CZĘŚĆ PIERWSZA

ROZDZIAŁ I

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

§ 1. Wstęp. Jedną z najbardziej charakterystycznych cech nauk matematycznych jest możność przeprowadzania na ich terenie dowodów, to znaczy możność wyprowadzania jednych twierdzeń z drugich, o których prawdziwości przekonaliśmy się już dawniej, bądź też które umownie przyjmujemy za punkt wyjścia.

Wyprowadzanie jednych zdań z innych, czyli tak zwane *rozumowanie dedukcyjne,* gra wielką rolę również w naukach doświadczalnych, mianowicie przy wyprowadzaniu wniosków z hipotez. Im więcej można z hipotezy wyprowadzić wniosków zgodnych z doświadczeniem, tym bardziej prawdopodobna staje się ta hipoteza. Natomiast obalenie hipotezy wymaga wykazania, że z hipotezy tej wynika wniosek sprzeczny z doświadczeniem. Widać stąd, że i w naukach przyrodniczych przeprowadza się często wnioskowanie dedukcyjne, chociaż nie ma ono dla tych nauk tak doniosłego znaczenia jak dla matematyki.

Zarówno matematyka jak nauki przyrodnicze używają rozumowania dedukcyjnego jako instrumentu. Dla matematyka celem dowodu jest uzasadnienie nowego, dotąd nieznanego faktu, dla empiryka zaś rozumowanie dedukcyjne jest potrzebne do obalenia lub utwierdzenia hipotezy.

Ani więc matematyka, ani tym mniej nauki empiryczne nie studiują natury samego rozumowania dedukcyjnego. Nauka, która studium takie stawia sobie za zadanie, nosi nazwę *logiki.*

Potrzeba logiki zjawia się dość późno w psychice rozwijającego się umysłu i nie wszyscy odczuwają jej potrzebę jednakowo mocno. Wielu najwybitniejszych nawet uczonych nie zna wcale lub prawie wcale logiki, co nie przeszkadza im z maestrią uprawiać matematykę lub inne nauki. Wynika to stąd, że rozumowania dedukcyjne składają się z szeregu kolejnych bardzo prostych wnioskowań, tak zwanych kroków dowodowych, które same w sobie są niezmiernie oczywiste, tak oczywiste, że nieraz nie dostrzegamy nawet niektórych z nich. Trzeba dopiero pewnego kontemplacyjnego i filozoficznego nastawienia, by dostrzec problem, polegający na poznaniu i usystematyzowaniu tych wszystkich prostych rozumowań, z których zbudowany jest każdy dowód, a także na uświadomieniu sobie, skąd właściwie bierze się ich oczywistość.

Rozwiązanie tego problemu ma niewątpliwie duże znaczenie filozoficzne. Człowiek, który poznał logikę, patrzy na matematykę inaczej i nieraz głębiej niż matematyk, który nie zna logiki i wyczuwa prawa logiczne tylko intuicją. Z góry jednak przestrzec musimy czytelnika, że studium logiki nie ułatwi mu wynajdywania dowodów nowych twierdzeń matematycznych, ani rozwiązywania zadań. Student, który przebrnął przez kurs logiki, zyska za to gruntowną wiedzę o matematyce, nie stanie się jednak automatycznie lepszym matematykiem.

Sformułowane wyżej zadanie logiki jest zarówno zadaniem uprawianej dawniej tak zwanej *logiki tradycyjnej*, która datuje się jeszcze od czasów Arystotelesa, jak i logiki młodszej, znajdującej się obecnie w stadium szybkiego rozwoju i zwanej *logiką matematyczną* albo *logistyką*. Logikę matematyczną łączy z matematyką fakt, że stworzona ona została przez matematyków dla potrzeb matematyki, a mianowicie dla wyjaśnienia niektórych zagadnień z podstaw tej nauki.

Zasadniczo jednak zadanie logiki matematycznej nie jest różne od zadania logiki po prostu i wyniki logiki matematycznej można stosować też poza matematyką. Zastosowaniami takimi nie będziemy się jednak zajmowali, lecz ograniczymy się do wyłożenia tych działów logiki, których związek z matematyką jest bliski i bezpośredni.

W Części pierwszej będziemy studiowali rachunek logiczny, tzn. umiejętność przekształcania jednych zdań w drugie tak, aby zawsze od zdania prawdziwego przejść do zdania prawdziwego. W Części drugiej zajmiemy się analizą różnych ogólnych pojęć matematycznych. Analiza ta ma dla logiki znaczenie kapitalne, jest bowiem jasne, że nie sposób badać, skąd bierze się prawdziwość

pewnych zdań, gdy nie rozumie się znaczenia pojęć, występujących w tych zdaniach.

Dzięki wynikom, zawartym w dwu pierwszych Częściach, uzyskamy pewien zwarty pogląd na istotę teorii matematycznych i wyjaśni się nam choć w części fakt, który od dawna zdumiewał filozofów: mianowicie absolutna pewność twierdzeń matematycznych.

W Części trzeciej zajmiemy się wreszcie zbadaniem różnych własności teorii matematycznych i dowodów matematycznych. Rozumowania tego rodzaju noszą trafną nazwę meta-matematycznych (to znaczy poza-matematycznych). Chociaż są to rozumowania dedukcyjne, to jednak nie należą one do matematyki: matematyka jest przedmiotem tych rozumowań, podobnie jak liczby są przedmiotem rozumowań arytmetyki.

§ 2. Zmienne. Funkcje zdaniowe. Z matematyką, tak jak z każdą nauką, zapoznajemy się przez czytanie podręczników lub słuchanie wykładów, a więc ostatecznie przez zrozumienie pewnych zdań. W zdaniach, służących do wypowiadania myśli matematycznych, występują pewne wyrażenia, których w mowie potocznej bądź nie używamy wcale, bądź używamy ich w innym sensie. Dlatego rozpoczniemy od objaśnienia pewnych pojęć natury właściwie gramatycznej.

Wiadomo z gramatyki, że rzeczowniki są to nazwy przedmiotów. Np. słowo *Warszawa* jest nazwą pewnego miasta. Analogiczne rzeczowniki występują również w języku matematyki. Np. symbole $0, 1, 10, {}^1/_2, \pi$ i t. d. są nazwami pewnych liczb. Używamy jednak w matematyce i innych symboli. Np. w dobrze znanym wzorze

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

litery a i b nie są nazwami żadnych konkretnych liczb. Możemy w tym wzorze zastąpić litery a i b nazwami dowolnych liczb[1])

[1]) Czytelnik wolałby może mówić o zastępowaniu liter a i b po prostu liczbami, nie nazwami liczb. Zwrot taki byłby jednak wtedy tylko poprawny, gdyby liczby były istotnie znakami napisanymi na papierze.

Dyskusji zagadnienia, czym są liczby, poświęcony będzie Rozdział VII; tu zauważymy tylko, że istnieje wiele znaków dla oznaczania jednej i tej samej liczby, np. „10“, „$\sqrt{100}$“, „2+8“ i t. d.

Następujący przykład objaśni może najlepiej, dlaczego mówimy o podstawianiu *nazw liczb* za litery a i b, a nie o podstawianiu *liczb*. Od funkcji zdai otrzymamy wtedy zdania prawdziwe, np.:

$$(1+2)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot 2 + 2^2, \qquad (1+\pi)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot \pi + \pi^2.$$

Podobnie w nierówności

$$a > 2$$

litera a nie jest nazwą żadnej konkretnej liczby. Zastępując „a" nazwami różnych liczb, otrzymamy zdania prawdziwe lub fałszywe:

$$1 > 2, \qquad \pi > 2, \qquad 10 > 2.$$

Znaki takie jak „a" i „b" w podanych przykładach nazywamy *zmiennymi*. Są to więc symbole, z których możemy budować wyrażenia, mające postać zdań i przechodzące w zdania, gdy zmienne zastąpimy nazwami konkretnych przedmiotów. Wyrażenia, zawierające zmienne i mające postać zdań, nazywamy *funkcjami zdaniowymi*. Zamiast „funkcja zdaniowa" matematycy mówią często „wzór" albo „warunek" [1]).

W zależności od rodzaju przedmiotów, których nazwy można podstawiać za zmienne, mówimy o zmiennych liczbowych, punktowych i t. d. Mówiąc, że zmienna *przebiega* dany zbiór przedmiotów, mamy na myśli to, że zamiast tej zmiennej można w funkcjach zdaniowych podstawiać nazwy przedmiotów z tego zbioru. Tak np. w rozpatrzonych przykładach funkcji zdaniowych zmienne a i b przebiegają zbiór liczb rzeczywistych. Zmienne a, b i c, występujące w funkcji zdaniowej

a, b i c leżą na jednej linii prostej,

---

niowej *x jest kwiatem* przechodzimy do zdania *róża jest kwiatem*, podstawiając za „x" słowo *róża*, a nie kładąc na miejsce „x" oryginalnej róży. Za literę podstawiamy więc nazwę przedmiotu, a nie przedmiot.

Pisząc o symbolach, zdaniach i — ogólnie — o pewnych utworach językowych, używać musimy ich nazw. Nazwę symbolu lub zdania tworzymy, ujmując ów symbol lub zdanie w cudzysłów lub poprzedzając jednym ze słów: *znak, zdanie, wyrażenie* (czasem też: *zmienna, stała, litera* i t. d.).

Sprawę odróżniania znaków od ich nazw omówimy dokładniej w Rozdziale XII, § 2. Jak ważną jest ta sprawa, niechaj świadczy choćby fakt, że znakomita książka: W. V. O. Quine, *Mathematical Logic*, New York 1940, zawiera 14 stronic o cudzysłowach i pseudo-cudzysłowach — i to już w pierwszym rozdziale.

[1]) To określenie pojęcia funkcji zdaniowej jest jeszcze bardzo prymitywne. Zobaczymy w Rozdziale VIII, § 2, że niezbędne jest posiadanie dokładnej definicji tego pojęcia. Podanie jej już teraz byłoby jednak przedwczesne; dlatego poprzestajemy na razie na tym krótkim objaśnieniu.

przebiegają zbiór punktów. W funkcji zdaniowej

wielokąt W ma n przekątnych

występują dwie zmienne: zmienna W, przebiegająca zbiór wielokątów, i zmienna n, przebiegająca zbiór liczb naturalnych.

W dawniejszych podręcznikach objaśniano nieraz zmienne liczbowe jako t. zw. liczby ogólne, które w odróżnieniu od t. zw. liczb szczegółowych mogą przyjmować rozmaite wartości [1]). Poglądy te są z gruntu fałszywe. Jeśli ograniczymy się np. do liczb naturalnych, to uznać musimy, że nie ma innych liczb naturalnych prócz liczb szczegółowych $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Znaczek n, występujący we wzorach matematycznych, nie jest nazwą żadnej innej liczby naturalnej, ogólnej, różnej od liczb szczegółowych; nie jest on wogóle nazwą żadnej liczby, lecz symbolem ułatwiającym nam zapisanie praw odnoszących się do wszystkich liczb t. zw. szczegółowych, dzięki temu, że za symbol ten możemy podstawiać nazwy dowolnych liczb.

Funkcję zdaniową, w której występują zmienne (ściślej: zmienne wolne, p. Rozdział III, § 1, str. 45) $x, y, \ldots, u$, będziemy oznaczać schematycznie symbolem $\Phi(x, y, \ldots, u)$ lub $\Psi(x, y, \ldots, u)$ lub $\Theta(x, y, \ldots, u)$ i t. p.

Funkcja zdaniowa, w odróżnieniu od zdania, nie jest ani prawdziwa, ani fałszywa. Dopiero po podstawieniu na miejsce zmiennych pewnych nazw przedmiotów (ze zbioru, który przebiegają te zmienne) otrzymujemy zdanie, które jest prawdziwe lub fałszywe. Gdy jest prawdziwe, mówimy, że przedmioty, których nazwami zastąpiliśmy zmienne, *spełniają* daną funkcję zdaniową. Tak np. liczby 3 i 5 spełniają funkcję zdaniową $5x - 3y = 0$, nie spełniają zaś funkcji zdaniowej $6x - 3y = 1$.

Istnieją funkcje zdaniowe, spełniane przez każdy układ przedmiotów (ze zbioru, który przebiegają występujące w tych funkcjach zmienne). Przykładów dostarczają nam t. zw. równości i nierówności bezwarunkowe, np. $x^2 + 1 > 0$, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ i t. p. Istnieją też funkcje zdaniowe nie spełniane przez żaden

---

[1]) Objaśnienie takie znajduje się m. in. u L. Eulera, *Introductio in analysin infinitorum* (1748) [*Opera omnia*, Lipsk — Berlin, serja 1, tom 8 (1922)]: „Quantitas constans est quantitas determinata perpetuo eundem valorem servans. Quantitas variabilis est quantitas indeterminata seu universalis, quae omnes omnino valores determinatos in se complectitur" (str. 17).

układ przedmiotów, np. $x^2+1<0$. Można takie funkcje zdaniowe nazywać prawdziwymi lub fałszywymi na równi ze zdaniami.

Dobrze znanym przykładem funkcji zdaniowych są równania liczbowe. Rozwiązanie równania polega na znalezieniu wszystkich liczb, spełniających tę funkcję zdaniową.

Funkcje zdaniowe, których zmienne przebiegają zbiór liczb rzeczywistych, dają się interpretować geometrycznie. Rozpatrzmy np. funkcję zdaniową o trzech takich zmiennych $\Phi(x, y, z)$. Odnieśmy przestrzeń do układu współrzędnych prostokątnych i rozpatrzmy te punkty, których współrzędne a, b i c spełniają funkcję zdaniową Φ. Punkty te tworzą pewien zbiór, który uważany być może za *obraz geometryczny (wykres)* funkcji zdaniowej Φ. Analogiczna interpretacja jest oczywiście możliwa i dla funkcji zdaniowych, zawierających jedną lub dwie zmienne, a także dla funkcji zdaniowych o dowolnej liczbie zmiennych, o ile zdecydujemy się na wprowadzenie przestrzeni wielowymiarowych do naszych rozważań.

Przytoczona tu interpretacja geometryczna jest dobrze znana z geometrii analitycznej.

ĆWICZENIA. 1. Podać obrazy geometryczne funkcji zdaniowych:

$$x>y, \qquad x=y, \qquad x^2+y^2+z^2\leqslant 1, \qquad x\neq y+z.$$

2. Jaki jest obraz geometryczny funkcji zdaniowych

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2, \qquad x^2<0?$$

Ogólnie: jaki jest obraz geometryczny funkcji zdaniowej prawdziwej i fałszywej?

ROZDZIAŁ II

RACHUNEK ZDAŃ

Aby ustalić dokładnie sens zdań, wypowiadanych w matematyce, musimy ściśle umówić się co do treści takich słów jak *i*, *lub*, *jeśli* ..., *to* ... i niektórych innych, którymi bezustannie posługujemy się nie tylko zresztą w matematyce. Słowa te nazywają się w gramatyce spójnikami międzyzdaniowymi. W logice matematycznej nazywa się je także *funktorami zdaniotwórczymi*, gdyż służą one do tworzenia nowych zdań ze zdań już uprzednio utworzonych. Rola tych funktorów w logice jest więc podobna do roli, jaką w arytmetyce gra np. znak $+$, który pozwala utworzyć nazwę nowej liczby z dwu dowolnie danych nazw liczb.

Podobnie, jak w arytmetyce okazało się pożyteczne wprowadzenie zmiennych, przebiegających zbiór liczb, tak i w logice przy omawianiu funktorów zdaniotwórczych pożytecznym jest wprowadzić zmienne, przebiegające zbiór wszystkich zdań i funkcji zdaniowych. Jako takich zmiennych używamy liter $p, q, r, \ldots$; nazywamy je *zmiennymi zdaniowymi*.

Opiszemy teraz funktory najczęściej spotykane w praktyce.

