$x = x + 0$	[17, 7]
$= x \cdot (x + x')$	[8, 7, 11, 14]	$= x + x \cdot x'$	[8, 11, 15]
$= x \cdot x + x \cdot x'$	[21]	$= (x + x) \cdot (x + x')$	[20]
$= x \cdot x + 0$	[8, 10, 15]	$= (x + x) \cdot 1$	[8, 11, 14]
$= x \cdot x$	[12]	$= x + x$	[13].

Z tych równości otrzymujemy na podstawie aksjomatu 8 równości 22 i 25.

Prawo podwójnego dopełnienia:

$$24. \quad x = x''.$$

¹⁾ Zob. np. G. Birkhoff, *Lattice theory*, New York 1940, str. 97-103.

²⁾ Ciągi równości, np. $a = b = c = d = \dots$ rozumieć tu należy, jak i w dalszych dowodach, jako koniunkcję $(a = b) \cdot (b = c) \cdot (c = d) \dots$

Dowód.

$$\begin{array}{llll}
 x = x \cdot 1 & [13] & x'' = x'' \cdot 1 & [13] \\
 = x \cdot (x' + x'') & [8, 11, 14] & = x'' \cdot (x + x') & [8, 11, 14] \\
 = x \cdot x' + x \cdot x'' & [21] & = x'' \cdot x + x'' \cdot x' & [21] \\
 = 0 + x \cdot x'' & [8, 10, 15] & = x'' \cdot x + 0 & [8, 10, 15, 17] \\
 = x \cdot x'' & [12, 16] & = x \cdot x'' & [12, 17].
 \end{array}$$

Na mocy aksjomatu 9 otrzymujemy stąd

$$x = x \cdot x'' \text{ i } x'' = x \cdot x'',$$

a więc, stosując powtórnie aksjomat 9 i aksjomat 7, równość 24.

Prawa pochłaniania:

$$25. \quad x \cdot 0 = 0, \quad 26. \quad x + 1 = 1.$$

Dowód.

$$\begin{array}{llll}
 x \cdot 0 = x \cdot (x \cdot x') & [8, 11, 15] & x + 1 = x + (x + x') & [8, 10, 14] \\
 = (x \cdot x) \cdot x' & [19] & = (x + x) + x' & [18] \\
 = x \cdot x' & [22] & = x + x' & [23] \\
 = 0 & [15] & = 1 & [14].
 \end{array}$$

Zgodnie z aksjomatem 9 otrzymujemy więc stąd równości 25 i 26.

Prawa de Morgana:

$$27. \quad (x \cdot y)' = x' + y', \quad 28. \quad (x + y)' = x' \cdot y'.$$

Dowód.

$$(x \cdot y) \cdot x' = 0 \quad [17, 19, 25], \quad (x \cdot y) \cdot y' = 0 \quad [19, 25].$$

Wynika stąd na mocy 12, 21, 8 i 10, że

$$0 = 0 + 0 = (x \cdot y) \cdot x' + (x \cdot y) \cdot y' = (x \cdot y) \cdot (x' + y'),$$

a więc zgodnie z 9 i 7

$$(*) \quad (x \cdot y) \cdot (x' + y') = 0.$$

Następnie:

$$(x' + y') + x = 1 \quad [17, 14, 26], \quad (x' + y') + y = 1 \quad [18, 17, 26];$$

stąd na podstawie 13, 8, 11 i 20

$$1 = 1 \cdot 1 = [(x' + y') + x] \cdot [(x' + y') + y] = (x' + y') + (x \cdot y),$$

a zatem w myśl 7 i 9

$$(x' + y') + (x \cdot y) = 1.$$

Wynika stąd dalej na mocy 8, 10, 11, 21, 17, 15 i 12

$$\begin{aligned}
 (x \cdot y)' &= (x \cdot y)' \cdot 1 = (x \cdot y)' \cdot [(x' + y') + (x \cdot y)] = \\
 &= (x \cdot y)' \cdot (x' + y') + (x \cdot y)' \cdot (x \cdot y) = \\
 &= (x \cdot y)' \cdot (x' + y') + 0 = (x \cdot y)' \cdot (x' + y')
 \end{aligned}$$

czyli

$$(*) \quad (x \cdot y)' = (x \cdot y)' \cdot (x' + y').$$

Mamy stąd

$$\begin{aligned}
 x' + y' &= (x' + y') \cdot 1 & [13] \\
 &= (x' + y') \cdot [(x \cdot y) + (x \cdot y)'] & [8, 11, 14] \\
 &= (x \cdot y) \cdot (x' + y') + (x \cdot y)' \cdot (x' + y') & [21, 17] \\
 &= 0 + (x \cdot y)' & [*, (*)] \\
 &= (x \cdot y)' & [17, 15],
 \end{aligned}$$

co na mocy 7 i 9 daje pierwsze prawo de Morgana (wzór 27).

Zastąpmy w tym dowodzie wszędzie symbole 0 i 1 jeden przez drugi oraz podobnie symbole + i ·. Otrzymamy wówczas dowód drugiego prawa de Morgana (wzór 28).

Na tych przykładach dowodów poprzestaniemy. Kilka dalszych przykładów znajdzie czytelnik w ćwiczeniach.

Aksjomaty 1-21 pochodzą w zasadzie od Huntingtona¹⁾, zawierają jednak o dwa aksjomaty więcej, niż zawierał jego system. Dwa te aksjomaty (18 i 19) dają się udowodnić na podstawie pozostałych, są więc zasadniczo zbędne; wywód ich jest jednak dość skomplikowany.

Możliwe jest znaczne skrócenie tego układu aksjomatów²⁾. Krótsze układy nie odznaczają się jednak tą symetrią budowy co układ Huntingtona.

W aksjomatach 1-21 symbole 0 i 1 oraz + i · można wzajemnie zastąpić jeden przez drugi i każdy aksjomat przejdzie wówczas na (ten sam lub inny) aksjomat. Wynika stąd, że z każdego twierdzenia algebry Boole'a otrzymamy znowu twierdzenie tej algebry, zastępując równocześnie symbole 0 i 1 oraz + i · wzajemnie jeden przez drugi.

Jest to tak zwana *zasada dwoistości*.

¹⁾ E. V. Huntington, *Sets of independent postulates for the algebra of logic*, Transactions of the American Mathematical Society 5 (1904), str. 288-309.

²⁾ Zob. np. Lee Byrne, *Two brief formulations of Boolean algebra*, Bulletin of the American Mathematical Society 52 (1946), str. 269-272.

ĆWICZENIA: 1. Z aksjomatów 1-21 wyprowadzić twierdzenia

$$\{x \cdot y = x\} \equiv \{x \cdot y' = 0\} \equiv \{x + y = y\} \equiv \{x' + y = 1\}.$$

2. Jak w algebrze Boole'a zdefiniować relację inkluzji? Udowodnić prawa zwrotności i przechodności dla tej relacji.

3. Wykazać, że $(x \cdot u = 0) \cdot (x + u = 1) \rightarrow (x' = u)$. Udowodnić na tej podstawie, że jeśli $x = y$, to $x' = y'$.

4. Na podstawie wyników ćwiczenia 3 wyprowadzić drugie prawo de Morgana z pierwszego.

Wsk.: Podstawić $x = z'$, $y = t'$ i zastosować prawo podwójnego dopełnienia.

5. Udowodnić, że otrzymamy interpretację algebry Boole'a, przyjmując za K zbiór wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru nieskończonego, określając następująco $0, 1, +, \cdot$ i $'$ tak jak w rachunku zbiorów, a relację $=$ jako relację $(\hat{X}, \hat{Y})[\text{zbiór } X \cdot Y' + X' \cdot Y \text{ ma skończoną ilość elementów}]$.

ROZDZIAŁ V

RÓWNOŚĆ

§ 1. Definicja równości. *Równość*, zwana także *tożsamością* albo *identycznością*, jest to relacja dwuczłonowa, która nie zachodzi nigdy między dwoma przedmiotami, ale zachodzi zawsze między dowolnym przedmiotem a nim samym.

Określenie to nie może być przyjęte za ścisłą definicję, gdyż używamy w nim słów *druga* i *ten sam*, które dają się określić tylko za pomocą relacji równości; jest to więc tylko intuicyjne wyjaśnienie znaczenia słowa *równość*.

Widzimy z tego wyjaśnienia, że zdanie:

a jest równe b,

w którym litery a i b są nazwami przedmiotów, jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy litery a i b są nazwami tego samego przedmiotu. Znaczenie, jakie nadajemy słowu *równość*, jest więc odmienne od tego, którego używa się nieraz w geometrii, mówiąc o równości odcinków lub figur geometrycznych (dających się na siebie nałożyć).

Jeśli zbiór pełny 1 jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, to wykresem relacji równości jest prosta, przechodząca przez początek układu i nachylona pod kątem 45° do osi odciętych (por. str. 86, rys. 6).

Relację równości oznaczать będziemy symbolem $=$ albo $\hat{=}$. Ścisła definicja równości pochodzi od Leibniza:

$$(1) \quad \hat{=} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}) [\prod_X (x \in X \equiv y \in X)].$$

Mamy zatem

$$(2) \quad \vdash (x \hat{=} y) \equiv (x = y) \equiv \prod_X [x \in X \equiv y \in X].$$

Dwa przedmioty nazywamy więc równymi, jeśli każda własność, przysługująca jednemu z nich, przysługuje też drugiemu i na odwrót¹⁾.

Dwa przedmioty, które mają wszystkie własności wspólne, nazywać można *nierozróżnialnymi*. Definicja Leibniza utożsamia zatem relację równości z relacją nierozróżnialności; równoważności (2) nazywają się dlatego *prawem równości przedmiotów nierozróżnialnych* (*identitas indiscernibilium*).

Z definicji Leibniza wyprowadzić można szereg praw formalnych, dotyczących równości:

Prawo tożsamości:

$$(3) \quad \vdash x = x.$$

Dowód. Wobec $\vdash p \equiv p$ otrzymujemy $\vdash x \in X \equiv x \in X$, a więc (por. Rozdział III, § 3, str. 56, reguła 7) $\vdash \prod x [x \in X \equiv x \in X]$, co na mocy (2) daje od razu wzór (3).

Prawo symetrii:

$$(4) \quad \vdash (x = y) \rightarrow (y = x).$$

Dowód. Z $\vdash (p \equiv q) \rightarrow (q \equiv p)$ wynika

$$\vdash [x \in X \equiv y \in X] \rightarrow [y \in X \equiv x \in X].$$

Zastosowanie reguły uogólniania i prawa rozkładania dużego kwantyfikatora (Rozdział III, § 4, wzór (7), str. 61) daje

$$\vdash \prod x [x \in X \equiv y \in X] \rightarrow \prod x [y \in X \equiv x \in X],$$

czyli zgodnie z (2) prawo (4).

Prawo przechodności:

$$(5) \quad \vdash (x = y) \cdot (y = z) \rightarrow (x = z).$$

Dowód. Z prawa $\vdash (p \equiv q) \cdot (q \equiv r) \rightarrow (p \equiv r)$ otrzymujemy w podobny sposób jak w dowodzie prawa (4)

$$\vdash \prod x \{ [x \in X \equiv y \in X] \cdot [y \in X \equiv z \in X] \} \rightarrow \prod x [x \in X \equiv z \in X],$$

¹⁾ Definicja ta ma u Leibniza następujące brzmienie: „*Adem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate*”. Zob. książkę: G. W. Leibniz, *Philosophische Schriften*, wydana przez C. J. Gerhardta, tom 7, Berlin 1890, str. 228-235.

a stąd na mocy prawa rozdzielności dużego kwantyfikatora względem koniunkcji (Rozdział III, § 5, wzór (11), str. 64) wynika

$$\vdash \prod x [x \in X \equiv y \in X] \cdot \prod x [y \in X \equiv z \in X] \rightarrow \prod x [x \in X \equiv z \in X].$$

Zgodnie z (2) wzór ten jest równoważny z (5).

Prawo ekstensjonalności:

$$(6) \quad \vdash (x = y) \rightarrow [\Phi(x, u, \dots, v) \equiv \Phi(y, u, \dots, v)].$$

$\Phi(x, u, \dots, v)$ jest tu dowolną funkcją zdaniową o zaznaczonych zmiennych wolnych, w której zmienna x nie występuje pod kwantyfikatorem, wiążącym zmienną y .

Dowód. Z Rozdziału III (§ 4, wzór (1), str. 58) wiemy, że

$$\vdash \prod x [x \in X \equiv y \in X] \rightarrow [x \in Y \equiv y \in Y].$$

Podstawmy w tej tautologii zamiast litery Y wyrażenie

$$(\hat{t}) \Phi(t, u, \dots, v),$$

oznaczające pewien zbiór (zależny od parametrów $u, \dots, v$).

Otrzymamy wówczas

$$\vdash \prod x [x \in X \equiv y \in X] \rightarrow \{ [x \in (\hat{t}) \Phi(t, u, \dots, v)] \equiv [y \in (\hat{t}) \Phi(t, u, \dots, v)] \},$$

co na mocy wzoru (2) i aksjomatu definicyjnego (Rozdział IV, § 2, wzór (5), str. 91) daje wzór (6).

Prawo (6) należy rozumieć jako schemat: zastępując w (6) wyrażenie $\Phi(x, u, \dots, v)$ przez konkretne funkcje zdaniowe, otrzymamy z (6) konkretne twierdzenia. Nie możemy uważać wzoru (6) za określoną tautologię, gdyż nie zdefiniowaliśmy dotychczas, co rozumiemy przez funkcję zdaniową (por. Rozdział I, § 1, str. 4 i Rozdział IV, § 2, str. 90); zapoznaliśmy się tylko na przykładach z szeregiem funkcji zdaniowych i poznawać będziemy w dalszym ciągu coraz to nowe ich przykłady. Dla wszystkich tych funkcji zdaniowych prawdziwy jest wzór (6) i można go dowieść dla każdej z tych funkcji zdaniowych z osobna we wskazany wyżej schematycznie sposób.

Prawo ekstensjonalności (6) stwierdza, że jeśli równość $a = b$ jest zdaniem prawdziwym, a litery a i b są nazwami przedmiotów, to możemy w każdym zdaniu zastąpić literę a przez b lub na odwrót i otrzymamy zdanie równoważne poprzedniemu. W ten wła-

śnie sposób w praktyce wykorzystujemy zdania, mające postać równości.

Dopełnienie relacji 1' oznaczamy symbolem 0' lub $\neq$ i nazywamy relacją *różności*.

ĆWICZENIA: 1. Które z praw (3), (4) i (5) pozostają prawdziwe dla różności?

2. Dowieść, że $\vdash (x = y) \equiv \prod_X [x \in X \rightarrow y \in X]$.

§ 2. Równość zbiorów i relacji. Pewnik ekstensjonalności.

Zgodnie z definicją Leibniza dwa zbiory X i Y są równe, jeśli mają one wszystkie własności wspólne. Przyjmując więc np. litery gotyckie za zmienne przebiegające własności zbiorów, będziemy mieli

$$(7) \quad \vdash (X = Y) \equiv \prod_{\mathfrak{X}} [X \in \mathfrak{X} \equiv Y \in \mathfrak{X}].$$

W Rozdziale IV (§ 3, str. 94) określiliśmy relację równości zakresowej zbiorów i dla oznaczenia tej relacji użyliśmy tego samego symbolu $=$. Oczywiście, równość i równość zakresowa są pojęciowo zupełnie różnymi relacjami; dlatego będziemy tu używali symbolu $\doteq$ dla oznaczenia relacji równości zakresowej. Mamy więc

$$(8) \quad \vdash (X \doteq Y) \equiv \prod_x [x \in X \equiv x \in Y].$$

Zbadamy teraz jaki jest wzajemny stosunek relacji $=$ i $\doteq$. Wykażemy przede wszystkim, że

$$(9) \quad \vdash (X = Y) \rightarrow (X \doteq Y).$$

Dowód. Zgodnie z prawem ekstensjonalności (§ 1, wzór (6)), zastosowanym do funkcji zdaniowej $u \in X$, mamy

$$\vdash (X = Y) \rightarrow [u \in X \equiv u \in Y].$$

Dołączmy w następniku kwantyfikator $\prod_u$ i zmieńmy literę u na literę x . Zgodnie z (8) otrzymamy wówczas tautologię (9), c. b. d. o.

Implikacja odwrotna do (9) nie może być wyprowadzona z omówionych dotychczas tautologii logicznych¹⁾. Implikacja ta:

$$(10) \quad (X \doteq Y) \rightarrow (X = Y)$$

¹⁾ Ścisły tego dowód podaje A. Robinson, *On the independence of the axioms of definiteness (Axiome der Bestimmtheit)*, Journal of Symbolic Logic 4 (1939), str. 53-60.

orzeka, że zbiory o równych zakresach mają wszystkie własności wspólne, a więc np. że każda własność, przysługująca zbiorowi ludzi, przysługuje też zbiorowi istot dwunożnych bezpiórnych¹⁾.

Czy implikacja (10) jest prawdziwa, czy fałszywa? Pytanie takie wydaje się nam problemem pozornym, źle postawionym. Pojęcie własności nie jest czymś z góry danym i nie możemy wobec tego sprawdzać, czy pojęcie to, tkwiące w wysłowieniu implikacji (10), spełnia tę implikację, czy nie. Możemy zarówno przyjąć implikację (10) za nowy aksjomat, jak i nie przyjmując, w zależności od tego, jak *chcemy* scharakteryzować pojęcie własności.

Własności zbiorów, rozpatrywane zazwyczaj w matematyce, zależą tylko od ich elementów, nie zależą zaś od tego, jak zbiór został zdefiniowany, ani od żadnych podobnych okoliczności. Ponieważ chcemy, by pojęcie własności, rozpatrywane w logice, było możliwie bliskie temu pojęciu własności, którym operujemy intuicyjnie w matematyce, więc przyjmujemy implikację (10) za nowy aksjomat, dotyczący pojęcia własności.

Nazywamy go *aksjomatem ekstensjonalności*.

Możemy napisać ten aksjomat w postaci następującego wzoru:

$$(11) \quad \vdash \prod_x [x \in X \equiv x \in Y] \rightarrow [X \in \mathfrak{X} \equiv Y \in \mathfrak{X}].$$

Przyjmujemy aksjomat ekstensjonalności dla wszelkich zbiorów, zarówno dla takich, których elementami są przedmioty, jak i dla takich, których elementami są zbiory, relacje lub jakiegokolwiek inne jeszcze twory pojęciowe.

Zupełnie podobne rozważania można przeprowadzić o stosunku równości zakresowej dwu relacji do równości (identyczności) dwu relacji. Relacje R i S , np. dwuczłonowe, są równe, jeśli mają wszystkie własności wspólne:

$$\vdash (R = S) \equiv \prod_{\mathfrak{R}} [R \in \mathfrak{R} \equiv S \in \mathfrak{R}].$$

Relacje R i S są równe co do zakresu, jeśli każde dwa przedmioty, pozostające do siebie w relacji R , pozostają też do siebie w relacji S i na odwrót:

$$\vdash (R \doteq S) \equiv \prod_{xy} [x R y \equiv x S y].$$

¹⁾ Tym przykładem ilustrują pojęcie równości zakresowej autorowie *Principia Mathematica*, tom I, wyd. 2, str. 23 i 72.

Równość relacji pociąga za sobą ich równość zakresową. Wynikanie odwrotne przyjęte jest za nowy pewnik logiczny, zwany *aksjomatem ekstensjonalności dla relacji*.

Po przyjęciu pewnika ekstensjonalności znika potrzeba rozróżniania symboli $=$ i $\doteq$; oba te symbole oznaczają na mocy pewnika ekstensjonalności tę samą relację.

ĆWICZENIA: 1. Wzór (11) można udowodnić bez pomocy pewnika ekstensjonalności dla $\mathfrak{X} = (\hat{X})(x \in X)$.

Wykazać, że jeśli wzór (11) zachodzi dla $\mathfrak{X} = (\hat{X})\varnothing(X, x, y, \dots, t)$ i dla $\mathfrak{X} = (\hat{X})\psi(X, x, y, \dots, t)$, to zachodzi też dla

$$\mathfrak{X} = (\hat{X})\varphi(X, x, y, \dots, t), \quad \mathfrak{X} = (\hat{X})[\varnothing(X, x, y, \dots, t) + \psi(X, x, y, \dots, t)]$$

oraz dla

$$\mathfrak{X} = (\hat{X})[\sum_x \varnothing(X, x, y, \dots, t)].$$

Wyprowadzić stąd wniosek, że jeśli $\varnothing(X)$ jest funkcją zdaniową, utworzoną za pomocą funktorów zdaniotwórczych i kwantyfikatorów z wyrażeń postaci $x \in X$ (gdzie literę x można zastąpić dowolną inną) oraz z wyrażeń nie zawierających litery X , to implikacja (11) dla $\mathfrak{X} = (\hat{X})\varnothing(X)$ może być udowodniona bez odwoływania się do pewnika ekstensjonalności.

2. Sformułować i udowodnić dla relacji twierdzenia podane w ćwiczeniu 1 dla zbiorów.

3. Niech $R = (\hat{x}, \hat{y})[y = \sin x]$ i $S = (\hat{x}, \hat{y})[y = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots]$. Z analizy matematycznej wiadomo, że $xRy \doteq xSy$. Niech

$$\mathfrak{R} = (\hat{T})[\text{istnieje funkcja różniczkowalna } f \text{ taka, że } \prod_{xy} \{xTy \doteq (y = f(x))\}].$$

Czy dla dowodu, że $R \in \mathfrak{R} \doteq S \in \mathfrak{R}$ trzeba powoływać się na pewnik ekstensjonalności?

4. Pewnik ekstensjonalności dla zbiorów wypowiedzieć można w następujący sposób: relacje (między zbiorami) $=$ i $\doteq$ są równe. Czy słowo *równe* oznacza tu identyczność, czy równość zakresową?

§ 3. Eliminacja symbolów abstrakcji. Przyjmując pewnik ekstensjonalności, możemy sformułować w bardziej zadowalający sposób pewnik definicyjny, z którym zapoznaliśmy się w Rozdziale IV, § 2, str. 90 i 91.

Przed wszystkim jest jasne, że wystarczy założyć istnienie takiej relacji R , iż x pozostaje w stosunku R do y wtedy i tylko wtedy, gdy x i y spełniają funkcję zdaniową Φ , nie ma zaś potrzeby dodawać założeń, że jest tylko jedna taka relacja. Każda bowiem relacja S taka, że $\prod_{xy}[xSy \doteq \Phi(x, y)]$, jest równa zakresowo R , a więc w myśl pewnika ekstensjonalności identyczna z R .

Rozumowaniu temu możemy z łatwością nadać postać sformalizowaną, dochodząc do wniosku, że

$$(12) \quad \vdash \prod_{xy}[xRy \doteq \Phi(x, y)] \cdot \prod_{xy}[xSy \doteq \Phi(x, y)] \rightarrow (R = S).$$

Pewnik definicyjny dla relacji możemy więc napisać w postaci wzoru:

$$(13) \quad \vdash \sum_R \prod_{xy}[xRy \doteq \Phi(x, y)].$$

Trzeba pamiętać, iż jest to schemat, w którym zamiast $\Phi(x, y)$ należy wstawić konkretne funkcje zdaniowe o (co najmniej) dwu zmiennych wolnych, nie zawierające zmiennej R .

Dla zbiorów analogiczny pewnik brzmi

$$(14) \quad \vdash \sum_X \prod_x [x \in X \doteq \Phi(x)].$$

Jak widzimy, symbole abstrakcji zniknęły z wysłowienia pewnika definicyjnego. Możemy jednak pójść jeszcze dalej i wyeliminować w ogóle użycie symbolów abstrakcji, pokazując, że *każde zdanie, zawierające te symbole, jest równoważne pewnemu zdaniu wolnemu od nich*.

Rugowanie to odbywa się na podstawie tautologii:

$$(15) \quad \vdash \Psi((\hat{x}, \hat{y})\Phi(x, y)) \doteq \prod_R \{\prod_{xy}[xRy \doteq \Phi(x, y)] \rightarrow \Psi(R)\} \doteq \sum_R \{\prod_{xy}[xRy \doteq \Phi(x, y)] \cdot \Psi(R)\}.$$

Dowód. Dla krótkości używać będziemy symbolu M zamiast wyrażenia $(\hat{x}, \hat{y})\Phi(x, y)$. Zgodnie ze wzorem (4) Rozdziału IV (§ 2, str. 91) mamy

$$(16) \quad \vdash \prod_{xy}[xMy \doteq \Phi(x, y)],$$

skąd na podstawie tautologii $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p \cdot q)$ wynika

$$(17) \quad \vdash \Psi(M) \rightarrow \prod_{xy}[xMy \doteq \Phi(x, y)] \cdot \Psi(M).$$

W myśl prawa, udowodnionego w Rozdziale III (§ 4, wzór (2), str. 59) jest

$$\vdash \prod_{xy}[xMy \doteq \Phi(x, y)] \cdot \Psi(M) \rightarrow \sum_R \{\prod_{xy}[xRy \doteq \Phi(x, y)] \cdot \Psi(R)\},$$

co na mocy prawa sylogizmu daje wobec (17)

$$(18) \quad \vdash \Psi(M) \rightarrow \sum_R \{\prod_{xy}[xRy \doteq \Phi(x, y)] \cdot \Psi(R)\}.$$

Oprzemy się w dalszym ciągu na wzorze (12). Dla skrócenia oznaczmy literą P poprzednik tej tautologii. Stosownie do prawa mnożenia implikacji mieć będziemy

$$\vdash P \cdot (R \in \mathfrak{N}) \rightarrow (R = S) \cdot (R \in \mathfrak{N}),$$

ponieważ zaś zgodnie z pewnikiem ekstensjonalności jest

$$\vdash (R = S) \cdot (R \in \mathfrak{N}) \rightarrow (S \in \mathfrak{N}),$$

więc

$$\vdash P \cdot (R \in \mathfrak{N}) \rightarrow (S \in \mathfrak{N}).$$

Stosując prawo mnożenia implikacji, otrzymamy

$$(19) \vdash P \cdot \prod_T [T \in \mathfrak{N} \equiv \Psi(T)] \cdot (R \in \mathfrak{N}) \rightarrow \prod_T [T \in \mathfrak{N} \equiv \Psi(T)] \cdot (S \in \mathfrak{N}).$$

W myśl prawa dowiedzonego w Rozdziale III (§ 4, wzór (1), str. 58) jest

$$\vdash \prod_T [T \in \mathfrak{N} \equiv \Psi(T)] \rightarrow [R \in \mathfrak{N} \equiv \Psi(R)],$$

skąd wnosimy na mocy tautologii $\vdash [p \rightarrow (q = r)] \rightarrow (p \cdot q \equiv p \cdot r)$, że

$$(20) \vdash \prod_T [T \in \mathfrak{N} \equiv \Psi(T)] \cdot (R \in \mathfrak{N}) \equiv \prod_T [T \in \mathfrak{N} \equiv \Psi(T)] \cdot \Psi(R).$$

W podobny sposób wykazuje się, że

$$(21) \vdash \prod_T [T \in \mathfrak{N} \equiv \Psi(T)] \cdot (S \in \mathfrak{N}) \rightarrow \Psi(S).$$

Wzór (19) daje teraz wobec (20) i (21)

$$\vdash P \cdot \prod_T [T \in \mathfrak{N} \equiv \Psi(T)] \cdot \Psi(R) \rightarrow \Psi(S),$$

co wobec $\vdash (p \cdot q \cdot r \rightarrow s) \equiv [q \rightarrow (p \cdot r \rightarrow s)]$ napisać możemy jeszcze w postaci

$$\vdash \prod_T [T \in \mathfrak{N} \equiv \Psi(T)] \rightarrow [P \cdot \Psi(R) \rightarrow \Psi(S)].$$

Dołączmy w poprzedniku mały kwantyfikator $\sum_{\mathfrak{N}}$. Poprzednik przyjmie wówczas postać $\sum_{\mathfrak{N}} \prod_T [T \in \mathfrak{N} \equiv \Psi(T)]$, a więc może być oderwany, gdyż jest jednym ze szczególnych przypadków pewnika definicyjnego (13). Otrzymujemy zatem $\vdash P \cdot \Psi(R) \rightarrow \Psi(S)$, czyli po podstawieniu za skrót P jego znaczenia będziemy mieli

$$\vdash \prod_{xy} [xRy \equiv \Phi(x, y)] \cdot \prod_{xy} [xSy \equiv \Phi(x, y)] \cdot \Psi(R) \rightarrow \Psi(S).$$

Po prostym przekształceniu na podstawie tautologii

$$\vdash (p \cdot q \cdot r \rightarrow s) \equiv [p \cdot r \rightarrow (q \rightarrow s)]$$

otrzymamy stąd

$$\vdash \prod_{xy} [xRy \equiv \Phi(x, y)] \cdot \Psi(R) \rightarrow \{\prod_{xy} [xSy \equiv \Phi(x, y)] \rightarrow \Psi(S)\}.$$

Dołączmy w poprzedniku mały kwantyfikator $\sum_R$, a w następniku duży $\prod_S$ i zamieńmy literę S na R . Dojdziemy w ten sposób do tautologii

$$(22) \vdash \sum_R \{\prod_{xy} [xRy \equiv \Phi(x, y)] \cdot \Psi(R)\} \rightarrow \rightarrow \prod_R \{\prod_{xy} [xRy \equiv \Phi(x, y)] \rightarrow \Psi(R)\}.$$

Zauważmy wreszcie, że na mocy prawa (2) z Rozdziału III (§ 4, str. 59) jest

$$\vdash \prod_R \{\prod_{xy} [xRy \equiv \Phi(x, y)] \rightarrow \Psi(R)\} \rightarrow \{\prod_{xy} [xMy \equiv \Phi(x, y)] \rightarrow \Psi(M)\}.$$

Opierając się na prawie $\vdash [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$, otrzymamy po oderwaniu tautologii (16)

$$(23) \vdash \prod_R \{\prod_{xy} [xRy \equiv \Phi(x, y)] \rightarrow \Psi(R)\} \rightarrow \Psi(M).$$

Równoważności (15) otrzymujemy teraz natychmiast ze wzorów (18), (22) i (23).

Po lewej stronie równoważności (15) występują symbole abstrakcji, po prawej zaś symboli tych nie ma. Tym samym jest dowiedzione, że dowolne wyrażenie, zawierające symbole abstrakcji, można zastąpić równoważnym wyrażeniem, nie zawierającym tych symboli.

PRZYKŁADY. Zgodnie z definicją inkluzji wzór $X \subset Y$ znaczy tyleż co

$$X \{(\hat{M}, \hat{N}) \prod_x [x \in M \rightarrow x \in N]\} Y.$$

W myśl zatem równoważności (15) jest

$$(24) \vdash (X \subset Y) \equiv \sum_{\mathfrak{N}} (\prod_{MN} \{M \mathfrak{N} N \equiv \prod_x [x \in M \rightarrow x \in N]\} \cdot X \mathfrak{N} Y).$$

W podobny sposób przekonujemy się, że wyrażenie $X \subset X + Y$, które równoważne jest wyrażeniu $X \subset (\hat{x})(x \in X \rightarrow x \in Y)$, napisane być może w postaci

$$\sum_Z \{\prod_x [x \in Z \equiv (x \in X \rightarrow x \in Y)] \cdot (X \subset Z)\}.$$

Zgodnie z (24) możemy wyeliminować jeszcze symbol $\subset$ z tego wzoru.

W wielu wypadkach można zresztą wyeliminować symbole abstrakcji w prostszy sposób. Tak jest np. w obu poprzednich przykładach, ponieważ

$$\vdash X \subset Y \equiv \prod_x (x \in X \rightarrow x \in Y), \quad \vdash X \subset X + Y \equiv \prod_x [x \in X \rightarrow (x \in X \rightarrow x \in Y)].$$

Z rozważań tych wynika, że symbole abstrakcji są zasadniczo zbędne. Na razie jednak będziemy posługiwali się nimi, gdyż pozwalają one skrócić wzory. Każde wyrażenie, napisane przy pomocy tych symboli, można również napisać wyłącznie za pomocą funktorów rachunku zdań, kwantyfikatorów oraz funkcji zdaniowych postaci

$x \in X, x R y, U(x, y, z), \dots, X \in \mathfrak{X}, X \mathfrak{R} Y, U(X, Y, Z), \dots$

Skorzystamy z tego w Rozdziale VIII.

ROZDZIAŁ VI

TEORIA RELACJI

§ 1. Relacja odwrotna. W §§ 1-8 przez relacje rozumiemy wyłącznie relacje dwuczłonowe.

Relację odwrotną do danej relacji R definiujemy wzorem

$$\check{R} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}) y R x.$$

Symbol $\check{R}$ czytamy: R *konwers*.

Mamy na mocy definicji

$$(1) \quad \vdash x \check{R} y \equiv y R x.$$

Wykres relacji $\check{R}$ otrzymujemy, obracając wykres relacji R o 180° dokoła przekątnej $y = x$.

PRZYKŁADY. Jeśli R jest relacją $<$, to $\check{R}$ jest relacją $>$. Jeśli $R = (\hat{x}, \hat{y}) (x = \sin y)$, to $\check{R} = (\hat{x}, \hat{y}) (x = \arcsin y)$. Relacją odwrotną do relacji równości $1'$ jest też $1'$; relacją odwrotną do $0'$ jest $0'$.

Z praw dotyczących relacji odwrotnych wymienimy następujące:

$$(2) \quad \vdash \check{\check{R}} = R, \quad (3) \quad \vdash \check{R}' = \check{\check{R}}',$$

$$(4) \quad \vdash \check{\check{R} + S} = \check{R} + \check{S}, \quad (5) \quad \vdash \check{\check{R} \cdot S} = \check{R} \cdot \check{S}.$$

Dla przykładu udowodnimy wzór (4). Mamy

$$\vdash x \check{\check{R} + S} y \equiv y (R + S) x \equiv (y R x + y S x) \equiv (x \check{R} y + x \check{S} y) \equiv x (\check{R} + \check{S}) y,$$

zatem $\vdash \prod_{xy} [xR \vdash Sy \equiv x(\check{R} + \check{S})y]$, skąd wobec wzoru (17) z Rozdziału IV (§ 3, str. 94) otrzymujemy wzór (4). Dowody pozostałych praw są analogiczne.

§ 2. Iloczyn względny. Iloczynem względnym albo wynikiem złożenia relacji R i S nazywamy relację

$$R;S \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}) \sum_z (xRz \cdot zSy).$$

(mnożenie względne czyli złożenie relacji oznaczamy więc znakiem $;$). Z podanej definicji wynika, że

$$(6) \quad \vdash xR;Sy \equiv \sum_z (xRz \cdot zSy).$$

PRZYKŁADY. Niech $R = (\hat{x}, \hat{y}) (x = \sin y)$ i $S = (\hat{x}, \hat{y}) (x = \cos y)$. Relacją złożoną $R;S$ jest wówczas $(\hat{x}, \hat{y}) [x = \sin(\cos y)]$, natomiast $S;R = (\hat{x}, \hat{y}) [x = \cos(\sin y)]$. Wynika stąd, że mnożenie względne nie podlega prawu przemienności.

Przy tym samym znaczeniu relacji R i S mamy

$$R;\check{S} = (\hat{x}, \hat{y}) [x = \sin(\arccos y)].$$

Można tu zauważyć, że użycie symbolu $\sin(\arccos y)$ jest zasadniczo niepoprawne, gdyż dla $-1 < y < 1$ istnieją dwie liczby, które z równym prawem można by tym symbolem oznaczać. Wzór $xR;\check{S}y$ wyraża to samo, co w zwykłej symbolice matematycznej wyrażamy (teoretycznie niepoprawnym) wzorem $x = \sin(\arccos y)$.

Jeśli zmienne x i y przebiegają zbiór liczb wymiernych, to $<; < = <$, jeśli zaś przebiegają one zbiór liczb całkowitych, to $<; < = (\hat{x}, \hat{y}) [y - x \geq 2]$. W obu wypadkach jest $>; < = 1$.

Relacja $(\hat{x}, \hat{y}) [x \text{ jest stryjem } y]$ jest iloczynem względnym relacji $(\hat{x}, \hat{y}) [x \text{ jest bratem } y]$ i $(\hat{x}, \hat{y}) [x \text{ jest ojcem } y]$. Biorąc natomiast czynniki w odwrotnym porządku otrzymamy relację

$$(\hat{x}, \hat{y}) [x \text{ jest ojcem brata } y].$$

Ilustracja geometryczna iloczynu względnego jest mniej przejrzysta niż interpretacja innych pojęć rachunku zbiorów i relacji. Aby tę ilustrację uzyskać, rozważmy układ trzech wzajemnie prostopadłych osi Ox , Oy , Oz i umieśmy na płaszczyźnie Oxy wykresy relacji R i S . Obracając wykres relacji R o kąt 90° dokoła osi Ox , otrzymamy zbiór A takich punktów płaszczyzny Oxz , że $(x, z) \in A \equiv xRz$. Podobnie obracając o kąt 90° dokoła osi Oy wykres relacji S , otrzymamy zbiór B takich punktów płaszczyzny Oyz , że $(y, z) \in B \equiv zSy$. Do zbioru A stosujemy teraz

operację walcowania równoległe do osi Oy , do zbioru zaś B — operację walcowania równoległe do osi Ox (zob. Rozdział II, § 2, str. 9) i bierzemy część wspólną obu walców. Jest to zbiór takich punktów (x, y, z) , że $xRz \cdot zSy$. Rzut tego zbioru na płaszczyznę Oxy jest wykresem relacji $R;S$.

Podamy teraz kilka praw, dotyczących iloczynu względnego.

1. Prawo łączności:

$$(7) \quad \vdash (R;S);T = R;(S;T).$$

Dowód. Z (6) wynika

$$\vdash x(R;S);Ty \equiv \sum_z [xR;S z \cdot zTy] \equiv \sum_z [\sum_t (xRt \cdot tSz) \cdot zTy].$$

Stosując dwukrotnie prawo (16) z Rozdziału III (§ 5, str. 66) oraz, drugą z tautologii (20) tegoż Rozdziału (§ 7, str. 75), wnosimy, że

$$\begin{aligned} \vdash \sum_z [\sum_t (xRt \cdot tSz) \cdot zTy] &\equiv \sum_t (xRt \cdot tSz \cdot zTy) \equiv \\ &\equiv \sum_t [xRt \cdot \sum_z (tSz \cdot zTy)] \equiv \sum_t (xRt \cdot tS;Ty) \equiv xR;(S;T)y. \end{aligned}$$

Stąd $\vdash x(R;S);Ty \equiv xR;(S;T)y$, co na mocy prawa podanego we wzorze (17) Rozdziału IV (§ 3, str. 94) dowodzi równości (7).

Iloczyn względny podlega więc prawu łączności; z przykładów podanych na str. 120 wiemy, że nie podlega on prawu przemienności. Natomiast spełnia on następujące dwa

2. Prawa rozdzielności:

$$(8) \quad \vdash (R + S);T = R;T + S;T, \quad \vdash R;(S + T) = R;S + R;T.$$

Dowód. Z (6) otrzymujemy na mocy definicji sumy relacji (Rozdział IV, § 3, wzór (22), str. 96)

$$\vdash x(R + S);Ty \equiv \sum_z [(xRz + xSz) \cdot zTy].$$

Opierając się na prawie rozdzielności mnożenia logicznego względem dodawania (Rozdział II, § 10, str. 28) oraz na prawie rozdzielności małego kwantyfikatora względem alternatywy (Rozdział III, § 5, wzór (12), str. 65), otrzymamy stąd

$$\vdash x(R + S);Ty \equiv [\sum_z (xRz \cdot zTy) + \sum_z (xSz \cdot zTy)],$$

a zatem na mocy (6) i definicji sumy relacji

$$\vdash x(R + S);Ty \equiv [xR;Ty + xS;Ty] \equiv x(R;T + S;T)y.$$

Wynika stąd, że $\vdash \prod_{xy} [x(R+S); Ty \equiv x(R;T+S;T)y]$, a więc (Rozdział IV, § 3, wzór (17), str. 94) $\vdash (R+S);T = R;T+S;T$. Dowód drugiego ze wzorów (8) jest analogiczny.

3. Prawa monotonii:

$$(9) \quad \vdash R \subset S \rightarrow R;T \subset S;T, \quad \vdash R \subset S \rightarrow T;R \subset T;S.$$

Dowód. Jest jasne, że $\vdash R;T \subset R;T+S;T$, skąd wobec (8) wynika $\vdash R;T \subset (R+S);T$. Wobec prawa ekstensjonalności (Rozdział V, § 1, wzór (6), str. 111) wynika stąd, że $\vdash (S=R+S) \rightarrow \rightarrow (R;T \subset S;T)$, a ponieważ $\vdash (R \subset S) \equiv (S=R+S)$, więc otrzymujemy od razu pierwszy ze wzorów (9). Dowód drugiego jest analogiczny.