§ 1. Negacja. Jest to funktor o jednym argumencie, t. zn. pozwalający utworzyć z jednego danego zdania lub funkcji zdaniowej p nowe zdanie lub funkcję zdaniową *nie p*. Pisać będziemy „p'" zamiast „*nie p*". Negację rozumieć należy w ten sposób, że jeśli p jest zdaniem prawdziwym, to p' jest zdaniem fałszywym i na odwrót. Używając zera jako symbolu fałszu, a jedności jako symbolu prawdy, możemy przebieg rozpatrywanego funktora opisać równościami:

$$0'=1, \qquad 1'=0. \tag{1}$$

Jeśli zamiast zmiennej podstawimy do wyrażenia p' funkcję zdaniową $\Phi(x, y, \ldots, u)$, to otrzymamy nową funkcję zdaniową

$\Phi'(x, y, ..., u)$. Nie należy w tym wypadku mówić, że ta nowa funkcja zdaniowa jest prawdziwa lub fałszywa w zależności od tego, czy funkcja zdaniowa Φ była fałszywa lub prawdziwa; wiemy bowiem, że funkcja zdaniowa nie jest ani prawdziwa, ani fałszywa. Jeśli jednak podstawimy za zmienne, występujące w funkcji zdaniowej Φ, nazwy konkretnych przedmiotów, spełniających tę funkcję zdaniową, to Φ' przejdzie przy tym podstawieniu w zdanie fałszywe. Jeśli zaś przedmioty, których nazwy zostały wstawione zamiast zmiennych, nie spełniają Φ, to Φ' przechodzi w zdanie prawdziwe.

Wynika stąd, że wykres funkcji zdaniowej $\Phi'(x, y, ..., u)$ składa się z tych i tylko tych punktów, które nie należą do wykresu funkcji zdaniowej $\Phi(x, y, ..., u)$.

§ 2. Koniunkcja. Jest to funktor dwu-argumentowy, t. zn. pozwalający utworzyć nowe zdanie lub funkcję zdaniową z dwu danych zdań lub funkcji zdaniowych. Koniunkcję zdań (funkcji zdaniowych) p i q zapisujemy wzorem $p \cdot q$ i czytamy: p *i* q. Zamiast *koniunkcja* mówimy nieraz *iloczyn logiczny*; same p i q nazywamy *czynnikami* koniunkcji lub iloczynu logicznego.

Sens koniunkcji określają równości:

(2) $0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$

Koniunkcja dwu zdań jest więc prawdziwa, gdy obydwa jej czynniki są prawdziwe. Jeśli zaś jeden z czynników lub też obydwa czynniki są fałszywe, to koniunkcja jest fałszywa. Umowa ta zgadza się całkowicie z potocznym znaczeniem spójnika *i*.

Koniunkcja dwu funkcji zdaniowych jest znowu funkcją zdaniową. Po podstawieniu nazw przedmiotów zamiast występujących w niej zmiennych otrzymamy zdanie prawdziwe tylko wtedy, gdy wskutek tego podstawienia obydwa czynniki koniunkcji przejdą w zdania prawdziwe.

Koniunkcji można, podobnie jak i negacji, nadać treść geometryczną. Zacznijmy od przypadku najprostszego: koniunkcji dwu funkcji zdaniowych $\Phi(x,y) \cdot \Psi(x,y)$ o tych samych zmiennych, przebiegających zbiór liczb rzeczywistych. Punkt o współrzędnych a, b należy do wykresu funkcji zdaniowej $\Phi(x,y) \cdot \Psi(x,y)$, gdy liczby a i b spełniają zarówno funkcję zdaniową $\Phi(x,y)$, jak i funkcję zdaniową $\Psi(x,y)$. Wykres koniunkcji $\Phi(x,y) \cdot \Psi(x,y)$ jest więc częścią wspólną (iloczynem) wykresów poszczególnych czynników.

Załóżmy teraz, że czynniki koniunkcji mają różne zmienne, np. $\Phi(x,y) \cdot \Psi(x,y,z) \cdot \Theta(z)$. Niech A, B, C oznaczają wykresy funkcji zdaniowych Φ, Ψ i Θ; A jest więc zbiorem płaskim, B przestrzennym, a C liniowym. Wykres W całej koniunkcji jest zbiorem przestrzennym, gdyż koniunkcja ta zawiera trzy zmienne. Punkt (a,b,c) należy do W, gdy: punkt (a,b) należy do A, i punkt (a,b,c) do B, i punkt c do C. Utwórzmy teraz zbiór A^* tych punktów przestrzeni, których rzut na płaszczyznę (x,y) należy do A, oraz zbiór C^{**} tych punktów przestrzeni, których rzut na oś z należy do C. Mówimy, że zbiór A^* powstaje ze zbioru A przez *walcowanie* (utworzenie walca) równolegle do osi z, zaś zbiór C^{**} ze zbioru C przez walcowanie równolegle do osi x i y. Z podanych określeń wynika odrazu, że W jest częścią wspólną zbiorów A^*, B i C^{**}.

Ogólnie: wykresem koniunkcji dwu lub wielu funkcji zdaniowych jest część wspólna wykresów poszczególnych czynników, z tym jednak, że należy uprzednio przez operację walcowania zrównać liczbę wymiarów przestrzeni, w których położone są te zbiory.

§ 3. Alternatywa. Jest to funktor zdaniotwórczy o dwu argumentach, odpowiadający słowu *lub* z języka potocznego. Słowo to jest w języku potocznym używane na równi ze słowem *albo* w dwu różnych znaczeniach. Stwierdzając prawdziwość zdania *p lub q* możemy mieć na myśli fakt, że tylko jedno ze zdań p, q jest prawdziwe, a drugie fałszywe, lub też fakt, że co najmniej jedno ze zdań p, q jest prawdziwe, przy czym nie wyłączamy przypadku, w którym obydwa te zdania są prawdziwe. Np. w poprzednim zdaniu użyliśmy słowa lub (nie wydrukowanego kursywą) w pierwszym z tych dwu znaczeń. Przykładem na użycie *lub* w drugim znaczeniu jest np. zdanie: *student słuchał wykładu logiki lub czytał podręcznik z tego zakresu.*

W logice i matematyce używamy słowa *lub* w drugim z omówionych znaczeń. Funktor odpowiadający pierwszemu z omówionych znaczeń słowa *lub* nosi nazwę nierównoważności albo alternatywy wyłączającej i nie gra tej roli, có zwykła alternatywa.

Alternatywę nazywamy także *sumą logiczną* i zapisujemy wzorem $p + q$; tu p i q są *składnikami* alternatywy. Jak wynika z podanych objaśnień, przebieg alternatywy dany jest równościami:

(3) $0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 1.$

Wynika z nich w szczególności, że np. zdania:

$$2\cdot 2=5 \text{ lub } 3\cdot 2=6, \qquad 2\cdot 2=4 \text{ lub } 3\cdot 2=6$$

są oba prawdziwe.

W języku potocznym zdań takich na ogół nie używamy, nie ma bowiem potrzeby stwierdzania alternatywy dwu zdań, skoro o jednym z nich wiemy, że jest prawdziwe: wystarczy przecież stwierdzić po prostu prawdziwość tego właśnie zdania. W matematyce trafia się jednak często taka sytuacja, że udowodniliśmy prawdziwość alternatywy, a nie wiemy, który z dwu składników prawdziwość alternatywy, a nie wiemy, który z dwu składników jest zdaniem prawdziwym; wówczas nie mamy tej alternatywy jest zdaniem prawdziwym; wówczas nie mamy możności zastąpienia alternatywy żadnym z jej składników.

Podobna sytuacja powstaje, gdy składniki alternatywy są funkcjami zdaniowymi. Np. funkcja zdaniowa:

x jest liczbą parzystą lub dwie ostatnie cyfry liczby x^2, napisanej w układzie dziesiętnym, tworzą liczbę niepodzielną przez 4

jest niewątpliwie prawdziwa, t. zn. jest spełniona przez każdą liczbę naturalną x. Ani jednak pierwszy, ani drugi składnik tej alternatywy nie może zastąpić całej alternatywy.

Należy się tu wzmianka o znanej z arytmetyki funkcji zdaniowej $a\geqslant b$, którą czytamy: *a jest większe od b lub a jest równe b.* W myśl przyjętego znaczenia alternatywy, zdania $1\geqslant 1$, $2\geqslant 1$ i t. p. należy uznać za prawdziwe.

Łatwo sprawdzić, że wykres alternatywy dwu funkcji zdaniowych składa się z wszystkich punktów, należących do wykresu jednego składnika i z wszystkich punktów, należących do wykresu drugiego składnika. Jeśli przestrzenie, w których położone są wykresy poszczególnych składników, nie mają tej samej liczby wymiarów, należy uprzednio zrównać te liczby przez operację walcowania, podobnie jak w przypadku koniunkcji.

§ 4. Implikacja. Implikację o *poprzedniku p* i *następniku q* określamy jako $p'+q$, t. j. słowami: *nie-p lub q.* Symbolicznie wyrażamy implikację wzorem: $p\rightarrow q$. Z podanych w § 1 i § 3 wzorów wynikają z łatwością równości:

(4) $\quad 0\rightarrow 0=1, \qquad 0\rightarrow 1=1, \qquad 1\rightarrow 0=0, \qquad 1\rightarrow 1=1.$

Implikacja jest więc fałszywa, jeśli jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy; we wszystkich innych przypadkach implikacja jest prawdziwa. Wynika stąd również, że układ przed-

miotów spełnia implikację, której poprzednik i następnik są funkcjami zdaniowymi, o ile przedmioty te nie spełniają poprzednika lub o ile spełniają następnik. Prowadzi to do następującej geometrycznej interpretacji implikacji: jeśli wykresem poprzednika jest A, wykresem zaś następnika B, to wykresem całej implikacji jest zbiór, złożony z B i z punktów nie należących do A. O ile A i B nie leżą w tej samej przestrzeni, należy uprzednio zrównać liczby wymiarów obu przestrzeni przez operację walcowania.

Zamiast „implikacja" mówimy też często *„okres warunkowy"*, zamiast „poprzednik" — *„założenie"*, zamiast „następnik" — *„teza"*.

Przyjęte jest odczytywać wzór $p\rightarrow q$ jako: *jeśli p, to q.* Jest to bardzo niefortunne, gdyż sens wyrażenia *jeśli ..., to ...* w języku potocznym jest odmienny. Wypowiadając w języku potocznym zdanie: *jeśli p, to q,* chcemy zazwyczaj wyrazić taki fakt: między zdaniami p i q zachodzi pewna zależność, na mocy której zdanie q może być wyprowadzone ze zdania p (z pomocą ogólnie przyjętych prawideł myślenia, określeń i t. d.). Dlatego też skłonni jesteśmy uznać za prawdziwe zdania:

jeśli kwadrat pewnej liczby jest dodatni, to liczba ta jest różna od 0,

jeśli dziś jest sobota, to jutro jest niedziela;

natomiast zdania:

jeśli $2+2$, *to* $2\cdot 3=6$, $\qquad$ *jeśli* $2\cdot 2=5$, *to* $2\cdot 3=7$

uznalibyśmy za zdania pozbawione sensu. Wszystkie te zdania musimy jednak uznać za prawdziwe, jeśli chcemy być w zgodzie z objaśnionym wyżej znaczeniem implikacji.

Wobec tej rozbieżności znaczeń funktora $\rightarrow$ i wyrażenia *jeśli ..., to ...* z języka potocznego, byłoby lepiej odczytywać wzór $p\rightarrow q$ inaczej, np. *q, chyba, że nie-p.* Zwyczaj odczytywania wzoru $p\rightarrow q$ jako *jeśli p, to q* jest jednak tak silnie zakorzeniony, że trudno byłoby zwalczać go systematycznie.

Doniosłość implikacji tłumaczy się następującą jej własnością: następnik implikacji musi być prawdziwy, jeżeli cała implikacja oraz jej poprzednik są prawdziwe. Jest to t. zw. *reguła odrywania* (zob. Rozdział III, § 3, str. 53, operacja odrywania). Dzięki temu stwierdzanie prawdziwości okresu warunkowego może służyć do uzasadnienia prawdziwości tezy, o ile wiemy skądinąd, że założenie jest prawdziwe. Mimo więc, że funktor $\rightarrow$

nie odpowiada pojęciu wynikania jednego zdania z drugiego gra on ważną rolę przy zapisywaniu i dowodzeniu twierdzeń.

Zauważmy wreszcie, że jeśli zdanie q daje się wyprowadzić przy pomocy poprawnego rozumowania ze zdania p, to zdanie $p \to q$ jest prawdziwe. Istotnie, jeśli zdanie p jest fałszywe, to okres warunkowy $p \to q$ jest prawdziwy na mocy wzorów (4). Jeśli zaś zdanie p jest prawdziwe, to i q jest zdaniem prawdziwym, gdyż ze zdań prawdziwych wyprowadzić się dają tylko zdania prawdziwe, o ile rozumujemy poprawnie. Zatem implikacja $p \to q$ jest i w tym wypadku prawdziwa.

Próbowano budować rachunek zdań tak, by implikacja pokrywała się z intuicyjnym znaczeniem wyrażenia *jeśli ..., to ...*, t. zn. by zdanie $p \to q$ było prawdziwe tylko wtedy, gdy q jest konsekwencją zdania p. Dla odróżnienia używano w tych systemach terminu *implikacja ścisła* [1]). Istotna różnica między implikacją ścisłą a funktorem $\to$ tu rozpatrywanym leży w tym, że implikacji ścisłej niepodobna opisać przy pomocy równości takiego typu jak (1)-(4), prawdziwość bowiem zdania p *implikuje ściśle* q zależy nie tylko od prawdziwości lub fałszywości zdań p i q, lecz także od ich sensu. Zdanie prawdziwe może być przecież konsekwencją pewnego, a nie być konsekwencją innego zdania prawdziwego. Z tego względu próby zbudowania logiki, operującej implikacją ścisłą, natrafiają na znaczne trudności i wolno wątpić, czy ogłoszone dotychczas wyniki rozwiązują zagadnienie całkowicie. Powstałe w ten sposób systemy logiczne są zresztą interesujące same przez się.

ĆWICZENIE. Z urny, w której znajdują się kartki papieru z wypisanymi w równej liczbie zdaniami prawdziwymi i fałszywymi o najrozmaitszej treści, wyciągnięto na chybił trafił dwie kartki ze zdaniami p i q. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jedna z implikacji: $p \to q$ i $q \to p$ okaże się prawdziwa; jakie, że obie te implikacje okażą się prawdziwe; jakie, że obie okażą się fałszywe?

Odp.: 1, $^1/_2$, 0 [2]).

§ 5. Równoważność. Jest to znów funktor dwu-argumentowy, którego symbolem jest „$\equiv$". Wyrażenie $p \equiv q$ odczytujemy: p *jest równoważne* q lub też p *wtedy i tylko wtedy, gdy* q. Sens równoważności wyjaśniają wzory:

$$(5) \qquad 0 \equiv 0 = 1, \qquad 0 \equiv 1 = 0, \qquad 1 \equiv 0 = 0, \qquad 1 \equiv 1 = 1.$$

Równoważność dwu zdań jest więc prawdziwa wtedy, gdy oba te zdania są fałszywe, oraz wtedy, gdy oba te zdania są

[1]) „*strict implication*". System taki wyłożony jest w książce C. I. Lewis i C. H. Langford, *Symbolic Logic*, New York 1932, Rozdział VI.

[2]) Por. tamże str. 145.

prawdziwe — krótko: gdy oba zdania mają tę samą *wartość logiczną*. Natomiast równoważność dwu zdań o różnych wartościach logicznych jest fałszywa. Widoczne jest stąd, że równoważność gra w logice taką samą rolę, co równość w arytmetyce.

Układ przedmiotów spełnia funkcję zdaniową $\Phi(x, y, ..., u) \equiv \Psi(x, y, ..., u)$, bądź jeśli spełnia on obie funkcje zdaniowe Φ i Ψ, bądź jeśli nie spełnia żadnej z nich. Wynika stąd, że wykres funkcji zdaniowej $\Phi \equiv \Psi$ otrzymamy z wykresów A i B funkcji zdaniowych Φ i Ψ, ujednostajniając najpierw liczby wymiarów przez operację walcowania, a następnie biorąc część wspólną zbiorów A i B i dołączając do niej te punkty, które nie należą ani do A, ani do B.

§ 6. Uwaga, dotycząca symboliki. Podana tu symbolika logiczna nie jest bynajmniej jedyną, będącą w użyciu. Niemal każdy podręcznik logiki stosuje inną symbolikę. Dla zorientowania czytelnika podajemy zestawienie najczęściej używanych symboli dla funktorów zdaniotwórczych wraz z nazwiskami autorów, od których dana symbolika w zasadzie pochodzi:

	Negacja	Alternatywa	Koniunkcja	Implikacja	Równoważność
Schröder Peirce	p'	$p+q$	$p \cdot q$	$p \to q$	$p \equiv q$
Peano Russell	$\sim p$ [1])	$p \vee q$ [2])	$p.q$	$p \supset q$ [3])	$p \equiv q$
Hilbert	$\overline{p}$	$p \vee q$	$p \,\&\, q$	$p \to q$	$p \sim q$
Łukasiewicz	Np	Apq	Kpq	Cpq	Epq

ĆWICZENIA. 1. Podać wykresy funkcji zdaniowych:

$$(x<y)\cdot(y<z), \qquad (x<y)+(x=y), \qquad (x=y)+(x \neq y).$$

2. Jaki jest wykres funkcji zdaniowej $(\Phi \equiv \Psi)'$, jeśli wykresami funkcji Φ i Ψ są A i B?

3. Implikację $p \to q$ odczytuje się nieraz jako: p *jest warunkiem dostatecznym na to, by* q, lub jeszcze: q *jest warunkiem koniecznym na to, by* p. Uzasadnić ten sposób czytania implikacji.

[1]) Znak $\sim$ jest zniekształconą literą N (od *nego* = przeczę).

[2]) Znak $\vee$ jest zniekształconą literą V (od *vel* = lub).

[3]) Znak $\supset$ powstał z odwróconej litery C (początkowa litera francuskiego słowa *contenir* = zawierać). Por. G. Peano, *Formulaire de Mathématique*, tom 3, Turyn 1901, str. 5.

§ 7. Dalsze funktory zdaniotwórcze. Związki między funktorami. Funktory, omówione w §§ 1-5 nie wyczerpują listy wszystkich możliwych funktorów zdaniotwórczych. Wynika to choćby z rozważania równości takiego typu jak równości (1)-(5). Możemy z łatwością podać inne układy takich równości, każdy zaś układ określa pewien funktor zdaniotwórczy o jednym lub dwu argumentach.

Łatwo stwierdzamy, że istnieją 4 różne układy takich równości, określających funktory jednoargumentowe, i 16 układów, określających funktory dwuargumentowe. Zamiast wypisywać te równości, zestawimy je w postaci następujących tabliczek:

	0	1
A_1	0	0
A_2	0	1
A_3	1	0
A_4	1	1

	0,0	0,1	1,0	1,1	
B_1	0	0	0	0	
B_2	0	0	0	1	kon.
B_3	0	0	1	0	
B_4	0	1	0	0	
B_5	1	0	0	0	
B_6	0	0	1	1	$(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$
B_7	0	1	0	1	
B_8	1	0	0	1	równ
B_9	0	1	1	0	$(\alpha_1 \wedge \sim\alpha_2) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha$
B_{10}	1	0	1	0	
B_{11}	1	1	0	0	
B_{12}	0	1	1	1	alter.
B_{13}	1	0	1	1	
B_{14}	1	1	0	1	implik
B_{15}	1	1	1	0	dysjunkcja
B_{16}	1	1	1	1	

A_1-A_4 są funktorami jednoargumentowymi, B_1-B_{16} — dwuargumentowymi. W wierszach poziomych podane są wartości logiczne zdań $A_i(p)$ dla p, przyjmujących odpowiednio wartości 0 i 1, oraz zdań $B_j(p, q)$ dla p, q równych odpowiednio 0,0, 0,1, 1,0 i 1,1.

A_3 jest negacją, B_2 — koniunkcją, B_8 — równoważnością, B_{12} — alternatywą i B_{14} — implikacją.

Dowolny funktor zdaniotwórczy F, np. dwuargumentowy, pokrywa się z jednym z funktorów B_1-B_{16}, o ile przyjmiemy, że wartość logiczna zdania $F(p, q)$ zależy tylko od wartości logicznej argumentów p i q. Funktory tego rodzaju nazywamy *ekstensjonalnymi*. B_1-B_{16} są to więc wszystkie funktory ekstensjonalne dwuargumentowe. Podobnie A_1-A_4 są to wszystkie funktory ekstensjonalne jednoargumentowe.

W języku potocznym spotykamy wiele wyrażeń, mających charakter funktorów zdaniotwórczych, a nie posiadających cechy ekstensjonalności. Jako przykład służyć może wyrażenie

(6) *myślę, że p.*

Podstawiając zamiast „p" dowolne zdanie, otrzymamy z (6) zdanie. Wyrażenie *myślę, że* jest więc w (6) funktorem zdaniotwórczym o jednym argumencie. Wartość logiczna wyrażenia (6) zależy jednak nie tylko od wartości logicznej zdania p, lecz od jego sensu: mogę przecież myśleć o jednym zdaniu prawdziwym, a nie myśleć o innym. Innym funktorem zdaniotwórczym nie-ekstensjonalnym jest implikacja ścisła (por. § 4).

Funktorami nie-ekstensjonalnymi zajmować się nie będziemy, nie grają one bowiem żadnej roli w matematyce, ani w ogóle w naukach ścisłych. Istnieje pogląd, na którego poparcie można przytoczyć wiele argumentów, że każdą myśl, napisaną przy pomocy funktorów nie-ekstensjonalnych, można wyrazić przy pomocy funktorów ekstensjonalnych[1]).

Mówiąc w dalszym ciągu o funktorach, mieć będziemy na myśli tylko funktory ekstensjonalne.

Funktory, wprowadzone w §§ 2-5, nie są od siebie niezależne. Widzieliśmy to już na przykładzie implikacji, którą określiliśmy jako $p' + q$. Pojęcie implikacji jest więc zasadniczo zbędne, każde wyrażenie napisane przy pomocy implikacji może być też napisane przy pomocy alternatywy i negacji.

[1]) R. Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, Wiedeń 1934, str. 200.

Udowodnimy, że *wszystkie funktory, wprowadzone w §§ 2-5, mogą być zdefiniowane przy pomocy alternatywy i negacji.* Koniunkcja może być określona jako $(p'+q')'$, implikacja — jako $p'+q$, równoważność — jako $[(p'+q)'+(q'+p)']'$. Dla dowodu obliczamy na mocy równości (1) i (3) wartości logiczne podanych wyrażeń, gdy p i q przyjmują wartości 0 i 1, i stwierdzamy, że otrzymane wartości zgadzają się z wartościami podanymi w równaniach (2), (4) i (5). Dla przykładu przeprowadzimy ten rachunek dla równoważności, przyjmując, że p ma wartość 1, a q — wartość 0:

$$[(1'+0)'+(0'+1)']'=[(0+0)'+(1+1)']'=(0'+1')'=(1+0)'=1'=0.$$

Z innych ważnych związków między funktorami wymienimy następujący: *równoważność* $p\equiv q$ *określić można jako koniunkcję* $(p\to q)\cdot(q\to p)$. Równoważność dwu zdań oznacza więc obustronną implikację między p i q.

Na uwagę zasługuje fakt, że *istnieją funktory dwuargumentowe, które same przez się wystarczają do zdefiniowania wszystkich innych funktorów ekstensjonalnych.* Jednym z takich funktorów jest funktor B_{15}, odkryty przez logika amerykańskiego Sheffera[1]) i nazwany przez niego *dyzjunkcją*. Przyjęte jest pisać „$p|q$" zamiast „$B_{15}(p,q)$". Z tabliczki podanej na str. 14 wnosimy, że

$$(7)\qquad 0|0=1,\qquad 0|1=1,\qquad 1|0=1,\qquad 1|1=0;$$

wzór $p|q$ czytać więc można: *nie p lub nie q.*

Z (7) wnosimy z łatwością, że p' można określić jako $p|p$, a $p+q$ jako $(p|p)|(q|q)$. Wynika stąd, że koniunkcja, implikacja i równoważność dają się zdefiniować przy pomocy dyzjunkcji.

Innym funktorem, posiadającym tę samą własność co dyzjunkcja, jest funktor B_5, nazwany przez Łukasiewicza *jednoczesnym zaprzeczeniem*. Negację określić można jako $B_5(p,p)$, a alternatywę jako $B_5(B_5(p,q), B_5(p,q))$.

ĆWICZENIA. 1. Zdefiniować alternatywę za pomocą 1° negacji i koniunkcji, 2° negacji i implikacji.

2. Wykazać, że za pomocą negacji i równoważności nie podobna zdefiniować alternatywy.

[1]) H. M. Sheffer, *A set of five independent postulates for Boolean algebras, with an application to logical constans*, Transactions of the American Mathematical Society 14 (1913), str. 481-488.

Wsk.: Wykazać, że funktory $B_1, B_6, B_{11}, B_7, B_{10}, B_9, B_8$ i B_{16} dają się zdefiniować za pomocą negacji i równoważności oraz że dla i i j, przyjmujących dowolne spośród wartości 1, 6-11 i 16, zarówno $[B_i(p,q)]'$ jak $B_i(p,q)\equiv B_j(p,q)$ jest znów jednym z tych funktorów. Poza funktorami B_1, B_6-B_{11} i B_{16} nie podobna więc przy pomocy negacji i równoważności określić żadnego innego.

3. Udowodnić, że za pomocą żadnego z funktorów B_i (gdzie $i\neq 5, 10, 11, 15$), nie można zdefiniować negacji.

Wsk.: Każde wyrażenie, zbudowane z funktora B_2 i zmiennych zdaniowych p, q i t.d. przyjmuje wartość 0, gdy wszystkim zmiennym nadamy wartość 0; wyrażenie to nie określa więc negacji. Dla pozostałych funktorów dowód jest podobny.

4. Poza B_5 i B_{15} żaden funktor dwuargumentowy nie wystarcza do zdefiniowania wszystkich innych funktorów jedno- i dwuargumentowych [1]).

Wsk.: W myśl ćw. 3 wystarczy okazać to dla funktorów B_{10} i B_{11}. Otóż oba te funktory dają się zdefiniować przy pomocy negacji i równoważności, a więc w myśl ćw. 2 nie wystarczają do zdefiniowania alternatywy [2]).

5. Zdefiniować funktory B_1-B_5 przy pomocy alternatywy i negacji.

6. Wykazać, że przy pomocy alternatywy i negacji można zdefiniować wszystkie funktory dwuargumentowe.

Wsk.: Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już pewien funktor F. Przyjmując

$$G_0(p,q)=B_1(p,q)+F(p,q)\cdot B'_5(p,q)\quad\text{oraz}\quad G_1(p,q)=B_5(p,q)+F(p,q)\cdot B'_5(p,q),$$

otrzymamy funktory, które dla argumentów 0,1, 1,0 i 1,1 mają te same wartości, co F, dla argumentów zaś 0,0 mają wartość 0 lub 1. W ten sposób można utworzyć funktor, który ma daną wartość dla argumentów 0,0, a wartości takie jak F dla innych argumentów. Podobnie wykazuje się, że można zmienić wartość F dla innych argumentów i dojść w ten sposób do dowolnego funktora.

7. Każdy funktor trójargumentowy ekstensjonalny można zdefiniować przy pomocy funktorów jedno- i dwuargumentowych [3]).

Wsk.: Dla funktora trójargumentowego F wartości funkcji $F(p,q,r\cdot r')$ i $F(p,q,r+r')$ zależą tylko od wartości p i q, a więc pokrywają się z wartościami pewnych funktorów dwuargumentowych B_i i B_j. Funkcję zdaniową $F(p,q,r)$ można więc zdefiniować jako $r'\cdot B_i(p,q)+r\cdot B_j(p,q)$. W podobny sposób można wykazać, że wszystkie funktory n-argumentowe ekstensjonalne dają się zdefiniować przy pomocy funktorów jedno- i dwuargumentowych.

Zagadnienia, poruszone w ćwiczeniach 1-7 z natury swej należą raczej do kombinatoryki niż do logiki.

[1]) E. Żyliński, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), str. 203-209.

[2]) W związku z ćwiczeniami 2-4 por. książkę: E. L. Post, *The two-valued iterative systems of mathematical logic*, Annals of Mathematic Studies Nr. 5, Princeton 1941, w której badane są bardzo ogólnie zagadnienia definiowania jednych funktorów przez drugie.

[3]) E. L. Post, *Introduction to a general theory of elementary propositions*, American Journal of Mathematics 43 (1921), str. 163-185. Uogólnienie wyniku ćwiczenia 7 na t. zw. logiki n-wartościowe podaje W. Sierpiński, Fundamenta Mathematicae 33 (1945), str. 169-173.

§ 8. Tautologie rachunku zdań. Jeśli dwa zdania (lub funkcje zdaniowe lub zmienne zdaniowe) połączymy którymkolwiek z funktorów zdaniotwórczych, opisanych w §§ 2-7, otrzymamy nowe bardziej skomplikowane wyrażenia, które z kolei łączyć możemy funktorami zdaniotwórczymi i t. d. Dla uniknięcia wieloznaczności należy przed połączeniem dwu wyrażeń funktorem ująć każde z nich w nawias.

Od zmiennych zdaniowych dochodzimy w ten sposób np. do wyrażeń

$$(p)' + [(q) \rightarrow (r)], \qquad [(p) + (q)] \equiv \{(r) \rightarrow [(s) \cdot (p)]\} \qquad \text{i t. p.}$$

Wyrażenia, które w opisany sposób powstają ze zmiennych zdaniowych, nazywają się *wyrażeniami sensownymi* rachunku zdań. Są to funkcje zdaniowe, tym różniące się od funkcji zdaniowych, opisanych w Rozdziale I, że występują w nich zmienne zdaniowe, nie zaś zmienne, przebiegające zbiór liczb.

Ujmowanie wyrażeń w nawiasy przed połączeniem ich funktorem zdaniotwórczym jest niezbędne, gdyż w przeciwnym razie nie wiedzielibyśmy np. czy wzór $p + q \cdot r$ ma oznaczać $(p + q) \cdot r$, czy $p + (q \cdot r)$. Z drugiej strony, zbytnie nagromadzanie nawiasów utrudnia odczytywanie wzorów. Przyjmiemy zatem następujące reguły, które pozwolą znacznie zredukować liczbę nawiasów:

1. Pojedynczej zmiennej nigdy nie ujmujemy w nawias.
2. Jeśli negujemy zmienną lub wyrażenie, które samo jest negacją, to wyrażenia tego nie ujmujemy w nawias.
3. Każdy z funktorów $+$, $\equiv$, $\rightarrow$, $\cdot$ i $'$ wiąże mocniej, niż poprzedzający.

Ostatnia reguła ma następujące znaczenie: w wyrażeniu, zawierającym zmienne oraz funktory $+$, $\equiv$, $\rightarrow$, $\cdot$ i $'$, należy najpierw ująć w nawias wyrażenia zanegowane, potem wyrażenia, między którymi stoi funktor $\cdot$, potem wyrażenia, między którymi stoi funktor $\rightarrow$, potem wyrażenia, między którymi stoi funktor $\equiv$, a dopiero na końcu wyrażenia, między którymi stoi funktor $+$.