Ponadto spełnione są prawa następujące:

$$(10) \quad \vdash (R \cdot S);T \subset (R;T) \cdot (S;T), \quad \vdash T;(R \cdot S) \subset (T;R) \cdot (T;S).$$

Dowód. Wobec $\vdash R \cdot S \subset R$ otrzymujemy z (9) $\vdash (R \cdot S);T \subset R;T$. Podobnie wykazuje się, że $\vdash (R \cdot S);T \subset S;T$, a ponieważ

$$\vdash (R \subset S) \rightarrow [(R \subset T) \rightarrow (R \subset S \cdot T)],$$

więc wnosimy stąd, że $\vdash (R \cdot S);T \subset (R;T) \cdot (S;T)$. Analogicznie dowodzi się drugiego ze wzorów (10).

$$(11) \quad \vdash R;1' = R, \quad \vdash 1';R = R.$$

Dowód. Z prawa ekstensjonalności (Rozdział V, § 1, wzór (6), str. 111) wynika, że

$$\vdash x = z \rightarrow (zRy \equiv xRy),$$

skąd na mocy tautologii $\vdash [p \rightarrow (q \equiv r)] \rightarrow (p \cdot q \equiv p \cdot r)$ otrzymujemy

$$\vdash (x = z) \cdot zRy \equiv (x = z) \cdot xRy.$$

Zastosujmy do tej tautologii operację uogólniania (Rozdział III, § 3, operacja 7, str. 56) oraz prawo rozkładania małego kwantyfikatora (tamże, § 4, wzór (8), str. 61). Otrzymujemy

$$\vdash \sum_z [(x = z) \cdot zRy] \equiv \sum_z [(x = z) \cdot xRy].$$

Zgodnie z (6) oraz z prawem dowiedzonym w Rozdziale III, § 5 (wzór (16), str. 66) wynika stąd

$$(*) \quad \vdash x1';Ry \equiv xRy \cdot \sum_z (x = z).$$

Ponieważ jednak $\vdash x = x$ (Rozdział V, § 1, wzór (3), str. 110) i

$$\vdash x = x \rightarrow \sum_z (x = z)$$

(Rozdział III, § 4, wzór (2), str. 59), więc $\vdash \sum_z (x = z)$, co dowodzi, że

$$\vdash xRy \cdot \sum_z (x = z) \equiv xRy.$$

Na mocy (*) wynika stąd

$$\vdash x1';Ry \equiv xRy,$$

co już bezpośrednio daje pierwszy ze wzorów (11). W analogiczny sposób dowodzi się drugiego z tych wzorów.

Używając terminologii algebraicznej, możemy wysłowić treść praw (11) w następujący sposób: relacja równości $1'$ jest *modułem prawostronnym* i *lewostronnym* działania składania relacji.

$$(12) \quad \vdash \widetilde{R};S \equiv \widetilde{S};\widetilde{R}.$$

Dowód.

$$\vdash x\widetilde{R};\widetilde{S}y \equiv yR;Sx \equiv \sum_z (yRz \cdot zSx) \equiv \sum_z (x\widetilde{S}z \cdot z\widetilde{R}y) \equiv x\widetilde{S};\widetilde{R}y.$$

$$(13) \quad \vdash [R;S \subset T] \equiv \prod_{xyz} [xRy \cdot ySz \rightarrow xTz].$$

Dowód. Stosując definicję inkluzji (Rozdział IV, § 3, wzór (11), str. 93) oraz prawa podane w Rozdziale III (§ 4, wzory (9) i (10), str. 62 i 63), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \vdash [R;S \subset T] &\equiv \prod_{xy} [xR;Sy \rightarrow xTy] \equiv \prod_{xy} \{ \sum_z [xRz \cdot zSy] \rightarrow xTy \} \equiv \\ &\equiv \prod_{xyz} [xRz \cdot zSy \rightarrow xTy]. \end{aligned}$$

$$(14) \quad \vdash R;S \subset T \equiv \widetilde{R};T' \subset S'.$$

Dowód. Z tautologii $\vdash (p \cdot q \rightarrow r) \equiv (p \cdot r' \rightarrow q')$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \vdash \prod_{xyz} [xRz \cdot zSy \rightarrow xTy] &\equiv \prod_{xyz} [xRz \cdot xT'y \rightarrow zS'y] \equiv \\ &\equiv \prod_{xyz} [z\widetilde{R}x \cdot xT'y \rightarrow zS'y], \end{aligned}$$

po czym stosujemy prawo (13).

W podobny sposób dowodzi się praw:

$$(15) \quad \vdash R;S \subset T \equiv T';\widetilde{S} \subset R',$$

$$(16) \quad \vdash R;S \subset \widetilde{T} \equiv \widetilde{R};\widetilde{T}' \subset S'.$$

ĆWICZENIA: 1. Obliczyć $R;S$ dla $R = (\hat{x}, \hat{y}) [x \in X]$ i $S = (\hat{x}, \hat{y}) [y \in Y]$.

2. Obliczyć $Q;\widetilde{Q}$ i $\widetilde{Q};Q$ dla $Q = (\hat{x}, \hat{y}) [y = x^*]$.

3. Dowieść, że jeśli $\widetilde{R};R = 1'$ i $R;S = T$, to $S = \widetilde{R};T$.

4. Dowieść, że $\vdash R; 1 \cdot + 1 \cdot; R' = 1 \cdot$. Podać ilustrację geometryczną.
5. Podać przykłady takich relacji R, S i T , że $R; S = R; T$, ale $S \neq T$.
6. Sumę względną dwu relacji R i S definiuje się wzorem

$$R \dot{+} S \stackrel{\text{def}}{=} \prod_z [xRz \dot{+} zSy].$$

Udowodnić następujące prawa dla tego działania:

$$\vdash R \dot{+} (S \dot{+} T) = (R \dot{+} S) \dot{+} T, \quad \vdash R \dot{+} 0' = R, \quad \vdash (R \dot{+} S) \cdot (R \dot{+} T) = R \dot{+} S \cdot T,$$

$$\vdash \widetilde{R \dot{+} S} = \check{S} \dot{+} \check{R}, \quad \vdash (R; S)' = R' \dot{+} S'.$$

7. Wykazać, że

$$\vdash [1' \subset R' \dot{+} R] = \prod_{xy} [xRy \rightarrow yRx].$$

8. Pokazać na przykładach, że znak zawierania we wzorach (10) nie może być zastąpiony znakiem równości¹⁾.

§ 3. Sylogistyka Arystotelesa. Sposób, w jaki korzysta się z praw poznanych w § 1 i § 2, zilustrujemy na następującym przykładzie, obejmującym jako przypadek szczególny *sylogistykę Arystotelesa*.

Niech a będzie relacją, spełniającą wzory:

$$(17) \quad a; a \subset a,$$

$$(18) \quad a \cdot \check{a} = 1'.$$

Zdefiniujmy relacje i, e, o za pomocą wzorów:

$$(19) \quad i = \check{a}; a, \quad e = i', \quad o = a'.$$

Znamy wiele przykładów relacji dwuczłonowych, czyniących zadość warunkom (17) i (18). Obejmujemy je wspólną nazwą *porządków* (lub *uporządkowań*) *częściomych* (zob. dalej, § 7, str. 135).

Zadowolimy się tutaj podaniem dwu szczególnie ważnych przykładów takich relacji.

¹⁾ Rachunek relacji, z którego początkami zapoznaliśmy się w § 1 i § 2, stworzony został przez logika amerykańskiego Ch. S. Peirce'a (1839-1914) i logika niemieckiego Schrödera (1841-1902). Szczegółowy wykład tego rachunku zawiera dzieło: E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, Lipsk 1895, którego tom 3: *Algebra und Logik der Relative* poświęcony jest temu rachunkowi. Rachunek relacji był ostatnio przedmiotem ciekawych badań Tarskiego. Zob. A. Tarski, *On the calculus of relations*, Journal of Symbolic Logic 6 (1941), str. 73-89 oraz J. C. C. Mc Kinsey, *Postulates for the calculus of binary relatives*, tamże 5 (1940), str. 85-97.

(I) Niech zbiór pełny 1 składa się ze wszystkich niepustych podzbiorów dowolnie danego zbioru X_0 i niech a będzie relacją inkluzji między zbiorami należącymi do 1. Z prawa (13) (§ 2, str. 123) wnosimy wobec prawa przechodniości dla inkluzji (Rozdział IV, § 3, wzór (13), str. 93), że tak określona relacja a czyni zadość warunkowi (17). Warunek (18) też jest spełniony, gdyż $Xa \cdot \check{a}Y = (XaY) \cdot (YaX) = (X \subset Y) \cdot (Y \subset X) = (X = Y)$.

Relacja i ma w tym przykładzie znaczenie następujące: wzór XiY zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją przedmioty należące zarówno do zbioru X jak i do zbioru Y . Relacja e zachodzi między zbiorami X i Y wtedy i tylko wtedy, gdy żaden element zbioru X nie jest elementem zbioru Y . Znaczenie relacji o odczytać możemy ze wzoru

$$XoY = (XaY)' = [\prod_x (x \in X \rightarrow x \in Y)]' = \sum_x (x \in X \cdot x \in Y').$$

Relacja o zachodzi więc między dwoma zbiorami X i Y wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją przedmioty, które należą do X , ale nie należą do Y .

Sylogistyka, t. j. dział logiki stworzony jeszcze przez Arystotelesa (IV wiek przed Chrystusem), zajmowała się wyprowadzaniem praw, dotyczących właściwie rozważanych tu relacji a, e, i, o . Zdania postaci XaY i XeY nazywają się w sylogistyce *ogólnymi*: pierwsze — zdaniem *ogólno-twierdzącym*, drugie — *ogólno-przeczącym*. Zdania XiY i XoY nazywają się: pierwsze — *szczegółowo-twierdzącym*, drugie — *szczegółowo-przeczącym*.

(II) Niech zbiór pełny 1 składa się z liczb naturalnych różnych od jedności i niech a będzie relacją

$$(\dot{x}, \dot{y}) [x \text{ jest dzielnikiem } y].$$

Łatwo sprawdzić, że czyni ona zadość warunkom (17) i (18). Interpretacja relacji i, e, o jest w tym przykładzie następująca:

$$i = (\dot{x}, \dot{y}) [x \text{ i } y \text{ mają wspólny dzielnik większy od jedności}],$$

$$e = (\dot{x}, \dot{y}) [x \text{ i } y \text{ są względnie pierwsze}],$$

$$o = (\dot{x}, \dot{y}) [x \text{ nie jest dzielnikiem } y].$$

Ze wzorów (17)-(19) można wyprowadzić na podstawie poprzednio poznanych praw rachunku relacji szereg twierdzeń. Wszystkie te twierdzenia obowiązują zatem zarówno w sylogistyce (I) jak w interpretacji (II), jak wreszcie dla każdego innego układu relacji spełniających wzory (17)-(19).

Oto kilka takich twierdzeń:

I prawo podporządkowania:

$$(20) \quad a \subset i.$$

Dowód. Z $a = i'; a$ (zob. § 2, wzór (11), str. 122) wynika wobec (18) i (10)

$$a = (a \cdot \bar{a}); a \subset (a; a) \cdot (\bar{a}; a) \subset \bar{a}; a = i.$$

II prawo podporządkowania:

$$(21) \quad e \subset o.$$

Dowód. Z (20) wynika $i' \subset a'$ (zob. Rozdział IV, § 4, wzór (38), str. 101), co na mocy (19) daje wzór (21).

Prawa konwersji dla i i e :

$$(22) \quad \bar{i} = i, \quad \bar{e} = e.$$

Dowód. Z definicji i otrzymujemy na mocy (12) i (2)

$$\bar{i} = \bar{\bar{a}}; a = \bar{a}; \bar{\bar{a}} = \bar{a}; a,$$

co daje pierwszy ze wzorów (22). Drugi wynika z pierwszego na mocy (3).

Prawo konwersji dla a :

$$(23) \quad a \subset \bar{i}.$$

Dowód. Prawo to wynika z (20) i z pierwszego ze wzorów (22).

Sylogizmami pierwszej figury nazywają się inkluzje postaci $\lambda; \mu \subset \nu$, gdzie litery λ, μ, ν należy zastąpić w dowolny sposób przez litery a, e, i, o . Zgodnie z (13), sylogizm pierwszej figury równoważny jest zdaniu

$$\prod_{xyz} [x\lambda y \cdot y\mu z \rightarrow x\nu z].$$

W tradycyjnym wykładzie sylogistyki zdanie to zapisuje się zazwyczaj w postaci

$$I \quad \begin{array}{c} y\mu z \\ x\lambda y \\ \hline x\nu z \end{array}$$

Funkcje zdaniowe, wypisane ponad kreską, noszą nazwę *przesłanek*, trzecia funkcja zdaniowa nazywa się *konkluzją* czyli

wnioskiem. Zamiast x, y i z pisze się zazwyczaj S, M i P . S nazywa się *terminem mniejszym*, M — *średnim*, a P — *większym*.

Sylogizmy *drugiej, trzeciej i czwartej figury* mają odpowiednio postać $\lambda; \bar{\mu} \subset \nu$, $\bar{\lambda}; \mu \subset \nu$ i $\bar{\lambda}; \bar{\mu} \subset \nu$. Tradycyjnie zapisuje się je w postaci

$$\begin{array}{ccc} II & \begin{array}{c} z\mu y \\ x\lambda y \\ \hline x\nu z \end{array} & III \quad \begin{array}{c} y\mu z \\ y\lambda x \\ \hline x\nu z \end{array} & IV \quad \begin{array}{c} z\mu y \\ y\lambda x \\ \hline x\nu z \end{array} \end{array}$$

Każdy sylogizm, o ile jest prawdziwy, ma swoją nazwę (t. zw. *tryb*), w której powtarzają się samogłoski a, e, i, o w tej samej kolejności, w jakiej występują one we wzorach I-IV. Zapisując sylogizmy w postaci inkluzji, należy więc pamiętać o tym, że początkowe dwie samogłoski występują w nazwie sylogizmu w przeciwnym porządku, niż w iloczynie względnym, stojącym po lewej stronie znaku inkluzji. Tak np. sylogizm $\bar{a}; i \subset i$ figury III nosi nazwę trybu *Disamis*.

Wyprowadzimy dla przykładu kilka sylogizmów.

Wzór (17) jest sylogizmem I figury o nazwie *Barbara*. Z (17) i (20) wynika na mocy prawa przechodności inkluzji (Rozdział IV, § 3, wzór (13), str. 95) sylogizm *Barbari* I figury:

$$(24) \quad a; a \subset i.$$

Z (19) wynika $i; a = (\bar{a}; a); a$, skąd na mocy (7) $i; a = \bar{a}; (a; a)$. Ale z (17) wynika na mocy (9) $\bar{a}; (a; a) \subset \bar{a}; a$, otrzymujemy więc sylogizm *Darii* I figury:

$$(25) \quad i; a \subset i.$$

W podobny sposób wyprowadza się sylogizm *Disamis* III figury:

$$(26) \quad \bar{a}; i \subset i.$$

Z sylogizmu *Disamis* wynika na mocy (14) $a; i' \subset i'$; na mocy drugiego ze wzorów (19) otrzymujemy więc sylogizm *Celarent* I figury:

$$(27) \quad a; e \subset e.$$

Sylogizm ten napisać możemy wobec (22) w postaci $a; e \subset \bar{e}$. Stosując więc prawo (16), otrzymamy $\bar{a}; \bar{e}' \subset \bar{e}'$. Jest to sylogizm *Dimatis* IV figury:

$$(28) \quad \bar{a}; \bar{i} \subset \bar{i}.$$

Prawo (15) służyć może do wyprowadzania sylogizmów II figury. Np. z (25) otrzymujemy na mocy tego prawa sylogizm *Camestres* II figury:

$$(29) \quad e; \bar{a} \subset e.$$

Nadając relacjom a, e, i, o takie znaczenie jak w przykładzie (I), otrzymujemy z sylogizmów prawa logiczne, dotyczące zbiorów niepustych, a mianowicie ich wzajemnego zawierania, wyłączania się i t. p.

Np. sylogizm *Celarent* wysłowić możemy jak następuje: *jeśli żaden element zbioru niepustego Y nie jest elementem zbioru niepustego Z, a każdy element zbioru niepustego X jest elementem zbioru Y, to żaden element zbioru X nie jest elementem zbioru Z*. Na tym prawie opieramy się, gdy z przesłanek: *żaden Europejczyk nie jest Amerykaninem i każdy Polak jest Europejczykiem* wnosimy, że *żaden Polak nie jest Amerykaninem*.

Równie interesujące prawa otrzymamy, nadając relacjom a, e, i, o takie znaczenie, jak w przykładzie (II). Sylogizm *Celarent* daje wówczas twierdzenie: *jeśli y jest względnie pierwsze z z, a x jest dzielnikiem y, to x jest względnie pierwsze z z*.

Podobnie jak inne działy logiki, tak i sylogistyka wyrosła z poszukiwania formalnych kryteriów prawdziwości zdań. Sylogizmy, prawa konwersji, prawa kwadratu logicznego (których szczególnymi przypadkami są prawa (20) i (21)), są tautologiami logicznymi, o ile relacje a, e, i, o mają takie znaczenie jak w przykładzie (I). Są to więc twierdzenia prawdziwe bez względu na treść pojęć pozalogicznych, do których się je stosuje. Oceniając sylogistykę, podziwiamy geniusz umysłu, który już przed 23 wiekami odczuł potrzebę ustalenia formalnych kryteriów prawdziwości zdań i potrafił takie kryteria odnaleźć, co prawda tylko dla pewnej bardzo specjalnej kategorii zdań (sylogizmów). Jednakże na dalszym rozwoju sylogistyki fatalnie zaciążyło ograniczenie się tylko do tej specjalnej kategorii zdań. Wymażenia typu *każdy element zbioru X jest elementem zbioru Y*, jako też typu *żaden element zbioru X nie jest elementem zbioru Y* i t. p., nie są bynajmniej najczęstszą ani najważniejszą częścią składową zdań, którymi posługujemy się w nauce, a nawet w życiu codziennym; sylogistyka zaś ogranicza się wyłącznie do zdań, zbudowanych z tych wyrażeń. Dlatego prawa sylogistyki rzadko kiedy znajdują zastosowanie w rozumowaniach, a doniosłość całego tego

działu logiki polega nie tyle na jego wewnętrznej treści, ile na tradycji i znaczeniu historycznym¹⁾.

ĆWICZENIA. 1. Wyprowadzić twierdzenia $a \subset e'$ oraz $e \subset a'$, zwane prawami przeciwieństwa, i twierdzenia $i' \subset o$ oraz $o' \subset i$, zwane prawami podprzeciwieństwa.

Uwaga. Prawa te wraz z prawami podporządkowania (20) i (21) oraz prawami sprzeczności $e = i'$ i $o = a'$ (zob. wzory (19)) tworzą prawa t.zw. kwadratu logicznego.

2. Ile jest wszystkich sylogizmów (prawdziwych i fałszywych)?

3. W poniższej tabelce podane są nazwy wszystkich sylogizmów prawdziwych:

		T r y b y					
Figury	I	Barbara	Celarent	Darii	Ferio	Barbari	Celarent
	II	Cesare	Camestres	Festino	Baroco	Cesaro	Camestros
	III	Disamis	Datisi	Bocardo	Ferison	Darapti	Felapton
	IV	Bamalip	Calemes	Dimatis	Fresison	Calemos	Fesapo

Wyprowadzić te sylogizmy na podstawie praw rachunku relacji i podać ich interpretację stosownie do przykładów (I) i (II).

4. Podać inne przykłady relacji spełniających warunki (17) i (18).

§ 4. Dziedzina i przeciwdziedzina. Relacje ograniczone. Obrazy. Dziedzina $\mathfrak{D}(R)$ relacji R nazywamy zbiór tych x , dla których istnieje takie y , że xRy .

Przeciwdziedzina $\mathfrak{C}(R)$ relacji R nazywamy zbiór tych y , dla których istnieje takie x , że xRy (znak $\mathfrak{C}$ jest odwróconym $\mathfrak{D}$).

Napisane wzorami, definicje te mają postać następującą:

$$\mathfrak{D}(R) = \{x\} \sum_y xRy, \quad \mathfrak{C}(R) = \{y\} \sum_x xRy.$$

Wynikają stąd od razu równoważności:

$$(30) \quad \vdash x \in \mathfrak{D}(R) \equiv \sum_y xRy, \quad \vdash y \in \mathfrak{C}(R) \equiv \sum_x xRy.$$

Wykres dziedziny otrzymujemy, rzutując wykres relacji R na oś odciętych, a wykres przeciwdziedziny — rzutując wykres relacji R na oś rzędnych.

¹⁾ Bliżej zapoznać się można z sylogistyką np. z książki: J. Śleszyński, *Teoria domodu*, tom I, Kraków 1925, wydanej przez Kółko Matematyczno-Fizyczne Uczniów Uniwersytetu Jagiellońskiego; zob. też T. Kotarbiński, *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, Lwów 1929, str. 209–226.

Jeśli f jest funkcją np. zmiennej rzeczywistej, to dziedziną relacji $(\hat{x}, \hat{y})[x=f(y)]$ jest zbiór wartości tej funkcji, a przeciwdziedziną — zbiór jej argumentów. Dziedziną relacji $<$ w zbiorze liczb naturalnych jest zbiór wszystkich liczb naturalnych, a przeciwdziedziną — zbiór liczb naturalnych różnych od 1.

Podajemy bez dowodu kilka praw, dotyczących dziedziny i przeciwdziedziny:

$$\begin{aligned} (31) \quad & \vdash \mathfrak{D}(\check{R}) = \mathfrak{C}(R), & \vdash \mathfrak{C}(\check{R}) = \mathfrak{D}(R). \\ (32) \quad & \vdash \mathfrak{D}(R+S) = \mathfrak{D}(R) + \mathfrak{D}(S), & \vdash \mathfrak{C}(R+S) = \mathfrak{C}(R) + \mathfrak{C}(S). \\ (33) \quad & \vdash \mathfrak{D}(R \cdot S) \subset \mathfrak{D}(R) \cdot \mathfrak{D}(S), & \vdash \mathfrak{C}(R \cdot S) \subset \mathfrak{C}(R) \cdot \mathfrak{C}(S). \end{aligned}$$

Sumę dziedziny i przeciwdziedziny nazywamy *polem* (po łacinie *campus*) relacji i oznaczamy symbolem $\mathfrak{C}(R)$:

$$\mathfrak{C}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{D}(R) + \mathfrak{C}(R).$$

Jeśli $\mathfrak{C}(R) = \mathfrak{D}(R) = \mathfrak{C}(R)$, to relację R nazywamy *jednorodną*.

Relacja R o *dziedzinie ograniczonej do zbioru X* określona jest wzorem

$$X|R \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y})[x \in X \cdot xRy].$$

Relacja R o *przeciwdziedzinie ograniczonej do zbioru Y* określona jest wzorem

$$R|Y \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y})[xRy \cdot y \in Y].$$

Wreszcie, relację *obustronnie ograniczoną* określamy jako

$$X|R|Y \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y})[x \in X \cdot xRy \cdot y \in Y].$$

Z określeń tych wynikają równoważności:

$$\begin{aligned} (34) \quad & \vdash xX|Ry \equiv x \in X \cdot xRy, & \vdash xR|Yy \equiv xRy \cdot y \in Y, \\ & \vdash xX|R|Yy \equiv x \in X \cdot xRy \cdot y \in Y. \end{aligned}$$

Relacje o ograniczonej dziedzinie lub przeciwdziedzinie trafiają się bardzo często w zastosowaniach. Jeśli np. f jest funkcją zmiennej rzeczywistej, a interesujemy się jej przebiegiem dla argumentów wymiernych, to rozpatrujemy relację $R|Y$, gdzie $R = (\hat{x}, \hat{y})[x=f(y)]$ i gdzie Y jest zbiorem liczb wymiernych.

Niech Y będzie zbiorem, a R relacją dwuczłonową. *Obrazem* zbioru Y danym przez relację R nazywamy zbiór

$$R(Y) \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}) \sum_y [xRy \cdot y \in Y].$$

Wynika stąd, że

$$(35) \quad \vdash x \in R(Y) \equiv \sum_y [xRy \cdot y \in Y],$$

skąd na podstawie (34) i (30) wynika łatwo, że

$$(36) \quad \vdash R(Y) = \mathfrak{D}(R|Y).$$

Wykres zbioru $R(Y)$ jest zatem rzutem na oś odciętych zbioru tych punktów wykresu relacji R , których rzędne należą do zbioru Y .

Tworzenie obrazu jest operacją *addytywną* zarówno ze względu na Y jak i na R , t. zn. że zachodzą wzory:

$$(37) \quad \vdash R(X+Y) = R(X) + R(Y), \quad \vdash (R+S)(Y) = R(Y) + S(Y).$$

Dowód. Z (35) otrzymujemy na mocy prawa rozdzielności małego kwantyfikatora względem alternatywy (Rozdział III, § 5, wzór (12), str. 65):

$$\begin{aligned} & \vdash x \in R(X+Y) \equiv \\ & \equiv \sum_y [(xRy) \cdot (y \in X+Y)] \equiv \sum_y [(xRy \cdot y \in X) + (xRy \cdot y \in Y)] \equiv \\ & \equiv \sum_y (xRy \cdot y \in X) + \sum_y (xRy \cdot y \in Y) \equiv x \in R(X) + x \in R(Y) \equiv \\ & \equiv x \in R(X) + R(Y), \end{aligned}$$

co dowodzi pierwszego ze wzorów (37). Dowód drugiego jest analogiczny.

Jako łatwy wniosek otrzymujemy:

$$(38) \quad \vdash X \subset Y \rightarrow R(X) \subset R(Y), \quad \vdash R \subset S \rightarrow R(X) \subset S(X).$$

Dowód. Na mocy pierwszego ze wzorów (37) jest

$$\vdash (Y=X+Y) \rightarrow [R(Y) = R(X) + R(Y)],$$

ponieważ zaś

$$\vdash (Y=X+Y) \equiv (X \subset Y) \text{ i } \vdash [R(Y) = R(X) + R(Y)] \equiv [R(X) \subset R(Y)],$$

więc wynika stąd od razu pierwszy ze wzorów (38). W podobny sposób otrzymuje się drugi z drugiego ze wzorów (37).

Pierwszy ze wzorów (38) wyraża następującą oczywistą myśl:

Jeśli każdy element zbioru X jest elementem zbioru Y , to każdy przedmiot, pozostający w relacji R do pewnego elementu zbioru X , pozostaje też w relacji R do pewnego elementu zbioru Y .

Jest to więc prawo równie oczywiste jak sylogizm *Barbara*, nie daje się ono jednak wyśłowić za pomocą żadnego sylogizmu, gdyż sylogistyka mówi wyłącznie o własnościach, podczas gdy w prawie (38) jest mowa o relacjach¹⁾.

Udowodnimy jeszcze prawo następujące:

$$(39) \quad \vdash (R;S)(Y) = R(S(Y)).$$

Dowód. Stosując prawo podane wzorem (16) w Rozdziale III (§ 5, str. 66), otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \vdash x \in (R;S)(Y) \equiv \\ & \equiv \sum_y (xR;Sy \cdot y \in Y) \equiv \sum_y \{ [\sum_z (xRz \cdot zSy)] \cdot y \in Y \} \equiv \\ & \equiv \sum_y \sum_z (xRz \cdot zSy \cdot y \in Y) \equiv \sum_z [xRz \cdot \sum_y (zSy \cdot y \in Y)] \equiv \\ & \equiv \sum_z [xRz \cdot z \in S(Y)] \equiv x \in R(S(Y)), \end{aligned}$$

skąd wynika natychmiast wzór (39).

Wzór (39) dowodzi, że obraz zbioru Y , dany przez relację złożoną $R;S$, powstaje przez dokonanie najpierw operacji $S(Y)$ i utworzenie następnie obrazu tego zbioru, danego przez relację R .

ĆWICZENIA. 1. Wykazać, że $\vdash \mathfrak{D}(1')=1$ i $\vdash \mathfrak{D}(1')=1$. Czy prawdą jest, że $\mathfrak{D}(0')=1$?

2. Czy zbiory $\mathfrak{D}(R)$ i $\mathfrak{D}(R')$ mogą być równe?

3. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby było $R;1'=1';R$, jest równość $\mathfrak{D}(R) = \mathfrak{C}(R)=1$.

4. Niech zbiór pełny 1 składa się z liczb naturalnych $n \leq p$. Ile jest relacji R takich, że $\mathfrak{D}(R)$ zawiera m elementów, a $\mathfrak{C}(R) = n$ elementów, przy czym $1 \leq m \leq p$ i $1 \leq n \leq p$?

$$\text{Odp.: } \binom{p}{m} \binom{p}{n} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m}{j} (2^{m-j} - 1)^n.$$

5. Dowieść, że $\vdash (X|R)|Y = X|R|Y = X|(R|Y)$.

6. Dowieść, że $\vdash \mathfrak{D}(X|R) = X \cdot \mathfrak{D}(R)$.

7. Udowodnić wzory $\vdash (X+Y)|R = X|R+Y|R$, $\vdash X|(R+S) = X|R+X|S$ i podobne wzory dla iloczynów.

¹⁾ Jak podają Russell i Whitehead w *Principia Mathematica* (tom I, str. 291), logik angielski A. de Morgan miał się wyrazić krytycznie o sylogistyce, że jest to nauka, której prawa nie pozwalają uzasadnić nawet tak prostego rozumowania: każdy koń jest zwierzęciem, zatem głowa konia jest głową zwierzęcia. Prawo (38) daje uzasadnienie tego rozumowania. Wystarczy przyjąć za X zbiór koni, za Y — zbiór zwierząt, a za R — relację $(\hat{x}, \hat{y}) [x \text{ jest głową } y]$.

8. Zbadać czy we wzorach (33) można znak inkluzji zastąpić znakiem równości.

9. Dowieść, że obraz części wspólnej dwu zbiorów jest zawarty w części wspólnej obrazów, ale nie musi być jej równy.

10. Dowieść, że wzór $R(X \cdot Y) = R(X) \cdot R(Y)$ zachodzi dla wszystkich X i Y wtedy i tylko wtedy, gdy $\check{R};R=1'$.

11. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby $R(X) = X$ dla każdego X , jest $R=1'$.

12. Dowieść, że na to, by dla każdego X zachodziła równość $\check{R}(R(X))=X$, potrzeba i wystarcza, by $\check{R};R=1'$.

13. Udowodnić wzory $\vdash \mathfrak{D}(R) = R(\mathfrak{C}(R))$ i $\vdash \mathfrak{C}(R) = \check{R}(\mathfrak{D}(R))$.

§ 5. Relacje zwrotne, symetryczne, przechodnie oraz pokrewne typy relacji. Omówimy teraz specjalne typy relacji, które spotykamy często w praktyce matematycznej.

Relacja (dwuczłonowa) R nazywa się *zwrotna* w X , jeśli dla każdego elementu x zbioru X zachodzi wzór xRx . Relacja R nazywa się *przeciwzwrotna* w X , jeśli wzór ten nie zachodzi dla żadnego elementu x zbioru X .

Zbiór relacji zwrotnych w X oznaczamy symbolem $\text{refl}(X)$, przeciwzwrotnych w X — symbolem $\text{arefl}(X)$. Definicje te zapisać możemy wzorami:

$$\text{refl}(X) \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{R}) [\prod_{x \in X} (xRx)], \quad \text{arefl}(X) \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{R}) [\prod_{x \in X} (xR'x)],$$

z których wynikają prawa:

$$(40) \quad \vdash R \in \text{refl}(X) \equiv \prod_{x \in X} (xRx), \quad \vdash R \in \text{arefl}(X) \equiv \prod_{x \in X} (xR'x).$$

Wykres relacji zwrotnej w X zawiera wszystkie punkty przekątnej $y=x$ układu współrzędnych, leżące ponad punktami zbioru X ; wykres zaś relacji przeciwzwrotnej nie zawiera żadnego takiego punktu. Opierając się na tym, łatwo sprawdzić, że suma i iloczyn relacji zwrotnych w X (przeciwzwrotnych w X) jest znów relacją zwrotną w X (przeciwzwrotną w X). Relacja odwrotna do zwrotnej w X jest też zwrotna w X , relacja odwrotna do przeciwzwrotnej w X — przeciwzwrotna w X . Natomiast uzupełnienie relacji zwrotnej w X jest relacją przeciwzwrotną w X i na odwrót. Wszystkie te twierdzenia z łatwością można napisać w postaci tautologii i podać dla nich dowody formalne.

Relacja R nazywa się *symetryczna* w X , jeśli dla każdego dwu elementów x, y zbioru X warunki xRy i yRx są równoważne.

Relacja R nazywa się *antysymetryczna* (lub *przeciw-symetryczna*) w X , jeśli warunki te wyłączają się nawzajem.

Zbiór relacji symetrycznych w X oznaczamy symbolem $\text{sym}(X)$, a antisymetrycznych w X — symbolem $\text{asym}(X)$.

Mamy więc:

$$\text{sym}(X) \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{R}) \{ \prod_{x,y \in X} [xRy \equiv yRx] \},$$

$$\text{asym}(X) \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{R}) \{ \prod_{x,y \in X} [xRy \rightarrow yR'x] \};$$

wynikają stąd prawa:

$$(41) \quad \begin{aligned} \vdash R \in \text{sym}(X) &\equiv \prod_{x,y \in X} [xRy \equiv yRx], \\ \vdash R \in \text{asym}(X) &\equiv \prod_{x,y \in X} [xRy \rightarrow yR'x]. \end{aligned}$$

Jeśli X jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, to pojęcie symetrii i antisymetrii relacji ma prostą interpretację geometryczną: wykres relacji symetrycznej w X jest położony symetrycznie względem prostej $y=x$, wykres zaś relacji przeciw-symetrycznej w X nie zawiera żadnej pary punktów położonych symetrycznie względem tej prostej.

Poza przeciw-symetrycznymi pewną rolę grają jeszcze relacje *na wpół przeciw-symetryczne*, t. j. takie, dla których warunki xRy i yRx wyłączają się nawzajem, gdy $x \neq y$, mogą zaś zachodzić jednocześnie, gdy $x = y$. Zbiór relacji na wpół przeciw-symetrycznych w X oznaczamy będziemy symbolem $\text{asym}^*(X)$:

$$\text{asym}^*(X) = (\hat{R}) \{ \prod_{x,y \in X} [(x \neq y) \cdot xRy \rightarrow yR'x] \};$$

stad

$$(42) \quad \vdash R \in \text{asym}^*(X) \equiv \prod_{x,y \in X} [(x \neq y) \cdot xRy \rightarrow yR'x].$$

Przykładem relacji przeciw-symetrycznej jest $<$, na wpół przeciw-symetrycznej $\leq$.

Zbiór relacji *przechodnich* w zbiorze X wprowadzamy definicją następującą:

$$\text{trans}(X) \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{R}) \prod_{x,y,z \in X} [xRy \cdot yRz \rightarrow xRz].$$

Mamy zatem

$$(43) \quad \vdash R \in \text{trans}(X) \equiv \prod_{x,y,z \in X} [xRy \cdot yRz \rightarrow xRz].$$

Relacje *przechodnie* są szczególnie częste w zastosowaniach. Wymienimy jako przykłady relacje mniejszości, zawierania, po-

dzielnosci liczb całkowitych, równoległości prostych, podobieństwa trójkątów i t. p. Nieprzechodnimi są np. relacje: różność, $(\hat{x}, \hat{y}) [x = y^2]$, $(\hat{x}, \hat{y}) [x \text{ jest synem } y]$.

Jeśli zbiór X jest pełny, to pisać będziemy krótko „refl” zamiast „refl(1)”; podobnie skracać będziemy pozostałe wprowadzone tu symbole.

Relacje należące do zbiorów refl , arefl , sym , asym , asym^* i trans można łatwo scharakteryzować za pomocą wzorów, zawierających tylko symbole działań na relacjach oraz nazwy relacji stałych $0'$ i $1'$. Z praw (40)-(43) wnosimy mianowicie z łatwością, że:

$$\begin{aligned} \vdash R \in \text{refl} &\equiv 1' \subset R, & \vdash R \in \text{arefl} &\equiv R \subset 0', \\ \vdash R \in \text{sym} &\equiv R = \check{R}, & \vdash R \in \text{asym} &\equiv R \subset \check{R}', \\ \vdash R \in \text{asym}^* &\equiv R \cdot \check{R} \subset 1', & \vdash R \in \text{trans} &\equiv R; R \subset R. \end{aligned}$$

Prawa te można wykorzystać dla rachunkowych dowodów niektórych twierdzeń o zdefiniowanych tu zbiorach relacji. Np. ze wzoru $\vdash R \subset S \rightarrow \check{R} \subset \check{S}$ wynika na mocy (12)

$$\vdash R; R \subset R \rightarrow \check{R}; \check{R} \subset \check{R},$$

skąd wnosimy, że *relacja odwrotna do przechodniej jest przechodnia*.

Inny przykład: z (9) wynika $\vdash (1' \subset R) \cdot (1' \subset S) \rightarrow (1'; 1' \subset R; S)$, a ponieważ $1'; 1' = 1'$, więc

$$\vdash (1' \subset R) \cdot (1' \subset S) \rightarrow (1' \subset R; S).$$

Wzór ten dowodzi, że *iloczyn względny relacji zwrotnych jest zwrotny*.

Można sformułować wiele twierdzeń tego rodzaju, nie będziemy się jednak na nie powoływać w dalszym ciągu książki i dlatego ograniczamy się tylko do tych dwu przykładów; kilka innych podajemy w ćwiczeniach.

ĆWICZENIA. 1. Najogólniejszym typem relacji zwrotnej w X jest $S + X[1']X$, najogólniejszym typem relacji przeciwzwrotnej w X jest $S \cdot (X[0']X)$, gdzie S jest relacją dowolną.

2. Znaleźć najogólniejszą postać relacji symetrycznej oraz najogólniejszą postać relacji przeciw-symetrycznej w zbiorze pełnym.

3. Obliczyć ilość różnych relacji zwrotnych, przeciwzwrotnych, symetrycznych, przeciw-symetrycznych i na wpół przeciw-symetrycznych, o ile zbiór pełny składa się z n elementów.

Odp.: $2^{n(n-1)}$, $2^{n(n-1)}$, $2^{\frac{1}{2}n(n+1)}$, $3^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, $2^n \cdot 3^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

5. Udowodnić wzory:

$$\vdash R \in \text{sym}(X) \equiv \prod_{x,y \in X} (xRy \rightarrow yRx) \quad \text{ i } \quad \vdash R \in \text{sym}(1) \equiv R \subset \check{R}.$$

4. Wykazać, że dla żadnej relacji R nie zachodzi równość $\check{R} = R'$.

5. Wykazać, że relacja odwrotna do przeciwzwrotnej jest też przeciwzwrotna oraz że suma i iloczyn relacji przeciwzwrotnych są relacjami przeciwzwrotnymi, natomiast że iloczyn względny relacji przeciwzwrotnych może nie być przeciwzwrotny.

6. Wykazać, że $\vdash R \in \text{sym}(X) \equiv R' \in \text{sym}(X)$.

7. Wykazać, że jeśli R jest relacją przechodnią, to relacje $R;R$, $R;R;R$, ... są też przechodnie.

8. Dowieść, że iloczyn dwu relacji przechodnich jest też relacją przechodnią.

9. Dowieść, że jeśli relacje R i S są przechodnie, to istnieje taka relacja przechodnia T , że $R \subset T$, $S \subset T$ i przy tym T jest zawarte w każdej relacji przechodniej, zawierającej R i S .

Wsk.: $T = (\hat{x}, \hat{y})$ [istnieją takie elementy $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$, że xRu_1, u_1Sv_1 dla $i=1, 2, \dots, n$, v_jRu_{j+1} dla $j=1, 2, \dots, n-1$ oraz $v_n(R+1)y$].

10. Jeśli relacje R i S są przechodnie, to istnieje relacja przechodnia zawarta w R i w S , a przy tym zawierająca każdą relację zawartą w R i S .

11. Zbadać, czy twierdzenia wysłowione w ćwiczeniach 9 i 10 pozostają prawdziwe dla relacji zwrotnych, przeciwzwrotnych, symetrycznych i przeciw-symetrycznych.

§ 6. Równoważności. Relacje, które są zarazem zwrotne, symetryczne i przechodnie w zbiorze X , nazywają się *równoważnościami* w zbiorze X ¹⁾.

Zbiór równoważności w X oznaczamy symbolem $\text{aeq}(X)$. Mamy więc

$$\text{aeq}(X) \equiv_{df} [\check{R}][R \in \text{refl}(X) \cdot R \in \text{sym}(X) \cdot R \in \text{trans}(X)].$$

Stąd

$$(44) \quad \vdash R \in \text{aeq}(X) \equiv R \in \text{refl}(X) \cdot R \in \text{sym}(X) \cdot R \in \text{trans}(X).$$

¹⁾ Na doniosłość tych relacji dla różnych dziedzin logiki i matematyki zwrócił pierwszy uwagę G. Frege w książce: *Die Grundlagen der Arithmetik*, Wrocław 1884 (przedruk Wrocław 1934), str. 73-80.

PRZYKŁADY. Relacja

$(\hat{x}, \hat{y})[x \text{ ma tę samą długość co } y]$

jest równoważnością w zbiorze wszystkich odcinków. Relacja

$(\hat{x}, \hat{y})[\text{kąty figury } x \text{ są równe kątom figury } y]$

jest równoważnością w zbiorze wszystkich wielokątów. Relacja

$(\hat{x}, \hat{y})[x \text{ ma ten sam kolor co } y]$

jest równoważnością w zbiorze wszystkich przedmiotów o barwach jednolitych.

Przykłady te zbudowane są w pewien systematyczny sposób: relacja R zachodzi między przedmiotami x a y wtedy i tylko wtedy, gdy mają one pewną własność wspólną, np. długość, kolor i t. p. Tak samo relacja R , zachodząca między dwoma przedmiotami x a y wtedy i tylko wtedy, gdy mają one kilka własności wspólnych (np. ten sam kolor i ten sam kształt) jest równoważnością. Relacja R , zachodząca między przedmiotami x a y wtedy i tylko wtedy, gdy mają one wszystkie własności wspólne, jest też relacją równoważności. Jest to znana nam z Rozdziału V (§1, str. 110) relacja równości ¹⁾.

W celu ogólniejszego i bardziej precyzyjnego sformułowania tych uwag wprowadzimy następującą definicję:

Definicja. Zbiór zbiorów (czyli zbiór własności) $\mathfrak{X}$ nazywać będziemy *podziałem (klasyfikacją)* zbioru X , jeśli:

1^o każdy element zbioru X ma co najmniej jedną z własności należących do $\mathfrak{X}$,

2^o jeśli własności $\mathfrak{X}$ i $\mathfrak{Y}$ należą do $\mathfrak{X}$, to są one równe albo rozłączne.

Symbolicznie:

$$(45) \quad \text{part}(X) \equiv_{df} (\hat{\mathfrak{X}}) \{ [\prod_{x \in X} \sum_{Y \in \mathfrak{X}} (x \in Y)] \cdot \prod_{Y, Z \in \mathfrak{X}} [(Y=Z) + (Y \cdot Z = 0)] \}.$$

Np. jeśli X jest zbiorem przedmiotów o jednolitych barwach, to podziałem zbioru X jest zbiór $\mathfrak{X}$, składający się ze zbiorów: wszystkich przedmiotów czerwonych, wszystkich przedmiotów zielonych i t. d.

Uwaga, że relacja, która zachodzi między dwoma przedmiotami wtedy i tylko wtedy, gdy mają one pewną własność wspólną,

jest równoważnością, może być teraz wysłowiona w formie następującego twierdzenia ¹⁾:

$$(46_1) \quad \vdash \exists x \in \text{part}(X) \cdot \prod_{x,y \in X} [xRy \equiv \sum_{Y \in \mathfrak{A}} (x \in Y \cdot y \in Y)] \rightarrow R \in \text{aeq}(X).$$

Nasuwa się pytanie odwrotne: czy dla każdej relacji R , która jest równoważnością w X , istnieje taki podział $\mathfrak{A}$ zbioru X , że relacja R zachodzi między dwoma elementami x a y zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy należą one do tego samego $Y \in \mathfrak{A}$?

Odpowiedź jest twierdząca. Aby określić taki podział $\mathfrak{A}$ zbioru X , wprowadzimy następującą definicję:

$$(47) \quad \mathfrak{A}(R, X) \stackrel{\text{def}}{=} \{Y \subset X \cdot \sum_{x \in X} \prod_{y \in X} [y \in Y \equiv yRx]\}.$$

W przypadku, gdy R jest równoważnością, będziemy nazywali $\mathfrak{A}(R, X)$ rodziną *klas abstrakcji* relacji R , zbiory zaś wchodzące do $\mathfrak{A}(R, X)$ jako elementy — *klasami abstrakcji* relacji R .

Można wykazać ²⁾, że jeśli $R \in \text{aeq}(X)$, to $\mathfrak{A}(R, X)$ jest podziałem zbioru X i przy tym relacja R zachodzi wtedy i tylko wtedy między dowolnymi elementami x a y zbioru X , gdy istnieje zbiór $Y \in \mathfrak{A}(R, X)$ zawierający zarówno x jak y wśród swych elementów:

$$(46_2) \quad \vdash R \in \text{aeq}(X) \rightarrow \mathfrak{A}(R, X) \in \text{part}(X),$$

$$(46_3) \quad \vdash R \in \text{aeq}(X) \rightarrow \prod_{x,y \in X} [xRy \equiv \sum_{Y \in \mathfrak{A}(R, X)} (x \in Y \cdot y \in Y)].$$

Twierdzenia (46₁), (46₂) i (46₃) wyjaśniają całkowicie strukturę relacji równoważności. Trzy te twierdzenia obejmujemy łączną nazwą *zasady abstrakcji*.

Z twierdzeń (46₁)-(46₃) korzystamy w matematyce bardzo często, szczególnie gdy zachodzi potrzeba wprowadzenia nowych tworów matematycznych np. dla zapewnienia wykonalności pewnych działań. Rozpatrzmy kilka typowych przykładów.

PRZYKŁADY. 1. Definicja liczb względnych. Zakładamy, że zbudowana jest już arytmetyka liczb naturalnych, t.j. liczb 1, 2, 3, ... Liczby względne pojmować możemy jako własności uporządkowanych par liczb naturalnych. Np. pary uporządkowane (3,1), (7,5), (12,10), ... mają tę własność wspólną, że poprzednik jest większy o 2 od następnika; tę wspólną własność

¹⁾ Dowód tego twierdzenia podany jest w Dodatku do Rozdziału VI, (§ 10, str. 162-163).

²⁾ Zob. tamże, str. 163-164.

nazywać możemy *liczbą względną* +2. Pary uporządkowane (2,4), (9,11), (6,8), ... mają tę wspólną własność, że poprzednik ich jest o 2 mniejszy od następnika; własność tę nazywamy *liczbą względną* -2.

Ogólnie: aby określić liczby względne, oznaczamy przez X zbiór utworzony ze wszystkich uporządkowanych par liczb naturalnych i definiujemy w nim relację R , jak następuje: wzór $(x,y)R(z,t)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x+t = y+z$ ¹⁾. Opierając się na najprostszyszych własnościach dodawania liczb naturalnych, dowodzimy, że $R \in \text{aeq}(X)$. Na mocy twierdzeń (46₂) i (46₃) rodzina $\mathfrak{A}(R, X)$ klas abstrakcji relacji R jest więc podziałem zbioru X , t.j. każda para uporządkowana (x,y) liczb naturalnych należy do jednej z klas abstrakcji i różne klasy abstrakcji relacji R są rozłączne. Wzór $(x,y)R(z,t)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy pary (x,y) i (z,t) należą do tej samej klasy abstrakcji.

Klasy abstrakcji relacji R , czyli zbiory należące do $\mathfrak{A}(R, X)$, nazywamy *liczbami względnymi*.

Na liczbach tych określamy działania dodawania i mnożenia w następujący sposób: liczba względna Y jest sumą liczb względnych Z_1 i Z_2 , jeśli istnieją w Z_1 i Z_2 takie pary uporządkowane (x_1, x_2) i (y_1, y_2) że $(x_1+y_1, x_2+y_2) \in Y$; liczba względna Y jest iloczynem liczb względnych Z_1 i Z_2 , jeśli istnieją w Z_1 i Z_2 takie pary uporządkowane (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , że $(x_1x_2 + y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \in Y$.

W arytmetyce teoretycznej dowodzi się, że tak określone działania podlegają wszystkim prawom, znanym z arytmetyki liczb naturalnych (np. prawom przemienności, łączności i rozdzielności), a nadto że w dziedzinie liczb względnych wykonalne jest zawsze działanie odejmowania ²⁾.

Podana tutaj definicja liczb względnych wydać się może na pierwszy rzut oka nienaturalna; wrażenie to jednak ustąpi, gdy uświadomimy sobie, że liczby względne są to twory, które umożliwić nam mają odpowiedź na pytanie, o ile jedna liczba jest większa lub mniejsza od drugiej.

¹⁾ Pole relacji R składa się z par uporządkowanych; definicja formalna tego pojęcia podana jest dalej, w § 8, str. 148. Zaznaczyliśmy już w Rozdziale IV, (§ 1, str. 83), że nie nakładamy żadnych ograniczeń na elementy zbioru pełnego 1; elementami jego mogą więc być w szczególności pary uporządkowane.

²⁾ Dowody tych twierdzeń można znaleźć np. w książeczce: E. Landau, *Grundlagen der Analysis*, Lipsk 1930 (2-e wyd. New-York 1946).

2. Definicja liczb wymiernych. Podobnie jak liczby względne w przykładzie 1, określamy liczby wymierne jako własności uporządkowanych par liczb względnych. Oznaczmy przez X zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y) liczb względnych, których następnik jest różny od 0. Relacja R niech zachodzi między dwiema parami (x, y) a (z, t) zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy $xt = yz$. Łatwo wykazać, że $R \in \text{aeq}(X)$; zbiór X rozpada się więc na rozłączne klasy abstrakcji tej relacji.

Klasy te nazywamy *liczbami roymiernymi*.

Dalsze rozwinięcie teorii liczb wymiernych na podstawie tej definicji znajdzie czytelnik w cytowanej książeczce Landau'a.

3. Teoria Cantora liczb rzeczywistych. Oznaczmy przez X zbiór ciągów

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

o wyrazach wymiernych, czyniących zadość warunkowi Cauchy'ego

$$\prod_{\epsilon > 0} \sum_m \prod_n [n > m \rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon].$$

W zbiorze X określamy relację R : zachodzi ona między dwoma ciągami $x = (x_1, x_2, \dots)$ a $y = (y_1, y_2, \dots)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$.

Relacja R jest równoważnością w X ; klasy abstrakcji tej relacji nazywamy według Cantora *liczbami rzeczywistymi*¹⁾.

Z przykładów 1-3 widzimy, że arytmetyka teoretyczna posługuje się bezustannie twierdzeniami (46₂) i (46₃) przy konstruowaniu coraz to ogólniejszych rodzajów liczb w oparciu o teorię liczb naturalnych.

Zobaczymy w Rozdziale VII, że i przy definicji pojęcia liczby naturalnej zasada abstrakcji gra doniosłą rolę.

Podamy jeszcze przykłady dwu zastosowań zasady abstrakcji w geometrii.

4. Relacja równoległości prostych jest równoważnością w zbiorze wszystkich prostych.

Klasy abstrakcji tej relacji nazywamy *kierunkami*.

¹⁾ Teoria Cantora przedstawiona jest szczegółowo w książce: W. Sierpiński, *Teoria liczb nieracjonalnych (Wstęp do Analizy)*, Lwów 1928.

5. Definicja półprostej. Niech X będzie zbiorem punktów prostej, O — dowolnym punktem zbioru X , a U — relacją trójczłonową

$$(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) \text{ [punkt } B \text{ leży między } A \text{ a } C]^1).$$

Z pewników geometrii²⁾ wynika, że relacja $R = (\hat{A}, \hat{B}) [U'(A, O, B)]$ jest równoważnością w X ; zbiór X rozpada się więc na rozłączne klasy abstrakcji tej relacji. Dowodzi się, że są tylko dwie takie klasy abstrakcji dla każdego punktu O ; nazywamy je *półprostymi* rozważanej prostej, wyznaczonymi przez punkt O .

W podobny sposób zdefiniować można *półpłaszczyznę* jako klasy abstrakcji pewnej relacji między punktami³⁾.

Z przykładów tych widoczne jest, jak liczne są zastosowania relacji równoważności w różnych działach matematyki⁴⁾.

ĆWICZENIA. 1. Wykazać, że

$$\vdash R \in \text{aeq}(X) \equiv R \in \text{refl}(X) \cdot \prod_{x, y, z \in X} [x R y \cdot x R z \rightarrow y R z].$$

2. Wykazać, że $\vdash R \in \text{aeq}(1) \equiv (1' \subset R) \cdot (\hat{R}; R \subset R)$.

3. Wykazać, że jeśli X jest zbiorem wszystkich zbiorów skończonych, to relacja $(\hat{X}, \hat{Y}) [X \cdot Y' + Y \cdot X' \in X]$ jest równoważnością w zbiorze wszystkich zbiorów (zawartych w zbiorze pełnym 1).

4. Wykazać, że jeśli G jest grupą, a H jej podgrupą, to relacja $(\hat{x}, \hat{y}) [xy^{-1} \in H]$ jest równoważnością w G . Klasami abstrakcji są prawostronne warstwy grupy G względem H .

5. Określić przy pomocy relacji *leżenia między* (por. przykład 5) taką relację równoważności w zbiorze uporządkowanych par różnych punktów jednej prostej, by jej klasy abstrakcji nazwać można było *zwrotami* prostej.

Odp.: Relacja ma zachodzić między parami (A, B) i (C, D) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$U(C, A, B) \cdot U'(D, C, A) + (C = A) \cdot U'(D, A, B) + U(A, C, B) \cdot U'(D, C, B) + \\ + (C = B) \cdot U(A, B, D) + U(A, B, C) \cdot U(B, C, D).$$

6. Udowodnić dla relacji równoważności twierdzenie, podane w § 5, str. 136, zadanie 9⁵⁾.

¹⁾ Relacja ta jest jednym z pojęć pierwotnych geometrii elementarnej na równi z pojęciami punktu, prostej, przystawania i innymi.

²⁾ Np. z pewników D. Hilberta, zamieszczonych w jego znanej książce *Grundlagen der Geometrie*, wyd. 7-e, Lipsk-Berlin 1930.

³⁾ Zob. D. Hilbert, tamże, str. 8-9.

⁴⁾ Algebraiczną stronę teorii rozpatrywanych tu relacji omawia P. Dubreil w swej książce *Algèbre*, Paryż 1946, Rozdział I. W książce tej podana jest dalsza literatura przedmiotu.

⁵⁾ Zob. P. Dubreil, tamże, str. 15-16.

§ 7. Relacje spójne, porządkujące i porządki częściowe. Relacja R nazywa się *spójną* w zbiorze X , jeśli dla każdych dwu różnych elementów zbioru X zachodzi bądź xRy , bądź yRx .

Zbiór relacji spójnych w X oznaczamy (od łacińskiego *connectare*) symbolem $\text{con}(X)$.

Definicja ta, napisana wzorem logicznym, ma postać

$$(48) \quad \text{con}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{R \mid \prod_{x,y \in X} [(x=y) + xRy + yRx]\}.$$

W zbiorze liczb naturalnych relacjami spójnymi są np. $<$, $\leq$ i $0'$, relacjami zaś niespójnymi — np. podzielność, względna pierwszość i równość. Relacja inkluzji w zbiorze wszystkich podzbiorów zbioru pełnego jest spójna, o ile zbiór pełny zawiera dokładnie jeden element; w przeciwnym razie nie jest ona spójna. Natomiast w zbiorze wszystkich odcinków osi odciętych, których środkiem jest punkt 0, relacja inkluzji jest spójna. Relacja pusta jest spójna w zbiorze zawierającym dokładnie jeden element, nie jest zaś spójna w żadnym innym zbiorze.

Jeśli relacja jest zarazem zwrotna, na wpół przeciwsymetryczna, przechodnia i spójna w zbiorze X , to mówimy, że *porządkuje* ona zbiór X .

Zbiór wszystkich relacji porządkujących X oznaczamy symbolem $\text{ord}(X)$.

Formalnie definicję tę zapisujemy wzorem

$$(49) \quad \text{ord}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{R \mid [R \in \text{refl}(X) \cdot R \in \text{asym}^*(X) \cdot R \in \text{trans}(X) \cdot R \in \text{con}(X)]\}.$$

Jeśli $R \in \text{ord}(X)$, to wzór xRy czytamy zazwyczaj:

x jest niepóźniejsze niż y ze względu na relację R .

PRZYKŁADY. Relacje $\leq$ i $\geq$ porządkują zbiór liczb rzeczywistych.

Oznaczmy symbolami $\mathcal{R}(x)$ i $\mathcal{I}(x)$ odpowiednio część rzeczywistą i część urojoną liczby zespolonej x ; wówczas relacja

$$(\hat{x}, \hat{y}) \{[\mathcal{R}(x) \leq \mathcal{R}(y)] + [\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)] \cdot [\mathcal{I}(x) \leq \mathcal{I}(y)]\}$$

porządkuje zbiór liczb zespolonych.

Relacja $(\hat{x}, \hat{y}) \{(y=1) + (1 < x \leq y)\}$ porządkuje zbiór liczb naturalnych. Tę samą własność ma relacja

$$(50) \quad (\hat{x}, \hat{y}) \{(2|x) \cdot (2|y) + (2|x)' \cdot (2|y)'\} \cdot x \leq y + (2|x) \cdot (2|y)',$$

gdzie wyrażenie $2|x$ czytamy: *liczba 2 jest dzielnikiem liczby x*

W ostatnim przykładzie każda liczba parzysta jest niepóźniejsza niż każda liczba nieparzysta; z dwu zaś liczb, które jednocześnie są bądź parzyste, bądź nieparzyste, niepóźniejsza jest ta, która jest nie większa. Można więc obrazowo powiedzieć, że rozpatrywane tu uporządkowanie powstaje w ten sposób, że najpierw szeregujemy liczby parzyste według ich wielkości, a po nich stawiamy liczby nieparzyste też uszeregowane według wielkości. Równie łatwo można sobie uzmysłwić sens intuicyjny pozostałych przykładów.

W matematyce mówi się często o *zbiorach uporządkowanych*. Taki sposób wyrażania się nie jest ścisły; poprawny byłby zwrot: *zbiór uporządkowany ze względu na taką a taką relację*. Uporządkowanie bowiem nie jest cechą samego tylko zbioru. Widzieliśmy na przykładach, że jeden i ten sam zbiór może być uporządkowany na wiele różnych sposobów przez podanie różnych relacji porządkujących. Istotną dla pojęcia uporządkowania jest więc relacja, nie zaś sam zbiór.

Badaniem relacji porządkujących zajmuje się pewien dział teorii mnogości¹⁾. Ograniczymy się tutaj do podania kilku definicji z zakresu tej teorii.

Jeśli $R \in \text{ord}(X)$ i Y jest niepustym zbiorem zawartym w X , to (każdy) taki element $y \in Y$, że $\prod_{z \in Y} [yRz]$, nazywamy *minimum* (albo *pierwszym elementem*) zbioru Y ze względu na relację R . Element zaś $y \in Y$ taki, że $\prod_{z \in Y} [zRy]$, nazywamy *maksimum* (albo *ostatnim elementem*) zbioru Y ze względu na relację R . Ani minimum, ani maksimum nie muszą istnieć; jeśli jednak istnieją, to są wyznaczone jednoznacznie.

Najwcześniejszy element zbioru $(\hat{y})[xRy \cdot y \neq x]$, o ile istnieje, nazywa się *następnikiem* elementu x ze względu na relację R .

¹⁾ Zobacz np. W. Sierpiński, *Zarys teorii mnogości*, tom I, Warszawa 1928, Rozdział VIII. Definicja relacji porządkujących, przyjmowana zazwyczaj w teorii mnogości, różni się nieco od tutaj podanej. O relacji takiej zakłada się mianowicie spójność, przechodniość i przeciwzwrotność (zamiast zwrotności), pomijając warunek $R \in \text{asym}^*(X)$; nadto zakłada się, że polem tej relacji jest zbiór X (por. § 4, str. 150). Łatwo wykazać, że jeśli zbiór X ma co najmniej dwa elementy i $R \in \text{ord}(X)$, to relacja $X \cdot R \cdot 0' \cdot X$ czyni zadość wszystkim tym warunkom. Na odwrot, jeśli relacja R czyni zadość tym warunkom, to $R + 1' \in \text{ord}(X)$. Definicja podawana w teorii mnogości nie różni się więc istotnie od naszej, a jest mniej dogłębna, gdyż w myśl tej definicji zbiór jednoelementowy nie może być uporządkowany.

Ostatni element zbioru $\{y\}[yRx \cdot y \neq x]$, o ile istnieje, nazywa się *poprzednikiem* elementu x ze względu na tę relację.

Jeśli każdy niepusty podzbiór Y zbioru X posiada minimum ze względu na relację R , to mówimy, że R *dobrze porządkuje* zbiór X .

Zbiór relacji dobrze porządkujących X oznaczamy symbolem $\text{bord}(X)$:

$$\text{bord}(X) =_{df} \{\hat{R} \mid R \in \text{ord}(X) \cdot \prod_{Y \subset X} [Y \neq \emptyset \rightarrow \sum_{y \in Y} \prod_{z \in Y} (yRz)]\}.$$

Przykładem relacji dobrze porządkującej zbiór liczb naturalnych jest relacja $\leq$.

Również relacja (50) dobrze porządkuje zbiór liczb naturalnych. Natomiast relacja

$$(\hat{x}, \hat{y})[(2|x) \cdot (2|y) \cdot (x \leq y) + (2|x) \cdot (2|y)' + (2|x)' \cdot (2|y)' \cdot (y \leq x)]$$

nie porządkuje dobrze zbioru liczb naturalnych, gdyż w zbiorze liczb nieparzystych nie istnieje element pierwszy ze względu na tę relację.

Porządkiem (lub *uporządkowaniem*) *częściowym* zbioru X nazywamy relację zwrotną, na wpół przeciwsymetryczną i przechodnią w X .

Zbiór tych relacji oznaczamy symbolem $\text{ord}^*(X)$:

$$\text{ord}^*(X) =_{df} \{\hat{R} \mid R \in \text{refl}(X) \cdot R \in \text{asym}^*(X) \cdot R \in \text{trans}(X)\}.$$

Każda relacja porządkująca zbiór X jest też jego porządkiem częściowym, ale niekoniecznie na odwrót, gdyż porządek częściowy nie musi być spójny w X . Przykładami porządków częściowych są: relacja inkluzji (w dowolnym zbiorze zbiorów lub relacji) oraz relacja podzielności (w zbiorze liczb naturalnych).

Uogólniając pojęcia maksimum i minimum zbioru, określone dla relacji porządkujących, dochodzimy do pojęć *najmniejszej wspólnej wielokrotności* i *największego wspólnego dzielnika* zbioru Y ze względu na relację częściowego porządku R .

Żałujemy mianowicie, że $R \in \text{ord}^*(X)$ i że Y jest niepustym podzbiorem zbioru X . Element d zbioru X (który może należeć do Y lub nie) nazywa się *największym wspólnym dzielnikiem* zbioru Y ze względu na R , jeśli

$$\prod_{y \in Y} (dRy) \cdot \prod_{x \in X} [\prod_{y \in Y} (xRy) \rightarrow xRd].$$

Element m zbioru X nazywa się *najmniejszą wspólną wielokrotnością* zbioru Y ze względu na R , jeśli

$$\prod_{y \in Y} (yRm) \cdot \prod_{x \in X} [\prod_{y \in Y} (yRx) \rightarrow mRx].$$

Ani najmniejsza wspólna wielokrotność, ani największy wspólny dzielnik zbioru Y nie muszą istnieć nawet w przypadku, gdy zbiór Y składa się z dwu elementów. Można jednak łatwo wykazać, że jeśli najmniejsza wspólna wielokrotność — i, podobnie, największy wspólny dzielnik — istnieją, to są wyznaczone jednoznacznie.

Jeśli zbiór Y składa się ze skończonej liczby elementów $x, y, \dots, u$, to najmniejszą wspólną wielokrotność zbioru Y nazywamy po prostu *najmniejszą wspólną wielokrotnością* tych elementów; podobnego zwrotu używamy też w stosunku do największego wspólnego dzielnika.

Zbiór X nazywa się *strukturą* ze względu na relację R , jeśli $R \in \text{ord}^*(X)$ i jeśli dla każdych dwu elementów X istnieje najmniejsza wspólna wielokrotność oraz największy wspólny dzielnik.

Struktura X nazywa się *zupełną*, jeśli każdy niepusty podzbiór zbioru X posiada najmniejszą wspólną wielokrotność i największy wspólny dzielnik.

Teoria struktur stanowi interesujące uogólnienie teorii zbiorów uporządkowanych i znajduje liczne zastosowania¹⁾.

CWICZENIA. 1. Udowodnić następujące *prawa monotonii*:

$$\vdash X \subset Y \cdot R \in \text{con}(Y) \rightarrow R \in \text{con}(X), \quad \vdash R \subset S \cdot R \in \text{con}(X) \rightarrow S \in \text{con}(X).$$

2. Suma dwu relacji spójnych w zbiorze X jest spójna w tym zbiorze. Zbadaj czy jest to prawdą dla iloczynu oraz iloczynu względnego relacji spójnych.

3. Dowieść, że $\vdash R \in \text{con}(1) \equiv [1' + R + \check{R} = 1'] \equiv [R' \subset \check{R} + 1']$.

4. Dowieść, że $\vdash R \in \text{con}(X) \equiv R' \in \text{asym}^*(X)$ oraz $\vdash R \in \text{trans}(X) \cdot \text{con}(X) \rightarrow R' \in \text{trans}(X)$. Obliczyć na podstawie pierwszego z tych twierdzeń ilość relacji należących do $\text{con}(1)$, jeśli zbiór pełny 1 ma n elementów.

5. Udowodnić wzory

$$\vdash R \in \text{ord}(X) \rightarrow \check{R} \in \text{ord}(X), \quad \vdash R \in \text{ord}^*(X) \rightarrow \check{R} \in \text{ord}^*(X).$$

Czy analogiczne twierdzenie zachodzi dla dobrych porządków?

6. Dowieść, że jeśli X ma n elementów, to $\text{ord}(X)$ zawiera $n!$ relacji oraz $\text{ord}(X) = \text{bord}(X)$.

¹⁾ Teorii struktur (nazywanych w literaturze angielskiej *lattices*) poświęcona jest monografia: G. Birkhoff, *Lattice theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications 25, New York 1940.

7. Wzory (17) i (18) ze str. 124 można napisać w postaci: $a \in \text{ord}^*(1)$.

8. Dowieść, że zbiór X uporządkowany przez relację R jest strukturą ze względu na relację R . Znaleźć najmniejszą wspólną wielokrotność i największy wspólny dzielnik dwu elementów x, y zbioru X .

9. Dowieść, że zbiór wszystkich podzbiorów zbioru pełnego jest strukturą zupełną ze względu na relację inkluzji.

10. Dowieść, że jeśli zbiór X jest algebrą Boole'a (zob. Rozdział IV, § 5, str. 103), to X jest strukturą ze względu na relację $(\hat{x}, \hat{y}) \cdot [x \cdot y' = 0]$, ale niekoniecznie strukturą zupełną.

Wsk.: Najmniejszy wspólny dzielnik elementów x, y wynosi $x \cdot y$, największa zaś wspólna wielokrotność — $x + y$.

11. Dowieść, że zbiory $\text{trans}(X)$ i $\text{aeq}(X)$ są strukturami ze względu na relację inkluzji.

Wsk.: Porównaj zadanie 9 z § 5 i zadanie 6 z § 6.

12. Dowieść, że obie struktury z zadania 11 są zupełne¹⁾.

13. Dowieść, że zbiór podgrup dowolnej grupy G jest strukturą zupełną ze względu na relację inkluzji.

14. Dowieść, że jeśli X jest zbiorem liczb naturalnych i $R \in \text{ord}^*(X)$, to istnieje taka relacja S , że $R \subset S$ i $S \in \text{ord}(X)$.

Wsk.: Ustawiamy w ciąg $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ pary uporządkowane, utworzone z różnych liczb naturalnych, i definiujemy przez indukcję ciąg relacji $S_0, S_1, S_2, \dots$ w sposób następujący:

$$S_0 = R; \quad S_{k+1} = (\hat{x}, \hat{y}) [(x S_k a_{n_k}) \cdot (b_{n_k} S_k y)],$$

gdzie (a_{n_k}, b_{n_k}) jest najwcześniejszą taką parą, że $a_{n_k} S'_k b_{n_k}$ i $b_{n_k} S'_k a_{n_k}$; o ile

zaś ta para nie istnieje, to przyjmujemy $S_{k+1} = S_k$. Relacja $S \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}) [\sum_k x S_k y]$ spełnia warunki zadania²⁾.

§ 8. Relacje jednoznaczne, odwrotnie jednoznaczne i doskonałe. Relacja R nazywa się *jednoznaczną*, jeśli dla każdego y istnieje co najwyżej jedno takie x , że $x R y$.

Zbiór wszystkich relacji jednoznacznych oznaczamy symbolem 1-Cls ³⁾.

¹⁾ Zob. P. Dubreil, *Algèbre*, Paryż 1946, str. 15-16.

²⁾ Por. E. Szpilrajn-Marczewski, *Sur l'extension de l'ordre partiel*, Fundamenta Mathematicae 16 (1930), str. 386-389.

³⁾ Jest to odmiana symbolu $1 \rightarrow \text{Cls}$, używanego przez Russell'a i Whiteheada, a mającego przypominać charakterystyczną własność relacji jednoznacznych: dla każdego $y \in \mathfrak{C}(R)$ istnieje tylko jedno x spełniające warunek $x R y$ (stąd jedynka po lewej stronie symbolu), natomiast dla każdego $x \in \mathfrak{D}(R)$ istnieje może cały zbiór (po angielsku *class*) takich y , że $x R y$ (stąd znak Cls po prawej stronie symbolu).

Wzorem możemy zapisać tę definicję, jak następuje:

$$(51) \quad 1\text{-Cls} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{R}) \{ \prod_{xy} z [(x R y) \cdot (z R y) \rightarrow (x = z)] \}.$$

Relacje jednoznaczne nazywamy inaczej *funkcjami*.

Przeciwdziedzinę funkcji R nazywamy *zbiorem argumentów*, dziedzinę — *zbiorem wartości* funkcji R .

W podręcznikach analizy matematycznej określa się zazwyczaj pojęcie funkcji, mówiąc że „określona jest *funkcja*, gdy dane jest prawo, przyporządkowujące każdej wartości pewnej zmiennej określoną wartość innej zmiennej”. Definicja taka jest niezbyt poprawna. Przede wszystkim definicja powinna określać, czym jest funkcja, nie zaś formułować warunki, przy których spełnieniu funkcja jest określona; po drugie, pojęcie *prawa* jest dość mgliste i co najmniej w tym samym stopniu domaga się określenia, co samo pojęcie funkcji. Natomiast określenie pojęcia funkcji jako relacji jednoznacznej czyni zadość wymaganiom ścisłości¹⁾, a ponadto trafia w te same intuicje, co nieścisłe określenie podawane w analizie. Jeśli bowiem R jest relacją jednoznaczną i $y \in \mathfrak{C}(R)$, to na mocy definicji przeciwdziedziny istnieje takie x , że $x R y$, i przy tym — zgodnie z określeniem relacji jednoznacznej — jest co najwyżej jedno takie x . Mamy zatem prawo, na mocy którego każdemu elementowi zbioru $\mathfrak{C}(R)$ odpowiada dokładnie jeden element zbioru $\mathfrak{D}(R)$ ²⁾.

¹⁾ Co prawda, sprowadziliśmy pojęcie funkcji do pojęcia relacji, którego określenia nie podaliśmy. Jest jednak jasne, że jakieś pojęcie musi być przyjęte za pierwotne, gdyż inaczej wypadłoby bez końca definiować jedne pojęcia przez drugie.

²⁾ Koncepcja pojęcia funkcji jako szczególnego przypadku ogólnego pojęcia relacji jest ostatnim stadium długiego rozwoju historycznego. Początkowo funkcje pojmowano jako kombinacje pewnych działań, jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie, znajdowanie wartości funkcji trygonometrycznych i t. p. W ten sposób definiował pojęcie funkcji Euler, autor pierwszego podręcznika analizy (*Introductio in analysin infinitorum*, 1748). Również Lagrange (1736-1813) ograniczał się tylko do funkcji analitycznych, t.j. przedstawialnych szeregiem potęgowym. Badania nad szeregami Fouriera, których suma przedstawiać może funkcje nieciągłe, skłoniły Dirichleta (1805-1859) do sformułowania definicji funkcji jako „prawa, przyporządkowującego każdej wartości jednej zmiennej określonej wartości drugiej zmiennej”. Definicja funkcji jako relacji jednoznacznej pochodzi od logika włoskiego G. Peano, *Sulla definizione di funzione*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali 20 (1911), str. 5-5.

Wiele pojęć rozpatrywanych w analizie daje się podciągnąć pod pojęcie funkcji. Ciąg nieskończony można określić jako funkcję, której zbiorem argumentów jest zbiór liczb naturalnych, czyli jako relację jednoznaczłą, której przeciwdziedzina jest zbiór liczb naturalnych. Parę uporządkowaną utworzoną z dwu przedmiotów określić można jako relację jednoznaczłą R , której przeciwdziedzina składa się z liczb 1 i 2. Przedmiot x taki, że $xR1$, nazywa się *pierwszym elementem* pary, a przedmiot y taki, że $yR2$, nazywa się jej *drugim elementem*. Podobnie *trójki, czwórki, ... uporządkowane* możemy określić jako relacje jednoznaczne.

Zbiór wszystkich par uporządkowanych, których pierwszy element należy do zbioru X , a drugi do zbioru Y , nazywa się *iloczynem kartezjańskim* lub *produktem* zbiorów X i Y .

Oznaczamy go zazwyczaj symbolem $X \times Y$.

W podobny sposób określić można iloczyn kartezjański trzech lub więcej czynników, korzystając z pojęcia trójki, czwórki, ... uporządkowanej.

Wykres relacji jednoznacznej, której dziedzina i przeciwdziedzina składają się z liczb rzeczywistych, jest zbiorem, który każda równoległa do osi odciętych przecina co najwyżej w jednym punkcie¹⁾.

Należy starannie odróżniać *funkcję* od *wartości funkcji*. Funkcja jest to relacja, wartość zaś funkcji R dla danej wartości u argumentu jest to ten jedyny element v , dla którego uRu . W książkach matematycznych używa się bardzo niesłusznie tego samego symbolu $f(x)$ dla oznaczenia funkcji i wartości funkcji. Również nieścisłe są zwroty: *$\sin x$ jest funkcją x* , albo: *x^2 jest funkcją x* , gdyż $\sin x$ i x^2 są liczbami (o ile x jest liczbą), a nie relacjami. Poprawnie należy powiedzieć, że relacje $(\hat{y}, \hat{x})$ ($y = \sin x$) i $(\hat{y}, \hat{x})$ ($y = x^2$) są funkcjami. Istnieje propozycja oznaczania tych funkcji krótszymi symbolami $\lambda_x \sin x$, $\lambda_x x^2$ i ogólnie $\lambda_x f(x)$, gdzie $f(x)$ jest dowolnym wyrażeniem, które przejdzie w nazwę liczby, o ile zamiast litery x wstawimy nazwę liczby. Zgodnie z tą propozycją funkcję, przyjmującą stale tę samą wartość c , oznaczyć należy symbolem

¹⁾ Aby przejść do wykresu funkcji w zwykłym znaczeniu tego słowa, należy więc zamienić rolę osi x i y . Można by uniknąć tej anomalii, przyjmując za definicję relacji jednoznacznych podany dalej wzór (57); sprzeciwiałoby się to jednak ogólnie przyjętemu zwyczajowi pisania zależności funkcyjnej w postaci $y = f(x)$, gdzie na pierwszym miejscu stoi wartość funkcji, a na drugim argument.

$\lambda_x c$, a funkcję, której wartość jest stale równa argumentowi, symbolem $\lambda_x x$ ¹⁾.

Z (51) wynika

$$\vdash R \in 1\text{-Cls} \equiv \prod_{xyz} [(xRy) \cdot (zRy) \rightarrow (x = z)],$$

a ponieważ $\vdash xRy \cdot zRy \equiv xRy \cdot y\check{R}z$, więc na mocy praw (9) i (10) z Rozdziału III (§ 4, str. 62 i 65) otrzymamy

$$\vdash R \in 1\text{-Cls} \equiv \prod_{xz} [\sum_y [(xRy) \cdot (y\check{R}z)] \rightarrow (x = z)],$$

czyli zgodnie z definicją iloczynu względnego (§ 2, wzór (6), str. 120) i z definicją inkluzji dla relacji (Rozdział IV, § 3, wzór (11), str. 95):

$$(52) \quad \vdash R \in 1\text{-Cls} \equiv R; \check{R} \subset 1'.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób charakterystyczną własność relacji jednoznacznych, wyrażoną przy pomocy symboli rachunku relacji.

Jako zastosowanie wzoru (52) udowodnimy, że *iloczyn dwu relacji jednoznacznych jest znów relacją jednoznaczłą*:

$$(53) \quad \vdash (R \in 1\text{-Cls}) \cdot (S \in 1\text{-Cls}) \rightarrow (R; S \in 1\text{-Cls}).$$

Dowód. Ze wzorów (7) i (12) wynika

$$\vdash (R; S); (\check{R}; \check{S}) = R; (S; \check{S}); \check{R},$$

zatem na mocy (9)

$$\vdash S; \check{S} \subset 1' \rightarrow (R; S); (\check{R}; \check{S}) \subset R; 1'; \check{R}.$$

Na mocy (11), wynika stąd

$$\vdash S; \check{S} \subset 1' \rightarrow (R; S); (\check{R}; \check{S}) \subset R; \check{R},$$

a więc

$$\vdash (R; \check{R} \subset 1') \cdot (S; \check{S} \subset 1') \rightarrow (R; S); (\check{R}; \check{S}) \subset 1'.$$

Na mocy (52) otrzymujemy stąd od razu wzór (53).

Jest jasne, że jeśli zależność funkcyjną uRv napiszemy w zwykłej matematycznej symbolice jako $u = f(v)$, a uSv jako $u = g(v)$, to $uR; Sv$ napisać należy jako $u = f(g(v))$.

¹⁾ Dogodna ta symbolika pochodzi od amerykańskiego logika A. Church'a, *A set of postulates for the foundation of logic*, Annals of Mathematics 35 (1932), str. 346-366.

Jako dalsze zastosowania wzoru (52) udowodnimy jeszcze dwa twierdzenia o relacjach jednoznacznych:

$$(54) \quad \vdash R \subset S \cdot S \in 1\text{-Cls} \rightarrow R \in 1\text{-Cls}.$$

D o w ó d. Wobec $\vdash R \subset S \rightarrow \check{R} \subset \check{S}$ i prawa (9) z § 2, str. 122, otrzymamy

$$\vdash R \subset S \rightarrow R; \check{R} \subset S; \check{S},$$

skąd na mocy (52) wynika od razu wzór (54).

$$(55) \quad \vdash R \in 1\text{-Cls} \cdot S \in 1\text{-Cls} \cdot (\mathfrak{C}(R) \cdot \mathfrak{C}(S) = 0) \rightarrow (R + S \in 1\text{-Cls}).$$

D o w ó d. Zauważmy najpierw, że $\vdash xR; \check{S}y \rightarrow \sum_z (xRz \cdot ySz)$, a więc

$$\vdash xR; \check{S}y \rightarrow \sum_z (z \in \mathfrak{C}(R) \cdot \mathfrak{C}(S)), \text{ skąd } \vdash \check{R}; S \neq 0 \rightarrow \mathfrak{C}(R) \cdot \mathfrak{C}(S) \neq 0.$$

Wnosimy stąd, że

$$(56) \quad \vdash \mathfrak{C}(R) \cdot \mathfrak{C}(S) = 0 \rightarrow R; \check{S} = 0.$$

Zgodnie ze wzorami (4) i (8) mamy

$$\vdash (R + S); (\check{R} + \check{S}) = R; \check{R} + R; \check{S} + S; \check{R} + S; \check{S},$$

skąd na mocy (56) wynika, że

$$\vdash (\mathfrak{C}(R) \cdot \mathfrak{C}(S) = 0) \rightarrow (R + S); (\check{R} + \check{S}) \subset R; \check{R} + S; \check{S}.$$

W myśl (52) otrzymujemy stąd od razu wzór (55).

Relacja R nazywa się *odwrotnie jednoznaczna*, jeśli dla każdego x istnieje co najwyżej jedno takie y , że xRy .

Zbiór tych relacji oznaczamy symbolem Cls-1 :

$$(57) \quad \text{Cls-1} \stackrel{\text{def}}{=} (\check{R}) \{ \prod_{xyz} [xRy \cdot xRz \rightarrow y = z] \}.$$

Przykładami relacji odwrotnie jednoznacznych są relacje: $(\hat{x}, \hat{y})[y = x^2]$, $(\hat{x}, \hat{y})[y \text{ jest ojcem } x]$ i, ogólnie, każda relacja odwrotna do funkcji (por. dalej, wzór (60)).

W podobny sposób jak wzorów (52) i (53) można dowieść wzorów

$$(58) \quad \vdash R \in \text{Cls-1} \equiv \check{R}; R \subset 1',$$

$$(59) \quad \vdash (R \in \text{Cls-1}) \cdot (S \in \text{Cls-1}) \rightarrow (R; S \in \text{Cls-1}).$$

Zgodnie z (2) wzór (58) napisać możemy jako

$$\vdash R \in \text{Cls-1} \equiv \check{R}; \check{R} \subset 1',$$

a że w myśl (52) jest $\vdash \check{R} \in 1\text{-Cls} \equiv \check{R}; \check{R} \subset 1'$ więc otrzymujemy równoważność

$$(60) \quad \vdash R \in \text{Cls-1} \equiv \check{R} \in 1\text{-Cls}.$$

z której widzimy, że relacje odwrotnie jednoznaczne można też określić jako relacje odwrotne do jednoznacznych czyli do funkcji.