Podobną regułę przyjmujemy też zazwyczaj w arytmetyce: piszemy np. „$a + b \cdot c$" zamiast „$a + (b \cdot c)$"; nawias jest zbędny, gdyż znak mnożenia wiąże mocniej niż znak dodawania. Zatem np. wyrażenie $p + q \equiv r$ rozumieć należy jako $p + (q \equiv r)$, wyrażenie $p \rightarrow q + r \cdot s$ — jako $(p \rightarrow q) + (r \cdot s)$, a wyrażenie $p + (q \cdot r)'$ — jako $p + ((q \cdot r)')$.

W literaturze logicznej spotykamy i inne sposoby unikania nawiasów. Bardzo rozpowszechniony jest zwyczaj używania kropek zamiast nawiasów. Tak np. zamiast wzoru $[(p+q) \rightarrow r] \rightarrow s$ piszemy

$$p+q \cdot \rightarrow r : \rightarrow s,$$

t. zn. nie stawiamy żadnej kropki między znakami, stojącymi w jednym i tym samym nawiasie okrągłym, stawiamy jedną kropkę między znakami, przedzielonymi nawiasem okrągłym, dwie — między znakami, przedzielonymi nawiasem kwadratowym i t. p. Zgodnie z tym sposobem wzór

$$(p \rightarrow q) \rightarrow \{(p \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q+r)]\}$$

pisze się w postaci

$$p \rightarrow q \cdot \rightarrow : \cdot p \rightarrow r \cdot \rightarrow : p \rightarrow \cdot q + r.$$

Aby uniknąć niedogodności, wynikającej z podwójnej roli kropki jako nawiasu i znaku koniunkcji, można wtedy koniunkcję oznaczać np. znakiem $\times$ lub w ogóle pomijać znak koniunkcji [1]).

Jeszcze inny sposób pozbywania się nawiasów polega na wypisywaniu funktora przed argumentami, a więc np. „$+pq$" zamiast „$p+q$". Podany poprzednio wzór można wtedy napisać jako

$$\rightarrow \rightarrow pq \rightarrow \rightarrow pr \rightarrow p + qr.$$

Łatwo dowieść, że jest tylko jeden sposób odczytania tego wyrażenia [2]).

Weźmy teraz pod uwagę dowolne wyrażenie sensowne i zastąpmy występujące w nim zmienne w sposób dowolny symbolami 0 i 1, pamiętając jednak o tym, żeby ta sama zmienna, występująca w danym wyrażeniu wielokrotnie, zastąpiona była na wszystkich miejscach tym samym symbolem [3]). Posługując się wzorami (1)-(5), możemy obliczyć wartość logiczną, jaką dane wyrażenie przyjmuje po tym podstawieniu. Jeśli wartością tą jest zawsze 1 bez względu na to, w jaki sposób zastąpiliśmy zmienne

[1]) Inny sposób zastępowania nawiasów kropkami omawia H. B. Curry, *On the use of dots as brackets in logical expressions*, Journal of Symbolic Logic 2 (1937), str. 26-28. Pomysł używania kropek zamiast nawiasów pochodzi od G. Peano, *Arithmetices principia nova methodo exposita*, Turyn 1889.

[2]) Ta beznawiasowa symbolika (zwana przez logików amerykańskich polską) pochodzi od J. Łukasiewicza; zob. jego *Elementy logiki matematycznej* (skrypt autoryzowany, opracował M. Pressburger), Warszawa 1929. Łukasiewicz pisze konsekwentnie znak negacji przed zmienną (por. tabelkę na str. 13).

[3]) Ściśle rzecz biorąc, różne egzemplarze tej samej litery, występujące w wyrażeniu sensownym, nie są tą samą, lecz taką samą literą, mają jednakowy kształt. Dlatego też poprawniej byłoby powiedzieć, że równokształtne zmienne zastępujemy równokształtnymi symbolami. Będziemy jednak w dalszym ciągu unikali neologizmu „równokształtny".

wartościami 0 i 1, to mówimy, że dane wyrażenie jest *tautologią* albo *prawem logicznym.*

Pisać będziemy krótko „$\vdash A$", zamiast „wyrażenie A jest tautologią".

Tautologie są to więc takie wyrażenia sensowne, które przechodzą zawsze w zdania prawdziwe, o ile zmienne zastąpimy zdaniami. Prawdziwość czy fałszywość tych zdań nie ma przy tym żadnego wpływu na prawdziwość tautologii. Jeśli zmienne występujące w tautologii zastąpimy funkcjami zdaniowymi (wciąż pamiętając o tym, aby ta sama zmienna była zastąpiona zawsze tą samą funkcją zdaniową), to otrzymamy funkcję zdaniową prawdziwą, t. zn. spełnioną przez każdy układ przedmiotów (por. Rozdział I, § 2, str. 6).

Od najdawniejszych czasów głównym zadaniem logiki było poszukiwanie formalnych kryteriów prawdziwości zdań, inaczej mówiąc — poszukiwanie i badanie zdań, o których prawdziwości przekonać się można z samej budowy zdania (a nie przez odwoływanie się np. do faktów doświadczalnych, wiary i t. p.).

Tautologie logiczne dają nam możność budowania takich właśnie zdań i na tym polega ich doniosłe znaczenie. Zobaczymy w dalszym ciągu, że w rozumowaniach matematycznych powołujemy się bezustannie na różnorodne tautologie, chociaż czynimy to na ogół nieświadomie.

Na mocy podanego określenia tautologii możemy o każdym wyrażeniu sensownym rozstrzygnąć w skończonej liczbie kroków, czy jest ono tautologią. Musimy tylko dokonać wszelkich możliwych podstawień symbolów 0 i 1 za zmienne oraz sprawdzić, czy po dokonaniu redukcji na mocy wzorów (1)-(5) otrzymamy zawsze 1 jako ostateczny rezultat. Jeśli wyrażenie zawiera n zmiennych (różnych), to dokonać musimy 2^n podstawień. Tę metodę sprawdzania, czy dane wyrażenie jest tautologią, nazywamy *metodą zerowo-jedynkową.*

Stosując tę metodę, nie musimy zresztą zawsze dokonywać wszystkich 2^n podstawień. Jeśli np. badane wyrażenie sensowne jest implikacją, to wystarczy zbadać tylko takie podstawienia, przy których następnik otrzymuje wartość 0, pozostałe bowiem podstawienia nadadzą wyrażeniu napewno wartość 1. Podobnie przy badaniu alternatywy dwu wyrażeń można z góry wyłączyć podstawienia, przy których jeden ze składników otrzymuje wartość 1.

Zbadajmy np. wyrażenie

$$[(p \to q) \to p] \to p.$$

Mogłoby ono osiągnąć wartość 0 tylko wówczas, gdy za zmienną p wstawiamy wartość 0. Wówczas jednak implikacja $p \to q$ otrzymuje wartość 1, a więc poprzednik badanego wyrażenia przybiera wartość 0 i wartością całego wyrażenia jest 1. Wyrażenie to jest zatem tautologią.

ĆWICZENIA. 1. Sprawdzić, że wyrażenia:

$$p \to (q \to p) \quad \text{i} \quad \{[(p \equiv q) \equiv r] \equiv s\} \equiv \{s \equiv [p \equiv (q \equiv r)]\}$$

są tautologiami.

2. Jeśli $\vdash A$ i $\vdash A \to B$, to $\vdash B$ (reguła odrywania).

3. Jeśli $\vdash A$ i B powstaje z A przez zastąpienie zmiennej p (na każdym miejscu, gdzie występuje ona w A) wyrażeniem sensownym C, to $\vdash B$ (reguła podstawiania).

§ 9. Niektóre ważne tautologie.

§ 9. Niektóre ważne tautologie. Podamy tu kilka tautologii, które są doniosłe czy to ze względu na zastosowania, czy to ze względów historycznych lub filozoficznych. Sprawdzenie, że podane wyrażenia rzeczywiście są tautologiami, pozostawiamy czytelnikowi[1]).

1. Prawo sylogizmu warunkowego:

$$\vdash (p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)].$$

Z prawa tego czynimy bezustannie użytek przy wyprowadzaniu wniosków z pewnych założeń. Zanalizujmy np. rozumowanie następujące:

Jedno z praw arytmetyki orzeka, że wolno podnosić do kwadratu obie strony nierówności, o ile są one liczbami dodatnimi. Inne prawo mówi, że do obu stron nierówności wolno dodać jedną i tę samą liczbę. Wnosimy stąd, że jeśli $a > b > 0$, to $a^2 + c > b^2 + c$.

---

[1]) Jak wykazały badania historyczne J. Łukasiewicza, większość podanych tu tautologii znana była w starożytności (w greckiej szkole filozoficznej stoików) lub w średniowieczu. Popadły one jednak później w zapomnienie. Ponownie odkrył je i udostępnił nauce znakomity filozof angielski B. Russell w podstawowym dla logiki dziele: B. Russell i A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, tom 1, II wyd., Cambridge, 1925.

O historii logiki zdań poinformować się można z pracy: J. Łukasiewicz, *Z historii logiki zdań*, Przegląd filozoficzny 37 (1934), str. 417-437, oraz z przystępnie napisanej książki: H. Scholz, *Geschichte der Logik*, Berlin 1931.

Oparliśmy się tu właśnie na prawie sylogizmu warunkowego. Podstawiając bowiem w tym prawie za zmienne p, q i r odpowiednio wyrażenia $a > b > 0$, $a^2 > b^2$ i $a^2 + c > b^2 + c$, otrzymamy funkcję zdaniową prawdziwą

$$(a > b > 0 \to a^2 > b^2) \to$$
$$\to [(a^2 > b^2 \to a^2 + c > b^2 + c) \to (a > b > 0 \to a^2 + c > b^2 + c)].$$

Poprzednik tej implikacji jest prawdziwy na mocy pierwszego z przytoczonych praw arytmetyki, zatem prawdziwy musi być i następnik (gdyż implikacja o poprzedniku prawdziwym, a następniku fałszywym jest fałszywa). Otrzymujemy więc:

$$(a^2 > b^2 \to a^2 + c > b^2 + c) \to (a > b > 0 \to a^2 + c > b^2 + c).$$

I tu poprzednik jest prawdziwy na mocy drugiego z przytoczonych praw arytmetyki; wnosimy więc ostatecznie, że

(8) $$a > b > 0 \to a^2 + c > b^2 + c.$$

Przeprowadzony tu dowód wydać się może czytelnikowi niepotrzebnym pedantyzmem. Wynikanie prawa (8) z dwu wspomnianych praw arytmetycznych jest przecież »oczywiste«. Kto tak sądzi, niech lepiej nie studiuje logiki. Zadaniem tej nauki jest między innymi właśnie zbadanie, na czym polegają takie »oczywiste« przejścia i do jakich możliwie najprostszych procesów dają się one wszystkie zredukować.

2. Prawo transpozycji:

$$\vdash (p' \to q') \to (q \to p).$$

Tautologia ta znajduje szerokie zastosowanie przy t. zw. dowodach przez *sprowadzenie do niedorzeczności,* zwanych również *apagogicznymi.*

Schemat ogólny takich dowodów jest następujący: aby udowodnić implikację $q \to p$, staramy się z zaprzeczenia jej następnika, t. j. ze zdania p', wyprowadzić zdanie q' czyli zaprzeczenie poprzednika. Implikacja $p' \to q'$ jest wówczas prawdziwa, a ponieważ implikacja 2 jest prawdziwa dla dowolnych p i q, więc wnosimy stąd na mocy reguły odrywania (por. § 4, str. 11), że implikacja $q \to p$ musi też być prawdziwa.

Metodę dowodzenia przez sprowadzenie do niedorzeczności uzasadnia się nieraz intuicyjnie w taki sposób: przypuśćmy, że zachodzi q; gdyby nie zachodziło p, to na mocy udowodnionej implikacji $p' \to q'$ otrzymalibyśmy q' wbrew założeniu. Zatem musi

zachodzić p, a więc $q \to p$. To intuicyjne wyjaśnienie nie jest w gruncie rzeczy niczym innym, jak sprawdzeniem metodą zero-jedynkową, że prawo transpozycji jest tautologią.

Za przykład dowodu apagogicznego może służyć następujące rozumowanie.

Jeden z pewników geometrii orzeka, że przez dwa różne punkty nie mogą przechodzić dwie różne proste:

$(M \neq N) \to$ (*proste m i n, przechodzące przez M i N, są równe*).

Podstawmy w prawie transpozycji za zmienne p i q wyrażenia: $M = N$ i *proste m i n, przechodzące przez M i N, są różne.* Wobec tego, że zaprzeczeniem równości jest różność i na odwrót, otrzymamy po podstawieniu następujące zdanie prawdziwe:

$[(M \neq N) \to$ (*proste m i n, przechodzące przez M i N, są równe*)$] \to$
$\to [$(*proste m i n, przechodzące przez M i N, są różne*)$\to (M = N)]$.

Poprzednik jest zdaniem prawdziwym na mocy przytoczonego pewnika geometrycznego, zatem i następnik musi być zdaniem prawdziwym. Dochodzimy więc do twierdzenia, że dwie różne proste mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

Nieraz opieramy się na innych postaciach prawa transpozycji, a mianowicie:

2_1. $\vdash (p \to q') \to (q \to p')$, 2_2. $\vdash (p' \to q) \to (q' \to p)$,

2_3. $\vdash (p \to q) \to (q' \to p')$.

Mają one zastosowanie wówczas, gdy w implikacji, jaką zamierzamy udowodnić metodą sprowadzenia do niedorzeczności, następnik lub poprzednik, albo następnik i poprzednik, mają postać negacji.

Można też zapisać prawa transpozycji jako równoważności:

$$\vdash (p \to q) \equiv (q' \to p'), \qquad \vdash (p \to q') \equiv (q \to p'),$$
$$\vdash (p' \to q) \equiv (q' \to p).$$

Pierwsza z nich jest syntezą tautologii 2 i 2_3. Wiemy istotnie z § 7, str. 16, że równoważność określić można jako obustronną implikację między jej obu członami.

W związku z prawem transpozycji przyjęła się pewna terminologia. Jeśli implikację $p \to q$ nazwiemy *prostą,* to implikacja

$q \rightarrow p$ nosić będzie nazwę *odwrotnej*, $q' \rightarrow p'$ — *przeciwstawnej*, a $p' \rightarrow q'$ — *przeciwnej*. Prawa transpozycji orzekają zatem, że implikacja prosta i przeciwstawna są sobie równoważne, jak również implikacje odwrotna i przeciwna. Wynika stąd, że jeśli udowodniliśmy już jakieś twierdzenie proste, mające postać implikacji, to automatycznie wnosimy stąd o prawdziwości twierdzenia przeciwstawnego. Natomiast twierdzenie odwrotne może być fałszywe.

ĆWICZENIE. Podać przykłady takich zdań p i q, by:
1^0 implikacja prosta była prawdziwa i odwrotna prawdziwa;
2^0 implikacja prosta była prawdziwa, a odwrotna fałszywa;
3^0 implikacja prosta była fałszywa, a odwrotna prawdziwa;
4^0 obie implikacje były fałszywe.
Zbadać w każdym z przypadków 1^0-4^0 prawdziwość implikacji przeciwstawnej i przeciwnej.

3. Prawo Claviusa:

$$\vdash (p' \rightarrow p) \rightarrow p.$$

Ta ciekawa tautologia znajduje również zastosowanie w dowodach apagogicznych. Schemat rozumowania jest tu następujący.

Przyjmijmy, że mamy udowodnić twierdzenie p. W tym celu zakładamy, że p jest fałszywe, t. j. p' prawdziwe, i z tego założenia usiłujemy wyprowadzić samo zdanie p. O ile to się nam powiedzie, mamy dowód prawdziwości implikacji $p' \rightarrow p$, a stąd na mocy prawa Claviusa wynika prawdziwość zdania p.