Na mocy (60) wyprowadzamy od razu (na podstawie wzorów (2) i (51)) następujące wnioski z twierdzeń (54) i (55):

$$(61) \quad \vdash R \subset S \cdot (S \in \text{Cls-1}) \rightarrow (R \in \text{Cls-1}),$$

$$(62) \quad \vdash (R \in \text{Cls-1}) \cdot (S \in \text{Cls-1}) \cdot (\mathfrak{D}(R) \cdot \mathfrak{D}(S) = 0) \rightarrow (R + S \in \text{Cls-1}).$$

Relacja, która jest jednocześnie jednoznaczna i odwrotnie jednoznaczna, nazywa się *jedno-jednoznaczna*, albo *wzajemnie jedno-znaczna*, albo *doskonała*.

Zbiór utworzony z tych relacji oznaczamy symbolem 1-1.

Mamy więc

$$(63) \quad 1-1 \stackrel{\text{def}}{=} (\check{R}) [(R \in 1\text{-Cls}) \cdot (R \in \text{Cls-1})].$$

Z tej definicji otrzymujemy z łatwością na mocy (51) i (57)

$$(64) \quad \vdash R \in 1-1 \equiv \prod_{xyz} [xRy \cdot zRy \rightarrow x = z] \cdot \prod_{xyz} [xRy \cdot xRz \rightarrow y = z].$$

Z (60) i (63) wynika dalej

$$(65) \quad \vdash R \in 1-1 \equiv (R \in 1\text{-Cls}) \cdot (\check{R} \in 1\text{-Cls}).$$

A więc: *relacja jest doskonała wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją i gdy relacja do niej odwrotna jest funkcją*.

Udowodnimy, że *relacja odwrotna do doskonałej jest doskonała* i że *iloczyn względny dwu relacji doskonałych jest doskonały*:

$$(66) \quad \vdash (R \in 1-1) \rightarrow (\check{R} \in 1-1).$$

$$(67) \quad \vdash (R \in 1-1) \cdot (S \in 1-1) \rightarrow (R; S \in 1-1).$$

D o w ó d. Z (60) otrzymujemy $\vdash (R \in 1\text{-Cls}) \rightarrow (\check{R} \in \text{Cls-1})$ oraz $\vdash (R \in \text{Cls-1}) \rightarrow (\check{R} \in 1\text{-Cls})$, zatem

$$\vdash (R \in 1\text{-Cls}) \cdot (R \in \text{Cls-1}) \rightarrow (\check{R} \in 1\text{-Cls}) \cdot (\check{R} \in \text{Cls-1}),$$

co w myśl wzoru (63) daje wzór (66).

Z (55) i (59) otrzymujemy stosując prawo mnożenia implikacji i prawo przemienności koniunkcji

$$\vdash (R \in 1\text{-Cls}) \cdot (R \in \text{Cls-1}) \cdot (S \in 1\text{-Cls}) \cdot (S \in \text{Cls-1}) \rightarrow \\ \rightarrow (R; S \in 1\text{-Cls}) \cdot (R; S \in \text{Cls-1}),$$

skąd na mocy wzoru (65) wynika wzór (67).

Zauważmy wreszcie, że $\vdash 1'; \check{1}' = \check{1}'; 1' = 1'$, skąd na mocy wzorów (52), (58) i (65) wynika tautologia

$$(68) \quad \vdash 1' \in 1-1.$$

A więc: *relacja identyczności jest doskonała.*

Z (54) i (61) otrzymujemy na mocy (63) wzór

$$(69) \quad \vdash R \subset S \cdot (S \in 1-1) \rightarrow (R \in 1-1),$$

a z (55) i (62) — wzór

$$(70) \quad \vdash (R \in 1-1) \cdot (S \in 1-1) \cdot (\mathfrak{D}(R) \cdot \mathfrak{D}(S) = 0) \cdot (\mathfrak{C}(R) \cdot \mathfrak{C}(S) = 0) \rightarrow \\ \rightarrow (R \vdash S \in 1-1).$$

A więc: *suma dwu relacji doskonałych jest doskonała, o ile ani dziedziny, ani przeciwdziedziny tych relacji nie mają elementów wspólnych.*

Z relacjami doskonałymi spotykamy się w matematyce bardzo często. Przekształcenia geometryczne takie jak symetria względem punktu lub prostej, jednokładność, inwersja i t. d. są funkcjami, dla których relacje odwrotne są też funkcjami. Są to zatem relacje doskonałe. Permutacje są to relacje doskonałe, których dziedziną i przeciwdziedzina jest jeden i ten sam zbiór skończony. W zakresie funkcji ciągłych zmiennej rzeczywistej doskonałe są funkcje monotoniczne (rosnące i malejące). W teorii mnogości relacje doskonałe grają doniosłą rolę w określeniu pojęcia równej liczebności (równości mocy), jak to bliżej wyjaśnimy w Rozdziale VII.

Uogólnieniem relacji jednoznacznych są relacje *m-znaczne*, t. j. takie, że dla każdego y istnieje co najwyżej m elementów x , spełniających wzór xRy . Podobnie można uogólnić pojęcie relacji odwrotnie jednoznacznej i rozpatrywać relacje odwrotnie

n-znaczne. Relacja, która jest zarazem *m*-znaczna i odwrotnie *n*-znaczna, nazywa się zwykle krótko *m-n-znaczną*. Teoria tych relacji jest dotąd bardzo słabo rozwinięta¹⁾.

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że $\vdash R \in 1-1 \equiv [R; \check{R} \vdash \check{R}; R \subset 1']$.

2. Relacja $R; S; \check{R}$ nazywa się relacją *S przekształconą przez R*. Udowodnić, że relacja odwrotna do przekształconej jest przekształconą relacji odwrotnej, że suma relacji przekształconych jest przekształconą sumy oraz że iloczyn relacji przekształconych przez relację odwrotnie jednoznaczną jest przekształconą iloczynu.

3. Jeśli $R \in \text{Cls-1}$, to $R(X \cdot Y) = R(X) \cdot R(Y)$ i $R(X - Y) = R(X) - R(Y)$.

4. Wykazać, że $\vdash (R \in \text{Cls-1}) \cdot (X \cdot Y = 0) \rightarrow [R(X) \cdot R(Y) = 0]$ ²⁾ i że dla relacji jednoznacznych wzór ten może nie być prawdziwy.

5³⁾. Wykazać, że $\vdash (R \in 1\text{-Cls}) \cdot (S \subset R) \rightarrow [S = R] \mathfrak{C} (S)]$. Pokazać na przykładach, że twierdzenie to jest fałszywe dla relacji odwrotnie jednoznacznych.

6. Wykazać, że $\vdash (R \in 1\text{-Cls}) \cdot (\mathfrak{C}(R) = X) \rightarrow [R; \check{R} \in \text{aeq}(X)]$.

7. Ciąg nieskończony $a_1, a_2, a_3, \dots$ traktować można jako relację jednoznaczną R , której przeciwdziedzina jest zbiór liczb naturalnych (por. str. 148). Jak zdefiniować ciągi częściowe $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots$?

Odp.: $R \upharpoonright X$.

8. Niech $Q = (u, v) [u = v^2]$, a zbiór pełny 1 niech składa się z wszystkich liczb rzeczywistych. Okazać, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by funkcja R dawała się przedstawić w postaci $S; Q$, gdzie $S \in 1\text{-Cls}$, jest, żeby R było funkcją parzystą, t. zn. żeby $xRy \equiv xR(-y)$.

§ 9. Relacje wieloczłonowe. Działania. Teoria relacji wieloczłonowych jest znacznie słabiej rozwinięta niż teoria relacji dwuargumentowych. Ograniczymy się tutaj do podania kilku pojęć, związanych z relacjami trójezłonowymi.

¹⁾ Definicje tych relacji podają Russell i Whitehead w *Principia Mathematica*, tom I, str. 420, *70. Pewne twierdzenia o relacjach *m-n-znacznych* podaje D. König, *Sur les correspondances multivoques des ensembles*, *Fundamenta Mathematicae*, tom 8 (1926), str. 114-154. Por. też W. Sierpiński, *Les correspondances multivoques et l'axiome du choix*, *Fundamenta Mathematicae*, tom 34 (1947), str. 39-44.

²⁾ Russell i Whitehead (*Principia Mathematica*, tom I, str. 441, *72-411) ilustrują to twierdzenie następującym przykładem: jeśli żaden minister nie jest wariatem, to nikt nie jest jednocześnie synem ministra i synem wariata.

³⁾ Por. Russell i Whitehead, tamże, tom I, str. 453, *72-92.

Każdej relacji trójczłonowej U przyporządkować możemy trzy zbiory:

$$\mathfrak{D}_1(U) \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}) \sum_{yz} U(x, y, z), \quad \mathfrak{D}_2(U) \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{y}) \sum_{xz} U(x, y, z), \\ \mathfrak{D}_3(U) \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{z}) \sum_{xy} U(x, y, z),$$

zwane *pięroszą*, *drugą* i *trzecią dziedziną* relacji U .

Wykresy tych zbiorów otrzymujemy, rzutując wykres relacji U na trzy osie współrzędnych. Żaden z nich nie jest pusty, o ile relacja U nie jest pusta.

Zamiast jednego pojęcia relacji odwrotnej, które występowało w teorii relacji dwuczłonowych, mamy w teorii relacji trójczłonowych pięć różnych pojęć relacji odwrotnej. Przyjmiemy mianowicie:

$$U_{1,3,2} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) U(x, z, y), \quad U_{3,2,1} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) U(z, y, x), \\ U_{2,1,3} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) U(y, x, z), \quad U_{2,3,1} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) U(y, z, x), \\ U_{3,1,2} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) U(z, x, y).$$

Dla symetrii możnaby jeszcze przyjąć $U_{1,2,3} \stackrel{\text{def}}{=} U$. W teorii relacji n -członowych mielibyśmy oczywiście $n! - 1$ takich definicji.

PRZYKŁAD. Jeśli U jest relacją $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) (x = y^z)$ między liczbami rzeczywistymi dodatnimi różnymi od 1, to

$$U_{3,2,1}(x, y, z) \equiv (x = \lg_y z) \quad \text{i} \quad U_{2,3,1}(x, y, z) \equiv (x = \lg_z y), \\ U_{2,1,3}(x, y, z) \equiv (x = y^{1/z}) \quad \text{i} \quad U_{3,1,2}(x, y, z) \equiv (x = z^{1/y}).$$

Jeśli i, k, l jest jakąkolwiek permutacją liczb 1, 2, 3, to równość

$$U = U_{i,k,l}$$

określa pewien rodzaj *symetrii* relacji U , inkluzja zaś

$$U \subset U'_{i,k,l}$$

pewien rodzaj *antysymetrii* relacji U . Mamy więc pięć różnych pojęć symetrii i tyleż różnych pojęć antisymetrii relacji trójczłonowej.

PRZYKŁADY. Relacje $U = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) [x = y + z]$ i $V = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) [x = y \cdot z]$ czynią zadość prawom symetrii $U = U_{1,3,2}$ i $V = V_{1,3,2}$.

Relacja $W = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) (x = y - z)$ czyni zadość prawu symetrii $W = W_{3,2,1}$.

Relacja $M = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ [punkt B leży między punktami A i C] (por. § 6, str. 141, przykład 5) czyni zadość prawu symetrii $M = M_{3,2,1}$ i prawu antisymetrii $M \subset M'_{2,1,3}$.

Pojęcia przechodności i spójności nie przenoszą się w naturalny sposób na relacje trój- i więcej-członowe, chociaż napotykamy na wiele praw (dotyczących rozmaitych konkretnych relacji), które możnaby nazwać prawami przechodności, przeciwprzechodności i spójności. Tak np. relacja M *leżenia między* dla punktów prostej (por. str. 141) czyni zadość prawom:

$$M(A, B, C) \cdot M(B, C, D) \rightarrow M(A, B, D), \quad M(A, B, C) \cdot M(A, C, D) \rightarrow M(B, C, D), \\ M(A, B, C) \cdot M(D, B, C) \rightarrow M'(A, B, D),$$

$$(A = B) + (B = C) + (C = A) + M(A, B, C) + M(A, C, B) + M(B, A, C).$$

Systematyczne badanie praw tego rodzaju nie zostało dotąd przedsięwzięte.

Ważne jest natomiast przeniesienie pojęcia relacji jednoznacznej na przypadek relacji wieloczłonowych.

Relację trójczłonową U nazywamy *jednoznaczną względem pierwszego argumentu*, jeśli dla danych y i z istnieje co najwyżej jedno takie x , że $U(x, y, z)$. Zbiór relacji jednoznacznych względem pierwszego argumentu może więc być określony jako

$$(\hat{U}) \{ \prod_{x_1, x_2, y, z} [U(x_1, y, z) \cdot U(x_2, y, z) \rightarrow (x_1 = x_2)] \}.$$

W podobny sposób określamy jednoznaczność względem drugiego i trzeciego argumentu. Jest jasne, że jeśli relacja U jest jednoznaczna względem pierwszego argumentu, to relacje $U_{2,3,1}$ i $U_{2,1,3}$ są jednoznaczne względem drugiego argumentu, relacje $U_{3,2,1}$ i $U_{3,1,2}$ względem trzeciego argumentu, a relacja $U_{1,3,2}$ względem pierwszego argumentu.

Relacje trójczłonowe jednoznaczne związane są z pojęciem funkcji o dwu argumentach, czyli funkcji dwu zmiennych niezależnych. Niech U będzie relacją jednoznaczną np. względem pierwszego argumentu i niech X będzie zbiorem takich par uporządkowanych (y, z) , że $\sum_x U(x, y, z)$. Dla każdej pary (y, z) , należącej do X , istnieje więc dokładnie jeden taki przedmiot x , że

$U(x, y, z)$; relacja U wyznacza zatem prawo, na mocy którego każdej parze uporządkowanej przedmiotów (y, z) , należącej do zbioru X , jest przyporządkowany dokładnie jeden przedmiot.

Niech X będzie dowolnym zbiorem.

Relację trójczłonową U nazywamy *działaniem określonym w X* , jeśli jest ona jednoznaczna względem pierwszego argumentu i spełnia warunek: dla wszelkich y i z , należących do X , istnieje takie x , że $U(x, y, z)$.

Element x (który jest wyznaczony jednoznacznie przez y i z) nazywamy *wynikiem* działania U , dokonanego na elementach y i z .

Działanie U , określone w X , nazywa się *wykonalne w X* , jeśli wynik działania U dokonanego na dowolnych elementach zbioru X jest znów elementem zbioru X .

Zbiór działań określonych w X zdefiniować możemy jako

$$(\hat{U}) \{ \prod_{x_1, x_2, y, z} [U(x_1, y, z) \cdot U(x_2, y, z) \rightarrow (x_1 = x_2)] \cdot \prod_{y, z \in X} \sum_x U(x, y, z) \},$$

zbiór zaś działań określonych i wykonalnych w X — jako

$$(\hat{U}) \{ \prod_{x_1, x_2, y, z} [U(x_1, y, z) \cdot U(x_2, y, z) \rightarrow (x_1 = x_2)] \cdot \prod_{y, z \in X} \sum_{x \in X} U(x, y, z) \}.$$

Przykłady działań są nadzwyczaj liczne.

Relacja $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) [x = y + z]$ jest działaniem określonym i wykonalnym w zbiorze liczb dodatnich.

Relacja $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) [x = y - z]$ jest działaniem określonym w zbiorze liczb dodatnich, a określonym i wykonalnym w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.

Relacje $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) [x = \lg_{1+y} z]$ i $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) (x = y^z)$ są działaniami określonymi w zbiorze liczb dodatnich; druga jest ponadto działaniem wykonalnym w tym zbiorze.

Relacja $(\hat{R}, \hat{S}, \hat{T}) [R = S; T]$ jest działaniem określonym i wykonalnym w zbiorze wszystkich relacji dwuczłonowych zawartych w 1^* .

Relacja $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}) [X = Y \cdot Z]$ jest działaniem określonym i wykonalnym w zbiorze wszystkich zbiorów zawartych w 1 .

Działanie U , określone w zbiorze X , nazywa się *przemienne w X* , jeśli czyni ono zadość warunkowi

$$\prod_{x, y \in X} \prod_z [U(z, x, y) = U(z, y, x)],$$

inaczej mówiąc: jeśli wynik działania U , dokonanego na elementach x i y zbioru X , jest taki sam jak wynik działania U , dokonanego na elementach y i x tego zbioru.

Przykładem działania przemienne jest $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}) [X = Y \cdot Z]$, nieprzemienne — $(\hat{R}, \hat{S}, \hat{T}) [R = S; T]$.

Działanie U , określone i wykonalne w X , nazywa się *łączne w X* , jeśli czyni ono zadość następującemu warunkowi:

$$\prod_{x, y, z, u, v, w \in X} [U(u, x, y) \cdot U(v, u, z) \cdot U(w, y, z) \rightarrow U(v, x, w)].$$

Słowami możemy wyrazić ten wzór w taki sposób: wynik działania U , dokonanego na elemencie x i na elemencie w , powstałym przez dokonanie działania U na elementach y i z , jest taki sam jak wynik działania U , dokonanego na elementach: u , powstałym przez dokonanie działania U na elementach x i y , oraz na elemencie z .

W zwykłym znakowaniu matematycznym wprowadza się specjalne symbole dla oznaczenia wyniku działania U , dokonanego na danych elementach. Jeśli np. symbol $x \Delta y$ oznacza wynik działania U , dokonanego na elementach x i y , to łączność działania U napisać można krótszym wzorem

$$\prod_{x, y, z \in X} [(x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z)].$$

Przykładami działań łącznych są: dodawanie liczb, mnożenie liczb, dodawanie i mnożenie zbiorów, mnożenie względne relacji dwuczłonowych. Przykładem działania niełącznego jest

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) [x = y^z],$$

gdy za zbiór pełny przyjąć zbiór liczb dodatnich.

Określimy jeszcze *rozdzielność* działania U względem V . Pojęcie to jest dobrze znane z arytmetyki elementarnej, w której mówimy o rozdzielności mnożenia względem dodawania, rozumiejąc przez to, że dla wszelkich liczb x, y i z zachodzi równość

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Przyjmując oznaczenia:

$$u = y + z, \quad v = x \cdot u, \quad w = x \cdot y, \quad t = x \cdot z,$$

możemy równość tę napisać w postaci

$$(u = y + z) \cdot (v = x \cdot u) \cdot (w = x \cdot y) \cdot (t = x \cdot z) \rightarrow (v = w + t).$$

Napiszmy teraz wszędzie $U(m, n, p)$ zamiast $m = n + p$ i $V(m, n, p)$ zamiast $m = n \cdot p$, dla jakichkolwiek liter m, n, p . Otrzymamy

$$U(u, y, z) \cdot V(v, x, u) \cdot V(v, x, y) \cdot V(t, x, z) \rightarrow U(v, v, t).$$

W tej postaci możemy pojęcie rozdzielności przenieść na dowolne działania.

Mówimy mianowicie, że działanie V jest *lewostronnie rozdzielne* względem działania U w zbiorze X , jeśli U i V są działaniami określonymi i wykonalnymi w X oraz

$$\prod_{x, y, z, u, v, w, t \in X} [U(u, y, z) \cdot V(v, x, u) \cdot V(v, x, y) \cdot V(t, x, z) \rightarrow U(v, v, t)].$$

Podobnie określamy *rozdzielność prawostronną* V względem U :

$$\prod_{x, y, z, u, v, w, t \in X} [U(u, y, z) \cdot V(v, u, x) \cdot V(v, y, x) \cdot V(t, z, x) \rightarrow U(v, v, t)].$$

Łatwo dostrzec, że jeśli działanie V jest lewostronnie rozdzielne względem U w zbiorze X , to działanie $V_{1,3,2}$ jest prawostronnie rozdzielne względem U w tym zbiorze i na odwrót.

Niech U będzie działaniem określonym i wykonalnym w X . Jeśli $U_{2,1,3}$ jest też działaniem określonym i wykonalnym w X , to mówimy, że $U_{2,1,3}$ jest działaniem *lewostronnie odwrotnym* do U w zbiorze X . Jeśli natomiast $U_{2,1,3}$ nie jest działaniem określonym i wykonalnym w X , to działanie lewostronnie odwrotne do U nie istnieje. Na to więc, by działanie U (określone i wykonalne w X) posiadało działanie lewostronnie odwrotne, potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnych x i z należących do X istniał dokładnie jeden taki element $y \in X$, że $U_{2,1,3}(y, x, z)$, czyli — co na jedno wychodzi — dokładnie jeden taki element $y \in X$, że $U(x, y, z)$.

W analogiczny sposób określamy działanie prawostronnie odwrotne do U . Jeśli mianowicie $U_{2,3,1}$ jest działaniem określonym i wykonalnym w X , to działanie to nazywamy *prawostronnie odwrotnym* do U w X . Jeśli $U_{2,3,1}$ nie jest działaniem określonym i wykonalnym w X , to U nie posiada działania prawostronnie odwrotnego. Na to, by działanie U określone i wykonalne w X posiadało działanie prawostronnie odwrotne, potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnych x i y należących do X istniał dokładnie jeden taki element $z \in X$, że $U_{2,3,1}(z, x, y)$, czyli dokładnie jeden taki element $z \in X$, że $U(x, y, z)$.

Z określeń tych wynika np. że działanie $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = y - z]$ jest (lewo- i prawostronnym) działaniem odwrotnym do $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = y + z]$ w zbiorze X wszystkich liczb rzeczywistych. Natomiast działanie $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = y \cdot z]$, określone i wykonalne w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, nie posiada działań odwrotnych w tym zbiorze (gdyż relacje $U_{2,3,1}$ i $U_{2,1,3}$ nie są jednoznaczne). W zbiorze liczb rzeczywistych różnych od 0 działanie $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = y \cdot z]$ posiada działania odwrotne; oba one są równe $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = y : z]$. Działaniem lewostronnie odwrotnym do $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = y - z]$ w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych jest $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = y + z]$, a prawostronnie odwrotnym w tymże zbiorze — działanie $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = -y + z]$ ¹⁾.

Działanie U , określone i wykonalne w zbiorze X , nazywa się *prawostronnie monotoniczne* w X względem relacji (dwuczłonowej) R , jeśli dziedzina i przeciwdziedzina relacji R_* zawierają zbiór X oraz

$$\prod_{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in X} [z_1 R z_2 \cdot U(x_1, y, z_1) \cdot U(x_2, y, z_2) \rightarrow x_1 R x_2];$$

działanie U jest *lewostronnie monotoniczne* w X względem R , jeśli

$$\prod_{x_1, x_2, y_1, y_2, z \in X} [y_1 R y_2 \cdot U(x_1, y_1, z) \cdot U(x_2, y_2, z) \rightarrow x_1 R x_2].$$

Np. działanie $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = y + z]$ jest (obustronnie) monotoniczne w zbiorze liczb rzeczywistych względem relacji $<$. Działanie $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})[x = y - z]$ jest tylko lewostronnie monotoniczne względem tej relacji. Każde działanie jest (obustronnie) monotoniczne względem relacji $1'$.

Zbiór niepusty X nazywa się *grupą* względem działania U , jeśli U jest określone i wykonalne w X , łączne w X i posiada w X obydwa działania odwrotne.

Jeśli nadto U jest przemienne w X , to mówimy, że X jest *grupą przemianową*.

Jeśli relacja R porządkuje X i X jest grupą względem U , a nadto U jest (obustronnie) monotoniczne względem R , to mówimy, że X jest *grupą uporządkowaną* przez relację R .

Zbiór niepusty X nazywa się *pierścieniem* względem działań U i V , jeśli działania te są określone i wykonalne w X , X jest

¹⁾ Więcej szczegółów o działaniach znaleźć można w książce: W. Sierpiński, *Algebra wyższa*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław 1946, Rozdział XVII, oraz w książeczce: A. Tarski, *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*, Książnica Atlas, Warszawa 1936, Rozdziały VII-X.

grupą ze względu na U , a nadto V jest łączne w X i obustronnie rozdzielne (w X) względem U .

Działanie U nazywamy *dotarciem*, a V — *mnożeniem pierścienia*.

Pierścień nazywa się *ciałem*, jeśli działanie mnożenia V posiada obydwa działania odwrotne w zbiorze $(\hat{x}) [x \in X \cdot U'(x, x, x)]$.

Szczegółowym badaniem wprowadzonych tu pojęć zajmuje się algebra. Jak widzimy, wszystkie te pojęcia sprowadzają się do dwu pojęć zasadniczych: zbioru i relacji. Jak zobaczymy w Rozdziale VII, wszystkie w ogóle pojęcia, jakimi operuje się w matematyce, są zbiorami lub relacjami.

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że jeśli działanie U jest przemienne w X , to z istnienia jednego z działań odwrotnych wynika istnienie drugiego. Oba działania odwrotne są przy tym równe.

2. Niech $U_l = U_{2,1,3}$ i $U_p = U_{2,3,1}$ dla każdej relacji trójczłonowej U . Wykazać, że $\vdash U_l = U$ oraz $\vdash U_{pp} = U$, ale że U_{pp} nie musi być równe U).

3. Czy działania $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}) [X = Y + Z]$, $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}) [X = Y \cdot Z]$, $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}) [X = Y \cdot Z + Y' \cdot Z']$ i $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}) [X = Y \cdot Z' + Y' \cdot Z]$ mają działania odwrotne w zbiorze wszystkich zbiorów zawartych w 1?

4. Dowieść, że jeśli działanie U jest prawostronnie rozdzielne względem V , to obydwa działania odwrotne względem U — o ile istnieją — są też prawostronnie rozdzielne względem V . Okazać, że twierdzenie to nie jest na ogół prawdziwe dla lewostronnej rozdzielności.

5. Dowieść, że jeśli działanie U jest lewostronnie (prawostronnie) rozdzielne względem V , to działanie U jest lewostronnie (prawostronnie) rozdzielne względem obydwa działań odwrotnych do V , o ile te działania istnieją.

6. Czy działanie odwrotne do przemiennego musi być przemienne? Odwrotne do łącznego — łączne?

7. Dowieść, że jeśli $R \in \text{con}(X)$, a działanie U jest lewostronnie (prawostronnie) monotoniczne w X względem R , to działanie lewostronnie (prawostronnie) odwrotne do U — o ile istnieje — jest monotoniczne w X względem R .

8. Element $e \in X$ nazywa się *lewostronnym (prawostronnym) modulem działania U* , określonego i wykonalnego w X , jeśli $\prod_{x \in X} [U(x, e, x)]$ ($\prod_{x \in X} [U(x, x, e)]$). Udowodnić, że jeśli istnieje zarówno lewostronny jak prawostronny moduł działania U , to muszą być one równe.

Wsk.: Jeśli e_l jest modulem lewostronnym, a e_p prawostronnym, to $U(e_p, e_l, e_p)$ i $U(e_l, e_l, e_p)$.

¹⁾ W. Sierpiński, *Algebra wyższa*, Rozdział XVII, str. 290 i następne.

9. Dowieść, że jeśli X jest grupą względem działania U , to istnieją obydwa moduły działania U .

Wsk.: Z istnienia działań odwrotnych wynika, że dla każdego $x \in X$ istnieje takie $e_x \in X$, iż $U(x, e_x, x)$. Jeśli $y \in X$, to dla pewnego $z \in X$ jest $U(y, x, z)$; z łączności U wynika $U(y, e_x, y)$, czyli że e_x jest modulem lewostronnym.

10. Dowieść, że zbiór wszystkich podzbiorów zbioru pełnego jest pierścieniem względem działań $U = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}) [X = Y'Z' + Y'Z]$ i $V = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}) [X = Y \cdot Z]$.

11. Dowieść, że zbiór wszystkich relacji wzajemnie jednoznacznych o dziedzinie i przeciwdziedzynie 1 jest grupą względem działania $(\hat{R}, \hat{S}, \hat{T}) [R = S; T]$. Wyznaczyć moduł i działania odwrotne.

§ 10. Dodatek. Dowód wzorów (46₁), (46₂) i (46₃). Twierdzenia, wyrażone we wzorach (46₁), (46₂) i (46₃), można z łatwością uzasadnić intuicyjnie²⁾. W poniższym dowodzie nie idzie o takie uzasadnienie, lecz o wykazanie, że funkcje zdaniowe, występujące w tych wzorach, są tautologiami w sensie definicji z Rozdziału III (§ 3, str. 56-57). Dla każdej z tych funkcji zdaniowych podać więc należy ciąg funkcji zdaniowych, spełniający warunki 1, 2 i 5 cytowanej definicji.

Ponieważ takie dowody sformalizowane są zazwyczaj bardzo długie, więc pomijając będziemy niektóre stadia pośrednie, w szczególności zaś nie będziemy szczegółowo dokonywali przekształceń, opierających się na tautologiach rachunku zdań. Podany tu dowód — mimo, iż stosunkowo długi — nie jest więc jeszcze całkowicie sformalizowany i powinien być przez czytelnika uzupełniony. Przerobienie jednego lub dwu takich dowodów jest niezbędne dla każdego, kto pragnie zajmować się logiką matematyczną, trzeba bowiem koniecznie nabyć wprawy w zastępowaniu dowodów intuicyjnych przez ich odpowiedniki formalne, postępując według ściśle określonych reguł wnioskowania.

Dla skrótu podajemy przy każdej tautologii nie objaśnienia słowne, lecz numery praw, na które się powołujemy w dowodzeniu tej tautologii. Duża liczba rzymska oznacza numer roz-

¹⁾ M. H. Stone, *Subsumption of the theory of Boolean algebras under the theory of rings*, Proceedings of the National Academy of Sciences 21 (1935), str. 103-105.

²⁾ Por. W. Sierpiński, *Teoria liczb niewymiernych (Wstęp do Analizy)*, Wyd. 2-e, Lwów 1928, str. 53-58.

działu, mała rzymska lub arabska w nawiasie — numer prawa. Reguły wnioskowania (Rozdział III, str. 53-56) oznaczone są numerami od R1 do R7.

- (i) $\Delta(x) \stackrel{df}{=} \langle x, y \rangle [\sum_{y \in x} (x \in Y \cdot y \in Y)]$.
- (ii) $\vdash x \Delta(x) y \equiv \sum_{y \in x} (x \in Y \cdot y \in Y)$. [(i)]
- (iii) $\vdash x \Delta(x) y \equiv y \Delta(x) x$. [R7, III(8), (ii)]
- (iv) $\vdash \Delta(x) \in \text{sym}(X)$. [(iii), R7, VI(41)]
- (v) $\vdash x \in \text{part}(X) \rightarrow \prod_{x \in X} \sum_{y \in x} (x \in Y)$. [VI(45)]
- (vi) $\vdash x \in \text{part}(X) \rightarrow \prod_{x \in X} \sum_{y \in x} [(x \in Y) \cdot (x \in Y)]$. [(v)]
- (vii) $\vdash x \in \text{part}(X) \rightarrow \prod_{x \in X} x \Delta(x) x$. [(vi), (ii)]
- (viii) $\vdash x \in \text{part}(X) \rightarrow \Delta(x) \in \text{refl}(X)$. [(vii), VI(40)]
- (ix) $\vdash x \in \text{part}(X) \rightarrow \prod_{Y, Z \in x} [(Y = Z) \vdash (Y \cdot Z = 0)]$. [VI(45)]
- (x) $\vdash x \in \text{part}(X) \cdot Y \in x \cdot Z \in x \cdot (Y \cdot Z = 0) \rightarrow (Y = Z)$. [(ix), R3]
- (xi) $\vdash x \in \text{part}(X) \cdot Y \in x \cdot Z \in x \cdot \sum_y (y \in Y \cdot Z) \rightarrow (Y = Z)$.
[(x), IV(19), IV(16), III(19)]
- (xii) $\vdash x \in \text{part}(X) \cdot Y \in x \cdot Z \in x \cdot y \in Y \cdot y \in Z \rightarrow (Y = Z)$. [(xi), IV(23), III(16), R4]
- (xiii) $\vdash x \in \text{part}(X) \cdot Y \in x \cdot Z \in x \cdot x \in Y \cdot y \in Y \cdot y \in Z \cdot z \in Z \rightarrow$
 $\rightarrow Y \in x \cdot (Y = Z) \cdot x \in Y \cdot z \in Z$. [(xii)]
- (xiv) $\vdash (Y = Z) \cdot z \in Z \rightarrow z \in Y$. [IV(16)]
- (xv) $\vdash x \in \text{part}(X) \cdot Y \in x \cdot Z \in x \cdot x \in Y \cdot y \in Y \cdot y \in Z \cdot z \in Z \rightarrow$
 $\rightarrow Y \in x \cdot x \in Y \cdot z \in Y$. [(xiii), (xiv)]
- (xvi) $\vdash x \in \text{part}(X) \cdot \sum_{y \in x} (x \in Y \cdot y \in Y) \cdot \sum_{z \in x} (y \in Z \cdot z \in Z) \rightarrow$
 $\rightarrow \sum_{y \in x} (x \in Y \cdot z \in Y)$. [(xv), R7, III(8), III(16), R6]
- (xvii) $\vdash x \in \text{part}(X) \cdot x \Delta(x) y \cdot y \Delta(x) z \rightarrow x \Delta(x) z$. [(xvi), (ii), III(5)]
- (xviii) $\vdash x \in \text{part}(X) \rightarrow \Delta(x) \in \text{trans}(X)$. [(xvii), VI(43)]
- (xix) $\vdash x \in \text{part}(X) \rightarrow \Delta(x) \in \text{aeq}(X)$. [(iv), (viii), (xviii), VI(44)]
- (xx) $\vdash \prod_{x, y \in x} [x R y \equiv x \Delta(x) y] \cdot \Delta(x) \in \text{aeq}(X) \rightarrow R \in \text{aeq}(X)$. [VI(44)] [V(3)]
- (xxi) $\vdash x \in \text{part}(X) \cdot \prod_{x, y \in x} [x R y \equiv x \Delta(x) y] \rightarrow R \in \text{aeq}(X)$.
[(xix), (xx), V(3)]

- (xxii) $\vdash x \in \text{part}(X) \cdot \prod_{x, y \in x} [x R y \equiv \sum_{y \in x} (x \in Y \cdot y \in Y)] \rightarrow R \in \text{aeq}(X)$.
[(xxi), (ii)]
- Z (xxii) wynika od razu wzór (46₁).
- (xxiii) $\vdash \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R x] \rightarrow [u \in Y \rightarrow u \in X]$. [III(1)]
- (xxiv) $\vdash \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R x] \rightarrow (Y \subset X)$. [(xxiii), R5, IV(9)]
- (xxv) $\vdash \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R x] \rightarrow [y \in Y \rightarrow y R x]$. [III(1)]
- (xxvi) $\vdash \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R x] \rightarrow [y \in X \cdot y R x \rightarrow y \in Y]$. [III(1)]
- (xxvii) $\vdash \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R x] \rightarrow [y \in X \rightarrow (y \in Y \equiv y R x)]$. [(xxv), (xxvi)]
- (xxviii) $\vdash \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R x] \rightarrow \prod_{y \in x} [y \in Y \equiv y R x]$. [(xxvii), R3]
- (xxix) $\vdash \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R x] \cdot x \in X \cdot x R x \rightarrow x \in Y$. [(xxvi), R1]
- (xxx) $\vdash R \in \text{refl}(X) \rightarrow [x \in X \equiv x \in X \cdot x R x]$. [R3, VI(40)]
- (xxxi) $\vdash R \in \text{refl}(X) \cdot \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R x] \cdot x \in X \rightarrow x \in Y$. [(xxix), (xxx)]
- (xxxii) $\vdash R \in \text{refl}(X) \cdot \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R x] \cdot x \in X \rightarrow Y \in \mathfrak{A}(R, X) \cdot x \in Y$.
[(xxiv), (xxviii), (xxxii), VI(47), III(2)]
- (xxxiii) $\vdash R \in \text{refl}(X) \cdot \sum_Y \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R x] \cdot x \in X \rightarrow \sum_{Y \in \mathfrak{A}(R, X)} (x \in Y)$.
[(xxxii), R7, III(8), III(16)]
- (xxxiv) $\vdash R \in \text{refl}(X) \cdot x \in X \rightarrow \sum_{Y \in \mathfrak{A}(R, X)} (x \in Y)$. [(xxxiii), R2, V(14)]
- (xxxv) $\vdash \prod_{u \in x} [u \in Y \equiv u R y] \cdot Y \subset X \cdot t \in Y \rightarrow t R y \cdot t \in X$. [III(1), IV(9)]
- (xxxvi) $\vdash \prod_{u \in x} [u \in Z \equiv u R z] \cdot Z \subset X \cdot t \in Z \rightarrow t R z \cdot t \in X$. [III(1), IV(9)]
- (xxxvii) $\vdash y \in X \cdot t \in X \cdot z \in X \cdot R \in \text{aeq}(X) \cdot t R y \cdot t R z \rightarrow z R y \cdot y R z$. [VI(44)]
- (xxxviii) $\vdash \prod_{u \in x} [u \in Y \equiv u R y] \cdot Y \subset X \cdot \prod_{u \in x} [u \in Z \equiv u R z] \cdot Z \subset X \cdot$
 $\cdot t \in Y \cdot t \in Z \cdot R \in \text{aeq}(X) \cdot y \in X \cdot z \in X \rightarrow z R y \cdot y R z$. [(xxxv), (xxxvi), (xxxvii)].
- Dla skrócenia oznaczymy poprzednik tej implikacji literą P.
- (xxxix) $\vdash P \cdot t \in Y \rightarrow t R y \cdot y R z \cdot t \in X \cdot y \in X \cdot z \in X$. [(xxxviii), (xxxv)]
- (xl) $\vdash P \cdot t \in Y \rightarrow t R z \cdot t \in X$. [VI(43), (44), (xxxix)]
- (xli) $\vdash P \cdot t R z \cdot t \in X \rightarrow t \in Z$. [III(1)]
- (xlii) $\vdash P \cdot t \in Y \rightarrow t \in Z$. [(xl), (xli)]
- (xliii) $\vdash P \cdot t \in Z \rightarrow t \in Y$. [dowód podobny do (xlii)]
- (xliiv) $\vdash P \rightarrow (Y = Z)$. [(xlii), (xliii), R5, IV(16)]

Zastępujemy P przez jego znaczenie i stosujemy R6 i III(16):

$$(XLV) \vdash \sum_{y \in X} \prod_{u \in X} [u \in Y \equiv u R y] \cdot Y \subset X \cdot \\ \cdot \sum_{z \in X} \prod_{u \in X} [u \in Z \equiv u R z] \cdot Z \subset X \cdot \\ \cdot \sum_t (t \in Y \cdot t \in Z) \cdot R \in \text{aeq}(X) \rightarrow (Y = Z).$$

$$(XLVI) \vdash Y \in \mathfrak{A}(R, X) \cdot Z \in \mathfrak{A}(R, X) \cdot (Y \cdot Z = 0)' \cdot R \in \text{aeq}(X) \rightarrow (Y = Z). \\ [(XLV), VI(47), IV(19)]$$

$$(XLVII) \vdash R \in \text{aeq}(X) \rightarrow \prod_{x \in X} \sum_{Y \in \mathfrak{A}(R, X)} (x \in Y) \cdot \prod_{Y, Z \in \mathfrak{A}(R, X)} [(Y \cdot Z = 0) + (Y = Z)]. \\ [(XXXIV), (XLVI), VI(44), R5]$$

Jest to wzór (46₂) [na mocy definicji (45)].

$$(XLVIII) \vdash Y \subset X \cdot \prod_{u \in X} [u \in Y \equiv u R y] \cdot y \in X \cdot s \in Y \cdot t \in Y \rightarrow s R y \cdot t R y \cdot s \in X \cdot t \in X. \\ [(XXXV)]$$

$$(XLIX) \vdash R \in \text{aeq}(X) \cdot s R y \cdot t R y \cdot s \in X \cdot t \in X \xrightarrow{y \in X} s R t. \quad [VI(44)]$$

$$(I) \vdash R \in \text{aeq}(X) \cdot Y \subset X \cdot \prod_{u \in X} [u \in Y \equiv u R y] \cdot y \in X \cdot s \in Y \cdot t \in Y \rightarrow s R t. \\ [(XLVIII), (XLIX)]$$

$$(LI) \vdash R \in \text{aeq}(X) \cdot \sum_Y (\{Y \subset X \cdot \sum_{y \in X} \prod_{u \in X} [u \in Y \equiv u R y]\} \cdot s \in Y \cdot t \in Y) \rightarrow s R t. \\ [(I), R6, III(16)]$$

$$(LII) \vdash R \in \text{aeq}(X) \cdot \sum_{Y \in \mathfrak{A}(R, X)} (s \in Y \cdot t \in Y) \rightarrow s R t. \quad [(LI), VI(47)]$$

$$(LIII) \vdash \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R t] \cdot s R t \cdot s \in X \rightarrow s \in Y. \quad [III(1)]$$

$$(LIV) \vdash R \in \text{refl}(X) \cdot \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R t] \cdot t \in X \cdot s R t \cdot s \in X \rightarrow \\ \rightarrow Y \in \mathfrak{A}(R, X) \cdot s \in Y \cdot t \in Y. \quad [(XXXII), R1, (LIII)]$$

$$(LV) \vdash R \in \text{refl}(X) \cdot \sum_Y \prod_u [u \in Y \equiv u \in X \cdot u R t] \cdot t \in X \cdot s \in X \cdot s R t \rightarrow \\ \rightarrow \sum_{Y \in \mathfrak{A}(R, X)} (s \in Y \cdot t \in Y). \quad [(LIV), III(8), III(16), R7]$$

$$(LVI) \vdash R \in \text{refl}(X) \cdot t \in X \cdot s \in X \cdot s R t \rightarrow \sum_{Y \in \mathfrak{A}(R, X)} (s \in Y \cdot t \in Y). \\ [(LV), R2, V(14)]$$

$$(LVII) \vdash R \in \text{aeq}(X) \rightarrow \prod_{s, t \in X} [s R t \equiv \sum_{Y \in \mathfrak{A}(R, X)} (s \in Y \cdot t \in Y)]. \\ [(LII), (LVI), R5]$$

Wzór (LVII) daje [na mocy III(4)] prawo (46₃).

ROZDZIAŁ VII

LICZBY NATURALNE. IZOMORFIZM

W rozdziale niniejszym pokażemy, jak można — po wzbogaceniu układu dotychczas omówionych pewników logicznych jeszcze jednym pewnikiem — uzyskać podstawowe (t. j. takie, z których wynikają dalej wszystkie inne) twierdzenia arytmetyki liczb naturalnych jako tautologie logiczne.

Ponieważ wzory logiczne, jakie wchodzi przy tym w grę, są dość złożone, więc nie będziemy mogli wszędzie podawać ich dowodów sformalizowanych. Zadowolimy się w wielu wypadkach naszkicowaniem tylko intuicyjnej treści dowodów: czytelnik, który przestudiował poprzednie rozdziały, potrafi sam przeprowadzić formalizację tych dowodów.

§ 1. Równoliczność zbiorów. Podstawowym pojęciem, na którym opiera się teoria liczb naturalnych, jest relacja *równoliczności zbiorów*.

Mówimy, że relacja dwuczłonowa R ustala *równoliczność* dwu zbiorów X i Y , jeśli $R \in 1-1$, Y jest zawarte w przeciwdziedzinie relacji R i przy tym X jest obrazem zbioru Y , otrzymanym za pomocą relacji R .

Piszemy wówczas $X \sim_R Y$.

Znak $\sim$ jest więc nazwą relacji trójczłonowej, zachodzącej między dwoma zbiorami i jedną relacją dwuczłonową.

Wzorem możemy napisać tę definicję, jak następuje:

$$\sim \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{R}) \{ (R \in 1-1) \cdot [Y \subset \mathfrak{C}(R)] \cdot [X = R(Y)] \}.$$

Mamy zatem

$$(1) \vdash X \sim_R Y \equiv (R \in 1-1) \cdot [Y \subset \mathfrak{C}(R)] \cdot [X = R(Y)].$$

Jeśli istnieje relacja, ustalająca równoliczność zbiorów X i Y , to mówimy, że zbiory te są *równoliczne*.

Stosunek równoliczności zbiorów będziemy oznaczali symbolem ip (od greckich słów ισος = jednakowy i ποσότης = ilość):

$$(2) \quad \text{ip} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{X}, \hat{Y}) \sum_R (X \sim_R Y).$$

Mamy więc:

$$(3) \quad \vdash X \text{ ip } Y \equiv \sum_R (X \sim_R Y).$$

Pojęcie to jest podstawowym pojęciem teorii mnogości; jego znaczenie dla określenia liczebności zbioru objaśnić możemy następującym rozumowaniem:

Jeśli chcemy porównać liczebność dwu zbiorów przedmiotów, np. liter zawartych w słowie *Budapeszt* i liter zawartych w słowie *Bruksella*, staramy się ustalić relację doskonałą między przedmiotami, tworzącymi oba zbiory. W danym razie można np. wypisać wyrazy *Budapeszt* i *Bruksella* jeden pod drugim i uznać litery stojące jedna nad drugą za pozostające do siebie w relacji R . Istnienie relacji doskonałej, odwzorowującej jeden z danych zbiorów na drugi, uważamy za dowód, że zbiory te są jednakowo liczne¹⁾.

Zauważmy, że pojęcie równoliczności określone jest wzorem (2) w sposób zupełnie ogólny: zachowuje ono sens zarówno dla zbiorów skończonych jak nieskończonych.

PRZYKŁADY. 1. Zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych są równoliczne. Relacją, ustalającą równoliczność tych zbiorów jest

$$(\hat{x}, \hat{y}) \left[(2|y) \cdot \left(x = \frac{1}{2}(y+1) \right) + (2|y) \cdot \left(x = 1 - \frac{1}{2}y \right) \right].$$

2. Zbiór X punktów płaszczyzny symetryczny względem punktu O do zbioru Y jest równoliczny ze zbiorem Y . Zamiast symetrii względem punktu można tu wziąć dowolne inne przekształcenie (np. obrót, przesunięcie i t. p.).

3. Wprowadzenie układu współrzędnych na płaszczyźnie jest ustaleniem stosunku równoliczności między zbiorem punktów

¹⁾ W tym przykładzie słowo *zbiór* użyte jest w znaczeniu potocznym. Zazwyczaj porównujemy liczebność dwu zbiorów (skończonych) przez liczenie przedmiotów, należących do tych zbiorów. Liczenie jest jednak właśnie ustaleniem relacji wzajemnie jednoznacznej między tymi przedmiotami a liczbami naturalnymi.

a zbiorem par liczb rzeczywistych¹⁾. Jeśli relacja R ustala tę równoliczność i $(x_1, x_2) R p$, to x_1 i x_2 nazywają się *współrzednymi* punktu p .

Rozpatrzmy dwa układy współrzędnych i dwie relacje R_1 i R_2 , przyporządkowujące punktom ich współrzędne. Relacja $R_1; R_2$ ustala równoliczność zbioru par liczb rzeczywistych samego z sobą. Jeśli $(x_1, x_2) R_1; R_2 (y_1, y_2)$, to (x_1, x_2) i (y_1, y_2) są współrzednymi tego samego punktu w różnych układach współrzędnych. Relację $R_1; R_2$ określa się zazwyczaj wzorami, noszącymi nazwę *wzorów na zamianę układu współrzędnych*.

Niech $f_1(x_1, x_2)$ i $f_2(y_1, y_2)$ będą dwoma wielomianami zmiennych x_1, x_2, y_1 i y_2 . Jeśli relacja $R_1; R_2$ ustala równoliczność zbiorów

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2) [f_1(x_1, x_2) = 0] \quad \text{ i } \quad (\hat{y}_1, \hat{y}_2) [f_2(y_1, y_2) = 0],$$

to równania $f_1(x_1, x_2) = 0$ i $f_2(y_1, y_2) = 0$ są równaniami tej samej linii w różnych układach współrzędnych.

Z licznych twierdzeń, dotyczących stosunków $\sim$ oraz ip , zanotujemy prawo

$$(4) \quad \vdash (X_1 \sim_{R_1} Y_1) \cdot (X_2 \sim_{R_2} Y_2) \cdot (X_1 \cdot X_2 = 0) \cdot (Y_1 \cdot Y_2 = 0) \cdot (S = R_1|Y_1 + R_2|Y_2) \rightarrow \\ \rightarrow (X_1 + X_2 \sim_S Y_1 + Y_2),$$

które słowami wyrazić można w następujący sposób: *jeśli relacja R_1 ustala równoliczność zbiorów X_1 i Y_1 , a relacja R_2 — równoliczność zbiorów X_2 i Y_2 , przy czym zbiór X_1 jest rozłączny z X_2 , a zbiór Y_1 z Y_2 , to relacja $R_1|Y_1 + R_2|Y_2$ ustala równoliczność zbiorów $X_1 + X_2$ i $Y_1 + Y_2$.*

Dowód. Ze wzorów (34) i (35) Rozdziału VI (§ 4, str. 130 i 131) wynika $\vdash R|Y(Z) = R(Y \cdot Z)$; stosując więc wzory (37) z tegoż Rozdziału, otrzymamy

$$\vdash (S = R_1|Y_1 + R_2|Y_2) \rightarrow \\ \rightarrow [S(Y_1 + Y_2) = R_1(Y_1) + R_1(Y_1 \cdot Y_2) + R_2(Y_1 \cdot Y_2) + R_2(Y_2)].$$

Wobec $\vdash R(0) = 0$ wynika stąd

$$\vdash (S = R_1|Y_1 + R_2|Y_2) \cdot (Y_1 \cdot Y_2 = 0) \rightarrow [S(Y_1 + Y_2) = R_1(Y_1) + R_2(Y_2)],$$

¹⁾ Niekiedy jest to równoliczność zbioru punktów i zbioru niektórych tylko par liczb. Np. przy współrzędnych biegunowych wyłączone są pary (φ, φ) , w których $\varphi = 0$ i $\varphi \neq 0$.

a zatem

$$(i) \vdash [X_1 = R_1(Y_1)] \cdot [X_2 = R_2(Y_2)] \cdot (Y_1 \cdot Y_2 = 0) \cdot (S = R_1|Y_1 + R_2|Y_2) \rightarrow [S(Y_1 + Y_2) = X_1 + X_2].$$

Wobec $\vdash \mathfrak{C}(R_1|Y_1 + R_2|Y_2) = \mathfrak{C}(R_1|Y_1) + \mathfrak{C}(R_2|Y_2)$ mamy dalej

$$(ii) \vdash (S = R_1|Y_1 + R_2|Y_2) \cdot [Y_1 \subset \mathfrak{C}(R_1)] \cdot [Y_2 \subset \mathfrak{C}(R_2)] \rightarrow [Y_1 + Y_2 \subset \mathfrak{C}(S)],$$

gdyż $\vdash [Y \subset \mathfrak{C}(R)] \rightarrow [\mathfrak{C}(R|Y) = Y]$.

Zauważmy wreszcie, że z inkluzji $\vdash R_1|Y_1 \subset R_1$ i $\vdash R_2|Y_2 \subset R_2$ otrzymamy przez zastosowanie wzoru (69) z Rozdziału VI, (§ 8, str. 152):

$$(iii) \vdash (R_1 \in 1-1) \rightarrow (R_1|Y_1 \in 1-1), \quad \vdash (R_2 \in 1-1) \rightarrow (R_2|Y_2 \in 1-1).$$

Ponieważ zaś $\vdash \mathfrak{C}(R_1|Y_1) \subset Y_1$, $\vdash \mathfrak{C}(R_2|Y_2) \subset Y_2$, $\vdash \mathfrak{D}(R_1|Y_1) = R_1(Y_1)$ i $\vdash \mathfrak{D}(R_2|Y_2) = R_2(Y_2)$, więc na mocy prawa (70) z Rozdziału VI (§ 8, str. 152) otrzymujemy

$$\vdash (R_1|Y_1 \in 1-1) \cdot (R_2|Y_2 \in 1-1) \cdot (Y_1 \cdot Y_2 = 0) \cdot (R_1(Y_1) \cdot R_2(Y_2) = 0) \rightarrow [(R_1|Y_1 + R_2|Y_2) \in 1-1],$$

skąd na mocy (iii) wynika

$$(iv) \vdash (R_1 \in 1-1) \cdot (R_2 \in 1-1) \cdot (X_1 = R_1(Y_1)) \cdot (X_2 = R_2(Y_2)) \cdot (X_1 \cdot X_2 = 0) \cdot (Y_1 \cdot Y_2 = 0) \cdot (S = R_1|Y_1 + R_2|Y_2) \rightarrow S \in 1-1.$$

Wzór (4) wynika z (i), (ii) i (iv) na mocy (1).

Z (4) otrzymujemy z łatwością ważny wniosek:

$$(5) \vdash (X_1 \text{ ip } Y_1) \cdot (X_2 \text{ ip } Y_2) \cdot (X_1 \cdot X_2 = 0) \cdot (Y_1 \cdot Y_2 = 0) \rightarrow (X_1 + X_2) \text{ ip } (Y_1 + Y_2).$$

Słowami: z równoliczności zbiorów X_1 i Y_1 oraz X_2 i Y_2 wynika równoliczność sum $X_1 + X_2$ i $Y_1 + Y_2$, o ile zbiory X_1 i X_2 oraz Y_1 i Y_2 są rozłączne.

ĆWICZENIA: 1. Podać relacje ustalające równoliczność następujących zbiorów:

- (a) zbioru wszystkich liczb całkowitych i wszystkich liczb nieparzystych,
- (b) zbiorów wszystkich punktów prostej i wszystkich punktów odcinka.

2. Udowodnić, że $\vdash (X_1 \sim_R X_2) \cdot (Y_1 \sim_R Y_2) \rightarrow (X_1 \cdot Y_1 \sim_R X_2 \cdot Y_2)$ i że na ogół z $X_1 \text{ ip } X_2$ i $Y_1 \text{ ip } Y_2$ nie wynika $X_1 \cdot Y_1 \text{ ip } X_2 \cdot Y_2$.

3. Udowodnić, że

$$\vdash X \sim_R Y \equiv (R \in 1-1) \cdot [X \subset \mathfrak{D}(R)] \cdot [Y \subset \mathfrak{C}(R)] \cdot \prod_{xy} [xRy \rightarrow (x \in X \equiv y \in Y)].$$

§ 2. Liczby kardynalne. Wykażemy, że stosunek ip równoliczności zbiorów jest *zwrotny, symetryczny i przechodni* (w zbiorze wszystkich zbiorów).

Mamy oczywiście $\vdash 1' \in 1-1$ (Rozdział VI, wzór (68), § 8, str. 152) oraz $\vdash 1 = \mathfrak{C}(1')$, skąd $\vdash X \subset \mathfrak{C}(1')$. Ze wzoru (36) Rozdziału VI (§ 4, str. 131) wynika nadto $\vdash 1'(X) = X$. Otrzymujemy zatem zgodnie z (1)

$$\vdash X \sim_1 X.$$

Relacja równości ustala więc równoliczność zbioru X z samym sobą, co dowodzi, że

$$(6) \vdash X \text{ ip } X.$$

Ustaliliśmy więc zwrotność stosunku ip.

Ponieważ $\vdash R \in 1-1 \equiv \check{R} \in 1-1$ (Rozdział VI, § 8, wzór (66), str. 151), $\vdash X = R(Y) \rightarrow X \subset \mathfrak{D}(R)$ (Rozdział VI, § 4, wzór (36), str. 131) oraz $\vdash \mathfrak{D}(R) = \mathfrak{C}(\check{R})$ (Rozdział VI, § 4, wzór (31), str. 130), więc na mocy (1) otrzymujemy

$$(i) \vdash X \sim_R Y \rightarrow (\check{R} \in 1-1) \cdot [X \subset \mathfrak{C}(\check{R})].$$

Pozostaje wykazać, że

$$(ii) \vdash X \sim_R Y \rightarrow \check{R}(X) \subset Y,$$

$$(iii) \vdash X \sim_R Y \rightarrow Y \subset \check{R}(X).$$

Pierwszy z tych wzorów wynika z tautologii

$$\vdash X = R(Y) \rightarrow \check{R}(X) = \check{R}; R(Y)$$

na mocy wzoru (39) z Rozdziału VI (§ 4, str. 152), przy czym $\vdash R \in 1-1 \rightarrow \check{R}; R \subset 1'$ (Rozdział VI, § 8, wzory (58) i (63), str. 150-151) oraz $\vdash 1'(Y) = Y$.

Dla dowodu (iii) wychodzimy z tautologii

$$\vdash (xRy) \cdot (y \in Y) \cdot [X = R(Y)] \rightarrow (y \check{R} x) \cdot (x \in X),$$

z której na mocy wzoru (55) z Rozdziału VI (§ 4, str. 131) wynika

$$\vdash (xRy) \cdot (y \in Y) \cdot [X = R(Y)] \rightarrow [y \in \check{R}(X)].$$

Dołączając w poprzedniku kwantyfikator $\sum_x$ i opierając się na definicji przeciwdziedziny, otrzymujemy

$$\vdash [y \in Y \cdot \mathfrak{C}(R)] \cdot [X = R(Y)] \rightarrow [y \in \check{R}(X)],$$

skąd

$$\vdash [X = R(Y)] \rightarrow [Y \cdot \mathfrak{C}(R) \subset \check{R}(X)],$$

a więc

$$\vdash [X = R(Y)] \cdot [Y \subset \mathfrak{C}(R)] \rightarrow [Y \subset \check{R}(X)].$$

Na mocy (1) otrzymujemy stąd wzór (iii).

Mnożąc teraz stronami implikacje (i)-(iii) i powołując się na wzór (1), wnosimy, że

$$\vdash X \sim_R Y \equiv Y \sim_{\check{R}} X.$$

Jeśli więc relacja R ustala równoliczność zbioru X ze zbiorem Y , to relacja odwrotna $\check{R}$ ustala równoliczność zbioru Y ze zbiorem X .

W myśl (3) wynika stąd

$$(7) \quad \vdash X \text{ ip } Y \equiv Y \text{ ip } X,$$

co dowodzi symetrii stosunku ip.

Aby wykazać przechodność tego stosunku, opieramy się na prawach (39) i (67) z Rozdziału VI (§ 4, str. 132 i § 8, str. 151), otrzymując

$$(8) \quad \vdash [X = R(Y)] \cdot [Y = S(Z)] \rightarrow [X = R; S(Z)],$$

$$(9) \quad \vdash (R \in 1-1) \cdot (S \in 1-1) \rightarrow (R; S \in 1-1).$$

Zauważmy wreszcie, że $\vdash [Z \subset \mathfrak{C}(S)] \cdot (z \in Z) \rightarrow \sum_y [y S z \cdot y \in S(Z)]$, skąd

$$\vdash [Z \subset \mathfrak{C}(S)] \cdot (z \in Z) \rightarrow \sum_y [y S(Z) | S z],$$

a więc

$$\vdash [Z \subset \mathfrak{C}(S)] \cdot [Y = S(Z)] \cdot (z \in Z) \rightarrow [z \in \mathfrak{C}(Y | S)].$$

Otrzymujemy stąd

$$(10) \quad \vdash [Z \subset \mathfrak{C}(S)] \cdot [Y = S(Z)] \rightarrow [Z \subset \mathfrak{C}(Y | S)].$$

Korzystając teraz ze wzoru, wynikającego z praw (31), (36), (39) i (12) Rozdziału VI:

$$\vdash \mathfrak{C}[\mathfrak{C}(R) | S] = \check{S}[\mathfrak{C}(R)] = \check{S}[\check{R}(1)] = \check{S}; \check{R}(1) = \check{R}; S(1) = \mathfrak{C}(R; S),$$

wyprowadzamy z (10) wzór

$$(11) \quad \vdash [Z \subset \mathfrak{C}(S)] \cdot [Y = S(Z)] \cdot [Y \subset \mathfrak{C}(R)] \rightarrow [Z \subset \mathfrak{C}(R; S)].$$

Wzory (8), (9) i (11) dają

$$\vdash [X = R(Y)] \cdot [Y \subset \mathfrak{C}(R)] \cdot (R \in 1-1) \cdot [Y = S(Z)] \cdot [Z \subset \mathfrak{C}(S)] \cdot (S \in 1-1) \rightarrow \\ \rightarrow [X = R; S(Z)] \cdot [Z \subset \mathfrak{C}(R; S)] \cdot (R; S \in 1-1),$$

czyli na mocy (1)

$$\vdash (X \sim_R Y) \cdot (Y \sim_S Z) \rightarrow (X \sim_{R; S} Z).$$

Wzór ten dowodzi, że jeśli relacja R ustala równoliczność zbiorów X i Y , a relacja S — równoliczność zbiorów Y i Z , to relacja złożona $R; S$ ustala równoliczność zbiorów X i Z . Wnosimy stąd, że

$$(12) \quad \vdash (X \text{ ip } Y) \cdot (Y \text{ ip } Z) \rightarrow (X \text{ ip } Z).$$

Przechodność stosunku ip została tym samym udowodniona.

Zgodnie z zasadą abstrakcji (Rozdział VI, § 6, str. 138) zbiór wszystkich zbiorów (zawartych w 1) rozpada się na rozłączne między sobą klasy abstrakcji relacji ip, przy czym dwa zbiory X i Y należą do tej samej klasy abstrakcji wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi między nimi stosunek ip.

Te klasy abstrakcji nazywamy *liczbami kardynalnymi*.

Liczby kardynalne są to więc zbiory utworzone z równolicznych między sobą zbiorów, zawartych w 1.

W § 5 wyjaśnimy dokładniej, na czym polega doniosłość liczb kardynalnych i dlaczego podane określenie tych liczb uważamy za odpowiedź na pytanie od dawna niepokojące umysły ludzkie: czym są liczby?

Tu wprowadzimy jeszcze tylko pewne symbole, którymi będziemy się posługiwać w dalszym ciągu.

Zbiór wszystkich zbiorów zawartych w 1 oznaczać będziemy symbolem $\mathfrak{P}$:

$$\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{X})[X \subset 1].$$

Zbiór klas abstrakcji relacji R w zbiorze X oznaczyliśmy w Rozdziale VI (str. 138) symbolem $\mathfrak{A}(R, X)$. Zbiór liczb kardynalnych (czyli klas abstrakcji relacji ip w zbiorze $\mathfrak{P}$) wprowadzić więc możemy za pomocą definicji ¹⁾

$$\text{Nc} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{A}(\text{ip}, \mathfrak{P}).$$

¹⁾ Litera Nc są skrótem łacińskiego *numerus cardinalis*.

Z określenia zbioru $\mathfrak{N}(R, X)$ podanego w Rozdziale VI (§ 6, wzór (47), str. 138) wynika, że

$$\vdash \mathfrak{X} \in \mathfrak{N}c \equiv \mathfrak{X} \subset \mathfrak{P} \cdot \sum_{X \in \mathfrak{P}} \prod_{Y \in \mathfrak{P}} [Y \in \mathfrak{X} \equiv Y \text{ ip } X].$$

Wzór ten możemy uprościć na podstawie tezy $\vdash X \subset 1$, która daje $\vdash X \in \mathfrak{P}$ i $\vdash \mathfrak{X} \subset \mathfrak{P}^1$. Możemy zatem pominąć w poprzednim wzorze czynnik $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{P}$ oraz wyrażenia $X \in \mathfrak{P}$ i $Y \in \mathfrak{P}$, wypisane pod kwantyfikatorami:

$$(15) \quad \vdash \mathfrak{X} \in \mathfrak{N}c \equiv \sum_X \prod_Y [Y \in \mathfrak{X} \equiv Y \text{ ip } X].$$

Zbiór $\mathfrak{X}$ jest więc liczbą kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór X (zawarty w 1) taki, że $\mathfrak{X}$ składa się ze wszystkich zbiorów równolicznych z X .

ĆWICZENIE. Jeśli zbiór pełny składa się z n przedmiotów, to zbiór $\mathfrak{N}c$ składa się z $n+1$ zbiorów $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n$; zbiory te można tak ponumerować, że $\mathfrak{X}_k$ ma $\binom{n}{k}$ elementów, które są zbiorami k -elementowymi, zawartymi w 1.

§ 3. Czym są liczby naturalne? Matematyk niemiecki L. Kronecker (1823-1895) jest autorem słynnego powiedzenia: „liczby naturalne stworzył Pan Bóg, wszystkie inne są wytworem ludzkim”.

Przypomnijmy, że w czasie, gdy działał Kronecker, udało się ugruntować teorię liczb rzeczywistych, sprowadzając ją do arytmetyki liczb wymiernych (por. Rozdział VI, § 6, str. 140, przykład 3). Sprowadzenie arytmetyki liczb wymiernych do arytmetyki liczb naturalnych nie nastęrcza większych trudności (por. Rozdział VI, § 6, str. 138-140, przykłady 1 i 2); pozostawało więc tylko ugruntowanie arytmetyki liczb naturalnych.

Kronecker — jak widzimy — uznał, że rozwiązanie tego zagadnienia przerasta siły ludzkie. Do dziś dnia wielu tak sądzi: logicy ze szkoły intuicjonistycznej (por. Rozdział II, § 13, str. 41) wierzą w «pra-intuicję» liczb naturalnych.

Nie wszyscy jednak myśliciele przychyliili się do dogmatycznego poglądu Kroneckera, rezygnując z rozwiązania zasadniczego dla całej filozofii matematyki problemu: określenia liczb naturalnych i uzasadnienia praw nimi rządzących. Był on zresztą

¹⁾ Zmienne $X, Y, \dots$ przebiegają zbiór wszystkich podzbiorów zbioru 1, a zmienne $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \dots$ przebiegają zbiór złożony ze wszystkich podzbiorów zbioru $\mathfrak{P}$.

dyskutowany przez filozofów od dawna, zanim w końcu XIX wieku nasunął się matematykom.

Łatwo pojąć, czemu problem ten jest tak doniosły zarówno dla matematyki jak dla filozofii.

Cechą matematyki jest pewność jej rezultatów. Stosujemy rachunki matematyczne do badania otaczającego nas świata i jesteśmy pewni, że nie popadniemy przez to w sprzeczność z rzeczywistością. Stosujemy matematykę także do pojęć zupełnie abstrakcyjnych (np. obliczając ilość pierwiastków równań) lub do wytworów wyobraźni (np. sumując liczbę bogów greckich i rzymskich) i zawsze jesteśmy pewni, że dojdziemy do poprawnych wyników. Stosujemy wyniki matematyki do liczb małych, znanych nam z codziennego doświadczenia, lecz z tą samą pewnością stosujemy je do liczb wielkich, o których nie podobna sobie wytworzyć wyobrażenia (np. do liczb, przekraczających prawdopodobną ilość elektronów we wszechświecie). Mówimy przysłówiowo: *perone, jak dwa razy dwa cztery*, dając tym wyraz wierze w niewzruszoność praw arytmetyki.

Ta «absolutna» pewność twierdzeń matematycznych ma swe źródło w tym, że są one konsekwencjami przyjętych założeń czy określeń — a zdania takie są prawdziwe niezależnie od tego, jak układają się stosunki w realnym świecie.

Aby to bliżej wyjaśnić, rozpatrzmy zdanie

$$(14) \quad \prod_a (a = a).$$

Po uwzględnieniu definicji znaku $=$ (Rozdział V, § 1, str. 109) prawo to sprowadza się do zdania

$$\prod_a \prod_X [a \in X \equiv a \in X],$$

to zaś zdanie jest prawdziwe na mocy samego określenia funktora $\equiv$ oraz kwantyfikatora $\prod$; umówiliśmy się przecież rozumieć funktor $\equiv$ w ten sposób, że zdanie $p \equiv p$ jest prawdziwe dla każdego p , i umówiliśmy się pojmować kwantyfikator $\prod$ tak, że zdanie $\prod_x \Phi(x)$ jest prawdziwe, o ile $\Phi(x)$ jest spełnione przez dowolne x . Zdanie (14) jest więc prawdziwe wprost na mocy przyjętego znaczenia występujących w nim wyrażań.

W filozofii przyjęte jest nazywać takie zdania *analitycznymi*; zdanie (14) jest więc przykładem zdania analitycznego, podczas gdy np. zdanie: *Warszawa jest stolicą Polski* jest zdaniem praw-

dziwym, ale nie analitycznym, bo prawdziwość jego uzasadnić się daje tylko na drodze empirycznej¹⁾.

Problem, jaki nasuwał się od dawna filozofom, można sformułować teraz w taki sposób: czy twierdzenia arytmetyki są zdaniami analitycznymi? Gdyby udało się to wykazać, charakter absolutnej pewności, jaki zdaje się przysługiwać twierdzeniom arytmetycznym, znalazłby swe wytłumaczenie.

Zgodnie z podanym wyżej wyjaśnieniem nazwy *zdanie analityczne*, do problemu tego podejść należy, jak następuje: musimy określić za pomocą pojęć czysto logicznych znaczenie pojęcia liczby i sprawdzić, czy twierdzenia arytmetyki dają się wówczas wyprowadzić z poznanych w poprzednich rozdziałach tautologii. Analityczny charakter matematyki będzie więc stwierdzony, gdy uda się nam sprowadzić arytmetykę do logiki. Oto uzasadnienie doniosłości filozoficznej problemu, poruszonego na początku.

Rozumiemy teraz, że nie możemy uznać za należyte wyjaśnienie podstaw matematyki przyjęcie t. zw. aksjomatycznych systemów arytmetyki. W systemach tych nie objaśnia się znaczenia słowa *liczba*; postuluje się tylko, że liczby są to przedmioty, spełniające pewne prawa arytmetyczne (aksjomaty systemu). Dopiero dalsze własności liczb wyprowadza się z aksjomatów, korzystając z tautologii logicznych. To aksjomatyczne ujęcie teorii liczb naturalnych, z którym zapoznamy się fragmentarycznie w § 6, a nieco dokładniej w Rozdziale IX (zob. § 4, przykład VIII), jest matematycznie bardzo ciekawe i jest podstawą ścisłych dowodów wielu twierdzeń; z dwu jednak względów nie przynosi ono odpowiedzi na sformułowany poprzednio problem: po pierwsze nie wiadomo, czym uzasadnić analityczny charakter aksjomatów, po drugie zaś nawet tak proste twierdzenie jak:

równanie $x^2 + 2x - 5 = 0$ ma dwa pierwiastki

nie daje się wyprowadzić z aksjomatów. W twierdzeniu tym bowiem słowo *dwa* wcale nie jest nazwą tego przedmiotu 2, o którym założono w arytmetyce ujętej aksjomatycznie, że spełnia on wspólnie z innymi przyjęte aksjomaty, lecz jest ono użyte

¹⁾ Tradycyjnym przykładem zdania analitycznego jest: *jeśli każdy człowiek jest śmiertelny i Sokrates jest człowiekiem, to Sokrates jest śmiertelny*. Prawdziwość tego zdania uznać musi każdy, kto tylko rozumie treść występujących w nim pojęć logicznych. Zdanie to bowiem byłoby prawdziwe i wówczas, gdyby istnieli ludzie nieśmiertelni, lub gdyby Sokrates nie był człowiekiem.

w sensie naiwnym, takim w jakim używamy tego słowa w życiu codziennym.

Problem sprowadza się więc do uchwycenia właśnie tego naiwnego znaczenia pojęcia liczby, do zbadania, jaki jest jego logiczny charakter, i do powiązania go z innymi pojęciami logicznymi. Wynikiem pomyślnym powinna być definicja pojęcia liczby, sformułowana w terminach samej logiki, i dowód zasadniczych własności liczb, znanych zarówno z doświadczenia codziennego jak z nauk ścisłych.

Postawione w ten sposób zagadnienie rozwiązał niemal całkowicie znakomity, acz przez współczesnych mu niezrozumiany logik i matematyk niemiecki Gottlob Frege (1848-1925)¹⁾.

Frege analizuje najpierw zdania, w których występują słowa *jeden*, *dwa*, *trzy* i t. d., czyli zdania, w których występują nazwy liczb. Z analizy tej wynika, że słowa te nie są nazwami przedmiotów, ani nawet nazwami własności przedmiotów, lecz *nazwami własności pojęć*. Np. w zdaniu:

istnieje pięć części świata

wypowiadamy pewną myśl o pojęciu *część świata*, stwierdzamy, że to pojęcie ma własność, dla której wysłowienia używamy wyrazu *pięć*. Tę samą własność posiada pojęcie: *palec ręki normalnego człowieka*.

Zamiast mówić o pojęciach mówić możemy o zbiorach (czyli — jak się wyrażają filozofowie — o *zakresach pojęć*). Zbiór utworzony z części świata i zbiór *palców ręki normalnego człowieka* mają więc pewną własność wspólną, którą oznaczamy słowem *pięć*. Podobnie zbiór $\{x | x^2 + 2x - 5 = 0\}$ ma własność, którą oznaczamy słowem *dwa*.

Pierwszą tezę, którą za Fregem stąd wysnuwamy, jest następująca: *liczby naturalne są to własności zbiorów*.

¹⁾ Teorię swoją Frege wyłożył w przystępnie napisanej książeczce: *Die Grundlagen der Arithmetik*, Wrocław 1884 (przedruk: Wrocław 1934), której lekturę i dziś jeszcze można gorąco polecić osobom, interesującym się podstawami matematyki. Książka Fregego uszła uwagi ówczesnych matematyków prawdopodobnie wskutek swego filozoficznego nastawienia. Systematyczny wykład swej teorii ogłosił Frege w dwutomowym dziele: *Grundgesetze der Arithmetik begriffsschriftlich abgeleitet*, Jena 1891 i 1903. Tu znów zapewne złożoność symboliki stała się przeszkodą dla czytelników. Wielkie zasługi dla ulepszenia i uprzyśpieszenia teorii Fregego położył cytowany już wielokrotnie logik angielski Bertrand Russell.

Jest dalej jasne, że zdania:

(15) *Zbiór X ma n elementów, Zbiór Y ma n elementów*

są bądź oba prawdziwe, bądź oba fałszywe, jeśli zbiory X i Y są równoliczne, t.j. jeśli $X \approx Y$. Jeśli natomiast zbiory X i Y nie są równoliczne, to z prawdziwości jednego ze zdań (15) wynika fałszywość drugiego. Widzimy stąd, że pojęciu liczby n przypisujemy (zarówno w życiu codziennym, jak i w rozważaniach naukowych) następującą własność: jeśli istnieje n przedmiotów w zbiorze X , to istnieje też n przedmiotów w każdym zbiorze równolicznym z X , nie istnieje zaś dokładnie n przedmiotów w żadnym zbiorze, który nie jest równoliczny z X . Inaczej mówiąc: *zbiór wszystkich zbiorów o n elementach jest liczbą kardynalną.*

Z Rozdziału IV (§ 1, str. 83) wiemy, że zbiór wszystkich zbiorów mających pewną własność utożsamiamy poprostu z tą własnością. Dochodzimy w ten sposób do stwierdzenia, że słowa: *jeden, dwa, trzy* i t.d. używane są w języku potocznym jako nazwy pewnych liczb kardynalnych, określonych w § 2.

W ten sposób logiczny charakter pojęcia liczby jest całkowicie wyjaśniony.

Należy tu jednak zauważyć, że tak określone liczby służyć nam mogą tylko do określenia liczebności zbiorów, zawartych w zbiorze pełnym 1. Dla określenia liczebności zbiorów, złożonych z przedmiotów innego rodzaju niż te, które zaliczone są do zbioru 1 (np. do określania liczebności zbiorów, składających się ze zbiorów) utworzyć trzeba byłoby inne klasy abstrakcji, a więc inne liczby naturalne. Komplikację tę możnaby ominąć, zakładając — jak to czynił Frege — że zbiór pełny zawiera jako elementy w ogóle wszystko: wszystkie przedmioty, zbiory, relacje i t.p. Ze względów, o których mowa będzie dalej (zob. Rozdział VIII, § 2), założenie takie jest nie do przyjęcia. Ograniczymy się więc do rozpatrywania tylko liczb, służących do liczenia przedmiotów, które należą do zbioru pełnego 1, podkreślając jednak wyraźnie, że rezygnujemy w ten sposób z nadania pojęciu liczby tej ogólności, jaką powinno ono posiadać.

Rzecz prosta, nie każdą liczbę kardynalną uznamy za liczbę naturalną (czyli jedną z liczb 1, 2, 3, ...). Liczba kardynalna, do której należy np. zbiór wszystkich liczb (albo jakiegokolwiek inny zbiór nieskończony), z pewnością nie powinna być uznana za

liczbę naturalną. Musimy więc wyróżnić spośród wszystkich liczb kardynalnych te liczby, które zgodnie z intuicją nazwać by można *skończonymi* — i te dopiero liczby nazwiemy *liczbami naturalnymi*.

Dla określenia liczb kardynalnych skończonych potrzebne nam będą pewne pojęcia pomocnicze, z którymi zapoznamy się obecnie.

§ 4. Zero i następnik. Zgodnie ze wzorem (15) zbiór $(\hat{Y})[Y \approx X]$ jest (dla każdego $X \subset 1$) liczbą kardynalną. Nazywamy ją *liczbą kardynalną zbioru X* albo jego *mocą* i oznaczamy symbolem $Nc(X)$:

$$Nc(X) \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{Y})[Y \approx X].$$

Jest jasne, że

$$(16) \quad \vdash Nc(X) \in Nc, \quad \vdash Y \in Nc(X) \equiv Y \approx X.$$

Moc zbioru pustego oznaczamy symbolem 0 ; jest to *liczba naturalna zero*:

$$0 \stackrel{\text{df}}{=} Nc(0).$$

Zbiór X ma więc moc 0 (słowami: *ma zero elementów*) wtedy i tylko wtedy, gdy $X \approx 0$. Warunek ten jest na podstawie prawa $\vdash R(0) = 0$ równoważny równości $X = 0$. Mamy więc

$$(17) \quad \vdash X \in 0 \equiv X = 0,$$

t. zn. jedynym zbiorem, który ma zero elementów, jest zbiór pusty. Wynik ten pozostaje w zupełnej zgodzie z intuicyjnym pojmowaniem liczby 0 . Jak mówi Frege, pojęciu przysługuje liczba zero wtedy i tylko wtedy, gdy żaden przedmiot nie podpada pod to pojęcie. Np. zdanie: *Merkury ma zero księżyców* znaczy to samo, co *żaden przedmiot nie podpada pod pojęcie: księżyc Merkurego* lub prościej: *żaden przedmiot nie jest księżycem Merkurego*.

Oznaczać będziemy symbolem $\iota(x)$ zbiór, którego jedynym elementem jest x :

$$\iota(x) \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{y})[y = x].$$

Z definicji tej wynika z łatwością, że

$$(18) \quad \vdash [y \in \iota(x)] \equiv (y = x), \quad \vdash x \in \iota(x).$$

Można też wykazać bez trudu, że zbiory $\iota(x)$ i $\iota(y)$ są równoliczne, przy czym równoliczność ich wykazuje relacja

$$(\hat{u}, \hat{v}) [(u=x) \cdot (v=y)],$$

oraz że zbiór równoliczny z $\iota(x)$ musi być postaci $\iota(y)$:

$$(19) \quad \vdash \iota(x) \text{ip} \iota(y), \quad \vdash X \text{ip} \iota(x) \equiv \sum_y [X = \iota(y)].$$

Korzystając z pojęcia zbioru $\iota(x)$, określić możemy *następnik liczby kardynalnej*, czyli — intuicyjnie rzecz biorąc — liczbę kardynalną o jedność większą od danej.

Analizując intuicyjne znaczenie zdania: *zbiór X ma o jeden element więcej niż zbiór Y* , stwierdzamy, że orzeka ono to samo co zdanie: *zbiór X jest równoliczny ze zbiorem, powstałym z Y przez dołączenie jeszcze jednego elementu, poprzednio do Y nie wchodzącego*. Następnik liczby kardynalnej $\aleph$ określamy zatem jako zbiór zbiorów równolicznych z $Y + \iota(y)$, gdzie $Y \in \aleph$, a $y \in Y'$:

$$(20) \quad \aleph^* \doteq (\hat{X}) \{ \sum_{Y \in \aleph} \sum_{y \in Y'} [X \text{ip} (Y + \iota(y))] \}.$$

Definicja ta zachowuje sens również wówczas, gdy $\aleph$ nie jest liczbą kardynalną, lecz dowolnym zbiorem złożonym ze zbiorów; w praktyce jednak korzystać będziemy z tej definicji tylko w przypadku, gdy $\aleph$ jest liczbą kardynalną.

Zbiór $\aleph^*$ może być pusty; jest tak np. wówczas, gdy jedynym elementem zbioru $\aleph$ jest zbiór pełny 1.

Wykażemy, że jeśli $\aleph$ jest liczbą kardynalną różną od $\text{Nc}(1)$, to $\aleph^*$ nie jest zbiorem pustym:

$$(21) \quad \vdash (\aleph \in \text{Nc}) \cdot [\aleph \neq \text{Nc}(1)] \rightarrow \sum_X (X \in \aleph^*).$$

Dowód. Z $\aleph \in \text{Nc}$ wynika, że istnieje zbiór Y należący do $\aleph$. Nie może być $Y=1$, bo w takim razie byłoby $\aleph = \text{Nc}(1)$. Zatem istnieje takie y , że $y \in Y'$, skąd wynika, że zbiór $Y + \iota(y)$ jest elementem zbioru $\aleph^*$, c. b. d. o.

Podajemy tu kilka twierdzeń o następnikach, nie formalizując ich dowodów.

$$(22) \quad \vdash (\aleph \in \text{Nc}) \cdot [\aleph \neq \text{Nc}(1)] \rightarrow (\aleph^* \in \text{Nc}).$$

Zatem następnik liczby kardynalnej różnej od $\text{Nc}(1)$ jest liczbą kardynalną.

Dowód. Załóżmy że $\aleph \in \text{Nc}$ i $\aleph \neq \text{Nc}(1)$. W myśl (21) istnieje taki zbiór X , że $X \in \aleph^*$. Jest więc $X \text{ip} [Y + \iota(y)]$, gdzie $Y \in \aleph$ i $y \in Y'$. Załóżmy, że $Z \in \aleph^*$, t. zn., że $Z \text{ip} [Y_1 + \iota(y_1)]$, gdzie $Y_1 \in \aleph$ i $y_1 \in Y_1'$. Ponieważ $\aleph$ jest liczbą kardynalną, więc $Y \text{ip} Y_1$, ponieważ zaś $\iota(y) \text{ip} \iota(y_1)$ na mocy (19) i $Y \cdot \iota(y) = Y_1 \cdot \iota(y_1) = 0$, więc zgodnie z (5) wnosimy, że $[Y_1 + \iota(y_1)] \text{ip} [Y + \iota(y)]$, czyli $Z \text{ip} X$. Z drugiej strony, jeśli $Z \text{ip} X$, to $Z \text{ip} [Y + \iota(y)]$, gdzie $Y \in \aleph$ i $y \in Y'$. Wnosimy stąd, że

$$\prod_Z [Z \in \aleph^* \equiv Z \text{ip} X],$$

a więc na mocy (15) jest $\aleph^* \in \text{Nc}$, c. b. d. o.