Intuicyjnie uzasadnia się to rozumowanie zazwyczaj w taki sposób: gdyby nie było prawdziwe p, to byłoby prawdziwe p', a więc (na mocy założenia, że implikacja $p' \rightarrow p$ jest prawdziwa) otrzymalibyśmy wniosek, że p jest prawdziwe, wbrew założeniu. To intuicyjne rozumowanie nie jest znów niczym innym, jak sprawdzeniem prawa Claviusa metodą zerowo-jedynkową.

Od prawa Claviusa nie różni się istotnie tautologia

3_1. $$\vdash (p \rightarrow p') \rightarrow p',$$

którą stosujemy do podobnych celów w przypadku, gdy twierdzenie, jakiego chcemy dowieść, ma postać negacji.

Np. jeden z aksjomatów arytmetyki stwierdza, że jeśli x jest mniejsze od y, to y nie jest mniejsze od x:

(9) $$x < y \rightarrow (y < x)'.$$

Podstawmy w tautologii 3_1 za zmienną p funkcję zdaniową $x < x$. Poprzednik tautologii 3_1 stanie się wtedy szczególnym przypadkiem (dla $y = x$) aksjomatu (9), a więc otrzymamy

$$(x < x)'.$$

Zazwyczaj przeprowadza się ten dowód w następujący sposób: gdyby było $x < x$, to dla $y = x$ na mocy aksjomatu (9) otrzymalibyśmy $(x < x)'$. Zatem nie może być $x < x$. W tym „zatem" tkwi oczywiście nieświadome powołanie się na prawo Claviusa.

4. Prawo Dunsa Scotusa:

$$\vdash p' \rightarrow (p \rightarrow q).$$

Tautologii tej nie napotykamy na ogół w rozumowaniach matematycznych, jest ona jednak ciekawa sama przez się, gdyż pokazuje, że z dwu zdań sprzecznych (t. j. takich, że jedno jest negacją drugiego) można otrzymać dowolne zdanie.

Poincaré stwierdził empirycznie prawdziwość prawa Dunsa Scotusa. Pisze on: „P. Russell dochodzi do wniosku, że z jakiegokolwiek zdania fałszywego wynikają wszystkie zdania prawdziwe i fałszywe[1]). P. Couturat powiada, że wniosek ten wyda się na pierwszy rzut oka paradoksalny. Tymczasem wystarczy poprawić jakąkolwiek fałszywą rozprawę matematyczną, aby przekonać się, jak dalece miał rację p. Russell. Kandydat zadaje sobie często wiele trudu, aby znaleźć pierwsze równanie fałszywe; z chwilą jednak, gdy je otrzymał, jest już dla niego drobnostką nagromadzić rezultaty najbardziej zdumiewające, wśród których mogą być nawet i prawdziwe"[2]). Jest prawdo-

[1]) Słowo *wynikają* należy tu rozumieć w następującym sensie: jeśli ktokolwiek uzna z jakichkolwiek względów (np. wskutek własnej pomyłki) za prawdziwe zdanie, o którym skądinąd wiadomo, że jest fałszywe, to musi też uznać za prawdziwe dowolne inne zdanie. Słowo *wynikają* ma więc tu inne znaczenie, niż to, które mu zazwyczaj nadajemy w życiu codziennym (por. § 4, str. 12, uwagi o *strict implication*).

[2]) H. Poincaré, *Science et Méthode*, Paryż 1924, str. 173-174. Czasami udaje się ze zdania fałszywego wyprowadzić wniosek zupełniej nieoczekiwany, nie wyzyskując fałszywości tego zdania, jak wskazuje następująca anegdota, którą opowiadają o B. Russellu. Ktoś, zasłyszawszy o twierdzeniu, że ze zdania fałszywego można wyprowadzić wszystkie inne, prosi Russella, aby ze zdania $2 + 2 = 5$ wyprowadził wniosek, że on sam, Russell, jest papieżem. Russell odpowiada: „Odejmijmy od obu stron tej równości po 3; otrzymujemy $1 = 2$. Jeśli więc Pan twierdzi, że ja nie jestem papieżem, to papież i ja jesteśmy *dwiema* osobami. Zatem (wobec $2 = 1$) papież i ja jesteśmy jedną osobą". (Cyt. według G. Birkhoffa, *Lattice theory*, New York 1940, str. 125).

podobne, że rozumowania niefortunnych autorów, o których pisze P o i n c a r é, korzystały w mniej lub więcej ukrytej formie z prawa D u n s a S c o t u s a.

Oczywiście, prawdziwość prawa 4 związana jest ściśle z określeniem implikacji, a mianowicie z tą jej własnością, że jeśli poprzednik jest fałszywy, to cała implikacja jest prawdziwa bez względu na wartość następnika.

Z prawa 4 widzimy między innymi, jaką doniosłość ma postulat niesprzeczności: w żadnej nauce nie mogą być jednocześnie uznane za słuszne dwa zdania sprzeczne (mówimy o tym szerzej w Rozdziale XI, § 3). W przeciwnym bowiem razie, w myśl prawa 4, każde zdanie, jakie możemy w tej nauce wypowiedzieć, dawałoby się w niej automatycznie udowodnić, a więc nauka taka byłaby zupełnie nieciekawa i do niczego nie zdatna.

5. P r a w a p o d w ó j n e g o p r z e c z e n i a:

$$\vdash p \to p'', \qquad \vdash p'' \to p.$$

Negacja negacji dowolnego zdania jest więc równoważna samemu temu zdaniu:

$$\vdash p \equiv p''.$$

Z prawa tego skorzystaliśmy już w przykładzie podanym na str. 23, mówiąc, że zaprzeczeniem różności jest równość. Funkcja zdaniowa $M \neq N$ jest bowiem zdefiniowana jako $(M=N)'$, skąd wnosimy, że funkcja zdaniowa $(M \neq N)'$, jako negacja negacji, jest równoważna funkcji zdaniowej $M=N$.

6. P r a w o w y ł ą c z o n e g o ś r o d k a:

$$\vdash p + p'.$$

Z dwu zdań sprzecznych jedno (co najmniej) musi być prawdziwe; w niektórych zresztą przypadkach możemy nie wiedzieć, które.

Z prawa wyłączonego środka czynimy nieraz użytek w dowodzeniu, mianowicie wówczas, gdy rozróżniamy przypadki wzajemnie się wyłączające. Np. jeśli stwierdziliśmy, że liczby pierwsze mają pewną własność W, a liczby złożone — własność V, to jesteśmy pewni, że każda liczba ma bądź własność W, bądź własność V. Każda bowiem liczba jest albo pierwsza, albo złożona (czyli nie-pierwsza).

Opieramy się więc tutaj na prawie wyłączonego środka (oraz na prawie dodawania implikacji, p. str. 29).

Donioślejsze jednak niż te zastosowania do konkretnych dowodów są założenia, jakie tkwią u podstawy prawa wyłączonego środka, a jakich dyskusja uczyniła z tej tautologii najbardziej bodaj znane prawo logiczne.

Intuicyjna prawdziwość prawa wyłączonego środka płynie z naszej wiary w to, że każde zdanie jest albo prawdziwe, albo fałszywe (t. j. jego negacja prawdziwa); inaczej mówiąc — z wiary, że nie ma prócz wartości logicznych 1 i 0 (prawdy i fałszu) żadnej t r z e c i e j wartości (pośredniej). Tym tłumaczy się też nazwa *prawo wyłączonego środka*. Gdybyśmy przypuścili, że takie trzecie wartości logiczne istnieją, musielibyśmy zmienić określenie tautologii i odrzucić wiele praw logicznych. Zwłaszcza naturalnym byłoby odrzucenie prawa wyłączonego środka. Przyjmując definicję tautologii z § 8, stajemy na gruncie *logiki dwuwartościowej*, t. j. takiej, w której każde zdanie może być tylko albo prawdziwe, albo fałszywe. O próbach stworzenia innej logiki, różnej od dwuwartościowej, będzie mowa trochę obszerniej w § 13.

7. P r a w o s p r z e c z n o ś c i:

$$\vdash (p \cdot p')'.$$

Prawo to jest uzupełnieniem prawa wyłączonego środka. Z dwu zdań sprzecznych c o n a j m n i e j jedno musi być prawdziwe na mocy prawa wyłączonego środka. Prawo sprzeczności orzeka, że c o n a j w y ż e j jedno z nich może być prawdziwe. Ostatecznie więc dwa te prawa łącznie orzekają, że z dwu zdań sprzecznych prawdziwe jest d o k ł a d n i e jedno.

8. P r a w a d e M o r g a n a:

$$\vdash (p+q)' \equiv p' \cdot q', \qquad \vdash (p \cdot q)' \equiv (p'+q').$$

W myśl tych tautologii negacja alternatywy jest równoważna koniunkcji negacji, zaś negacja koniunkcji — alternatywie negacji.

PRZYKŁAD. Liczba n jest podzielna przez 6 (symbolicznie $6|n$) wtedy i tylko wtedy, gdy $2|n$ i $3|n$:

$$6|n \equiv (2|n) \cdot (3|n).$$

Na mocy pierwszego prawa d e M o r g a n a wynika stąd, że

$$(6|n)' \equiv [(2|n)' + (3|n)'],$$

t. zn. że liczba n nie jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy albo nie jest podzielna przez 2, albo nie jest podzielna przez 3.

Godna uwagi jest symetria budowy praw de Morgana. Jeśli zastąpimy w nich symbole alternatywy i koniunkcji wzajemnie przez siebie, to z pierwszego z praw de Morgana otrzymamy drugie i na odwrót.

§ 10. Tautologie algebro-logiczne. Symbole $+$ i $\cdot$ dla alternatywy i koniunkcji obrane zostały ze względu na szereg daleko idących analogii, zachodzących między działaniami logicznymi (tworzenia alternatywy i koniunkcji zdań) a działaniami arytmetycznymi (tworzenia sumy i iloczynu liczb)[1]). Rachunek zdań nazywano też pierwotnie *Algebrą logiki.* Oto kilka tautologii, ilustrujących te analogie.

9. Prawa łączności:

$$\vdash [p+(q+r)] \equiv [(p+q)+r], \qquad \vdash p\cdot(q\cdot r) \equiv (p\cdot q)\cdot r.$$

10. Prawa przemienności:

$$\vdash (p+q) \equiv (q+p), \qquad \vdash p\cdot q \equiv q\cdot p.$$

Z praw tych wnosimy, że w alternatywie (lub koniunkcji) wielu składników (czynników) porządek składników (czynników) i sposób łączenia ich w nawiasy jest obojętny. Z tego względu możemy alternatywę (lub koniunkcję) zdań $p_1, p_2, \ldots, p_n$ oznaczać po prostu symbolem $p_1+p_2+\ldots+p_n$ (lub $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n$), chociaż — ściśle rzecz biorąc — należy odróżniać zdanie np. $p_1+(p_2+p_3)$ od $(p_1+p_2)+p_3$.

11. Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$\vdash p\cdot(q+r) \equiv (p\cdot q+p\cdot r).$$

Jest to — jak widzimy — dokładny odpowiednik takiego samego prawa arytmetycznego. Jest rzeczą ciekawą, że w odróżnieniu od arytmetyki prawdziwe jest też następujące

12. Prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia:

$$\vdash (p+q\cdot r) \equiv (p+q)\cdot(p+r).$$

[1]) Na analogie te zwrócił pierwszy uwagę matematyk angielski G. Boole (1813-1864) w dziele *An investigation of the laws of thought,* Londyn 1854. Dzieło to otwiera epokę współczesnej logiki.

Prawdziwość tego prawa stwierdzamy, podobnie jak i wszystkich pozostałych praw, metodą zerowo-jedynkową.

13. Prawa tautologii:

$$\vdash (p+p) \equiv p, \qquad \vdash p\cdot p \equiv p.$$

W prawach tych zaznacza się wyraźna różnica między algebrą logiki a zwykłą algebrą. L. Couturat charakteryzuje tę różnicę powiedzeniem, że w algebrze logiki nie ma współczynników ani potęg.

14. Prawo dodawania implikacji:

$$\vdash (p\to q)\to[(p+r)\to(q+r)].$$

15. Prawo mnożenia implikacji:

$$\vdash (p\to q)\to(p\cdot r\to q\cdot r).$$

W dalszym ciągu skorzystamy jeszcze z następujących praw:

16. $\vdash p\to(p+q)$, $\qquad \vdash p\cdot q\to q$,

17. $\vdash (p\to q)\to[(p+q)\equiv q]$, $\qquad \vdash (p\to q)\to(p\cdot q\equiv p)$,

18. $\vdash (p\to q')\to[(p\cdot q+r)\equiv r]$.

Zgodnie z prawami 16 *suma logiczna jest słabsza niż każdy z jej składników, a iloczyn logiczny — mocniejszy niż każdy z jego czynników.* Prawa 17 pouczają, jak przekształcać sumę logiczną i iloczyn logiczny dwu zdań, z których jedno wynika z drugiego, mianowicie: *suma logiczna jest równoważna słabszemu składnikowi, a iloczyn logiczny — mocniejszemu czynnikowi.* Wreszcie prawo 18 stwierdza, że *w alternatywie można pominąć koniunkcję dwu zdań, z których jedno implikuje negację drugiego;* istotnie koniunkcja taka jest fałszywa, a więc nie zmienia wartości alternatywy.

Na zakończenie podamy jeszcze prawa:

19. $\vdash (p\equiv q)\to[(p+r)\equiv(q+r)]$, $\qquad \vdash (p\equiv q)\to(p\cdot r\equiv q\cdot r)$,

zwane *prawami ekstensjonalności* dla alternatywy i koniunkcji. Orzekają one, że zastąpienie w alternatywie (w koniunkcji) jednego ze składników (czynników) wyrażeniem równoważnym przeprowadza całą alternatywę (koniunkcję) na wyrażenie równoważne. Krócej: *obie strony równoważności można pomnożyć i do obu stron równoważności można dodać to samo wyrażenie.*

PRZYKŁAD. Zastosujemy poznane prawa algebro-logiczne do rozwiązania następującej nierówności:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-12}<0.$$

Opierając się na znanych prawach arytmetycznych i na prawach ekstensjonalności, otrzymujemy następujące równoważności [1]):

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-12}<0\equiv[(x^2+x-2<0)\cdot(x^2-x-12>0)+(x^2+x-2>0)\cdot(x^2-x-12<0)]\equiv$$
$$\equiv\{[(x-1)\cdot(x+2)<0]\cdot[(x+3)\cdot(x-4)>0]+[(x-1)\cdot(x+2)>0]\cdot[(x+3)\cdot(x-4)<0]\}\equiv$$
$$\equiv\{[(x-1<0)\cdot(x+2>0)+(x-1>0)\cdot(x+2<0)]\cdot[(x+3>0)\cdot(x-4>0)+(x+3<0)\cdot(x-4<0)]+$$
$$+[(x-1>0)\cdot(x+2>0)+(x-1<0)\cdot(x+2<0)]\cdot[(x+3>0)\cdot(x-4<0)+(x+3<0)\cdot(x-4>0)]\}\equiv$$
$$\equiv\{[(x<1)\cdot(x>-2)+(x>1)\cdot(x<-2)]\cdot[(x>-3)\cdot(x>4)+(x<-3)\cdot(x<4)]+$$
$$+[(x>1)\cdot(x>-2)+(x<1)\cdot(x<-2)]\cdot[(x>-3)\cdot(x<4)+(x<-3)\cdot(x>4)]\}.$$

Opieramy się teraz na prawach rozdzielności i wymnażamy sumy logiczne, stojące w nawiasach kwadratowych. Otrzymujemy wówczas następującą alternatywę:

$$(x<1)\cdot(x>-2)\cdot(x>-3)\cdot(x>4)+(x<1)\cdot(x>-2)\cdot(x<-3)\cdot(x<4)+$$
$$+(x>1)\cdot(x<-2)\cdot(x>-3)\cdot(x>4)+(x>1)\cdot(x<-2)\cdot(x<-3)\cdot(x<4)+$$
$$+(x>1)\cdot(x>-2)\cdot(x>-3)\cdot(x<4)+(x>1)\cdot(x>-2)\cdot(x<-3)\cdot(x>4)+$$
$$+(x<1)\cdot(x<-2)\cdot(x>-3)\cdot(x<4)+(x<1)\cdot(x<-2)\cdot(x<-3)\cdot(x>4).$$