Następnik liczby 0 oznaczamy symbolem 1, następnik liczby 1 symbolem 2 i t. d. Zgodnie z (22) zbiory

$$1, 2, 3, \dots$$

są wszystkie liczbami kardynalnymi, o ile $\text{Nc}(1)$ nie występuje wśród nich.

$$(25) \quad \vdash \aleph^* \neq 0.$$

To twierdzenie możemy wyrazić słowami jak następuje: 0 nie jest następnikiem żadnej liczby kardynalnej.

Dowód. W myśl (18) $\vdash y \in Y + \iota(y)$, a więc $\vdash Y + \iota(y) \neq 0$, skąd na mocy (17) $\vdash [Y + \iota(y) \in 0']$. Ponieważ zaś $\sum_{Y \in \aleph} [Y + \iota(y) \in \aleph^*]$ albo $\aleph^*$ jest zbiorem pustym, więc wynika stąd $\vdash \aleph^* \neq 0$, c. b. d. o.

Zajmiemy się na koniec dowodem twierdzenia, orzekającego, że liczby kardynalne o równych następnikach muszą być równe. W tym celu udowodnimy najpierw twierdzenie pomocnicze:

$$(24) \quad \vdash (\aleph \in \text{Nc}) \cdot (\eta \in \text{Nc}) \cdot (\aleph^* = \eta^*) \cdot (X \in \aleph^*) \rightarrow (X \in \eta^*).$$

Dowód. Załóżmy, że $\aleph$ i η są liczbami kardynalnymi, $\aleph^* = \eta^*$ i $X \in \aleph^*$. Wynika stąd, że $X \in \eta^*$, a zatem istnieją takie X_1, Y_1, x_1 i y_1 , że

$$(i) \quad X \text{ip} [X_1 + \iota(x_1)], \quad X \text{ip} [Y_1 + \iota(y_1)],$$

$$(ii) \quad X_1 \in \aleph, \quad Y_1 \in \eta, \quad x_1 \in X_1', \quad y_1 \in Y_1'.$$

Zgodnie z (i) jest $[X_1 + \iota(x_1)] \text{ip} [Y_1 + \iota(y_1)]$, czyli istnieje taka relacja R , że

$$(iii) \quad [X_1 + \iota(x_1)] \sim_R [Y_1 + \iota(y_1)].$$

Ponieważ $y_1 \in \mathfrak{C}(R)$, więc istnieje taki element $z_1 \in X_1 + \iota(x_1)$, że $z_1 R y_1$. Podobnie z $x_1 \in \mathfrak{D}(R)$ wynika istnienie takiego elementu $t_1 \in Y_1 + \iota(y_1)$, że $x_1 R t_1$.

Określmy relację S wzorem

$$(\hat{u}, \hat{v}) \{ (u \in X_1) \cdot (v \in Y_1) \cdot [(u \neq z_1) \cdot (u R v) \cdot (v \neq t_1) + (u = z_1) \cdot (v = t_1)] \}.$$

Wykażemy, że

$$(iv) \quad X_1 \sim_S Y_1.$$

Zgodnie z (1) należy w tym celu pokazać, że

$$(v) \quad \text{relacja } S \text{ jest doskonała (t. j. } S \in \text{Cls-1 i } S \in 1\text{-Cls),}$$

$$(vi) \quad Y_1 \subset \mathfrak{C}(S),$$

$$(vii) \quad X_1 = S(Y_1).$$

Udowodnimy najpierw, że $S \in \text{Cls-1}$. Załóżmy w tym celu, że $u S v$ i $u S v_1$. Wnosimy stąd na mocy określenia relacji S , że albo $(u \neq z_1) \cdot (u R v) \cdot (u R v_1) \cdot (v \neq t_1) \cdot (v_1 \neq t_1)$, albo $(u = z_1) \cdot (v = t_1) \cdot (v_1 = t_1)$.

Ponieważ relacja R jest doskonała, więc w obu przypadkach otrzymujemy $v = v_1$, co dowodzi, że $S \in \text{Cls-1}$.

W zupełnie podobny sposób wykazujemy, że $S \in 1\text{-Cls}$. Wzór (v) jest tym samym dowiedziony.

Jeśli $v \in Y_1$, to na mocy (iii) istnieje takie u , że $u R v$. Jeśli przy tym $v \neq t_1$, to $u \neq z_1$, gdyż z $z_1 R v$ wynika wobec $R \in 1\text{-1}$ i określenia z_1 , że $v = y_1$, co na mocy (ii) przeczy założeniu $v \in Y_1$. Wreszcie $u \in X_1$, gdyż z $u R v$ wynika $u \in X_1 + \iota(x_1)$; nie może zaś być $u = x_1$, gdyż z $x_1 R v$ wynika $v = t_1$. Każdy element $v \in Y_1$ różny od t_1 należy więc do przeciwdziedziny relacji S .

Założmy teraz, że $v = t_1$. Gdyby $z_1 = x_1$, to mielibyśmy $z_1 R y_1$ i $z_1 R t_1$, skąd wobec $R \in 1\text{-1}$ wynikłoby $y_1 = t_1$, a więc w myśl (ii) $t_1 \in Y_1'$, wbrew założeniu, że element $v = t_1$ należy do Y_1 . Zatem musi być $z_1 \neq x_1$, skąd $z_1 \in X_1$, a więc $z_1 S v$, skąd wynika, że i dla $v = t_1$ jest $v \in \mathfrak{C}(S)$. Zatem zachodzi wzór (vi).

Pozostaje do udowodnienia wzór (vii). Z określenia relacji S wynika, że $S(Y_1) \subset X_1$. Jeśli $u \in X_1$, to istnieje takie $v \in Y_1 + \iota(y_1)$, że $u R v$. Przy tym jest $v \neq y_1$, jeżeli $u \neq z_1$, gdyż relacja R jest doskonała. Mamy więc dla $u \neq z_1$ wzór $u R v$, gdzie $v \in Y_1$. Wynika stąd, że $v \neq t_1$, gdyż w przeciwnym razie byłoby $u = x_1$. Zatem $u S v$ i $u \in S(Y_1)$. Każdy więc element zbioru X_1 różny od z_1 należy do $S(Y_1)$.

Założmy teraz, że $u = z_1$. Gdyby $t_1 = y_1$, to mielibyśmy $z_1 R y_1$ i $x_1 R y_1$, skąd wobec $R \in 1\text{-1}$ wynikłoby $z_1 = x_1$, co przeczy założeniu, że element $u = z_1$ należy do X_1 . Zatem musi być $t_1 \neq y_1$, skąd $t_1 \in Y_1$, a więc $z_1 S t_1$ i $z_1 \in S(Y_1)$, co dowodzi, że i w przypadku, gdy element u zbioru X_1 jest równy z_1 , mamy $u \in S(Y_1)$. Inkluzja $X_1 \subset S(Y_1)$, a z nią i równość (vii) jest w ten sposób udowodniona.

Wzory (v)-(vii) dają od razu (iv). Zbiory X_1 i Y_1 są przeto równoliczne, a więc w myśl (ii) liczby kardynalne $\mathfrak{X}$ i $\mathfrak{Y}$ mają elementy wspólne. Ponieważ zaś liczby kardynalne jako klasy abstrakcji relacji ip są albo równe albo rozłączne, więc wynika stąd, że $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, c.b.d.o.

Ze wzoru (24) wynika na mocy (21)

$$\vdash (\mathfrak{X} \in \text{Nc}) \cdot (\mathfrak{Y} \in \text{Nc}) \cdot [\mathfrak{X} \neq \text{Nc}(1)] \cdot (\mathfrak{X}^* = \mathfrak{Y}^*) \rightarrow (\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}),$$

czyli

$$\vdash (\mathfrak{X} \in \text{Nc}) \cdot (\mathfrak{Y} \in \text{Nc}) \cdot (\mathfrak{X}^* = \mathfrak{Y}^*) \rightarrow \{(\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}) + [\mathfrak{X} = \text{Nc}(1)]\}.$$

W podobny sposób dowodzi się, że

$$\vdash (\mathfrak{X} \in \text{Nc}) \cdot (\mathfrak{Y} \in \text{Nc}) \cdot (\mathfrak{X}^* = \mathfrak{Y}^*) \rightarrow \{(\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}) + [\mathfrak{Y} = \text{Nc}(1)]\},$$

a z dwu tych twierdzeń wynika od razu

$$(25) \quad \vdash (\mathfrak{X} \in \text{Nc}) \cdot (\mathfrak{Y} \in \text{Nc}) \cdot (\mathfrak{X}^* = \mathfrak{Y}^*) \rightarrow (\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}).$$

Słowami: *liczby kardynalne o równych następnikach są równe.*

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić twierdzenie (24) w sposób sformalizowany.

2. Wykazać, że każda liczba kardynalna różna od 0 jest następnikiem pewnej liczby kardynalnej.

3. Wykazać, że jeśli A jest zbiorem liczb naturalnych i $\mathfrak{X} = \text{Nc}(A)$, to $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}$.

Uwaga. Liczby kardynalne $\mathfrak{X}$, dla których $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}$, nazywają się *refleksywnymi* albo *nieskończonymi w znaczeniu Dedekinda*.

4. Dowieść, że jeśli liczba kardynalna $\mathfrak{X}$ nie jest refleksywna i $\mathfrak{X} \neq \text{Nc}(1)$, to i liczba kardynalna $\mathfrak{X}^*$ nie jest refleksywna. Wywnioskować stąd, że jeśli liczba $\text{Nc}(1)$ jest różna od liczb 1, 2, 3, ..., to żadna z tych liczb nie jest refleksywna.

§ 5. Liczby naturalne. Pewnik nieskończoności. Teraz potrafimy już podać definicję liczb kardynalnych skończonych, a co za tym idzie, sformułować ostatecznie określenie liczb naturalnych.

Czytelnik mógłby sądzić, że najprościej będzie powiedzieć: liczbami skończonymi są 0, 1, 2, 3 i t.d. Tego rodzaju zwroty

występują często w podręcznikach matematyki (przy czym zamiast „i t. d.” stawia się zazwyczaj trzy kropki). Jest jednak jasne, że nie są to bynajmniej definicje, lecz w najlepszym razie wskazówki, jak należy kontynuować nieskończony ciąg różnych definicji.

Definicja poprawna powinna podać znaczenie nazwy czy symbolu, który wprowadzamy do rozważań. Jeśli symbol ten ma oznaczać zbiór liczb kardynalnych, to definicja winna mieć postać

$$\stackrel{\text{df}}{=}(\tilde{x})[\quad],$$

gdzie po lewej stronie znaku $\stackrel{\text{df}}{=}$ stoi nowo wprowadzony symbol, po prawej zaś w [] za symbolem abstrakcji — funkcja zdaniowa jednej zmiennej wolnej $\tilde{x}$.

Aby nie podawać określeń, które mogłyby się na pierwszy rzut oka wydać sztuczne, założmy na chwilę, że znamy już pojęcie liczby kardynalnej skończonej i zastanówmy się nad własnościami tego pojęcia.

Jest jasne, że **0** uznamy za liczbę kardynalną skończoną. Zbiór liczb kardynalnych skończonych posiada dalej następującą własność: jeśli $\tilde{x}$ do tego zbioru należy, to i $\tilde{x}^*$ (jeśli w ogóle jest liczbą kardynalną) też do tego zbioru należy.

Nazwijmy zbiór liczb kardynalnych *dziedzicznym*, jeśli zawiera on **0** i wraz z każdą liczbą $\tilde{x}$ zawiera jej następnik $\tilde{x}^*$. Spostrzeżoną własność wyrazić więc możemy w następujący sposób: *zbiór liczb kardynalnych skończonych jest dziedziczny*.

Z drugiej strony, każdy zbiór dziedziczny zawiera liczbę **0**, zatem także następnik liczby **0**, t.j. liczbę **1**, zatem także następnik liczby **1**, t.j. liczbę **2** i t.d. Każdy zbiór dziedziczny zawiera więc wszystkie te liczby, które chcielibyśmy nazywać skończonymi.

Analiza intuicyjnego pojęcia skończoności doprowadziła nas tym sposobem do wniosku, że *liczba kardynalna jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy należy do każdego zbioru dziedzicznego*. W tej postaci definicja zbioru liczb skończonych daje się już napisać w sposób poprawny.

Określamy najpierw klasę zbiorów dziedzicznych:

$$(26) \quad \text{ind} \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{a}) [\mathbf{0} \in a \cdot \prod_{\tilde{x} \in a} (\tilde{x}^* \in a)].$$

Zbiór *liczb kardynalnych skończonych* albo po prostu zbiór *liczb naturalnych*¹⁾ określamy teraz wzorem

$$(27) \quad \text{Nc ind} \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{x}) [\tilde{x} \in \text{Nc} \cdot \prod_{a \in \text{ind}} (\tilde{x} \in a)].$$

Definicja (27) jest — jak widzimy — metodologicznie poprawna i pozostaje w zgodzie z intuicjami, jakie wiążemy z pojęciem liczby naturalnej. Nie przesądza to jednak jeszcze pytania, czy wychodząc z tej definicji możemy wyprowadzić wszystkie prawa arytmetyki jako tautologie logiczne.

Jak wykazał Peano, wszystkie prawa arytmetyki liczb naturalnych, jakimi zajmujemy się w matematyce, można wyprowadzić na drodze czysto logicznej z następujących aksjomatów²⁾:

1. Zero jest liczbą naturalną.
2. Każda liczba naturalna ma następnik, który sam jest liczbą naturalną.
3. Zero nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej.
4. Jeśli następniki liczb naturalnych $\tilde{x}$ i $\tilde{y}$ są równe, to i te liczby są równe.
5. Jeśli a jest zbiorem, który zawiera zero i który ma tę własność, że wraz z każdą liczbą zawiera jej następnik, to a zawiera wszystkie liczby naturalne (zasada indukcji).

Aby uzyskać odpowiedź na pytanie, czy przyjmując definicję (27) uzyskamy zwykłe twierdzenia arytmetyczne jako tautologie logiczne, wystarczy więc sprawdzić, czy aksjomaty Peano przejdą w tautologie logiczne, jeżeli zero interpretować jako **0**, następnik $\tilde{x}$ — jako $\tilde{x}^*$, a liczby — jako elementy zbioru Nc ind .

¹⁾ W logice nazywa się zazwyczaj określone tu liczby *induktywnymi*. Unikanie nazwy *liczby skończone* jest może stosowne tam, gdzie rozpatruje się różne pojęcia skończoności; w niniejszym jednak wykładzie możemy nazywać liczby induktywne po prostu skończonymi, gdyż żadnego innego pojęcia skończoności rozpatrywać nie będziemy.

²⁾ Aksjomaty te ogłoszone były po raz pierwszy w artykule: G. Peano, *Sul concetto di numeri*, Rivista di matematica, tom 1, Turyn 1891, str. 87-102 i 256-267. Czytelnikowi, który chciałby zapoznać się z wywodem twierdzeń arytmetycznych z aksjomatów Peano, polecić możemy książeczkę: W. Wilkosz, *Arytmetyka liczb całkowitych*, Kraków 1952, albo też dziełko E. Landaua cytowane tu na str. 159. Często liczby zero nie zalicza się do naturalnych; jest to oczywiście tylko kwestią umowy.

Sprawdzenie to podajemy obecnie.

Z (26) wynika, że $\vdash a \in \text{ind} \rightarrow 0 \in a$, zatem wobec $\vdash 0 \in \text{Nc}$ i (27)

$$\vdash 0 \in \text{Nc ind}.$$

Aksjomat 1 jest więc spełniony. Aksjomat 3 wynika od razu z ogólniejszego wzoru (23), a aksjomat 4 z ogólniejszego wzoru (25).

Udowodnimy następnie zasadę indukcji¹⁾. Na mocy (27) jest

$$\vdash (\exists x \in \text{Nc ind}) \cdot (a \in \text{ind}) \rightarrow (\exists x \in a),$$

czyli

$$^* \vdash (a \in \text{ind}) \rightarrow (\exists x \in \text{Nc ind} \rightarrow \exists x \in a).$$

Przez dołączenie kwantyfikatora uzyskujemy stąd

$$\vdash (a \in \text{ind}) \rightarrow (\text{Nc ind} \subset a),$$

a stąd zgodnie z definicją (26) wynika zasada indukcji:

$$\vdash [0 \in a \cdot \prod_{x \in a} (\exists^* x \in a)] \rightarrow (\text{Nc ind} \subset a).$$

Pozostaje do rozpatrzenia jeszcze aksjomat 2. Z (22) wnosimy, że

$$(i) \quad \vdash (\exists x \in \text{Nc ind}) \cdot [\exists x \neq \text{Nc}(1)] \rightarrow (\exists^* x \in \text{Nc}).$$

Z definicji (26) i (27) wynika z łatwością

$$\vdash (\exists x \in \text{Nc ind}) \cdot (a \in \text{ind}) \rightarrow (\exists^* x \in a),$$

skąd

$$\vdash (\exists x \in \text{Nc ind}) \rightarrow \prod_{a \in \text{ind}} (\exists^* x \in a).$$

Wzór ten daje łącznie z (i)

$$(28) \quad \vdash (\exists x \in \text{Nc ind}) \cdot [\exists x \neq \text{Nc}(1)] \rightarrow (\exists^* x \in \text{Nc ind}).$$

Aby uzyskać stąd aksjomat 2, należałoby pominąć w poprzedniku założenie $\exists x \neq \text{Nc}(1)$. Można by to uczynić, gdybyśmy wiedzieli, że

$$\vdash (\exists x \in \text{Nc ind}) \rightarrow [\exists x \neq \text{Nc}(1)],$$

czyli w innym sformułowaniu, że

$$(29) \quad \vdash \text{Nc}(1) \in \text{Nc ind}'.$$

¹⁾ Filozofowie i matematycy różnych szkół toczyli gorące spory o istotę zasady indukcji. Wielu twierdziło nawet, że zasada indukcji nie jest zdaniem analitycznym (E. Kant i H. Poincaré). Zobaczmy tutaj, że przy pewnym pojmowaniu pojęcia liczby zasadę indukcji można udowodnić, opierając się na czysto logicznych przesłankach. Zasada ta jest więc niewątpliwie zdaniem analitycznym, tak jak to twierdził Frege.

Łatwo jednak uświadomić sobie, że ani (29), ani też zdanie powstające z (28) przez opuszczenie czynnika $\exists x \neq \text{Nc}(1)$, nie mogą być udowodnione na podstawie dotychczas przyjętych założeń. Pochodzi to stąd, że nie założyliśmy dotychczas nic o zbiorze pełnym 1 poza tym, że nie jest on pusty (por. Rozdział III, § 4, wzór (3), str. 59). Wszystkie tautologie rachunku zdań, rachunku kwantyfikatorów, aksjomat definicyjny (Rozdział IV, § 2, str. 90) i aksjomat ekstensjonalności (Rozdział V, § 2, str. 115) pozostają prawdziwe, gdy zbiór pełny 1 składa się np. z trzech przedmiotów. Wzór (29) nie jest jednak w tym wypadku spełniony, przeciwnie jest $\text{Nc}(1) \in \text{Nc ind}$ i zdanie powstające z (28) przez pominięcie czynnika $\exists x \neq \text{Nc}(1)$ przestaje być prawdziwe dla wszelkich x , gdyż $\exists x \in \text{Nc ind}$ i $\exists^* x \in \text{Nc}'$ ($\exists^*$ jest zbiorem pustym).

Wnosimy stąd, że aby uzyskać zdanie odpowiadające pewnikowi 2 jako tautologię logiczną, musimy wzbogacić pewniki logiki jeszcze jednym zdaniem, mianowicie zdaniem (29).

Ten nowy pewnik nosi nazwę *pewnika nieskończoności*.

Ostateczny wynik dotychczasowej dyskusji streścić możemy w następującym twierdzeniu:

Jeśli pojęcia arytmetyczne: zero, następnik i zbiór liczb naturalnych interpretować jako 0, $\exists^$ i Nc ind oraz jeśli wzbogacić układ pewników logicznych pewnikiem nieskończoności (29), to wszystkie aksjomaty Peano, a więc też wszystkie twierdzenia arytmetyczne równikające z aksjomatów Peano, stają się tautologiami logicznymi.*

Wynik ten posiada doniosłe znaczenie, gdyż pokazuje, że *arytmetyka liczb naturalnych daje się ugruntować jako część logiki* (o ile w logice przyjmiemy pewnik nieskończoności).

Z drugiej strony, byłoby może przesadą, gdybyśmy chcieli uznać uzyskany wynik za ostateczne rozwiązanie zagadnienia podstaw arytmetyki. Już w § 3 (str. 176) zwróciliśmy uwagę na to, że określone przez nas liczby nie są dostatecznie ogólne, służyć bowiem mogą tylko do liczenia przedmiotów, należących do zbioru 1. Widzimy teraz, że liczby te mają tylko wtedy wszystkie własności liczb naturalnych (w intuicyjnym znaczeniu tego słowa), gdy zbiór 1 jest nieskończony. Idea Frege'go, zmierzająca do ugruntowania arytmetyki w logice, dała się więc zrealizować niezupełnie.

Źródłem napotkanej przeszkody jest oczywiście przyjęty na początku relatywny charakter zbioru pełnego 1. Prawa logiczne, które dotąd wyprowadzaliśmy, nie są zdaniami o przedmiotach w ogóle, lecz zdaniami o przedmiotach należących do zbioru 1. W zależności od tego, co zaliczymy do tego zbioru, otrzymamy takie lub inne twierdzenia.

Jedyną naturalną odpowiedzią na pytanie: co powinniśmy zaliczyć do zbioru 1, aby prawa logiczne były najzupełniej ogólne? wydaje się: wszystko, wszystkie przedmioty, zbiory, relacje i t.p. Pewnik nieskończoności dalby się wtedy zapewne udowodnić i problem podstaw arytmetyki byłby rozwiązany całkowicie. Niestety — jak wspomnieliśmy już na str. 176 — zakładając, że zbiór 1 zawiera wszystko, dochodzi się do sprzeczności (zob. Rozdział VIII, § 2).

Nie będziemy dłużej zatrzymywali się na tym temacie, gdyż logika do dziś dnia nie umie dać odpowiedzi na zarysowujący się tu problem, wskutek czego i zagadnienie należytego określenia pojęcia liczby wciąż jeszcze można uważać za otwarte. Powiemy o nim za Frege'm: „Chociaż nie jest ono jeszcze zupełnie rozwiązane..., to jednak nie wątpię, że droga do rozwiązania została znaleziona”¹⁾.

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić na podstawie aksjomatów Peano, że każda liczba naturalna różna od 0 jest następnikiem pewnej liczby naturalnej.

Wsk.: Wykazać, że zbiór $\{0\} + (\hat{x}) [(x \in \text{Nc ind}) \cdot \sum_{y \in \text{Nc ind}} (y^* = x)]$ jest dziedziczny.

2. Zbiór X nazywa się *skończony*, gdy $\text{Nc}(X) \in \text{Nc ind}$. Udowodnić, że każdy zbiór zawarty w zbiorze skończonym jest skończony i że suma dwu zbiorów skończonych jest skończona.

3. Dowieść, że dla każdego zbioru skończonego istnieje relacja dobrze porządkująca ten zbiór.

Wsk.: Wykazać, że zbiór takich liczb kardynalnych $\hat{x}$, że dla każdego $X \in \hat{x}$ istnieje relacja dobrze porządkująca X , jest dziedziczny.

4. Dowieść, że $\vdash \hat{x} \in \text{Nc ind} \rightarrow \hat{x}^* \neq \hat{x}$, t.zn. że żadna liczba kardynalna skończona w sensie definicji (27) nie jest nieskończona w znaczeniu Dedekinda.

Wsk.: Oprzeć się na zadaniu 4 z § 4 (str. 181). Jest godne uwagi, że implikacja $\hat{x}^* \neq \hat{x} \rightarrow \hat{x} \in \text{Nc ind}$ nie daje się udowodnić na podstawie omówionych dotychczas pewników łącznie z pewnikiem nieskończoności. Aby tę implikację udowodnić, oprzeć się jeszcze trzeba na t.zw. *pewniku wyboru*²⁾.

¹⁾ G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik begriffsschriftlich abgeleitet*, tom II, Jena 1903, Postłowie, str. 265.

²⁾ Zob. W. Sierpiński, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, wyd. 2-e, Warszawa 1947, str. 47.

§ 6. Definicje indukcyjne. Omówimy tu pewien rodzaj definicji, które grają ważną rolę przy dowodzeniu twierdzeń arytmetycznych, niezależnie zresztą od tego, czy liczby naturalne pojmujemy jako klasy abstrakcji stosunku ip, czy jako twory abstrakcyjne, czyniące zadość aksjomatom Peano (jeśli stajemy na pierwszym stanowisku, to zakładamy, że spełniony jest pewnik nieskończoności).

W arytmetyce mówi się często, że sumę dwu liczb naturalnych można określić indukcyjnie za pomocą pojęcia następnika, i podaje się wzory

$$(50) \quad \hat{x} + 0 = \hat{x}, \quad \hat{x} + y^* = (\hat{x} + y)^*,$$

które mają stanowić tę definicję indukcyjną¹⁾. Aby umocnić przekonanie czytelnika, że wzory te rzeczywiście stanowią definicję sumy, opatruje się je zazwyczaj następującym komentarzem: podstawmy w drugim ze wzorów (50) za y kolejno $0, 1, 2, \dots$; opierając się na pierwszym wzorze, otrzymamy wtedy kolejno

$$\hat{x} + 1 = \hat{x}^*, \quad \hat{x} + 2 = \hat{x}^{**}, \quad \hat{x} + 3 = \hat{x}^{***}, \quad \dots$$

i, kontynuując to postępowanie, możemy wyrazić przy pomocy pojęcia następnika sumę $\hat{x} + y$, gdzie y jest jakąkolwiek z liczb ciągu $0, 1, 2, \dots$; ponieważ zaś każda liczba naturalna występuje w tym ciągu, więc możemy powiedzieć, że wzory (50) wyznaczają w zupełności liczbę $\hat{x} + y$ dla każdego y .

Otóż mimo niewątpliwiej wartości intuicyjnej tego rozumowania, nie możemy uznać wzorów (50) za definicję sumy.

Suma jest wynikiem działania na liczbach naturalnych, które — zgodnie z określeniem działania (Rozdział VI, § 9, str. 156) — jest relacją trójczłonową. Oznaczając tę relację symbolem s ²⁾, wnosimy, że definicja sumy powinna mieć postać

$$(51) \quad s \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \Phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}),$$

gdzie Φ jest funkcją zdaniową nie zawierającą symbolu s . Taki charakter miały wszystkie definicje, wprowadzone w tym i poprzednich rozdziałach. Definicje tej postaci mają tę ważną zaletę, że pozwalają w każdej chwili wyrugować zdefiniowany symbol s

¹⁾ Użyliśmy tu znaku $+$ zamiast powszechnie przyjętego znaku $+$, dla odróżnienia od sumy dwu zbiorów określonej w Rozdziale IV (§ 5, wzór (21), str. 96).

²⁾ Wzór $s(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ czytamy: $\hat{x}$ jest sumą $\hat{y}$ i $\hat{z}$.

z dowolnie danego wzoru. Wystarczy zastąpić wszędzie symbol s przez prawą stronę równości (31), a otrzymamy wzór równoważny, nie zawierający już tego nowego symbolu.

Możność wyrugowania symbolu zdefiniowanego uważamy za jeden ze sprawdzianów poprawności definicji. Eliminacja taka musi się dać wykonać, jeśli definicja ma rzeczywiście nie być niczym innym, jak tylko wyjaśnieniem znaczenia symbolu.

W przypadku wzorów (30) eliminacja taka nie jest bynajmniej oczywista: w drugim ze wzorów (30) znak $+$ występuje po lewej i po prawej stronie równości, nie wystarczy więc zastąpić lewej strony przez prawą, aby go się pozbyć. To jest powodem, że nie możemy uznać równości (30) za definicję sumy, przynajmniej za definicję w zwykłym znaczeniu tego słowa¹⁾.

Podobne uwagi stosują się do wielu innych definicji indukcyjnych, w szczególności do definicji iloczynu i potęgi.

W dalszym ciągu pokażemy, jak można budować definicje tego typu co definicja (31) dla pojęć, które w zwykłym wykładzie arytmetyki określa się indukcyjnie. Ograniczymy się przy tym do przykładu definicji sumy, gdyż inne definicje można już z łatwością skonstruować na wzór tego przykładu.

Aby dojść do definicji sumy w sposób naturalny, założmy na chwilę, że znamy już sens relacji s . Jest jasne, że czyni ona zadość następującym warunkom:

$$s(x, x, 0), \quad s(x, y, z) \rightarrow s(x^*, y, z^*)$$

dla wszelkich liczb naturalnych x, y i z .

Z drugiej strony, jeśli relacja trójczłonowa q czyni zadość tym warunkom, t. zn. jeśli

$$(32) \quad q(x, x, 0) \quad \text{ i } \quad q(x, y, z) \rightarrow q(x^*, y, z^*)$$

dla wszelkich liczb naturalnych x, y i z , to $s \subset q$.

Istotnie, niech y będzie dowolną liczbą naturalną. Oznaczmy przez a zbiór tych liczb naturalnych z , dla których

$$\prod_{x \in \text{Ncind}} [s(x, y, z) \rightarrow q(x, y, z)].$$

Aby dowieść, że $s \subset q$, wystarczy wykazać, że $\text{Ncind} \subset a$, w tym zaś celu musimy udowodnić, że $0 \in a$ i że $z \in a \rightarrow z^* \in a$.

¹⁾ Ze wzorów (30) można co prawda wynioskować, że $x + 5 = x^{*****}$, a więc pozbyć się znaku $+$; nie widać jednak, czy i jak można wyeliminować znak $+$ np. z wyrażenia $x + y$.

0 jest elementem zbioru a , gdyż wzór $s(x, y, 0)$ daje (zgodnie z intuicyjnym znaczeniem relacji s) równość $x = y$, z której na mocy (32) wynika $q(x, y, 0)$.

Jeśli $z \in a$ i $s(x, y, z^*)$, to (według intuicyjnego znaczenia relacji s) jest $x = z^*$, gdzie $s(x, y, z)$. Wobec $z \in a$ wynika stąd $q(x, y, z)$, a więc w myśl (32) $q(x, y, z^*)$ czyli $q(x, y, z^*)$. Widzimy więc, że wzór $s(x, y, z^*)$ pociąga za sobą wzór $q(x, y, z^*)$, a zatem $z^* \in a$.

Zgodnie z zasadą indukcji jest $\text{Ncind} \subset a$, a więc $s \subset q$. Możemy zatem powiedzieć, że relacja s jest *najmniejszą relacją spełniającą warunki* (32) czyli: dla wszelkich liczb naturalnych x, y i z wzór $s(x, y, z)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej relacji q spełniającej warunki (32) zachodzi wzór $q(x, y, z)$.

Naszkicowaliśmy dowód tego wyniku, opierając się na zrozumiałym dla nas skądinąd znaczeniu relacji s . Możemy jednak odwrócić teraz bieg rozumowania i przyjąć wynik, do którego doszliśmy, za określenie relacji s .

Przyjmiamo najpierw dwie definicje pomocnicze:

$$(33) \quad \lambda \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{q}) \{ \prod_{x \in \text{Ncind}} q(x, x, 0) \},$$

$$(34) \quad \mu \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{q}) \{ \prod_{x, y, z \in \text{Ncind}} [q(x, y, z) \rightarrow q(x^*, y, z^*)] \}^1).$$

Definicja sumy będzie miała postać następującą:

$$(35) \quad s \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \prod_{q \in \lambda \cdot \mu} q(x, y, z).$$

Definicja ta ma żadaną postać (31); ponadto jest intuicyjnie uzasadniona przez rozumowanie, które przeprowadziliśmy wyżej.

Powstaje jednak pytanie, czy z tej definicji można istotnie wyprowadzić wszystkie te własności sumy, jakie ma intuicyjne pojęcie sumy, rozważane w arytmetyce. Aby odpowiedzieć na to pytanie, wyprowadzimy z definicji (35) kilka twierdzeń, orzekających, że relacja s jest działaniem określonym i wykonalnym w zbiorze liczb naturalnych, a przy tym spełniającym równości (30). Oto te twierdzenia:

$$(36) \quad \vdash (x \in \text{Ncind}) \rightarrow s(x, x, 0).$$

¹⁾ Wzór $x, y, z \in \text{Ncind}$ jest koniunkcją trzech funkcji zdaniowych: $x \in \text{Ncind}$, $y \in \text{Ncind}$ i $z \in \text{Ncind}$.

Dowód. Z (53) wynika

$$\begin{aligned} & \vdash (\varrho \in \lambda) \cdot (\mathfrak{X} \in \text{Nc ind}) \rightarrow \varrho(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}, \mathbf{0}), \\ \text{skąd} & \vdash (\mathfrak{X} \in \text{Nc ind}) \rightarrow [(\varrho \in \lambda \cdot \mu) \rightarrow \varrho(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}, \mathbf{0})]. \end{aligned}$$

Dołączając kwantyfikator, otrzymamy

$$\vdash (\mathfrak{X} \in \text{Nc ind}) \rightarrow \prod_{\varrho \in \lambda \cdot \mu} \varrho(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}, \mathbf{0}),$$

skąd na mocy (55) otrzymujemy wzór (56).

$$(57) \quad \vdash (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \in \text{Nc ind}) \cdot s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \rightarrow s(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}^*).$$

Dowód. Z (54) wynika

$$\vdash (\varrho \in \mu) \cdot (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \in \text{Nc ind}) \cdot \varrho(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \rightarrow \varrho(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}^*).$$

Tym bardziej więc jest

$$(i) \quad \vdash (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \in \text{Nc ind}) \cdot \varrho(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \rightarrow [\varrho \in \lambda \cdot \mu \rightarrow \varrho(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}^*)].$$

Zgodnie z (55)

$$(ii) \quad \vdash (\varrho \in \lambda \cdot \mu) \cdot (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \in \text{Nc ind}) \cdot s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \rightarrow \varrho(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}).$$

Wzory (i) i (ii) dają po łatwym przekształceniu

$$\vdash (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \in \text{Nc ind}) \cdot s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \rightarrow [\varrho \in \lambda \cdot \mu \rightarrow \varrho(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}^*)].$$

Pozostaje dołączyć kwantyfikator $\prod_{\varrho}$ w następniku, aby uzyskać stąd twierdzenie (57).

$$(58) \quad \vdash (\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \in \text{Nc ind}) \rightarrow \sum_{\mathfrak{X} \in \text{Nc ind}} s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}).$$

Dowód. Wprowadzimy pomocniczą definicję:

$$\alpha(\mathfrak{Y}) \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{\mathfrak{Z}})[(\mathfrak{Z} \in \text{Nc ind}) \cdot \sum_{\mathfrak{X} \in \text{Nc ind}} s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})].$$

Zatem $\alpha(\mathfrak{Y})$ jest zbiorem takich liczb $\mathfrak{Z}$, że istnieje liczba naturalna $\mathfrak{X}$ pozostająca do $\mathfrak{Y}$ i $\mathfrak{Z}$ w relacji s . Wynika stąd

$$(i) \quad \vdash (\mathfrak{Y} \in \text{Nc ind}) \cdot [\mathfrak{Z} \in \alpha(\mathfrak{Y})] \rightarrow \sum_{\mathfrak{X} \in \text{Nc ind}} s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}).$$

Dla dowodu twierdzenia (58) wystarczy więc okazać, że

$$(ii) \quad \vdash (\mathfrak{Y} \in \text{Nc ind}) \rightarrow [\text{Nc ind} \subset \alpha(\mathfrak{Y})],$$

gdyż wyniknie stąd

$$\vdash (\mathfrak{Y} \in \text{Nc ind}) \cdot (\mathfrak{Z} \in \text{Nc ind}) \rightarrow (\mathfrak{Y} \in \text{Nc ind}) \cdot [\mathfrak{Z} \in \alpha(\mathfrak{Y})],$$

a więc zgodnie z (i) otrzymamy od razu wzór (58).

Wzór (ii) udowodnimy przez indukcję. Z (56) wynika

$$\vdash (\mathfrak{Y} \in \text{Nc ind}) \rightarrow \sum_{\mathfrak{X} \in \text{Nc ind}} s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathbf{0}),$$

a zatem

$$(iii) \quad \vdash (\mathfrak{Y} \in \text{Nc ind}) \rightarrow [\mathbf{0} \in \alpha(\mathfrak{Y})].$$

Z (57) wnosimy (wobec $\vdash \mathfrak{X} \in \text{Nc ind} \rightarrow \mathfrak{X}^* \in \text{Nc ind}$), że

$$\begin{aligned} & \vdash (\mathfrak{Y} \in \text{Nc ind}) \rightarrow \{[\mathfrak{Z} \in \text{Nc ind} \cdot \sum_{\mathfrak{X} \in \text{Nc ind}} s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})] \rightarrow \\ & \rightarrow [\mathfrak{Z} \in \text{Nc ind} \cdot \sum_{\mathfrak{X} \in \text{Nc ind}} s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}^*)]\}, \end{aligned}$$

a więc

$$(iv) \quad \vdash (\mathfrak{Y} \in \text{Nc ind}) \rightarrow [\mathfrak{Z} \in \alpha(\mathfrak{Y}) \rightarrow \mathfrak{Z}^* \in \alpha(\mathfrak{Y})].$$

Z (iii) i (iv) wynika na mocy zasady indukcji (aksjomat 5 Peano, str. 185) wzór (ii), c. b. d. o.

$$(59) \quad \vdash (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \text{Nc ind}) \cdot s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathfrak{X} = \mathfrak{Y}.$$

Dowód. Określmy relację trójcłonową σ wzorem

$$\sigma \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{Y}}, \hat{\mathfrak{Z}})[(\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}) \cdot (\mathfrak{Z} = \mathbf{0}) + (\mathfrak{Z} \neq \mathbf{0})].$$

Jest jasne, że $\vdash \sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}, \mathbf{0})$ oraz (wobec $\vdash \mathfrak{Z}^* \neq \mathbf{0} \vdash \sigma(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}^*)$). Zgodnie z (55) i (54) wynika stąd, że $\vdash \sigma \in \lambda \cdot \mu$, a więc w myśl (55) $\vdash s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \rightarrow \sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$. Ponieważ $\vdash \sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathbf{0}) \equiv \mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, więc wynika stąd, że $\vdash s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, co dowodzi wzoru (59).

Najdłuższy jest dowód jednoznaczności relacji s względem pierwszego argumentu. Nie będziemy podawali dowodu sformalizowanego, naszkicujemy tylko jego myśl intuicyjną.

Oznaczmy przez β zbiór liczb naturalnych $\mathfrak{Z}$, które posiadają następującą własność: przy wszelkich naturalnych $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ i $\mathfrak{Y}$ jest

$$s(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \cdot s(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \rightarrow \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2.$$

Wystarczy udowodnić, że $\text{Nc ind} \subset \beta$, a więc, w myśl zasady indukcji, że $\mathbf{0} \in \beta$ i

$$(i) \quad \mathfrak{Z} \in \beta \rightarrow \mathfrak{Z}^* \in \beta.$$

Dowód, że $\mathbf{0} \in \beta$, nie nastrocza trudności: z (59) wynika, że

$$s(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}, \mathbf{0}) \cdot s(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}) \cdot (\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{Y}),$$

a więc $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$.

Pozostaje do udowodnienia wzór (i). Załóżmy, że $\beta \in \beta$, i rozpatrzmy relację ϱ_3 , która zachodzi między liczbami naturalnymi u, v i w wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{bądź } w = \beta^* \text{ i } s(u, v, w),$$

$$\text{bądź } w = \beta^* \text{ i istnieje takie } \tau, \text{ że } s(\tau, v, \beta) \text{ i } u = \tau^*.$$

Z łatwością wykazujemy, że dla każdego naturalnego x jest $\varrho_3(x, x, 0)$, skąd $\varrho_3 \in \lambda$. Bez trudu dowodzimy również, że dla wszelkich naturalnych u, v i w jest

$$\varrho_3(u, v, w) \rightarrow \varrho_3(u^*, v, w^*),$$

co dowodzi, że $\varrho_3 \in \mu$. Wobec $\varrho_3 \in \lambda \cdot \mu$ mamy na mocy definicji (35)

$$s(u, v, w) \rightarrow \varrho_3(u, v, w)$$

dla dowolnych naturalnych u, v, w . Podstawmy tu $w = \beta^*$. Z definicji relacji ϱ_3 otrzymujemy zatem

$$s(u, v, \beta^*) \rightarrow \sum_{\tau} [s(\tau, v, \beta) \cdot (u = \tau^*)].$$

Wnosimy stąd, że

$$(ii) \quad s(x_1, y, \beta^*) \cdot s(x_2, y, \beta^*) \rightarrow$$

$$\sum_{x_1 x_2} [s(x_1, y, \beta) \cdot s(x_2, y, \beta) \cdot (x_1 = \tau_1^*) \cdot (x_2 = \tau_2^*)].$$

Dotychczas nie skorzystaliśmy z założenia, że $\beta \in \beta$. Założenie to daje

$$s(\tau_1, y, \beta) \cdot s(\tau_2, y, \beta) \rightarrow \tau_1 = \tau_2.$$

skąd wnosimy, że z (ii) wynika

$$s(x_1, y, \beta^*) \cdot s(x_2, y, \beta^*) \rightarrow x_1 = x_2.$$

Liczba β^* należy więc do β i dowód wzoru (i) jest zakończony. Relacja s jest zatem jednoznaczna względem pierwszego argumentu.

Formalizując to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że

$$(40) \quad \vdash (x_1, x_2, y, \beta \in \text{Nc ind}) \cdot s(x_1, y, \beta) \cdot s(x_2, y, \beta) \rightarrow x_1 = x_2.$$

Ze wzorów (38) i (40) wynika, że relacja s jest działaniem określonym i wykonalnym w zbiorze Nc ind .

Z twierdzeń (36) i (37) wynika, że działanie to czyni zadość prawom wyrażonym przez wzory (50).

Przy dalszej budowie teorii liczb naturalnych może być dogodnie operowanie wynikiem działania s , nie zaś samym działaniem (pojmowanym jako relacja). W tym celu wystarczy przyjąć definicję

$$x \dot{+} y \stackrel{\text{df}}{=} (\dot{X}) [\sum_{\beta} [s(\beta, x, y) \cdot (X \in \beta)]].$$

Można z łatwością udowodnić, że

$$\vdash (x, y \in \text{Nc ind}) \rightarrow s(x \dot{+} y, x, y).$$

$$\vdash (x, y, \beta \in \text{Nc ind}) \rightarrow [s(\beta, x, y) = (\beta = x \dot{+} y)].$$

Twierdzenia (36) i (37) można zatem sprowadzić do postaci

$$\vdash (x \in \text{Nc ind}) \rightarrow (x = x \dot{+} 0),$$

$$\vdash (x, y \in \text{Nc ind}) \rightarrow [(x \dot{+} y)^* = (x \dot{+} y)^*].$$

Wracamy w ten sposób do wzorów (50); widzimy, że nie są one definicją sumy, lecz wnioskami z jej definicji.

Przeniesienie omówionej tu teorii na inne definicje indukcyjne nie nastrocza trudności. Iloczyn definiujemy jako najmniejszą relację ϱ , która czyni zadość (dla $x, y, \beta \in \text{Nc ind}$) warunkom:

$$\varrho(0, x, 0), \quad \varrho(x, y, \beta) \rightarrow \varrho(x \dot{+} y, y, \beta^*).$$

O tej relacji ϱ można dowieść, że jest działaniem określonym i wykonalnym w zbiorze Nc ind , po czym można wprowadzić symbol $x \times y$ na oznaczenie wyniku działania ϱ , dokonanego na liczbach x i y .

Określiwszy iloczyn, definiujemy potęgę jako najmniejszą relację trójeźlonową ϱ , czyniącą zadość warunkom:

$$\varrho(1, x, 0), \quad \varrho(x, y, \beta) \rightarrow \varrho(x \times y, y, \beta^*).$$

Można też bez trudu przenieść tę teorię na przypadek ogólniejszych definicji indukcyjnych kształtu

$$h(x, 0) = f(x), \quad h(x, y^*) = g[h(x, y), x, y].$$

w których f i g oznaczają jakiekolwiek funkcje.

Powyższe rozważania dają pojęcie o tym, jak można zbudować arytmetykę liczb naturalnych, opierając się wyłącznie na pojęciach logicznych. Ponieważ zaś wszystkie pojęcia matematyczne (funkcje, ciągi, liczby rzeczywiste, zespolone i t.p.) dają się zdefiniować przy pomocy liczb naturalnych i pojęć logicznych, więc okazuje się, że cała w ogóle matematyka z jej niezliczoną — zdawałoby się — różnorodnością pojęć daje się wywieść

z czystej logiki. Wniosek ten jest tym godniejszy uwagi, że zasób pojęć, jakimi operuje logika (funktory zdaniotwórcze, kwantyfikatory, zbiory, relacje), wydaje się na pierwszy rzut oka bez porównania uboższy niż zasób pojęć matematycznych.

Z drugiej strony, ubóstwo pojęć logicznych i prostota poszczególnych reguł wnioskowania, jakimi wolno się w logice posługiwać, powoduje nadmierną rozwlekłość dowodów i definicji. Widzieliśmy, ile trzeba było określić i żmudnych rachunków logicznych, aby dojść do najprostszych pojęć arytmetycznych. Byłoby dla dalszego rozwoju logiki, a zapewne i matematyki, niezmiernie korzystne, gdyby ktoś znalazł sposób skracania dowodów sformalizowanych, w obecnym bowiem stadium rozwoju metod symbolicznych logiki budowa matematyki jako fragmentu logiki, chociaż zasadniczo możliwa, boryka się z ogromnymi trudnościami natury czysto technicznej.

ĆWICZENIA. 1. Rozwinąć teorię dodawania liczb naturalnych, wychodząc z definicji

$$\mathbb{N} \vdash_{df} \mathbb{N}(\hat{Z}) \{ \sum_{x \in \mathbb{N}} \sum_{y \in \mathbb{N}} [(X \cdot Y = 0) \cdot (Z \text{ ip } X + Y)] \}.$$

Dowieść przemienności i łączności tego działania oraz jego wykonalności w zbiorze liczb naturalnych (przy założeniu pewnika nieskończoności). Wykazać równoważność definicji sumy podanej w tym zadaniu z definicją sumy podaną w tekście.

2. Udowodnić równoważność definicji (35) i definicji następującej: wzór $s(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z})$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja dwuczłonowa jednoznaczna $\mathbb{R}$, której przeciwdziedzina jest zbiór $\mathbb{N}_{\text{cind}}$ i która czyni zadość następującym warunkom:

$$\mathbb{Y} \mathbb{R} 0, \quad \prod_{u, v \in \mathbb{N}_{\text{cind}}} [u \mathbb{R} v \rightarrow u^* \mathbb{R} v^*], \quad \mathbb{X} \mathbb{R} 3.$$

3. Wychodząc z pojęcia sumy, zdefiniować pojęcie iloczynu w sposób wskazany w zadaniu 2.

§ 7. Izomorfizm relacji. Liczby relatywne. Homomorfizm.

Teoria liczb kardynalnych i naturalnych, z którą zapoznaliśmy się w §§ 1-6, opierała się na pojęciu równoliczności zbiorów. W teorii relacji analogiczną rolę do pojęcia równoliczności gra pojęcie *izomorfizmu* (czyli *równokształtności*) relacji.

Mówimy, że relacja R ustala *izomorfizm relacji* S i T , jeśli $R \in 1-1$, dziedzina R zawiera pole relacji S (por. Rozdział VI, § 4; str. 130), przeciwdziedzina R zawiera pole relacji T i przy tym dla $x_1 R x_2$ oraz $y_1 R y_2$ wzory $x_1 S y_1$ oraz $x_2 T y_2$ są równoważne.

Bez obawy nieporozumień możemy używać dla oznaczenia stosunku izomorfizmu dwu relacji tego samego symbolu $\sim$, którego używaliśmy dla oznaczenia stosunku równoliczności (p. str. 165):

$$(41) \quad \sim \stackrel{df}{=} (\hat{S}, \hat{T}, \hat{R}) \{ (R \in 1-1) \cdot [\mathbb{C}(S) \subset \mathbb{D}(R)] \cdot [\mathbb{C}(T) \subset \mathbb{C}(R)] \cdot \\ \cdot \prod_{x_1, x_2, y_1, y_2} [(x_1 R x_2) \cdot (y_1 R y_2) \rightarrow (x_1 S y_1 \equiv x_2 T y_2)] \}.$$

Zgodnie z tą definicją, relacja doskonała R ustala izomorfizm relacji S i T , jeśli odwzorowuje ona pola tych relacji jedno na drugie w taki sposób, że gdy relacja S zachodzi między dwoma przedmiotami x_1 i y_1 , to relacja T zachodzi między przyporządkowanymi im przez relację R przedmiotami x_2 i y_2 , i na odwrót.

Nietrudny rachunek logiczny pozwala dowieść, że

$$\vdash S \sim_R T \equiv (R \in 1-1) \cdot [\mathbb{C}(S) \subset \mathbb{D}(R)] \cdot [\mathbb{C}(T) \subset \mathbb{C}(R)] \cdot (R; T; \check{R} = S).$$

Relacja $R; T; \check{R}$ gra więc podobną rolę w teorii relacji co zbiór $R(Y)$ w teorii zbiorów (por. Rozdział VI, § 8, str. 153, ćwiczenie 2).

Relacje S i T nazywamy *izomorficznymi* albo *podobnymi*, jeśli istnieje taka relacja R , że $S \sim_R T$.

Piszemy wówczas $S \text{ im } T$.

Zupełnie podobne określenia przyjmujemy dla relacji trójczłonowych:

$$\sim \stackrel{df}{=} (\hat{U}, \hat{V}, \hat{R}) \{ (R \in 1-1) \cdot [\mathbb{D}_1(U) + \mathbb{D}_2(U) + \mathbb{D}_3(U) \subset \mathbb{D}(R)] \cdot \\ \cdot [\mathbb{D}_1(V) + \mathbb{D}_2(V) + \mathbb{D}_3(V) \subset \mathbb{C}(R)] \cdot$$

$$\cdot \prod_{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3} \{ (x_1 R y_1) \cdot (x_2 R y_2) \cdot (x_3 R y_3) \rightarrow [U(x_1, x_2, x_3) \equiv V(y_1, y_2, y_3)] \}.$$

Uogólnienie na przypadek relacji n -członowych jest oczywiste.

PRZYKŁADY. 1. Relacje $< i >$ w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych są izomorficzne. Izomorfizm ustala relacja

$$(\hat{x}, \hat{y}) \{ y = -x \}.$$

2. Relacje (funkcje)

$$(\hat{x}, \hat{y}) \{ x = \sin y \} \quad \text{i} \quad (\hat{x}, \hat{y}) \{ x = \sin y \cdot \cos y \}$$

są izomorficzne. Izomorfizm ustala relacja $(\hat{x}, \hat{y}) \{ x = 2y \}$.

Ogólnie, relacja $(\hat{x}, \hat{y}) \{ x = \Psi(y) \}$, gdzie Ψ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną, ustala izomorfizm funkcji

$$(\hat{x}, \hat{y}) \{ x = f(y) \} \quad \text{i} \quad (\hat{x}, \hat{y}) \{ \Psi(x) = f[\Psi(y)] \}.$$

3. Działania: dodawanie liczb rzeczywistych i mnożenie liczb rzeczywistych dodatnich są izomorficzne. Aby tego dowieść, wystarczy zauważyć, że relacja $(\hat{x}, \hat{y}) \{x = e^{\hat{x}}, y = e^{\hat{y}}\}$ odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie zbiór liczb dodatnich na zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i przy tym

$$(x + y = z) \equiv (e^x \cdot e^y = e^z).$$

4. Zbiór liczb $0, 1, 2, \dots, n-1$ jest grupą względem działania

$$U = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \{x \equiv y + z \pmod{n}\}.$$

Zbiór obrotów płaszczyzny dokoła stałego punktu o kąty $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n} \cdot 2, \dots, \frac{2\pi}{n} \cdot (n-1)$ jest grupą względem działania V składania obrotów¹⁾. Działania U i V są izomorficzne, ich izomorfizm ustala relacja, przyporządkowująca liczbie k obrót o kąt $\frac{2\pi}{n} \cdot k$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Szereg innych przykładów działań izomorficznych znaleźć można w podręcznikach algebry wyższej, w których rozważa się izomorfizm grup, izomorfizm ciał, izomorfizm pierścieni i t. d. Dokładniej mówić zresztą należy o izomorfizmie działań, względem których rozważane zbiory są grupami, ciałami, pierścieniami.

Stosunek izomorfizmu relacji (o dowolnej liczbie argumentów) jest — podobnie jak stosunek równoliczności zbiorów — zwrotny, symetryczny i przechodni w zbiorze wszystkich relacji zawartych w 1^* . Zbiór wszystkich tych relacji rozpada się więc na rozłączne między sobą klasy abstrakcji stosunku im, przy czym dwie relacje są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tej samej klasy abstrakcji.

Te klasy abstrakcji nazywają się *liczbami relatywnymi*.

Liczby relatywne są więc tym samym dla relacji, czym liczebności (moce, liczby kardynalne) są dla zbiorów.

Liczby relatywne, zawierające relacje, które porządkują swe pola (czyli relacje ze zbioru $\text{ord}(X)$), nazywają się *typami porządkowymi*.

¹⁾ Obrót, jako przekształcenie płaszczyzny, jest relacją wzajemnie jednoznaczna; V jest zatem relacją $(\hat{R}, \hat{S}, \hat{T}) \{R = S; T\}$.

Liczby relatywne, zawierające relacje, które dobrze porządkują swe pola (czyli relacje ze zbioru $\text{bord}(X)$), nazywają się *liczbami porządkowymi*.

Typy porządkowe i liczby porządkowe badane są szczegółowo w teorii mnogości. Inne liczby relatywne nie były — jak dotąd — badane systematycznie.

Uogólnieniem pojęcia izomorfizmu relacji jest pojęcie *homomorfizmu*. Objaśnimy je na przykładzie relacji trójczłonowych.

Mówimy, że *relacja trójczłonowa* U_1 jest *homomorficzna* z *relacją trójczłonową* U_2 , jeśli istnieje funkcja (relacja dwuczłonowa jednoznaczna) R , która odwzorowuje pole relacji U_2 na pole relacji U_1 w taki sposób, że

$$\prod_{x_1 y_1 z_1} \{U_1(x_1, y_1, z_1) \equiv \sum_{x_2 y_2 z_2} [(x_1 R x_2) \cdot (y_1 R y_2) \cdot (z_1 R z_2) \cdot U_2(x_2, y_2, z_2)]\}.$$

Pojęcie to przenosi się od razu na relacje n -członowe dla dowolnego n , w szczególności (dla $n=1$) — na zbiory. W myśl tej definicji *zbiór* X_1 jest *homomorficzny* ze *zbiorem* X_2 , jeśli X_1 jest obrazem X_2 uzyskanym za pomocą funkcji (t. j. relacji dwuczłonowej jednoznacznej), której przeciwdziedzina zawiera X_2 .

Przykładów relacji homomorficznych dostarcza nam algebra, w szczególności teoria grup. Ograniczymy się do podania dwu specjalnie prostych przykładów:

PRZYKŁADY. 1. Niech U_2 będzie dodawaniem w zbiorze liczb całkowitych, a R — funkcją

$$(\hat{x}, \hat{y}) \{x \text{ jest resztą z dzielenia } y \text{ przez } m\}.$$

Jako U_1 otrzymamy wówczas działanie dodawania zredukowane mod m , t. j. określone w zbiorze liczb $0, 1, 2, \dots, m-1$, wykonalne w nim i prowadzące od dwu liczb y i z do liczby x , równej reszcie z dzielenia sumy $y + z$ przez m .

2. Niech U_2 będzie dodawaniem wektorów przestrzennych o początku w punkcie O_* , a R — relacją

$$(\hat{x}, \hat{y}) \{x \text{ jest rzutem wektora } y \text{ na płaszczyznę } a \text{ przechodzącą przez } O\}.$$

Jako U_1 otrzymamy wówczas działanie dodawania wektorów płaskich, położonych na płaszczyźnie a i uciepionych w punkcie O .

Ogólna metoda tworzenia relacji homomorficznych z daną relacją U_2 jest następująca. Bierze się dowolną relację dwuczłonową S , która jest równoważnością w polu relacji U_2 , i określa następnie relację trójczłonową U_1 między klasami abstrakcji relacji S w taki sposób, że

$$U_1(X, Y, Z) \equiv \sum_{xyz} [(x \in X) \cdot (y \in Y) \cdot (z \in Z) \cdot U_2(x, y, z)].$$

Relację U_1 można by oznaczać zapożyczonym z teorii grup symbolem U_2/S .

Można wykazać, że każda relacja homomorficzna z U_2 jest izomorficzna z relacją U_2/S dla odpowiedniego S .

Metoda ta jest dobrze znana z algebry; znajduje tam ona zastosowania do pojęcia homomorfizmu grup i pierścieni¹⁾.

ĆWICZENIA. 1. Dowieść, że relacja $\subset$ w zbiorze wszystkich podzbiorów 1 jest izomorficzna z relacją $\supset$ (p. str. 97, ćwiczenie 2).

2. Dowieść, że każda relacja częściowo porządkująca swe pole jest izomorficzna z relacją $\subset$ w pewnym zbiorze zbiorów.

Wsk.: izomorfizm ustala relację, która każdemu elementowi x przyporządkowuje zbiór $\{y\} \{yRx\}$.

3. Okazać, że relacje $< i >$ w zbiorze liczb naturalnych nie są izomorficzne.

4. Okazać, że działania dodawania i mnożenia w zbiorze liczb wymiernych nie są izomorficzne.

5. Dowieść, że jeśli zbiór pełny 1 składa się z n przedmiotów, to ilość różnych liczb relatywnych, składających się z relacji $R \in \text{aeq}(1)$, wynosi $p(n)$, gdzie $p(n)$ jest liczbą różnych rozkładów n na sumę n składników naturalnych.

Tyleż jest różnych liczb relatywnych, składających się z relacji $R \in 1-1$, których dziedziną i przeciwdziedziną jest zbiór pełny 1.

Wsk.: dwie relacje R i S należące do $\text{aeq}(1)$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy każdej klasie abstrakcji relacji R odpowiada równoliczna z nią klasa abstrakcji relacji S i na odwrot.

Uwaga. Liczby $p(n)$ badał już Euler w związku z tak zwaną *partitio numerorum*. Hardy i Ramanujan wykazali, że w przybliżeniu $p(n) = \frac{e^{\pi\sqrt{2n/5}}}{4\sqrt{5} \cdot n}$, przy czym błąd względny, t. j. iloraz z błędem przez $p(n)$ dąży do 0 dla $n \rightarrow \infty$. Otrzymujemy stąd przybliżoną ilość liczb relatywnych, rozpatrywanych w ćwiczeniu 5.

¹⁾ Ob. jakiegokolwiek obszerniejsze dzieło z algebry wyższej, np. B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, wyd. 2-e, Berlin 1937, w szczególności str. 31 i 41.

6. Niech $A_n(R) \stackrel{\text{df}}{=} \{\hat{x} \{xR^n x\}\}$, gdzie $R^1 = R$, $R^2 = R;R$, $R^3 = R;R;R$, ...

Dowieść, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by dwie relacje doskonałe R i S , których dziedziną i przeciwdziedziną jest zbiór pełny 1, były izomorficzne, jest istnienie takiej relacji doskonałej $T \in 1-1$, że $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{C}(T) = 1$ i $A_n(R) \sim_T A_n(S)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

7. Wykazać na podstawie twierdzenia, podanego w ćwiczeniu 6, że jeśli zbiór pełny jest przeliczalny, to istnieje continuum różnych liczb relatywnych, zawierających relacje doskonałe.

8. Okazać, że homomorfizm relacji jest stosunkiem zwrotnym i przechodnim, ale nie jest stosunkiem ani symetrycznym, ani antysymetrycznym.

9. Okazać, że relacja dwuczłonowa, homomorficzna z daną relacją S , ma postać $R;S;\tilde{R}$, gdzie R jest relacją jednoznaczną.

10. Dowieść, że relacja homomorficzna z relacją

(a) jednoznaczną,

(b) zwrotną, symetryczną i przechodnią

jest znów taką samą relacją.

Natomiast relacja homomorficzna z relacją porządkującą nie musi być relacją porządkującą.

11. Dowieść, że jeśli relacje trójczłonowe S_1 i S_2 są działaniami oraz $R \in 1-1$, $\mathfrak{D}(R)$ zawiera sumę trzech dziedzin relacji S_1 , a $\mathfrak{C}(R)$ — sumę trzech dziedzin relacji S_2 , to na to, by relacja R ustalała izomorfizm relacji S_1 i S_2 , potrzeba i wystarcza, by

$$\prod_{x_1 x_2 y_1 y_2 z_1 z_2} [(x_1 R y_1) \cdot (x_2 R y_2) \cdot (z_1 R z_2) \cdot S_1(x_1, y_1, z_1) \rightarrow S_2(x_2, y_2, z_2)].$$

Wykazać, że warunek ten nie jest wystarczający, jeżeli S_1 i S_2 nie są działaniami.

§ 8. Zasadnicze twierdzenie o izomorfizmie. Rolę, jaką w matematyce gra pojęcie izomorfizmu, wyraził znakomicie Poincaré: „Matematycy nie badają przedmiotów, lecz stosunki między przedmiotami; obojętne im jest tedy zastąpienie tych przedmiotów przez inne, byleby tylko stosunki pozostały niezmienione”¹⁾.

Udowodnimy twierdzenie wykazujące, że jeśli jakiegokolwiek zbiory lub relacje spełniają funkcję zdaniową Φ , to również zbiory i relacje izomorficzne z poprzednimi spełniają tę funkcję zdaniową, gdy dziedziną i przeciwdziedziną relacji ustalającej izomorfizm jest zbiór pełny. Dla matematyka, który bada, czy pewne zbiory $X, Y, \dots$ i relacje $R, S, \dots$ mają pewne własności (czyli spełniają

¹⁾ H. Poincaré, *Nauka i hipoteza* (przekład polski M. Hurwitza), Warszawa 1908, str. 23. Pogląd Poincaré’go jest niewątpliwie słuszny w odniesieniu do licznych działów matematyki (mianowicie wszystkich, które zbudowane są w sposób aksjomatyczny); trudno jednak byłoby podciągnąć pod ten pogląd arytmetykę liczb naturalnych.

pewne funkcje zdaniowe), jest więc rzeczywiście obojętne, czy bada same te zbiory i relacje, czy zbiory i relacje izomorficzne z nimi (przy założeniu, że dziedziną i przeciwdziedziną relacji ustalającej izomorfizm jest zbiór pełny 1).

Dla uproszczenia symboliki rozpatrzmy tylko te funkcje zdaniowe, w których zmienne $S, T, \dots$ przebiegają zbiór relacji dwuczłonowych. Mówiąc dokładniej, weźmiemy pod uwagę tylko funkcje zdaniowe, powstające z wyrażeń postaci xSy przez łączenie ich funktorami zdaniotwórczymi oraz poprzedzanie kwantyfikatorami $\sum_x$ i $\prod_x$ (przy czym zmienna x może być zastąpiona jakąkolwiek inną). Oznaczamy — jak zwykle — przez

$$(*) \quad \Phi(S_1, S_2, \dots, S_k, x_1, x_2, \dots, x_l)$$

funkcję zdaniową opisaną postacią, zawierającą zmienne $S_1, \dots, S_k, x_1, \dots, x_l$ jako zmienne wolne.

Twierdzenie. Dla każdej funkcji zdaniowej Φ kształtu (*), w której nie występują zmienne $y_1, y_2, \dots, y_l$, zachodzi tautologia

$$(42) \quad \vdash (R \in 1-1) \cdot [1 = \mathfrak{D}(R)] \cdot [1 = \mathfrak{C}(R)] \cdot \\ \cdot (x_1 R y_1) \cdot (x_2 R y_2) \cdot \dots \cdot (x_l R y_l) \cdot (S_1 \sim_R T_1) \cdot (S_2 \sim_R T_2) \cdot \dots \cdot (S_k \sim_R T_k) \rightarrow \\ \rightarrow [\Phi(S_1, S_2, \dots, S_k, x_1, x_2, \dots, x_l) \equiv \Phi(T_1, T_2, \dots, T_k, y_1, y_2, \dots, y_l)]^1).$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że Φ jest funkcją zdaniową $x_1 S_1 x_2$. Wzór (42) redukuje się wówczas do

$$\vdash (R \in 1-1) \cdot [1 = \mathfrak{D}(R)] \cdot [1 = \mathfrak{C}(R)] \cdot (x_1 R y_1) \cdot (x_2 R y_2) \cdot (S_1 \sim_R T_1) \rightarrow \\ \rightarrow [x_1 S_1 x_2 \equiv y_1 T_1 y_2].$$

Dowód tej tautologii uzyskujemy bezpośrednio z definicji (41).

Załóżmy teraz, że wzór (42) jest prawdziwy dla funkcji zdaniowej Φ . Korzystając z tautologii $\vdash \{p \rightarrow (q \equiv r)\} \rightarrow \{p \rightarrow (q' \equiv r')\}$, uzyskujemy z (42)

$$\vdash (R \in 1-1) \cdot [1 = \mathfrak{D}(R)] \cdot [1 = \mathfrak{C}(R)] \cdot \\ \cdot (x_1 R y_1) \cdot (x_2 R y_2) \cdot \dots \cdot (x_l R y_l) \cdot (S_1 \sim_R T_1) \cdot (S_2 \sim_R T_2) \cdot \dots \cdot (S_k \sim_R T_k) \rightarrow \\ \rightarrow [\Phi'(S_1, S_2, \dots, S_k, x_1, x_2, \dots, x_l) \equiv \Phi'(T_1, T_2, \dots, T_k, y_1, y_2, \dots, y_l)].$$

¹⁾ Można by bez większych trudności rozciągnąć to twierdzenie na funkcje zdaniowe ogólniejsze, w których występują zmienne przebiegające zbiory i zmienne przebiegające relacje wieloargumentowe, nawet gdy zmienne te występują też pod kwantyfikatorami. Zob. A. Tarski i A. Lindenbaum, *Über die Beschränktheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, zeszyt 7, Wiedeń 1936, str. 15-22.

Z założenia, że twierdzenie jest prawdziwe dla funkcji zdaniowej Φ , wynika więc, że twierdzenie jest prawdziwe dla funkcji zdaniowej Φ' .

Ze wzoru (42) otrzymujemy przez łatwe przekształcenia (w których korzystamy z założenia, że zmienne y_i nie występują w funkcji zdaniowej Φ):

$$\vdash (R \in 1-1) \cdot [1 = \mathfrak{D}(R)] \cdot [1 = \mathfrak{C}(R)] \cdot \\ \cdot (x_2 R y_2) \cdot \dots \cdot (x_l R y_l) \cdot (S_1 \sim_R T_1) \cdot (S_2 \sim_R T_2) \cdot \dots \cdot (S_k \sim_R T_k) \rightarrow \\ \rightarrow [\Phi(S_1, S_2, \dots, S_k, x_1, x_2, \dots, x_l) \cdot \sum_{y_1} (x_1 R y_1) \rightarrow \\ \rightarrow \sum_{y_1} \Phi(T_1, T_2, \dots, T_k, y_1, y_2, \dots, y_l)].$$

Ponieważ jednak $\vdash [1 = \mathfrak{D}(R)] \rightarrow \sum_{y_1} (x_1 R y_1)$, więc w poprzedniku implikacji, stojącej w nawiasie kwadratowym, możemy pominąć czynnik $\sum_{y_1} (x_1 R y_1)$. Dołączając w następniku duży kwantyfikator $\prod_{x_1}$ i stosując wzór (9) z Rozdziału III (§ 4, str. 62), otrzymujemy tautologię

$$\vdash (R \in 1-1) \cdot [1 = \mathfrak{D}(R)] \cdot [1 = \mathfrak{C}(R)] \cdot \\ \cdot (x_2 R y_2) \cdot \dots \cdot (x_l R y_l) \cdot (S_1 \sim_R T_1) \cdot (S_2 \sim_R T_2) \cdot \dots \cdot (S_k \sim_R T_k) \rightarrow \\ \rightarrow [\sum_{x_1} \Phi(S_1, S_2, \dots, S_k, x_1, x_2, \dots, x_l) \rightarrow \sum_{y_1} \Phi(T_1, T_2, \dots, T_k, y_1, y_2, \dots, y_l)].$$

W podobny sposób możemy uzasadnić tautologię, jaka powstaje z niej przez odwrócenie implikacji stojącej w następniku. Z dwu tych tautologii wynika

$$\vdash (R \in 1-1) \cdot [1 = \mathfrak{D}(R)] \cdot [1 = \mathfrak{C}(R)] \cdot (x_2 R y_2) \cdot \dots \cdot (x_l R y_l) \cdot \\ \cdot (S_1 \sim_R T_1) \cdot (S_2 \sim_R T_2) \cdot \dots \cdot (S_k \sim_R T_k) \rightarrow \\ \rightarrow [\sum_{x_1} \Phi(S_1, S_2, \dots, S_k, x_1, x_2, \dots, x_l) \equiv \sum_{y_1} \Phi(T_1, T_2, \dots, T_k, y_1, y_2, \dots, y_l)].$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla funkcji zdaniowej Φ , to jest ono też prawdziwe dla funkcji zdaniowej $\sum_{x_1} \Phi$ (możemy bowiem zmienną związaną y_1 zastąpić przez zmienną związaną x_1).

Wykażemy na koniec, że jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla funkcji zdaniowych Φ i Ψ , to jest ono prawdziwe dla funkcji zdaniowej $\Phi \cdot \Psi$. Aby uprościć wzory, założymy, że

$$\Phi = \Phi(S, x, y, z) \quad \text{ i } \quad \Psi = \Psi(S, x, u, v).$$

Ten przypadek szczególny wystarcza do zrozumienia myśli dowodu, stosującej się w przypadku ogólnym.

Z założenia mamy:

$$\vdash (R \in 1-1) \cdot [1 = \mathfrak{D}(R)] \cdot [1 = \mathfrak{C}(R)] \cdot (xRx_1) \cdot (yRy_1) \cdot (zRz_1) \cdot (S \sim_R T) \rightarrow \\ \rightarrow [\Phi(S, x, y, z) \equiv \Phi(T, x_1, y_1, z_1)],$$

$$\vdash (R \in 1-1) \cdot [1 = \mathfrak{D}(R)] \cdot [1 = \mathfrak{C}(R)] \cdot (xRx_1) \cdot (uRu_1) \cdot (vRv_1) \cdot (S \sim_R T) \rightarrow \\ \rightarrow [\Psi(S, x, u, v) \equiv \Psi(T, x_1, u_1, v_1)].$$

Stosując prawo przemienności dla koniunkcji i tautologię

$$\vdash [p \cdot v \rightarrow (q \equiv r)] \cdot [(s \cdot v \rightarrow (t \equiv u)) \rightarrow [p \cdot s \cdot v \rightarrow (q \cdot t \equiv r \cdot u)]],$$

otrzymujemy z dwu tych implikacji

$$\vdash (R \in 1-1) \cdot [1 = \mathfrak{D}(R)] \cdot [1 = \mathfrak{C}(R)] \cdot$$

$$\cdot (xRx_1) \cdot (yRy_1) \cdot (zRz_1) \cdot (uRu_1) \cdot (vRv_1) \cdot (S \sim_R T) \rightarrow$$

$$\rightarrow [\Phi(S, x, y, z) \cdot \Psi(S, x, u, v) \equiv \Phi(T, x_1, y_1, z_1) \cdot \Psi(T, x_1, u_1, v_1)].$$

Twierdzenie jest więc prawdziwe dla funkcji zdaniowej $\Phi \cdot \Psi$.

Z uzyskanego wyniku wnosimy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich funkcji zdaniowych, jakie dają się utworzyć z wyrażeń postaci xSy za pomocą negacji, koniunkcji i kwantyfikatora szczegółowego. Ponieważ jednak wszystkie funktory zdaniotwórcze dają się wyrazić za pomocą negacji i koniunkcji, a kwantyfikator ogólny wyraża się (na mocy praw de Morgana) przez kwantyfikator szczegółowy i negację, więc wnosimy stąd, że twierdzenie jest prawdziwe ogólnie, c. b. d. o.

Jako bezpośrednie wnioski z twierdzenia (42) otrzymujemy w szczególności:

$$(43) \vdash (R \in 1-1) \cdot [1 = \mathfrak{D}(R)] \cdot [1 = \mathfrak{C}(R)] \cdot (S \sim_R T) \cdot (S_1 \sim_R T_1) \cdot (S_2 \sim_R T_2) \rightarrow \\ \rightarrow [(S = S_1; S_2) \equiv (T = T_1; T_2)],$$

$$(44) \vdash (R \in 1-1) \cdot [1 = \mathfrak{D}(R)] \cdot [1 = \mathfrak{C}(R)] \cdot (S \sim_R T) \rightarrow [S \in \text{ord}(1) \equiv T \in \text{ord}(1)].$$

Wzór (44) orzeka, że jeśli relacja R ustala izomorfizm między relacjami S i T , a przy tym dziedziną i przeciwdziedziną relacji R jest zbiór pełny 1, to z tego, że S porządkuje zbiór 1, wynika, że i T porządkuje zbiór 1.

Analogiczne twierdzenia wypowiedzieć można dla klas

$$\text{refl}(1), \text{arefl}(1), \dots, \text{aeq}(1), 1-1, 1-\text{Cls}, \text{Cls}-1,$$

rozważanych w §§ 5-8 Rozdziału VI.

Dalsze zastosowania wzoru (42) poznamy w Rozdziale XI, § 9.

ĆWICZENIA: 1. Uogólnić twierdzenie (42) na przypadek, gdy w funkcji zdaniowej Φ występują kwantyfikatory wiążące zmienne $X, Y, \dots$. Zastosować ten wynik do dowodu twierdzenia

$$\vdash (R \in 1-1) \cdot [1 = \mathfrak{D}(R)] \cdot [1 = \mathfrak{C}(R)] \cdot (S \sim_R T) \cdot (X \sim_R Y) \rightarrow [S \in \text{bord}(X) \equiv T \in \text{bord}(Y)].$$

2. Udowodnić, że wyrażenie

$$(R \in 1-1) \cdot (S \sim_R T) \rightarrow \{ \sum_{xy} [(x \neq y) \cdot (xS'y) \cdot (yS'x)] \equiv \sum_{xy} [(x \neq y) \cdot (xTy) \cdot (yT'x)] \}$$

nie jest na ogół tautologią.

Wsk.: Przyjąć za 1 zbiór liczb naturalnych, za S — relację $<$ i za T — relację $X|S|X$, gdzie X jest zbiorem liczb parzystych.

Wynik ten dowodzi, że założenia $1 = \mathfrak{D}(R)$ i $1 = \mathfrak{C}(R)$ w twierdzeniu (42) są istotne.

ROZDZIAŁ VIII

TEORIA TYPÓW LOGICZNYCH

§ 1. Systematyka typów logicznych. W poprzednich rozdziałach zapoznaliśmy się z wieloma zbiorami i relacjami, nieraz bardzo istotnie różniącymi się między sobą. Postaramy się obecnie usystematyzować poznane pojęcia.

Najprostszymi spośród przedmiotów, jakimi zajmowaliśmy się dotąd, były elementy zbioru pełnego 1, które dla krótkości będziemy tu nazywać *indywiduami*. Dalej zajmowaliśmy się zbiorami utworzonymi z indywiduów i pojmowaliśmy te zbiory jako własności indywiduów. Jest więc zrozumiałe, że uważamy zbiory utworzone z elementów zbioru 1 za twory odmienne od samych elementów: mówimy że *typ logiczny* zbiorów jest inny niż typ logiczny indywiduów.

Relacje dwuczłonowe pojmowaliśmy jako własności par przedmiotów. Uważać je więc będziemy za twory różne zarówno od zbiorów jak od ich elementów: tworzą one odrębny typ logiczny. Podobnie, relacje trójczłonowe, czteroczłonowe i t. d., zachodzące między indywiduami, tworzą odrębne typy.

W Rozdziale VII badaliśmy pewne zbiory, których elementami są zbiory. Zbiory takie uważamy za różne od zbiorów utworzonych z indywiduów, gdyż ostatnie zbiory są własnościami, podczas gdy zbiory zbiorów są własnościami własności. Zbiory zbiorów tworzą zatem inny jeszcze typ logiczny.

Do jeszcze innego typu logicznego zaliczamy zbiory relacji (np. $\text{aeq}(1)$, 1-Cls i t. p.). Dalej napotykamy nowy typ: relacji między zbiorami (np. relacji równoliczności), po tym typ relacji między zbiorem a relacją i t. d.

Aby zorientować się w różnorodności wszystkich możliwych typów logicznych, wprowadzimy symbole, służące do oznaczania tych typów.

Najprostszy typ, typ elementów zbioru 1, oznaczać będziemy symbolem $*$.

W ogóle typ zbiorów utworzonych z przedmiotów typu c oznaczać będziemy przez (c) . Typ relacji dwuczłonowych, których dziedzina składa się z przedmiotów typu c_1 , a przeciwdziedzina z przedmiotów typu c_2 , oznaczać będziemy przez (c_1, c_2) . Podobnie, (c_1, c_2, c_3) oznaczać będzie typ relacji trójczłonowych, których pierwsza dziedzina ma typ (c_1) , druga — typ (c_2) , trzecia zaś — (c_3) . Analogiczne oznaczenia wprowadzamy dla typów relacji wieloargumentowych.

Typ $*$ nazywamy niekiedy *zerowym* lub *typem rzędu 0*; typy

$$(*), (*, *), (*, *, *), \dots$$

tworzą rząd pierwszy; typy

$$((*)), (*, (*)), ((*, (*))), (*, (*, *)), \dots$$

— rząd drugi i t. d. Ogólnie, rząd $(k+1)$ -y utworzony jest z typów $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, gdzie wszystkie c_i są co najwyżej k -tego rzędu i co najmniej jedno c_j jest dokładnie k -tego rzędu.

Zdanie: *przedmiot p ma typ $(*, (*))$* znaczy to samo, co: *p jest relacją dwuczłonową, której dziedzina składa się z indywiduów przeciwdziedzina zaś — ze zbiorów utworzonych z indywiduów*. Jest to więc relacja tego samego typu, co relacja ϵ (relacja należenia elementu do zbioru). Podobnie rozumiemy sens zdania: *p ma typ c*, jakkolwiek wzięlibyśmy symbol c zbudowany w opisany sposób.

PRZYKŁADY. 1. Działania dodawania i mnożenia zbiorów utworzonych z indywiduów mają typ $((*), (*), (*))$.

2. Działanie składania relacji, których polem jest zbiór pełny 1, ma typ $((*, (*), (*, (*), (*, (*))),$ gdyż jest to relacja trójczłonowa między relacjami dwuczłonowymi.

3. Relacja $(\dot{X}, \dot{R}) [X = \mathfrak{D}(R)]$ ma typ $((*), (*, *))$.

4. Jeśli zbiór 1 utworzony jest z liczb rzeczywistych, to funkcja zmiennej rzeczywistej ma typ $(*, *)$. Taki sam jest typ ciągu o wyrazach rzeczywistych.

5. Relacja między liczbą rzeczywistą a ciągiem a_n liczb rzeczywistych, wyrażona wzorem $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, ma typ $(*, (*, *))$.

6. Wzór $f(x) = F'(x)$ określa relację dwuczłonową między dwiema funkcjami, a więc relację typu $((*,*), (*, *))$.

7. Wzór $a = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ określa relację typu $(*, (*, *))$, natomiast wzór $a = \int_b^c f(x) dx$ określa relację typu $(*, (*, *, (*, *)))$.

W historycznym rozwoju matematyki pojawiają się w niej przedmioty coraz wyższych typów logicznych. W stadium początkowym rozpatrywano tylko liczby i działania na nich (t. j. pewne specjalne funkcje). Później pojawiło się ogólne pojęcie funkcji i rozpoczęto badanie działań na funkcjach (rachunek różniczkowy i całkowy). Dzisiejsza matematyka bada funkcjonaty czyli funkcje, których przeciwdziedzina składa się z funkcji (np. zmiennej rzeczywistej). Są to więc twory jeszcze wyższego typu logicznego. Również wprowadzenie pojęcia przekształcenia do geometrii uważać można za posunięcie się o szczebel wyżej w hierarchii typów logicznych.

Podział przedmiotów rozpatrywanych w logice na typy jest bardzo naturalny. Nie obcy jest on także gramatyce, która odróżnia rzeczowniki (nazwy indywiduów) od przymiotników i czasowników (nazw własności), przy czym jedno i to samo słowo zazwyczaj nie należy jednocześnie do obu tych części mowy (przynajmniej w większości języków europejskich)¹⁾.

W badaniach nad strukturą języka naukowego jest nieraz lepiej przyporządkowywać typ nie zbiorom i relacjom — jak to zrobiliśmy wyżej — lecz ich nazwom. Tak np. Ajdukiewicz²⁾ przyporządkowuje nazwom indywiduów (elementów zbioru 1) typ n (nazwa), nazwom zbiorów (własności) typ $z:n$. Symbol ten wskazuje, że z nazwy własności i nazwy, przedmiotu możemy utworzyć zdanie. Nazwom relacji dwuczłonowych przyporządkowany jest typ $z:(nn)$, nazwom relacji zachodzących między zbiorami a indywiduami — typ $z:[(z:n)n]$ i t. d. Można wówczas przyporządkować pewien typ funktorom zdaniotwórczym.

¹⁾ Związek pojęcia typu z pojęciami rozpatrywanymi w gramatyce odkrył i wielokrotnie podkreślał wybitny logik polski S. Leśniewski; por. np. jego pracę *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, *Fundamenta Mathematicae*, tom 14 (1929), str. 1-81, w szczególności str. 13-14. Zamiast typ Leśniewski pisał *kategoria semantyczna*.