Składniki tej alternatywy możemy uprościć, korzystając z tautologii 17. Np. pierwszy składnik $(x<1)\cdot(x>-2)\cdot(x>-3)\cdot(x>4)$ jest wobec twierdzenia arytmetycznego

$$(x>4)\ \rightarrow\ (x>-2)\cdot(x>-3)$$

równoważny koniunkcji $(x<1)\cdot(x>4)$, a więc w myśl praw ekstensjonalności można ten składnik zastąpić wyrażeniem $(x<1)\cdot(x>4)$. Upraszczając w podobny sposób pozostałe składniki, otrzymamy:

$$(x<1)\cdot(x>4)+(x<-3)\cdot(x>-2)+(x>4)\cdot(x<-2)+(x>1)\cdot(x<-3)+$$
$$+(x>1)\cdot(x<4)+(x<-3)\cdot(x>4)+(x<-2)\cdot(x>-3)+(x<-3)\cdot(x>4).$$

Wobec $(x<1)\ \rightarrow\ (x>4)'$ możemy z tej alternatywy na mocy prawa 18 opuścić pierwszy składnik. Tak samo wykażemy, że można opuścić składniki drugi, trzeci, czwarty, szósty i ósmy. Ostatecznie więc:

$$\left(\frac{x^2+x-2}{x^2-x-12}<0\right)\equiv\{(x>1)\cdot(x<4)+(x>-3)\cdot(x<-2)\}.$$

Oparliśmy się tutaj na tautologii [1]):

$$\vdash(p_1\equiv p_2\equiv\ldots\equiv p_n)\ \rightarrow\ (p_1\equiv p_n).$$

---

[1]) Przyjęte jest pisać

$$p_1\equiv p_2\equiv p_3\equiv\ \ldots\ \equiv p_n$$

zamiast

$$(p_1\equiv p_2)\cdot(p_2\equiv p_3)\cdot\ \ldots\ \cdot(p_{n-1}\equiv p_n).$$

ĆWICZENIA. 1. Wykazać, że następujące wyrażenia są tautologiami:

$p\rightarrow p$ (prawo tożsamości),

$(p\equiv q)\equiv[(q\equiv r)\equiv(p\equiv r)]$ (prawo sylogizmu warunkowego dla równoważności),

$(p\rightarrow q)\equiv(p\equiv p\cdot q),\quad (p\rightarrow q)\equiv[q\equiv(p+q)],\quad (p\rightarrow q)+(q\rightarrow p).$

2. Jeśli założenia dwu okresów warunkowych prawdziwych wyczerpują wszystkie możliwe przypadki, tezy zaś wyłączają się wzajemnie, to prawdziwe są okresy warunkowe odwrotne. Na jakim prawie rachunku zdań opiera się ta reguła?

Odp.: $\vdash(p\rightarrow q)\cdot(r\rightarrow s)\cdot(p+r)\cdot(q'+s')\rightarrow(q\rightarrow p)\cdot(s\rightarrow r).$

3. Uogólnić ćw. 2 na większą ilość okresów warunkowych. Podać przykłady z zakresu geometrii.

4. Funkcję zdaniową $a\leqslant b$ można określić albo jako $(a=b)+(a<b)$, albo jako $(a>b)'$. Na jakim prawie rachunku zdań opiera się równoważność tych funkcji zdaniowych?

Odp.: $\vdash(p+q)\cdot(p'+q')\rightarrow(p'\equiv q).$

5. Uogólnić prawa de Morgana na dowolną ilość składników (czynników).

§ 11. Postacie normalne. Metoda zerowo-jedynkowa pozwala zawsze sprawdzić, czy dane wyrażenie sensowne rachunku zdań jest tautologią. Zapoznamy się jednak i z inną metodą, która czasami łatwiej prowadzi do celu.

Definicja. Dwa wyrażenia sensowne rachunku zdań A i B nazywamy *inferencyjnie równoważnymi*, jeśli $\vdash A\equiv B$.

Twierdzenie 1. Jeśli A jest inferencyjnie równoważne B, to B jest inferencyjnie równoważne A; jeśli A jest inferencyjnie równoważne B, a B inferencyjnie równoważne C, to A jest inferencyjnie równoważne C; wreszcie, A jest inferencyjnie równoważne A.

Dowód. Ponieważ $\vdash(p\equiv q)\rightarrow(q\equiv p)$, więc na mocy reguły podstawiania (por. § 8, str. 21, ćw. 3) mamy też $\vdash(A\equiv B)\rightarrow(B\equiv A)$. Jeśli więc $\vdash A\equiv B$, to na mocy reguły odrywania (§ 8, tamże, ćw. 2) mamy $\vdash B\equiv A$, co dowodzi pierwszej części twierdzenia. Dowód drugiej i trzeciej części jest podobny; opiera się on na tautologiach:

$$\vdash(p\equiv q)\rightarrow[(q\equiv r)\rightarrow(p\equiv r)],\qquad \vdash p\equiv p.$$

Twierdzenie 2. Jeśli A jest inferencyjnie równoważne B i $\vdash A$, to $\vdash B$.

Dla dowodu powołujemy się na tautologię

$$\vdash (p \equiv q) \to (p \to q)$$

i rozumujemy jak w dowodzie twierdzenia 1.

Nazywać będziemy *alternatywą elementarną* sumę logiczną, utworzoną ze zmiennych zdaniowych i z ich negacji; także każdą zmienną i każdą negację zmiennej zaliczymy do alternatyw elementarnych.

Koniunkcję dowolnej liczby alternatyw elementarnych nazywamy *wyrażeniem o postaci normalnej.* W szczególności każda alternatywa elementarna jest takim wyrażeniem.

Alternatywami elementarnymi są np. wyrażenia:

$$p+q+r+s'+t', \quad p+q+s, \quad p'+q', \quad p, \quad r', \quad p+q+q+q',$$

a wyrażenia:

$$(p+q+r)\cdot(r+p+p'), \quad (p+p')\cdot(q+r+q'), \quad p\cdot p, \quad p\cdot q\cdot r\cdot p'\cdot s\cdot t,$$

mają postać normalną.

Z tych definicji wynika od razu

Twierdzenie 3. *Suma logiczna dwu lub więcej alternatyw elementarnych jest znów alternatywą elementarną; iloczyn logiczny dwu lub więcej wyrażeń o postaci normalnej ma znów postać normalną.*

Udowodnimy następnie

Twierdzenie 4. *Negacja alternatywy elementarnej jest inferencyjnie równoważna pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej.*

Dowód. Jeśli $p_1+p_2+\ldots+p_n+q'_1+q'_2+\ldots+q'_m$ jest alternatywą elementarną, to jej negacja jest w myśl prawa de Morgana inferencyjnie równoważna koniunkcji $p'_1\cdot p'_2\cdot\ldots\cdot p'_n\cdot q''_1\cdot q''_2\cdot\ldots\cdot q''_m$, to zaś wyrażenie jest w myśl prawa podwójnego przeczenia inferencyjnie równoważne wyrażeniu o postaci normalnej $p'_1\cdot p'_2\cdot\ldots\cdot p'_n\cdot q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_m$.

Twierdzenie 5. *Alternatywa dwu wyrażeń o postaci normalnej jest inferencyjnie równoważna pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej.*

Dowód. Niech A będzie koniunkcją n alternatyw elementarnych $A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n$, a B — koniunkcją m alternatyw elementarnych. Twierdzenie udowodnimy przez indukcję względem $n+m$.

Jeśli $n+m=2$, to A i B są alternatywami elementarnymi; $A+B$ jest też alternatywą elementarną, a więc ma postać normalną. Załóżmy, że $n+m=k$, gdzie $k>2$, i że twierdzenie jest prawdziwe dla takich wyrażeń A i B, gdzie $n+m<k$. Możemy założyć, że A jest koniunkcją co najmniej dwu czynników (w przeciwnym razie zamienilibyśmy role wyrażeń A i B). Stosując prawo rozdzielności dodawania logicznego względem mnożenia, wnosimy, że wyrażenia

$$A+B \quad \text{i} \quad (A_1+B)\cdot(A_2\cdot\ldots\cdot A_n+B)$$

są inferencyjnie równoważne. Zgodnie z założeniem indukcyjnym wyrażenia A_1+B i $A_2\cdot\ldots\cdot A_n+B$ są inferencyjnie równoważne wyrażeniom N_1 i N_2 o postaci normalnej. Wynika stąd, że koniunkcja $(A_1+B)\cdot(A_2\cdot\ldots\cdot A_n+B)$ jest inferencyjnie równoważna koniunkcji $N_1\cdot N_2$, a więc (por. twierdzenie 1) wyrażenia $A+B$ i $N_1\cdot N_2$ są inferencyjnie równoważne. Ponieważ $N_1\cdot N_2$ ma postać normalną zgodnie z twierdzeniem 3, więc wynika stąd prawdziwość twierdzenia 5.

Przez indukcję otrzymujemy stąd od razu

Twierdzenie 6. *Alternatywa dowolnej liczby wyrażeń o postaci normalnej jest inferencyjnie równoważna pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej.*

Twierdzenie 7. *Negacja wyrażenia o postaci normalnej jest inferencyjnie równoważna pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej.*

Dowód. Jeśli A jest koniunkcją n alternatyw elementarnych $A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n$, to A' jest w myśl praw de Morgana inferencyjnie równoważne alternatywie $A'_1+A'_2+\ldots+A'_n$. Każde z wyrażeń A'_i (dla $i=1,2,\ldots,n$) jest zgodnie z twierdzeniem 4 inferencyjnie równoważne pewnemu wyrażeniu N_i o postaci normalnej; A' jest więc inferencyjnie równoważne alternatywie $N_1+N_2+\ldots+N_n$, która zgodnie z twierdzeniem 6 jest inferencyjnie równoważna pewnemu wyrażeniu N o postaci normalnej. Zatem A' jest inferencyjnie równoważne z N, c. b. d. o.

Możemy teraz udowodnić następujące ważne

Twierdzenie 8. *Każde wyrażenie sensowne jest inferencyjnie równoważne pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej.*

Dowód. Wyrażenia sensowne powstają ze zmiennych zdaniowych przez łączenie ich funktorami zdaniotwórczymi $+$, $\cdot$, $\to$, $\equiv$ i $'$. Ponieważ każda zmienna ma sama przez się postać normalną, więc dla dowodu twierdzenia 8 wystarczy okazać, że jeśli wyrażenia A i B są inferencyjnie równoważne wyrażeniom M i N o postaci normalnej, to i wyrażenia:

(10) $\qquad A', \qquad A+B, \qquad A\cdot B, \qquad A\to B, \qquad A\equiv B$

są inferencyjnie równoważne pewnym wyrażeniom o postaci normalnej.

Aby to wykazać, opieramy się na tautologiach:

$$\vdash (p\equiv q)\to(p'\equiv q'),$$
$$\vdash (p\equiv q)\to\{(r\equiv s)\to[(p+r)\equiv(q+s)]\},$$
$$\vdash (p\equiv q)\to\{(r\equiv s)\to[p\cdot r\equiv(q'+s')']\},$$
$$\vdash (p\equiv q)\to\{(r\equiv s)\to[(p\to r)\equiv(q'+s)]\},$$
$$\vdash (p\equiv q)\to((r\equiv s)\to\{(p\equiv r)\equiv[(q+s')'+(s+q')']'\}),$$

z których wynika, że wyrażenia (10) są inferencyjnie równoważne wyrażeniom

(11) $\quad M', \quad M+N, \quad (M'+N')', \quad M'+N, \quad [(M+N')'+(N+M')']'.$

Z twierdzeń 6 i 7 wnosimy, że każde z wyrażeń (11) jest inferencyjnie równoważne pewnemu wyrażeniu o postaci normalnej. W myśl więc twierdzenia 1, wyrażenia (10) też są inferencyjnie równoważne wyrażeniom o postaci normalnej, c. b. d. o.

PRZYKŁAD. Sprowadzimy do postaci normalnej następujące wyrażenie A:

$$[(p'\to q)\to p]\equiv r.$$

W tym celu wyrażamy najpierw implikację i równoważność przy pomocy alternatywy, koniunkcji i negacji; otrzymujemy:

$$\vdash A\equiv\{[(p'\to q)\to p]\cdot r+[(p'\to q)\to p]'\cdot r'\}\equiv$$
$$\equiv\{[(p''+q)'+p]\cdot r+[(p''+q)'+p]'\cdot r'\}.$$

Stosując następnie prawa podwójnego przeczenia, prawa de Morgana, prawo rozdzielności dodawania logicznego względem mnożenia i prawa tautologii, otrzymamy ciąg równoważności:

$$\vdash A\equiv[(p'\cdot q'+p)\cdot r+(p+q)\cdot p'\cdot r']\equiv[(q'+p)\cdot(p'+p)\cdot r+(p+q)\cdot p'\cdot r']\equiv$$
$$\equiv[(q'+p+p+q)\cdot(q'+p+p')\cdot(q'+p+r')\cdot(p'+p+p+q)\cdot$$
$$\cdot(p'+p+p')\cdot(p'+p+r')\cdot(r+p+q)\cdot(r+p')\cdot(r+r')]\equiv$$
$$\equiv[(p+q+q')\cdot(p+p'+q')\cdot(p+q'+r')\cdot(p+p'+q)\cdot(p+p')\cdot$$
$$\cdot(p+p'+r')\cdot(p+q+r)\cdot(p'+r)\cdot(r+r')].$$

Ostatnie z wyrażeń w nawiasie kwadratowym jest więc inferencyjnie równoważne wyrażeniu A. Można też z łatwością wykazać, że

$$\vdash A\equiv(p+q'+r')\cdot(p+q+r)\cdot(p'+r).$$

Rachunki takie wykonywać można niemal automatycznie, jeśli pamięta się prawa de Morgana, podwójnego przeczenia i rozdzielności oraz wzory, pozwalające wszystkie funktory zdaniotwórcze wyrazić przy pomocy negacji, alternatywy i koniunkcji.

Początkującym sprawia zazwyczaj pewną trudność operowanie prawem rozdzielności dodawania względem mnożenia, gdyż do prawa tego nie jesteśmy przyzwyczajeni z arytmetyki. Aby usunąć tę niedogodność, można wprowadzić nowy znak dla koniunkcji, np. $\mathbf{+}$, i opuszczać w ogóle znaki alternatywy (t. zn. uznać brak jakiegokolwiek znaku między wyrażeniami za znak alternatywy). Prawo rozdzielności dodawania względem mnożenia przyjmuje wówczas postać

$$p(q\mathbf{+}r)\equiv pq\mathbf{+}pr,$$

w której łatwo jest je stosować, i rachunki, prowadzące do postaci normalnej, upodobnią się łudząco do algebraicznych.

Metodę tę zastosujemy do następującego przykładu:

$$\vdash\{[(p\to q)\to r]\to[(r\to p)\to(s\to p)]\}\equiv$$
$$\equiv\{[(p'q)'r]'(r'p)'s'p\}\equiv\{(p'q\mathbf{+}r')(r\mathbf{+}p')s'p\}\equiv$$
$$\equiv\{p'qrs'p\mathbf{+}p'qp's'p\mathbf{+}r'rs'p\mathbf{+}r'p's'p\}.$$

Powracając do poprzednich oznaczeń dla koniunkcji i alternatywy, wnosimy, że wyrażenie o postaci normalnej

$$(p'+q+r+s'+p)\cdot(p'+q+p'+s'+p)\cdot(r'+r+s'+p)\cdot(r'+p'+s'+p)$$

jest inferencyjnie równoważne danemu.

Po sprowadzeniu jakiegokolwiek wyrażenia do postaci normalnej możemy łatwo się przekonać, czy jest ono tautologią. Zachodzi bowiem

Twierdzenie 9. Alternatywa elementarna jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna zmienna występuje w niej raz po prostu jako zmienna, a raz pod znakiem negacji.

Wyrażenie o postaci normalnej jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy każda z alternatyw elementarnych, składających się na to wyrażenie, jest tautologią.

Dowód. Jeśli w alternatywie elementarnej A występują składniki p i p', to jakkolwiek nadamy zmiennym wartości 0 i 1, otrzymamy zawsze 1, gdyż już $p+p'$ będzie zawsze miało wartość 1. A jest więc w tym wypadku tautologią.

Jeśli A ma postać $p_1+p_2+\ldots+p_m+q'_1+q'_2+\ldots+q'_n$, gdzie żadna ze zmiennych p_i nie pokrywa się z żadną ze zmiennych q_j, to A nie jest tautologią, gdyż A otrzyma wartość 0, gdy za zmienne p_i wstawimy wartość 0, a za zmienne q_j — wartość 1.

Jeśli K jest koniunkcją n alternatyw elementarnych $A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n$ i jest tautologią, to $A_1, A_2, \ldots, A_n$ też muszą być tautologiami, bo w przeciwnym razie jedna z tych alternatyw mogłaby osiągnąć (przy odpowiednim podstawieniu wartości 0 i 1 za zmienne) wartość 0, a wtedy i K byłoby równe 0.

Na odwrót, jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są tautologiami, to i K jest tautologią, gdyż K nie może przybrać wartości 0, skoro żaden z czynników tej wartości nigdy nie przybiera. Twierdzenie 9 jest więc udowodnione.

Twierdzenie to daje nam możność sprawdzenia, czy dane wyrażenie sensowne jest tautologią. Należy mianowicie wyrażenie to przekształcić na inferencyjnie równoważne wyrażenie o postaci normalnej i zbadać, czy w każdej z alternatyw elementarnych choć jedna zmienna występuje raz sama, a raz pod znakiem negacji.

Tak np. z dwu wyrażeń rozpatrywanych w przykładach na str. 34 i 35 drugie jest tautologią, a pierwsze nie jest tautologią.

Rozpatrzone dotąd postacie normalne, t. zw. *koniunkcyjne*, nie są jedynymi. W wielu wypadkach dogodnie jest sprowadzać wyrażenia do pewnych innych form normalnych. Przykłady znajdzie czytelnik w przytoczonych ćwiczeniach.

ĆWICZENIA. 1. Zastąpić w wyłożonej tu teorii alternatywę przez koniunkcję i rozwinąć teorię postaci normalnych *dyzjunkcyjnych*.

2. Jeśli wyrażenie sensowne A nie zawiera innych funktorów prócz $\equiv$, to zmieniając w A w dowolny sposób porządek zmiennych i ustawienie nawiasów, otrzymamy wyrażenie inferencyjnie równoważne wyrażeniu A.

Wsk.: Oprzeć się na tautologiach

$$\vdash (p\equiv q)\equiv(q\equiv p) \quad \text{i} \quad \vdash [(p\equiv q)\equiv r]\equiv[p\equiv(q\equiv r)].$$

3. Postacią normalną dla wyrażeń opisanych w ćwiczeniu 2 jest

$$p_1\equiv(p_2\equiv(p_3\equiv\ldots\equiv(p_{n-1}\equiv p_n)))\ldots$$

4. Jeśli w wyrażeniu sensownym A, nie zawierającym innego funktora prócz $\equiv$, skreślimy parzystą ilość takich samych (równokształtnych) zmiennych, to otrzymamy wyrażenie inferencyjnie równoważne A.

Wsk.: $\vdash [(p\equiv p)\equiv q]\equiv q$.

5. Na to, by wyrażenie sensowne, nie zawierające innego funktora prócz $\equiv$, było tautologią, potrzeba i wystarcza, by każda zmienna występowała w nim parzystą liczbę razy [1]).

6. Dla wyrażeń, nie zawierających innych funktorów prócz $\equiv$ i $\not\equiv$, (negacja równoważności czyli alternatywa wyłączająca; por. str. 9) postacią normalną jest

$$p_1\equiv(p_2\equiv\ldots\equiv(p_n\equiv(q_1\not\equiv(q_2\not\equiv\ldots\not\equiv(q_{m-1}\not\equiv q_m))\ldots$$

7. Wyrażenie typu opisanego w ćwiczeniu 6 jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy funktor $\equiv$ występuje w nim nieparzystą ilość razy, funktor $\not\equiv$ — parzystą ilość razy lub wcale, a każda zmienna — parzystą ilość razy [2]).

§ 12. Dwoistość. Wyrażenia, które będziemy teraz rozważali, zawierać będą prócz zmiennych zdaniowych tylko funktory $+$, $\cdot$ i $'$. Jeśli w takim wyrażeniu A zastąpimy funktory $+$ i $\cdot$ wzajemnie przez siebie, otrzymamy wyrażenie A_d, które nazywać będziemy *dwoistym* do A.

Z definicji tej wynikają od razu wzory:

$$(A+B)_d=A_d\cdot B_d,\quad (A\cdot B)_d=A_d+B_d,\quad (A')_d=(A_d)'. \tag{12}$$

Jeśli w wyrażeniu A zastąpimy każdą zmienną przez jej negację, otrzymamy nowe wyrażenie, które oznaczać będziemy przez $\overline{A}$. Jest jasne, że

$$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B},\qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}\cdot\overline{B},\qquad \overline{A'}=\overline{A}'. \tag{13}$$

Twierdzenie 10. Wyrażenia $\overline{A}$ i A'_d są inferencyjnie równoważne.

Dowód. Twierdzenie jest oczywiste w przypadku, gdy A jest pojedynczą zmienną. Wystarczy zatem wykazać, że jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla wyrażeń A i B, to jest też prawdziwe dla wyrażeń A', $A+B$ i $A\cdot B$.

[1]) S. Leśniewski, *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, Fundamenta Mathematicae 14 (1929), str. 30.

[2]) H. Rasiowa, *Axiomatisation d'un système partiel de la théorie de la déduction*, Sprawozdania Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, tom 39 (1946-1947).

Istotnie, mamy:

$$\vdash (A')'_d \equiv A'_d \equiv \overline{A'} \equiv A',$$

$$\vdash (A+B)'_d \equiv (A'\cdot B')_d \equiv (A'_d + B'_d) \equiv (\overline{A} + \overline{B}) \equiv \overline{A+B},$$

$$\vdash (A\cdot B)'_d \equiv (A'+B')_d \equiv A'_d\cdot B'_d \equiv \overline{A}\cdot\overline{B} \equiv \overline{A\cdot B}.$$

Oparliśmy się przy tym na przesłance indukcyjnej, wzorach (12) i (13), prawie podwójnego przeczenia i prawach de Morgana. Z udowodnionego w ten sposób twierdzenia 10 wynika

Twierdzenie 11 (o dwoistości). Jeśli $\vdash A \to B$, *to* $\vdash B_d \to A_d$; *jeśli* $\vdash A \equiv B$, *to* $\vdash A_d \equiv B_d$.

Dowód. Zastąpmy w tautologii $\vdash A\to B$ każdą zmienną przez jej negację; otrzymamy wówczas tautologię $\vdash \overline{A} \to \overline{B}$ (por. § 8, str. 21, ćw. 3), czyli na mocy twierdzenia 10:

$$\vdash A'_d \to B'_d.$$

Zgodnie z prawem transpozycji wynika stąd:

$$\vdash B_d \to A_d.$$

Dowód drugiej części twierdzenia jest analogiczny, należy tylko skorzystać z tautologii $\vdash (p'\equiv q') \to (p\equiv q)$.

Twierdzenie 11 jest pożyteczne, gdyż pozwala automatycznie z jednych tautologii wyprowadzać inne. Np. z prawa $\vdash p\cdot(q+r) \equiv (p\cdot q + p\cdot r)$ otrzymujemy $\vdash (p + q\cdot r) \equiv (p+q)\cdot(p+r)$, z prawa $\vdash p\cdot q \to p$ otrzymujemy $\vdash p \to (p+q)$ i t. p.

ĆWICZENIA. 1. Funktor o n argumentach F nazywa się *dwoistym* względem funktora G, jeśli

$$\vdash F(p_1, p_2, \ldots, p_n) \equiv G'(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n).$$

Wskazać w tabelce podanej na str. 14 pary funktorów jedno- i dwuargumentowych wzajemnie dwoistych.

Odp.: A_1, A_4; A_2, A_2; A_3, A_3; B_1, B_{16}; B_2, B_{12}; B_3, B_{13}; B_4, B_{14}; B_5, B_{15}; B_6, B_6; B_7, B_7; B_8, B_9; B_{10}, B_{10}; B_{11}, B_{11}. W szczególności funktory $A_2, A_3, B_6, B_7, B_{10}$ i B_{11} są więc dwoiste względem siebie samych.

2. Uogólnić twierdzenie o dwoistości na wyrażenia, zawierające dowolne funktory.

Wsk.: A_d należy zdefiniować jako wyrażenie, powstające z A przez zastąpienie każdego funktora funktorem dwoistym względem niego.

3. Jakie tautologie otrzymać można na podstawie uogólnionego twierdzenia o dwoistości z praw: sylogizmu warunkowego, Claviusa i transpozycji?

§ 13 [1]**. O aksjomatycznym ujęciu rachunku zdań i logikach wielowartościowych.** Przedstawiony w §§ 1-12 rachunek zdań można też ująć w inny sposób, zwany *aksjomatycznym.*

Przyjmujemy mianowicie kilka odpowiednio wybranych tautologii (bez żadnego ich uzasadniania) za aksjomaty rachunku zdań i z aksjomatów tych wyprowadzamy twierdzenia, posługując się regułami podstawiania i odrywania, wspomnianymi w ćwiczeniach do § 8 (str. 21, ćw. 2 i 3).

Oto przykład takiego dowodu. Przyjmijmy trzy następujące aksjomaty:

(14) $$(p\to q)\to[(q\to r)\to(p\to r)],$$

(15) $$p\to(p'\to q),$$

(16) $$(p'\to p)\to p.$$

Na mocy reguły podstawiania otrzymujemy z ~~(20)~~ 15 twierdzenie:

(17) $$p\to(p'\to p).$$

Podstawmy teraz w (14) zamiast zmiennej q wyrażenie $p'\to p$; w myśl reguły podstawiania powstające w ten sposób wyrażenie [2]

$$[p\to(p'\to p)]\to\{[(p'\to p)\to r]\to(p\to r)\}$$

jest więc twierdzeniem. Ponieważ poprzednik tej implikacji jest identyczny z wyrażeniem (17), więc na mocy reguły odrywania otrzymujemy twierdzenie

$$[(p'\to p)\to r]\to(p\to r).$$

Podstawmy tu teraz zmienną p zamiast zmiennej r. Wobec (16) zastosować możemy jeszcze raz regułę odrywania, dzięki czemu dochodzimy do twierdzenia $p\to p$.

Już z tego przykładu widoczne jest, że metoda aksjomatyczna prowadzi na ogół do rachunków trudniejszych niż użyta przez nas poprzednio metoda sprawdzania zerowo-jedynkowego. Obu metodom wspólne jest jedno: ustalenie prawdziwości wyrażenia nie wymaga żadnego rozumowania, lecz sprowadza się do wykonania szeregu mechanicznych czynności.

[1]) Z pojęć wprowadzonych w § 13 nie korzystamy nigdzie w dalszym ciągu książki.

[2]) Musieliśmy tu zmienić nawiasy, gdyż inaczej wyrażenie nie dawałoby się odczytać w sposób jednoznaczny. Gdybyśmy jednak nie stosowali skrótów, dotyczących opuszczania nawiasów (por. § 8, str. 18), to nie trzeba byłoby po podstawieniu zmieniać żadnego nawiasu.

Aksjomaty (14), (15) i (16) wybrane zostały z tego względu, że można z nich wyprowadzić (przy pomocy reguł podstawiania i odrywania) wszystkie tautologie (w sensie określonym w § 8, str. 19-20), nie zawierające innych funktorów prócz $\rightarrow$ i $'$. Tę samą własność posiada także wiele innych układów aksjomatów, które można wobec tego również przyjąć za podstawę do aksjomatycznej budowy systemu rachunku zdań, równoważnego w zasadzie systemowi, wyłożonemu w §§ 1-12 i zwanemu logiką dwuwartościową [1]).

Nic nie stoi jednak na przeszkodzie innemu doborowi aksjomatów. Gdybyśmy je wybrali inaczej, np. tak, że nie wszystkie tautologie dawałyby się z nich wyprowadzić, stanęlibyśmy na gruncie innej logiki, różnej od logiki dwuwartościowej (por. § 9, str. 27).

O systemach logicznych, różnych od logiki dwuwartościowej, wspominaliśmy już, mówiąc o prawie wyłączonego środka. Mówiliśmy tam o tym, że podana w § 8 definicja tautologii dlatego wydaje się nam poprawna, ponieważ wierzymy, że każde zdanie jest albo prawdziwe, albo fałszywe. Jeśli ktoś z jakichkolwiek względów doszedłby do wniosku, że istnieją zdania, które nie są ani prawdziwe, ani fałszywe, to musiałby przyjąć inną definicję tautologii i wobec tego cały rachunek zdań musiałby ulec przebudowie.

J. Łukasiewicz, który pierwszy doszedł na tej drodze do stworzenia systemu logicznego, różnego od dwuwartościowego [2]), podawał następujący przykład zdania, które nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe: „Od dziś za rok będę w Warszawie" [3]).

---

[1]) Pierwsze aksjomatyczne ujęcie rachunku zdań pochodzi od logika niemieckiego G. Frege'go (1848-1925), jednego z najwybitniejszych myślicieli nowszych czasów, którego prace jednak przez długi czas pozostały niezrozumiane, między innymi wskutek jego bardzo trudnej symboliki. Inne ujęcie aksjomatyczne podali B. Russell i A.N. Whitehead w *Principia Mathematica* (por. ods. [1]) na str. 21). Układ aksjomatów (14), (15), (16) pochodzi od J. Łukasiewicza, najznakomitszego w chwili obecnej znawcy rachunku zdań.

[2]) W rozprawce *O logice trójwartościowej*, Ruch filozoficzny 5 (1920), str. 169-171. Logik amerykański E. L. Post doszedł niemal w tym samym czasie do podobnych koncepcji w pracy *Introduction to a general theory of elementary propositions*, American Journal of Mathematics 43 (1921), str. 163-185. Praca Posta miała jednak charakter bardziej formalny i wydaje się, że nie doceniał on filozoficznego znaczenia wielowartościowych systemów logiki.

[3]) Zob. J. Łukasiewicz, *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls*, Sprawozdania Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, tom 23 (1930), str. 51-77.

Oczywiście, nie można przyjmować zasady determinizmu, jeśli twierdzi się, że zdanie to dzisiaj nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe; nie ma jednak żadnego powodu, który zmuszałby nas do przyjęcia zasady determinizmu jako prawdy logicznej. Inne przykłady podawane przez Łukasiewicza dotyczą t. zw. zdań *modalnych*: *Jest możliwe, że ...*, *Jest konieczne, że ...* i t. p. Zdaniem Łukasiewicza, dla takich zdań logika dwuwartościowa nie jest właściwa; stosowniejszy jest inny system logiki, nazwany przez Łukasiewicza logiką trójwartościową. Dalsze uogólnienia doprowadziły Łukasiewicza do stworzenia systemów logiki n-wartościowej i nieskończenie wielowartościowej. Systemy te próbowano (jak dotąd zresztą bez powodzenia) zastosować do rachunku prawdopodobieństwa.

Inne systemy logiki, różne od dwuwartościowej, powstały w związku z implikacją ścisłą (por. § 4, str. 12) [1]) oraz z pewnym poglądem na podstawy matematyki, znanym pod nazwą *intuicjonizmu* [2]). Budowano także systemy logiki wielowartościowej z myślą o posługiwaniu się nimi w teorii kwantów [3]).