²⁾ K. Ajdukiewicz, *Die syntaktische Konnexität*, *Studia Philosophica*, tom 1 (1935), str. 1-27. Ze względów typograficznych zmieniono tu nieco oznaczenia używane przez Ajdukiewicza.

Np. $\rightarrow$ ma typ $z:(zz)$, a $'$ — typ $z:z$. Ajdukiewicz pokazuje też, jak można w pewien sposób przyporządkować typ kwantyfikatorom.

Dzięki tej metodzie wszystkie stałe, występujące we wzorach logicznych, otrzymują typ (z wyjątkiem tylko symbolu abstrakcji $\wedge$).

CWICZENIA. 1. Jaki jest typ liczby naturalnej, jeśli zdefiniujemy ją tak jak w Rozdziale VII (§ 5, str. 183)? Jaki będzie wówczas typ liczb całkowitych i liczb wymiernych, jeśli określimy je jako klasy abstrakcji pewnych relacji (por. Rozdział VI, § 6, przykłady 1 i 2, str. 138-140)?

2. Obliczyć typ liczb rzeczywistych według teorii Cantora i Dedekinda, (zob. Rozdział VI, § 6, str. 140), zakładając, że zbiór 1 składa się z liczb wymiernych.

Odp.: Według teorii Cantora $((*,*))$, gdyż liczba rzeczywista jest zbiorem ciągów podstawowych. Według teorii Dedekinda $(*)$, gdyż liczbę rzeczywistą można utożsamić z dolną klasą przekroju.

§ 2. Antynomie. Widzieliśmy w § 1, że licznym pojęciom, jakie rozpatruje matematyka, przypisać można pewien określony typ. Do pojęć tych należą liczby różnych rodzajów, funkcje, ciągi, szeregi, granice, punkty, linie, powierzchnie i t. d. W zdaniach, służących do zapisywania własności tych pojęć, figurują zmienne, przebiegające tylko zbiór przedmiotów określonego typu, np. typu $*$ lub $(*,*)$. W całej t. zw. matematyce klasycznej nie napotykamy nigdy potrzeby używania zmiennych, przebiegających przedmiotów wszystkich typów.

Inaczej jest w niektórych działach nowoczesnej matematyki, a w szczególności w teorii mnogości. Teoria ta bada prawa, jakim podlegają wszelkie zbiory, i wprowadza operacje na zbiorach zupełnie dowolnych, nie dbając o to, czy zbiory te składają się z liczb, czy z funkcji, czy z relacji, czy z innych jeszcze przedmiotów. Takie działania, jak np. dodawanie lub mnożenie zbiorów oraz relacja inkluzji, nie mają więc w teorii mnogości żadnego określonego typu logicznego, podobnie jak nie ma go ogólne pojęcie funkcji. Tego rodzaju «uniwersalne» pojęcia wydają się czymś bardzo naturalnym: trudno dopatrzeć się istotnej różnicy między działaniem dodawania np. zbiorów typu $(*)$ a działaniem dodawania zbiorów jakiegokolwiek innego typu, np. $((*,(*)))$.

Zwróćmy uwagę na różnicę między uniwersalnymi działaniami dodawania i mnożenia zbiorów, rozpatrywanymi w teorii mnogości, a działaniami dodawania i mnożenia, określonymi w Rozdziale IV (§ 3, str. 96). Sformułowaliśmy tam określenia tylko dla zbiorów typu $(*)$ i relacji typu $(*,*)$, przy czym od razu podkreślaliśmy, że działania wykonywane na zbiorach są pojęciowo czymś odmiennym od działań wykonywanych na relacjach (i powinny być

oznaczane innymi symbolami). Od działań tych powinniśmy także odróżniać działania wykonywane na zbiorach typu $(*)$ i t.d. Otóż w teorii mnogości nie czyni się tych rozróżnień. Rozważa się tam jedno uniwersalne działanie dodawania, jedno uniwersalne działanie mnożenia i t.d., stosując je do przedmiotów wszystkich możliwych typów.

Poza teorią mnogości napotykaemy też w niektórych ogólnych tezach dawniejszej logiki zmienne, przebiegające wszelkie możliwe przedmioty niezależnie od ich typu. Np. w prawie tożsamości: *każdy przedmiot jest identyczny sam ze sobą*, które piszemy w postaci wzoru $\prod_x (x = x)$, zmienna x nie przebiega tylko zbioru indywiduów typu $*$, lecz ma charakter uniwersalny. Ograniczenie zakresu zmiennej x do zbioru przedmiotów określonego typu odebrałoby prawu tożsamości jego ogólność.

Aż do początków obecnego stulecia nikt zapewne nie przypuszczał, że użycie słowa *każdy* w tak ogólnym sensie, jak również rozpatrywanie przedmiotów nie mających określonego typu logicznego, nasuwać może jakiegokolwiek wątpliwości.

Bertrand Russell odkrył jednak zdumiewający fakt, że operując takimi «uniwersalnymi» pojęciami, dojść można w wyniku poprawnych rozumowań do wniosków niemożliwych do przyjęcia.

Rozumowania te noszą nazwę *antynomii*.

Sam Russell skonstruował ich kilka, na ich wzór znaleziono później szereg dalszych. Historycy filozofii mogli bez trudu dostrzec bliskie pokrewieństwo między antynomiami a niektórymi paradoksami, dyskutowanymi jeszcze w greckiej szkole filozoficznej sofistów. Odkrycie antynomii stało się potężnym bodźcem do gruntownego zbadania podstaw matematyki i logiki. Dyskusja antynomii nie jest do dziś wyczerpana i nie prędko zapewne uda się wyjaśnić wszystkie problemy z nią związane ¹⁾.

¹⁾ Pierwsza antynomia Russell'a opublikowana została przez G. Frege'go w postawie do II-go tomu *Grundgesetze der Arithmetik* (zob. Rozdział VII, str. 175, odsyłacz). Posłowcie to rozpoczyna Frege słowami: „Autorowi dzieła naukowego nie może zdarzyć się nic bardziej niepożądanego, jak to, gdy po ukończeniu jego pracy zdruzgotana zostanie jedna z podstaw, na których wspierał on swe konstrukcje. W to położenie postawił mnie list p. Bertranda Russella... P. Russell znalazł sprzeczność, którą teraz wyłożę“.

Dawniej jeszcze znalazł pokrewną antynomię matematyk włoski C. Burali-Forti w pracy *Una questione sui numeri transfiniti*, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, tom 11 (1897), str. 154-164. Burali-Forti nie wyciągnął jednak ze swego odkrycia tych wniosków, jakie umiał wyciągnąć Russell.

Omówimy tu kilka najważniejszych antynomii.

1. Antynomia Russell'a. Mówiliśmy już w Rozdziale IV (§ 1, str. 83), że nie uważamy za różne pojęć: *zbiór* i *własność*. Nazwijmy własnościami *normalnymi* takie własności, które nie przysługują samym sobie. Normalnymi będą więc własności: *być człowiekiem* (gdyż żaden człowiek nie jest identyczny z tą własnością), *być funkcją*, *być liczbą* i t.p. Własność: *być własnością* nie jest już normalna, gdyż przysługuje sama sobie.

Używając terminu *zbiór* zamiast *własność* powiemy, że zbiorami *normalnymi* nazywamy takie zbiory, które nie są swoimi własnymi elementami. Zbiory: ludzi, funkcji, liczb są więc normalne, zbiór wszystkich zbiorów nie jest normalny.

Rozpatrzmy teraz następującą własność W_0 :

być własnością normalną.

(W innym sformułowaniu: W_0 jest zbiorem wszystkich zbiorów normalnych). Dla wszelkiej własności W zachodzi więc równoważność:

(1) $(W \text{ ma własność } W_0) \equiv (W \text{ jest własnością normalną})$, z której na podstawie prawa transpozycji wynika druga równoważność:

(2) $(W \text{ nie ma własności } W_0) \equiv (W \text{ nie jest własnością normalną})$.

Zapytajmy teraz, czy W_0 jest, czy nie jest własnością normalną.

Jeśli W_0 jest własnością normalną, to (w myśl określenia własności normalnych) własność W_0 nie przysługuje samej sobie, czyli W_0 nie ma własności W_0 . Zgodnie z (2) wnosimy stąd, że W_0 nie jest własnością normalną — wbrew przypuszczeniu, że nią jest.

Jeśli zaś W_0 nie jest własnością normalną, to (w myśl określenia własności normalnych) własność W_0 przysługuje sama sobie. Zgodnie z (1) wnosimy stąd, że W_0 jest własnością normalną — wbrew przypuszczeniu, że nią nie jest.

Zarówno więc założenie, że W_0 jest własnością normalną, jak i założenie, że W_0 nie jest własnością normalną, prowadzi do sprzeczności, czyli W_0 nie jest własnością ani normalną, ani nie-normalną, mimo że na podstawie prawa wyłączonego środka jeden z tych przypadków powinien zachodzić.

Antynomię tę łatwo można przedstawić za pomocą wzorów.

Definicja własności W_0 brzmi

$$W_0 \equiv_{df} (\hat{X})(X \in X)'.$$

Z definicji tej otrzymujemy

$$\vdash X \in W_0 \equiv (X \in X)',$$

skąd przez podstawienie stałej W_0 zamiast litery X i uwzględnienie tautologii $\vdash (p \equiv p') \equiv p \cdot p'$ wynika

$$\vdash (W_0 \in W_0) \cdot (W_0 \in W_0)'.$$

2. Antynomia zbioru wszystkich zbiorów ¹⁾. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich zbiorów (czyli własnością: *być własnością*). Każda więc część zbioru Ω jest zarazem elementem zbioru Ω , gdyż każda część zbioru Ω jest zbiorem. Wynika stąd, że moc zbioru Ω jest większa albo równa mocy zbioru wszystkich jego części. Z teorii mnogości wiadomo jednak, że moc każdego zbioru jest mniejsza od mocy zbioru wszystkich jego części — skąd sprzeczność:

3. Antynomia Burali-Forti'ego. Niech $\mathcal{E}$ będzie zbiorem wszystkich liczb porządkowych. Z teorii mnogości wiadomo, że relacja mniejszości dobrze porządkuje każdy zbiór liczb porządkowych, w szczególności więc relacja ta dobrze porządkuje zbiór $\mathcal{E}$. Niech ξ będzie typem porządkowym relacji mniejszości w zbiorze $\mathcal{E}$; mamy zatem $\xi \in \mathcal{E}$. Wszystkie liczby porządkowe mniejsze od ξ tworzą odcinek zbioru $\mathcal{E}$ i odcinek ten jest przez relację mniejszości uporządkowany w typ ξ , gdyż w teorii mnogości dowodzi się zupełnie ogólnie, że każda liczba porządkowa α jest typem relacji mniejszości w zbiorze liczb porządkowych mniejszych od α . Dochodzimy w ten sposób do wniosku, że zbiór $\mathcal{E}$ jest podobny do swego odcinka, co stoi w sprzeczności ze znany w teorii mnogości twierdzeniem, że żaden zbiór dobrze uporządkowany nie jest podobny do swego odcinka.

Zastanówmy się teraz nad istotną przyczyną powstawania antynomii. Rozpoczynając w Rozdziale IV wykład teorii zbiorów i relacji, powiedzieliśmy, że zbyt ogólna definicja uniemożliwia podanie ich definicji. W trakcie dalszych rozważań opieraliśmy się jednak na pewnych własnościach zbiorów i relacji,

¹⁾ Do zrozumienia tej i następnej antynomii niezbędna jest znajomość pewnych twierdzeń z teorii mnogości.

mianowicie na pewniku definicyjnym (Rozdział IV, § 2, str. 90 i Rozdział V, § 3, str. 115) oraz na pewniku ekstensjonalności (Rozdział V, § 2, str. 111), a częściowo też na pewniku nieskończoności (Rozdział VII, § 5, str. 185). Ponadto powoływaliśmy się na wszystkie tautologie rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów oraz stosowaliśmy reguły wnioskowania (Rozdział III, § 3, str. 53-56).

Za pomocą tych samych środków doszliśmy też do antynomii. Widocznie więc jakiś błąd czy niedomówienie tkwi w samych tych założeniach.

Mówimy „błąd” lub „niedomówienie”, gdyż nie wszystkie założenia, na których się opieraliśmy, były wypowiedziane w sposób zupełnie precyzyjny. Dotyczy to przede wszystkim pewnika definicyjnego, który — jak to już zaznaczyliśmy w Rozdziale IV (§ 2, str. 90) — jest schematem, dającym się uściślać w taki lub inny sposób w zależności od tego, jakie wzory czy napisy uznamy za funkcje zdaniowe.

Nie wchodząc na razie bliżej w istotę zagadnienia, stwierdzić możemy już teraz, że jeśli dopuścimy jako funkcje zdaniowe wszelkie możliwe napisy, to z praw rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów wyniknie negacja niektórych szczególnych przypadków pewnika definicyjnego. Każda ze znanych antynomii daje się przekształcić w taki dowód ¹⁾.

Np. antynomia Russell'a dowodzi, że gdyby istniał zbiór W_0 wszystkich zbiorów normalnych, to W_0 byłoby i zarazem nie byłoby swoim elementem. Stosując prawo transpozycji wnosimy stąd, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów normalnych.

Mówiąc nieco dokładniej, rozumowanie przeprowadzone w antynomii Russell'a stanowi dowód (oparty na prawach rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów) następującej implikacji:

$$\sum_W \prod_X [X \in W \equiv (X \in X)'] \rightarrow \sum_W [(W \in W) \cdot (W \in W)'].$$

Z implikacji tej otrzymujemy, stosując prawo transpozycji i prawo de Morgana, implikację

$$\prod_W [(W \in W)' + (W \in W)] \rightarrow \{\sum_W \prod_X [X \in W \equiv (X \in X)']\}',$$

¹⁾ Uwagę tę zakomunikował mi uprzejmie prof. B. Knaster. Por. w związku z tą uwagą pracę: D. A. Boczwara, *Kwestia o paradoksach matematycznej logiki i teorii mnogości*, Matematyczny Sbornik, tom 15 (1944), str. 380.

a więc po oderwaniu poprzednika

$$\{\sum_W \prod_X [X \in W \equiv (X \in X)']\}'.$$

W ten sposób udowodniliśmy negację pewnego specjalnego przypadku pewnika definicyjnego.

Pewnik definicyjny stwierdza — jak wiemy — że każda funkcja zdaniowa o k zmiennych wolnych wyznacza jednoznacznie relację k -członową (lub zbiór, o ile $k=1$). Zasada ta wydaje się niezmiernie naturalna, nierozzerwalnie związana z intuicyjnym pojmowaniem zbiorów i relacji. Widzimy jednak, że nie rezygnując z praw, co najmniej tak samo intuicyjnych, rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów, nie możemy tej zasady utrzymać w całej rozciągłości: jeśli prawa rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów uznamy za prawdziwe, to omawianą zasadę, wziętą w całej jej rozciągłości, uznać musimy za fałszywą.

W historii nauki zdarzały się wielokrotnie takie sytuacje, że zasady pozornie naturalne i z intuicyjnego punktu widzenia „prawdziwe” okazywały się po głębszej analizie sprzeczne. Wystarczy wymienić jako przykład powszechną w czasach Pitagorasa wiarę we współmierność dowolnych dwu odcinków albo powszechną w XVIII wieku wiarę w istnienie liczb nieskończenie małych. Logika i nauka o podstawach matematyki znalazły się w podobnej sytuacji wskutek odkrycia antynomii.

Przewycięzenie takiego kryzysu wymaga wysiłku zarówno czysto naukowego jak psychicznego: pierwszy dostarcza nam poprawnej zasady w miejsce odrzuconej fałszywej, drugi zaś jest niezbędny, abyśmy przestali wierzyć w intuicyjną prawdziwość fałszywej zasady. Zarówno geometria jak rachunek różniczkowy oddawna już poradziły sobie w ten sposób z pozornymi paradoksami. Logika nie może jeszcze tego o sobie powiedzieć, co widoczne jest stąd, że choć znamy obecnie wiele istotnie różnych między sobą zasad, mogących wypełnić lukę powstałą przez odrzucenie pewnika definicyjnego w całej jego rozciągłości, to jednak intuicyjnie żadna z tych zasad nie wydaje nam się dotąd całkowicie przekonująca.

Istnieją dwie różne drogi, prowadzące do aksjomatów, mogących zastąpić odrzucony pewnik definicyjny. Jedna zachowuje zasadę, że każdy napis lub wzór jest funkcją zdaniową, nie wszystkie natomiast przypadki szczególne pewnika definicyjnego uznaje za tautologie. Druga koncentruje swą uwagę na zagadnie-

niu, jakie wzory uznać powinniśmy za funkcje zdaniowe, co w konsekwencji prowadzi do sprecyzowania również pewnika definicyjnego¹⁾.

Tą drugą metodą zajmiemy się w § 3.

ĆWICZENIA. 1. Rozpatrzyć antynomię, powstającą przez rozważanie relacji dwuczłonowej R , jaka zachodzi między dwiema relacjami dwuczłonowymi S i T wtedy i tylko wtedy, gdy S nie pozostaje w stosunku S do T ²⁾.

2. Rozpatrując zbiór

$$(\bar{X}) \left(\prod_Y \left\{ \prod_Z [X \in Z \equiv Y \in Z] \rightarrow (Y \in X) \right\} \right),$$

wyprowadzić antynomię analogiczną do antynomii Russell'a³⁾.

Wsk.: Antynomię tę można otrzymać zakładając, że zmienne $X, Y, Z, \dots$ przebiegają zbiór wszystkich zbiorów; nie należy więc zakładać — jak to czyniliśmy poprzednio — że zmienne te przebiegają tylko zbiór zbiorów zawartych w 1.

3. Zbiór X nazwiemy *normalnym k -tego stopnia* jeśli nie istnieją takie zbiory $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$, że $(X \in Y_1) \cdot (Y_1 \in Y_2) \cdot \dots \cdot (Y_{k-1} \in Y_k) \cdot (Y_k \in X)$. Udowodnić, że założenie istnienia zbioru wszystkich zbiorów normalnych k -tego stopnia prowadzi do sprzeczności⁴⁾.

§ 3. Prosta teoria typów. We wszystkich antynomiach omówionych w § 2 występują zbiory lub relacje, którym nie podobna przypisać żadnego z typów logicznych omówionych w § 1. Funkcje zdaniowe, niezbędne do wystąpienia tych antynomii, napisane być mogą tylko przy pomocy zmiennych, przebiegających przedmioty różnych typów. Np. zbiór W_0 , o którym mowa w antynomii Russell'a, zawiera jako elementy zarówno zbiór wszystkich liczb jak zbiór wszystkich funkcji i t. d., nie ma więc on żadnego typu logicznego. Podobnie zbiorom Ω i Ξ , rozpatrywanym w antynomii zbioru wszystkich zbiorów i w antynomii Buralli-Forti'ego, nie podobna przypisać żadnego typu. W funkcjach zdaniowych

$$\prod_X [X \in W_0 \equiv (X \in X)'], \quad \prod_X (X \in \Omega),$$

¹⁾ Pierwsza metoda leży u podstaw aksjomatycznej teorii mnogości oraz systemu zbudowanego przez logika amerykańskiego Quine'a. Z aksjomatyczną teorią mnogości zapoznać się można np. z książki: A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, wyd. 3-e, Berlin 1928. Systemowi Quine'a poświęcona jest książka: W. V. O. Quine, *Mathematical logic*, wyd. 2-e, Cambridge 1947.

²⁾ B. Russell i A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, tom 1, str. 60.

³⁾ Por. cytowaną tu na str. 211 pracę D. A. Boczwarę, zwłaszcza str. 380.

⁴⁾ Por. W. V. O. Quine, *Mathematical logic*, wyd. 1-e, New York 1940, str. 129, oraz D. A. Boczwar, *Niekotoryje logiczeskije tieoremy o normalnykh mnozestwach i predikatach*, Matematyczny Sbornik, tom 16 (1945), str. 345-352.

potrzebnych do wysłowienia tych antynomii, figurują zmienne, przebiegające wszelkie możliwe zbiory niezależnie od ich typu.

Przyjmując t. zw. *prostą teorię typów*, stajemy na stanowisku, że w logice mówić wolno tylko o przedmiotach, mających ściśle określony typ. Każda zmienna przebiegać może tylko zbiór o ustalonym typie¹⁾.

Ta t. zw. *zasada czystości typów* nie jest tylko mechanicznym zakazem, przyjętym po to, aby ustrzec się od antynomii. Widzieliśmy, że narzuca się ona w sposób bardzo naturalny przy badaniu pojęć matematyki klasycznej, w której odróżniamy od siebie liczby, zbiory, funkcje, funkcjonały i t. p. (por. § 1, str. 206).

Logik, przyjmujący zasadę czystości typów, odrzuca funkcje zdaniowe, w których figurują zmienne przebiegające przedmioty różnych typów, nie dlatego, że uważa je za fałszywe, lecz dlatego, że są one dla niego pozbawione sensu: są to zestawienia znaków, mające tylko z pozoru gramatyczną postać zdania.

Budowę logiki zgodnej z zasadą czystości typów rozpocząć zatem musimy od podania ścisłego określenia zdań i funkcji zdaniowych. Określenie to musimy skonstruować w ten sposób, żeby mówienie zdefiniowanymi w nim zdaniami o zbiorach i relacjach, nie spełniających zasady czystości typów, było niepodobieństwem.

Funkcje zdaniowe i zdania utworzone są ze znaków:

$$\equiv, +, \cdot, \rightarrow, ', \prod, \sum$$

(znanych nam z Rozdziałów II i III) oraz ze zmiennych. Zmienne są znaki:

$$\begin{array}{llll} x^*, & y^*, & z^*, & \dots \\ x^{(*)}, & y^{(*)}, & z^{(*)}, & \dots \\ x^{(*,*)}, & y^{(*,*)}, & z^{(*,*)}, & \dots \end{array}$$

¹⁾ Prosta teoria typów powstała w wyniku uproszczenia pewnych koncepcji Russella, znanych pod nazwą *rozgałęzionej teorii typów*. Na to, że prosta teoria typów wystarcza do usunięcia antynomii, wskazał L. Chwistek w pracy *Antynomie logiki formalnej*, Przegląd Filozoficzny 24 (1921), str. 164-171. S. Leśniewski podkreślał wielokrotnie w swych wykładach i publikacjach naturalność tej teorii. Był on zdania, że prosta teoria typów powstałaby i byłaby przez wszystkich przyjęta nawet wówczas, gdyby nie odkryto żadnych antynomii. Zob. S. Leśniewski, *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, Fundamenta Mathematicae, tom 14' (1929), str. 14. Z tym poglądem trudno zresztą zgodzić się bez zastrzeżeń.

i ogólnie znaki:

$$(3) \quad x^c, \quad y^c, \quad z^c, \quad \dots,$$

gdzie c jest jakimkolwiek symbolem oznaczającym typ logiczny (por. § 1, str. 205).

Zmienne (3) nazywamy zmiennymi typu c .

Przebiegają one zbiór przedmiotów typu c .

Najprostszymi funkcjami zdaniowymi są wyrażenia postaci

$$(4) \quad x^{(c_1, c_2, \dots, c_k)}(y^{c_1}, z^{c_2}, \dots, u^{c_k}),$$

w których $c_1, c_2, \dots, c_k$ są dowolnymi symbolami oznaczającymi typ. Litery $x, y, \dots, u$ mogą być przy tym zastąpione jakimikolwiek innymi.

Wyrażenie (4) czytamy: relacja k -członowa $x^{(c_1, c_2, \dots, c_k)}$ typu $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ zachodzi między przedmiotami: y^{c_1} (który jest typu c_1), z^{c_2} (który jest typu c_2), ..., u^{c_k} (który jest typu c_k). Dla $k=1$ można by pisać zamiast (4) wzór $y^{c_1} \in x^{(c_1)}$, aby zachować zwyczaj przyjęty w poprzednich rozdziałach.

Z najprostszych funkcji zdaniowych (4) tworzymy dalsze funkcje zdaniowe, łącząc dwie dowolne funkcje zdaniowe funkcjami zdaniotwórczymi, lub też stawiając za funkcją zdaniową znak negacji, lub wreszcie poprzedzając funkcję zdaniową kwantyfikatorem z wypisaną u dołu zmienną.

W ten sposób dopiero pojęcie funkcji zdaniowej zostało należycie zdefiniowane.

Każda zmienna występująca w funkcji zdaniowej jest w niej bądź wolna bądź związana. Sposób odróżniania zmiennych wolnych od związanych podaliśmy w Rozdziale III, § 1, str. 46.

Za tautologie logiczne przyjmujemy wyrażenia następujące:

(A) Wyrażenia powstające z tautologii rachunku zdań przez zastąpienie zmiennych zdaniowych dowolnymi funkcjami zdaniowymi.

(B) Wyrażenia postaci

$$\prod y^{c_1} z^{c_2} \dots u^{c_k} [x_1^{(c_1, c_2, \dots, c_k)}(y^{c_1}, z^{c_2}, \dots, u^{c_k}) \equiv x_2^{(c_1, c_2, \dots, c_k)}(y^{c_1}, z^{c_2}, \dots, u^{c_k})] \rightarrow$$

$$\rightarrow [t^{((c_1, c_2, \dots, c_k))}(x_1^{(c_1, c_2, \dots, c_k)}) \equiv t^{((c_1, c_2, \dots, c_k))}(x_2^{(c_1, c_2, \dots, c_k)})].$$

Wyrażeń tych jest nieskończenie wiele, ponieważ nieskończenie wiele jest różnych symboli oznaczających typy, oraz ze względu na to, że k może przyjmować dowolną z wartości 1, 2, ...

Wszystkie te wyrażenia obejmujemy wspólną nazwą *perwników ekstensjonalności*.

Poprzednik wyrażenia (B) ma następujący sens intuicyjny: każdy układ przedmiotów, między którymi zachodzi relacja $x_1^{(c_1, \dots, c_k)}$, pozostaje także w relacji $x_2^{(c_1, \dots, c_k)}$ i na odwrót; inaczej mówiąc: *relacje $x_1^{(c_1, \dots, c_k)}$ i $x_2^{(c_1, \dots, c_k)}$ są zakresowo równe* (por. Rozdział V, § 2, str. 112).

Następnik wyrażenia (B) orzeka, że każda własność przysługująca relacji $x_1^{(c_1, \dots, c_k)}$ przysługuje też relacji $x_2^{(c_1, \dots, c_k)}$ i na odwrót; inaczej mówiąc: *relacje te są identyczne w myśl definicji Leibniza* (por. Rozdział V, § 1, str. 110).

Treść pewnika ekstensjonalności wyrazić więc można słowami w taki sposób: *relacje zakresowo równe są identyczne*.

W taki też sposób wprowadziliśmy pewnik ekstensjonalności w Rozdziale V (§ 2, str. 115). Dla $k=1$ należy wszędzie zamiast słowa *relacja* (dokładniej: *relacja k-członowa*) użyć słowa *zbiór*.

(C) Wyrażenia postaci

$$\sum_{x^{(c_1, c_2, \dots, c_k)}} \prod_{y^{c_1} z^{c_2} \dots u^{c_k}} [x^{(c_1, c_2, \dots, c_k)} (y^{c_1}, z^{c_2}, \dots, u^{c_k}) \equiv \Phi(y^{c_1}, z^{c_2}, \dots, u^{c_k})],$$

gdzie $\Phi(y^{c_1}, z^{c_2}, \dots, u^{c_k})$ jest dowolną funkcją zdaniową, w której $x^{(c_1, c_2, \dots, c_k)}$ nie jest zmienną wolną, a $y^{c_1}, z^{c_2}, \dots, u^{c_k}$ są zmiennymi wolnymi, i która może ponadto zawierać jeszcze inne zmienne wolne.

Wyrażenia te nazywamy *perwnikami definicyjnymi*.

Jest ich oczywiście też nieskończenie wiele.

Pewniki definicyjne stanowią pomost między funkcjami zdaniowymi a zbiorami i relacjami. Każdej funkcji zdaniowej o zmiennych wolnych $y^{c_1}, \dots, u^{c_k}$ odpowiada relacja k -członowa (lub zbiór, o ile $k=1$), która zachodzi między przedmiotami $y^{c_1}, \dots, u^{c_k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy przedmioty te spełniają daną funkcję zdaniową. Relacja ta jest przy tym *stała*, o ile rozważana funkcja zdaniowa nie zawiera żadnych zmiennych wolnych prócz $y^{c_1}, \dots, u^{c_k}$; w przeciwnym razie jest ona *zmienna*, zależna od parametrów (tak jak np. zbiór $\{x\} \{x < y\}$ zależy od parametru y).

(D) W niektórych rozważaniach przyjmuje się jeszcze jako tautologię pewnik nieskończoności, którego tu jednak wypisywać nie będziemy.

Z wyrażeń (A), (B), (C) i (D) wyprowadzamy twierdzenia, stosując reguły wnioskowania opisane szczegółowo w Rozdziale III (§ 3, str. 53-56).

Powstały w ten sposób system logiczny nazywamy *pełnym systemem prostej teorii typów*¹⁾.

Do wielu zastosowań wystarczają fragmenty tego systemu. Jeśli np. usunąć z opisanego systemu wszystkie zmienne rzędu wyższego od 1-go i wszystkie wyrażenia zawierające takie zmienne, to otrzymuje się system logiczny znany pod nazwą *rozszerzonego rachunku funkcyjnego* lub *rozszerzonego rachunku predykatów*.

Jeśli jeszcze bardziej ograniczyć zasób wyrażeń, usuwając wszystkie wyrażenia, w których występują zmienne 1-go rzędu jako zmienne związane, otrzymuje się t. zw. *węższy rachunek funkcyjny*.

Wreszcie, zachowując spośród zmiennych 1-go rzędu tylko zmienne typu (*), otrzymuje się t. zw. *jedno-argumentowy węższy rachunek funkcyjny*.

Aksjomaty ekstensjonalności znikają już w rozszerzonym rachunku funkcyjnym; w węższym rachunku funkcyjnym nie mamy ani aksjomatów ekstensjonalności, ani aksjomatów definicyjnych. W żadnym z tych systemów nie przyjmuje się pewnika nieskończoności.

Te fragmentaryczne systemy logiki są zbyt ubogie na to, by można na nich ugruntować całą matematykę. Mimo to wystarczają one w wielu razach do sformalizowania rozumowań matematycznych, a nadto stanowią same przez się interesujący temat do badań logicznych.

Bez trudności stwierdzamy, że wszystkie rozumowania przeprowadzone w Rozdziałach II-VII dają się przeprowadzić w pełnym systemie prostej teorii typów. Rozumowania te bowiem były

¹⁾ Opis tego systemu wzorowany jest na pracach A. Tarskiego, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, N° 34 (1935), rozdział V, oraz *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω -Widerspruchsfreiheit und ω -Vollständigkeit*, Monatshefte für Mathematik und Physik, tom 40 (1935), str. 97-112.

od początku formułowane z myślą dostosowania ich do wymagań zasady czystości typów. Poza odchyleniami typograficznymi — używaliśmy małych liter łacińskich jako zmiennych typu $*$, dużych liter $X, Y, \dots$ jako zmiennych typu $(*)$, liter $R, S, \dots$ jako zmiennych typu $(*,*)$ i liter gotyckich jako zmiennych typu $((*))$ — jedyną poważniejszą różnicą między systemem logicznym, jaki rozwijaliśmy w poprzednich rozdziałach, a pełnym systemem prostej teorii typów jest brak w tym ostatnim definicji i symbolów abstrakcji $\wedge$. Wiemy jednak z Rozdziału V (§ 3, str. 118), że symbole abstrakcji i definicje są zasadniczo zbędne: każda funkcja zdaniowa, napisana przy pomocy symboli zdefiniowanych, daje się przekształcić na równoważną funkcję zdaniową, nie zawierającą tych symboli. Wnosimy stąd, że cała teoria, wyłożona w Rozdziałach II-VII, mieści się w pełnym systemie prostej teorii typów ¹⁾.

Żadna z antynomii, omówionych w § 2, nie daje się wysłowić w pełnym systemie prostej teorii typów. Przy wysłowieniu antynomii Russell'a używać musimy wyrażenia: *własność, przysługująca samej sobie*, co wzorem napisać możemy tylko jako $x^c(x^c)$. Wyrażenie to nie jest jednak funkcją zdaniową; jest ono w pełnym systemie logicznym prostej teorii typów pozbawione sensu. Co do antynomii zbioru wszystkich zbiorów, to wystarczy zauważyć, że w systemie prostej teorii typów nie można opisać zbioru wszystkich zbiorów, a tylko zbiór wszystkich zbiorów pewnego typu; klasa jego podzbiorów jest typu wyższego niż on sam, nie jest więc bynajmniej prawdą, że jest ona w tym zbiorze zawarta. Przeciwnie, zdanie wyrażające taką myśl, byłoby pozbawione sensu, gdyż nie byłoby funkcją zdaniową tego kształtu, jaki opisaliśmy wyżej. W podobny sposób znika z systemu antynomia Burali-Forti'ego i wszelkie inne znane antynomie.

A nieznane? Jeśli z aksjomatów usuniemy pewnik nieskończoności, to otrzymamy system, o którym można bez trudności dowieść, że jest niesprzeczny, t. j. że żadna antynomia nie będzie

¹⁾ Teoretycznie rzecz biorąc, należało wykład logiki rozpocząć od podanych dopiero teraz określeń funkcji zdaniowej oraz tautologii. Uniknęlibyśmy wówczas operowania w poprzednich Rozdziałach niesprecyzowanym pojęciem funkcji zdaniowej. Autor sądzi jednak, że taki układ materiału uczyniłby wykład mało zrozumiałym dla początkującego czytelnika i dlatego wołał umieścić ścisłą definicję funkcji zdaniowej dopiero tu, gdzie pojawia się wyraźna potrzeba jej posiadania.

nigdy w nim znaleźlibna ¹⁾. Dołączenie pewnika nieskończoności powoduje znaczne komplikacje w dowodzie niesprzeczności, a w pewnym sensie czyni nawet taki dowód niemożliwym, jak to wyjaśnimy bliżej w Rozdziale XI, § 4. Wydaje się w każdym razie mało prawdopodobne, aby pełny system prostej teorii typów wraz z pewnikiem nieskończoności miał zawierać sprzeczność.

Pełny system prostej teorii typów można więc uznać za jedno z możliwych rozwiązań zagadnienia, polegającego na zbudowaniu systemu logiki, który byłby dostatecznie obszerny, by można było w nim uprawiać matematykę, a który jednocześnie nie prowadziłby do żadnej ze znanych antynomii.

Wspomnieliśmy już w § 2, str. 212-213, że pełny system prostej teorii typów nie jest jedynym możliwym systemem logicznym, odpowiadającym dwu tym wymaganiom. Zasadę czystości typów odczuwa się nieraz jako zbyt krępującą i z tego powodu poszukuje się innego ugruntowania podstaw logiki.

Wymienimy tu kilka niedogodności, wypływających z przyjęcia zasady czystości typów.

Osobliwym i nienaturalnym zjawiskiem w systemach opartych na teorii typów jest t. zw. *systematyczna wieloznaczność pojęć*.

Objaśnimy ją na przykładzie relacji inkluzji. Relację tę określić możemy zarówno dla zbiorów typu $(*)$, jak dla zbiorów typu $((*))$, jak dla zbiorów typu $((*,*))$ i t. d. W systemie opartym na teorii typów musimy odróżniać relację inkluzji typu $((*),((*))$ od relacji inkluzji typu $((*),((*),((*))$), od relacji inkluzji typu $((*),((*),((*),((*))$) i t. d. Dla każdej z tych relacji musimy podać odrębną definicję i przeprowadzać odrębne dowody. Zarówno forma definicji, jak i przebieg dowodu jest za każdym razem prawie taki sam; jedyną różnicą leży w tym, że zmienne pewnego typu zastąpić trzeba zmiennymi innego typu. Podobnie, wszystkie inne pojęcia, w szczególności liczby naturalne, stają się systematycznie

¹⁾ Dowód tego znaleźć można w pracach: A. Tarski, *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω -Widerspruchsfreiheit und der ω -Vollständigkeit*, Monatshefte für Mathematik und Physik, tom 40 (1933), str. 97-112, E. W. Beth, *Une démonstration de la non-contradiction de la logique des types au point de vue fini*, Nieuw Archief voor Wiskunde, tom 19 (1936), str. 59-62, G. Gentzen, *Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik*, Mathematische Zeitschrift, tom 41 (1936), str. 357-366.

wieloznaczne, wskutek czego — jak zauważyliśmy już w Rozdziale VII (§ 5, str. 176) — do liczenia zbiorów trzeba używać innych liczb naturalnych niż do liczenia ich elementów. Jest to oczywiście sytuacja sztuczna, wyczuwamy bowiem dobrze, że mamy do czynienia z jedną relacją inkluzji, jednym pojęciem liczby i t. p. i tylko dla zadośćuczynienia zasadzie czystości typów podzieliśmy te jednorodne pojęcia na wiele szczególnych przypadków.

Nawet pojęcie zbioru pustego jest systematycznie wieloznaczne: zbiór pusty typu $(*)$ jest czymś różnym od zbioru pustego typu np. $((*)$). Jeśli pierwszy z nich oznaczmy symbolem 0, a drugi symbolem $\wedge$, to różnica zachodząca między nimi uwidoczni się w tym, że funkcja zdaniowa $x^* \in 0$ jest fałszywa (t. zn. nie spełniona przez żaden przedmiot), podczas gdy wyrażenie $x^* \in \wedge$ nie jest w ogóle funkcją zdaniową lecz bezsensownym zestawieniem znaków, nie może być więc ani prawdziwe, ani fałszywe. Natomiast wyrażenie $x^{(*)} \in \wedge$ jest funkcją zdaniową (fałszywą).

Nieco innym niepożądanym skutkiem zasady czystości typów jest niemożność rozważania własności, przysługujących zarówno indywiduom jak zbiorom indywiduów, zbiorom takich zbiorów i t. d. Nie widać żadnego rozsądnego powodu, który uniemożliwiałby rozpatrywanie zbiorów, zawierających jako elementy przedmioty każdego z następujących typów:

$*, (*), ((*)), (((*))), \dots$

Nadto zbiory takie potrzebne są w wielu konstrukcjach matematycznych. Nie używając ich, nie podobna udowodnić istnienia liczby kardynalnej $\aleph_0$ albo też liczby

$$\aleph_0 + 2^{\aleph_0} + 2^{2^{\aleph_0}} + \dots$$

Znamy w tej chwili wiele systemów, które są bardziej «liberalne» niż system oparty na prostej teorii typów; żaden z nich jednak nie jest zupełnie wolny od pewnych ujemnych cech, występujących już w pełnym systemie prostej teorii typów¹⁾.

¹⁾ Por. książki Fraenkla i Quine'a cytowane na str. 213.

Z drugiej strony, zasada czystości typów jest przez wielu uczonych uważana jeszcze za zbyt «liberalną», gdyż nie wyłącza rozumowań, które wydają się tym uczonym z pewnych względów nieuzasadnione¹⁾.

Widać stąd, że zagadnienie podstaw logiki dalekie jest w tej chwili od ostatecznego rozstrzygnięcia. Wydaje się, że zanim rozstrzygnięcie to nastąpi, będziemy musieli poddać głębszej analizie nasze intuicje, dotyczące pojęć zbioru i relacji. Dopiero po tym będziemy mogli dokonać wyboru spośród wielu możliwych systemów logicznych, które są niejako językami, służącymi do zapisywania i uzasadniania twierdzeń o zbiorach i relacjach. Wybierzemy oczywiście ten język, w którym intuicje dotyczące zbiorów i relacji znajdują najwierniejszy wyraz.

Nie jest zresztą wyłączone, że nigdy nie dojdzie w tej sprawie do jednomyślności. Pojęcia zbioru i relacji nie są bowiem dane w otaczającej nas przyrodzie, lecz są wytworem ludzkiego umysłu i mogą być w różny sposób precyzowane w zależności od naszych potrzeb i naszej woli. Antynomie logiczne są pouczające właśnie przez to, że dowodzą, jak dalece nieokreślone są nasze intuicje dotyczące tych pojęć, nie przesądzają one jednak możliwości takiego lub innego ich precyzowania.

Jest wobec tego prawdopodobne, że dyskusje zagadnień związanych z antynomiami doprowadzą ostatecznie do stworzenia różnych systemów logicznych, w których pewne zagadnienia matematyczne znajdować będą różne odpowiedzi.

ĆWICZENIE. Napisać pewnik nieskończoności (Rozdział VII, § 5, wzór (29), str. 184) za pomocą wyrażeń dopuszczalnych w pełnym systemie prostej teorii typów.

¹⁾ Idzie tu w pierwszym rzędzie o uczonych, nie uznających t. zw. rozumowań *nieefektywnych* lub *niekonstruktywnych*. Bliższe dane znajdzie czytelnik np. w cytowanej na str. 213 książce Fraenkla lub w książce: M. Black, *The nature of mathematics. A critical survey*, Londyn-New York 1953. Por. też w związku z końcowymi uwagami tego Rozdziału pracę: K. Gödel, *Russell's mathematical logic*, umieszczoną w zbiorowym dziele *The philosophy of Bertrand Russell*, Evanston-Chicago 1944, str. 123–153.