Zagadnienie, czy rachunek zdań „powinien" być dwuwartościowy, czy wielowartościowy, a nawet należyte sformułowanie tego zagadnienia, jest bardzo trudnym i subtelnym problemem filozoficznym. Natomiast zrozumienie formalnej struktury systemów wielowartościowych rachunku zdań jest bardzo łatwe [4]). Możemy takie systemy budować bądź na drodze aksjomatycznej, bądź określając tautologie przy pomocy równości analogicznych do równości (1)-(5) t. zw. *metodą tablicową*.

Jeśli obieramy metodę aksjomatyczną, cała trudność sprowadza się do odpowiedniego doboru aksjomatów. Przy metodzie tablicowej określamy sens funktorów zdaniotwórczych przy po-

---

[1]) Zob. książkę Lewisa i Langforda, cytowaną na str. 12.

[2]) Jako dobry wstęp do studium tego interesującego poglądu służyć może praca Z. Zawirskiego, *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej*, Przegląd Filozoficzny 16 (1946), str. 165-222.

[3]) G. Birkhoff and J. v. Neumann, *The logic of quantum mechanics*, Annals of Mathematics 37 (1936), str. 823-843. Przegląd i ocenę krytyczną większości zbudowanych dotychczas wielowartościowych systemów rachunku zdań zawiera pięknie napisana praca: H. Weyl, *The ghost of modality*, Philosophical essays in memory of Edmund Husserl, Cambridge 1940, str. 278-303.

[4]) Zob. J. Łukasiewicz i A. Tarski, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, Sprawozdania Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, tom 23 (1930), str. 1-21.

mocy równości, zawierających prócz symboli 0 i 1 (dla fałszu i prawdy) jeszcze inne symbole, reprezentujące trzecią wartość logiczną (lub, ogólniej, inne wartości logiczne). Np. w pierwotnym systemie trójwartościowym Łukasiewicza implikacja określona jest równościami:

$$0\to 0=1, \qquad {}^1/_2\to 0={}^1/_2, \qquad 1\to 0=0,$$
$$0\to {}^1/_2=1, \qquad {}^1/_2\to {}^1/_2=1, \qquad 1\to {}^1/_2={}^1/_2,$$
$$0\to 1=1, \qquad {}^1/_2\to 1=1, \qquad 1\to 1=1,$$

negacja zaś równościami:

$$0'=1, \qquad ({}^1/_2)'={}^1/_2, \qquad 1'=0.$$

Wyrażenie jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy po zastąpieniu zmiennych symbolami 0, $^1/_2$ i 1 otrzymuje ono zawsze wartość 1.

Powstaje tu mnóstwo zagadnień specjalnych, nieraz bardzo trudnych, polegających np. na zbadaniu, czy system określony tablicowo może być również określony aksjomatycznie i na odwrót. Jest jednak jasne, że rozwiązanie takich czysto formalnych zagadnień nie przyczyni się do posunięcia naprzód istotnego problemu, jakim jest wyświetlenie roli i zastosowań systemów wielowartościowych rachunku zdań.

Doniosłość filozoficzna tych systemów jest wielka: samo ich istnienie dowodzi, że logika nie jest nauką aprioryczną w sensie głoszenia prawd absolutnych, w które nie wierzyć byłoby niepodobieństwem, lecz opiera się na pewnych założeniach i umowach[1]). Które założenia są stosowniejsze, okazać się może dopiero w toku dalszej budowy teorii, opartych na różnych założeniach. Lepsze, stosowniejsze, będą te założenia, które pozwolą zbudować teorię, lepiej odpowiadającą celom logiki i matematyki. Nie jest zresztą wyłączone, że odmienne założenia prowadzić będą do teorii w równym stopniu stosowalnych. Stwierdzić należy, że w dzisiejszym stadium rozwoju logiki

[1]) Różni myśliciele (lub częściej pseudo-myśliciele) próbują wyzyskać ten fakt dla uzasadnienia relatywizmu nauki w ogóle i wysnuwają stąd daleko idące wnioski, dotyczące nauk humanistycznych, a nawet społecznych. Byłoby dobrze, gdyby przed wysnuwaniem tych wniosków ludzie ci uświadomili sobie, że studia nad logiką wielowartościową są dopiero w powijakach i że poza nieliczną grupką matematyków, uznających t. zw. pogląd intuicjonistyczny (na ogół humanistom nieznany), świat naukowy myśli wyłącznie prawami logiki dwuwartościowej.

systemy oparte na dwuwartościowym rachunku zdań pozwoliły posunąć bardzo daleko analizę podstaw matematyki, podczas gdy inne systemy logiczne nie wyszły poza najelementarniejsze stadium rozwoju (z wyjątkiem, być może, logiki intuicjonistycznej) i nie widać na razie, czy i do czego będą w matematyce przydatne. Z tego względu nie będziemy się tutaj zajmowali systemami wielowartościowymi.

ROZDZIAŁ III

KWANTYFIKATORY

§ 1. Określenia i przykłady. Prócz funktorów zdaniotwórczych, z którymi zapoznaliśmy się w Rozdziale II, ważną rolę w wysłowieniach twierdzeń matematycznych grają słowa *istnieje* i *każdy*. Słowa te nazywamy *kwantyfikatorami*. Sens ich zrozumiemy najlepiej na przykładach.

Rozpatrzmy np. funkcję zdaniową

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Wiemy z arytmetyki, że jest ona spełniona przez wszystkie liczby, t. zn. przejdzie w zdanie prawdziwe, o ile za zmienne a i b podstawimy nazwy jakichkolwiek liczb. Fakt ten wyrażamy, mówiąc:

dla każdego a *i każdego* b *jest* $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

Zamiast „*dla każdego*" piszemy literę $\prod$ i zapisujemy to zdanie w postaci

$$\prod_a \prod_b [(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2]$$

lub krócej

$$\prod_{ab} [(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2].$$

Symbol $\prod$ (sam, a także z wypisanymi u dołu wskaźnikami) nazywamy kwantyfikatorem *dużym* lub *ogólnym*.

Rozpatrzmy, z drugiej strony, np. funkcję zdaniową

$$(a+b)^2 = 2a+1.$$

Nie jest ona spełniona przez wszystkie liczby, ale jest spełniona przez niektóre (np. przez $a=0$, $b=-1$). Mówimy zatem:

istnieją a *i* b *takie, że* $(a+b)^2 = 2a+1$ [1]),

[1]) Albo: *dla pewnego* a *i pewnego* b *jest* $(a+b)^2 = 2a+1$.

i zapisujemy to zdanie w postaci

$$\sum_a \sum_b [(a+b)^2 = 2a+1]$$

lub krócej

$$\sum_{ab} [(a+b)^2 = 2a+1].$$

Znak $\sum$ (a także ten sam znak ze wskaźnikami u dołu) nazywamy kwantyfikatorem *małym* lub *szczegółowym*.

Moglibyśmy poprzedzić tę funkcję zdaniową jednym tylko kwantyfikatorem, dużym lub małym, i otrzymalibyśmy wyrażenia:

$$(*) \qquad \prod_a [(a+b)^2 = 2a+1], \qquad \sum_a [(a+b)^2 = 2a+1].$$

Mimo, iż figurują w nich litery a i b, wyrażenia te są funkcjami zdaniowymi o jednej tylko zmiennej b. Możemy bowiem za zmienną b podstawiać nazwy rozmaitych liczb, otrzymując zdania prawdziwe lub fałszywe, ale w każdym razie nie pozbawione sensu. Natomiast podstawiając np. symbol 1 za zmienną a, otrzymalibyśmy wyrażenia pozbawione sensu: *dla każdego* 1 $(1+b)^2 = 2\cdot 1+1$, oraz *istnieje takie* 1, *że* $(1+b)^2 = 2\cdot 1+1$. Mówimy, że w wyrażeniach (*) zmienna b jest *wolna* (lub *istotna*), a zmienna a — *związana* przez kwantyfikator. Zmienne związane nazywamy też *pozornymi*.

Ogólnie: rozpatrzmy funkcję zdaniową $\Phi(x, y, ..., u)$, w której zmienne przebiegają np. zbiór liczb. Poprzedzając tę funkcję zdaniową kwantyfikatorem $\prod_x$ lub $\sum_x$, otrzymamy funkcję zdaniową o zmiennych wolnych $y, ..., u$. Poprzedzając tę nową funkcję zdaniową kwantyfikatorem $\prod_y$ lub $\sum_y$, zwiążemy zmienną y i możemy postępować tak dalej aż do wyczerpania wszystkich zmiennych. Otrzymane w ten sposób wyrażenie nie jest już funkcją zdaniową, lecz zdaniem, wyraża bowiem ono zupełnie określone twierdzenie (prawdziwe lub fałszywe), dotyczące liczb.

Wypisując wyrażenia, zawierające kwantyfikatory i funktory zdaniotwórcze, powinniśmy ujmować w nawiasy każde dwa wyrażenia, złączone funktorami $\rightarrow$, $\equiv$, $+$, i $\cdot$, jak również każde wyrażenie, które poprzedzamy kwantyfikatorem lub po którym stawiamy znak negacji.

Wyrażenie objęte nawiasem, następujące bezpośrednio po kwantyfikatorze, stanowi *zasięg* tego kwantyfikatora.

Kwantyfikator ze wskaźnikiem np. x wiąże zmienną x tylko wtedy, gdy znajduje się ona w jego zasięgu. Zmienna x, nie leżąca w zasięgu tego kwantyfikatora, nie jest przezeń związana i jest zmienną wolną, chyba że znajduje się w zasięgu innego kwantyfikatora.

PRZYKŁAD. W wyrażeniu $\prod_x \{[\sum_y (\Phi(x,y))] \to (\Psi(x,y,z))\}$ zasięgiem kwantyfikatora $\sum_y$ jest $\Phi(x,y)$, a zasięgiem kwantyfikatora $\prod_x$ — całe wyrażenie w $\{\ \}$. Zmienne wolne zaznaczono ~~tłustym~~ drukiem.

Konsekwentne stosowanie reguł, dotyczących nawiasów, doprowadziłoby do zbytniego ich nagromadzenia. Przyjmiemy zatem skróty omówione w Rozdziale II (§ 8, str. 18), a nadto regułę, że kwantyfikatory wiążą mocniej niż funktory zdaniotwórcze. Wreszcie, opuszczać będziemy nawiasy, obejmujące zasięg kwantyfikatora, o ile w zasięgu tym znajduje się wyrażenie proste, jak np. $\Phi(x,y)$, $x=2y+1$, $|a-y|<\varepsilon$ i t. p.

Zgodnie z tym wyrażenia:

$$\sum_x \Phi(x,y) \to \Psi(y), \qquad \sum_x \prod_z \Psi(x,z) \to [\prod_x \Phi(x) + \Theta(y)]$$

znaczą tyleż co:

$$\{\sum_x [\Phi(x,y)]\} \to [\Psi(y)], \qquad \{\sum_x (\prod_z [\Psi(x,z)])\} \to \{\prod_x [\Phi(x)] + [\Theta(y)]\}.$$

Rozróżnienie między zmiennymi wolnymi a związanymi jest stosowane nie tylko w logice, lecz i w matematyce.

Np. $\sin xy$ jest funkcją dwu zmiennych x i y, a $\int_0^1 \sin xy\, dy$ jest już funkcją jednej tylko zmiennej x. Wyrażenie $\int_0^1 [\int_0^1 \sin xy\, dy]\, dx$ nie oznacza już w ogóle funkcji, lecz liczbę: obie zmienne są związane. Litery $dx, dy, \ldots$ służą do ograniczenia zasięgu operatora całkowego; np. zmienna y jest wolna w wyrażeniu

$$\cos\left(\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + y\right) = -\sin y.$$

Używając kwantyfikatorów, należy pamiętać, że zmienna związana musi przebiegać pewien określony zbiór przedmiotów, np. liczb, punktów, funkcji i t. p. Zdania napisane z pomocą

kwantyfikatorów wyrażają pewne fakty, dotyczące całego tego zbioru przedmiotów, a mianowicie, że każdy przedmiot tego zbioru ma pewną własność, albo że w zbiorze tym istnieją przedmioty o pewnej własności.

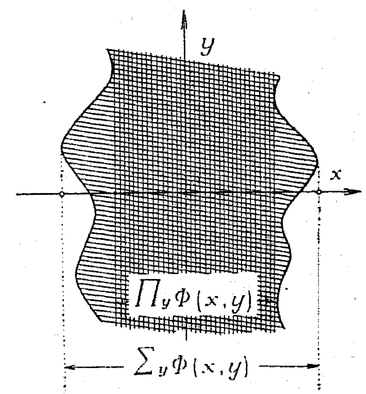
W szczególnym przypadku, gdy zmienne przebiegają zbiór złożony ze skończonej liczby przedmiotów, np. tylko z przedmiotów a, b, c i d, kwantyfikatory są w ogóle niepotrzebne, gdyż:

$$\prod_x \Phi(x) \equiv \Phi(a) \cdot \Phi(b) \cdot \Phi(c) \cdot \Phi(d),$$

$$\sum_x \Phi(x) \equiv [\Phi(a) + \Phi(b) + \Phi(c) + \Phi(d)].$$

Ze wzorów tych widać, że duży kwantyfikator można by nazywać *uogólnioną koniunkcją* (albo *uogólnionym iloczynem logicznym*), a mały kwantyfikator — *uogólnioną alternatywą* (albo *uogólnioną sumą logiczną*). Używanie liter $\prod$ i $\sum$, które w matematyce oznaczają iloczyn i sumę, znajduje w ten sposób usprawiedliwienie[1]).

Kwantyfikatory mają dość przejrzyste znaczenie geometryczne. Załóżmy, że zmienne przebiegają zbiór liczb rzeczywistych i rozpatrzmy funkcję zdaniową $\Phi(x,y)$. Wyrażenie $\sum_y \Phi(x,y)$ jest funkcją zdaniową zmiennej x. Liczba a spełnia tę funkcję zdaniową, jeżeli istnieje takie b, że a i b spełniają funkcję zdaniową $\Phi(x,y)$, t. j. gdy (a,b) jest punktem wykresu funkcji zdaniowej $\Phi(x,y)$ (por. Rozdział I, § 2, str. 6). Widać stąd (p. rys. 1), że otrzymamy zbiór liczb (punktów osi odciętych), spełniających funkcję zdaniową $\sum_y \Phi(x,y)$, rzutując na oś odciętych wykres funkcji zdaniowej $\Phi(x,y)$.



Rys. 1.

W podobny sposób można się przekonać (p. rys. 1), że wykres

[1]) Symbole Π i Σ, jak i sama nazwa *kwantyfikator*, pochodzą od logika amerykańskiego Ch. S. Peirce'a (1839-1914). W symbolice Peano-Russella duży kwantyfikator wiążący zmienną x oznacza się zazwyczaj symbolem (x), a mały — symbolem $(\exists x)$.

funkcji zdaniowej $\prod_y \Phi(x, y)$ składa się z takich punktów a osi odciętych, że prosta o równaniu $x = a$ jest całkowicie zawarta w wykresie funkcji zdaniowej $\Phi(x, y)$ [1].

ĆWICZENIA. 1. Wyróżnić zmienne wolne i związane w następujących wyrażeniach logicznych i matematycznych:

$$\prod_x \left[\prod_y (x > y) \to (x + 1 > z)\right], \qquad \prod_x \left[\sum_y (x = 2y) \to (x \neq 2y + 1)\right],$$

$$\prod_x \prod_y [(x = 2y) \to (x \neq 2y + 1)], \qquad \sum_u \prod_v \Phi(u, v) \to \sum_t \Phi(t, v),$$

$$\int_0^a \sin xy\, dy, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\, dx + \operatorname{tg} x, \qquad \sum_{n=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} (n^2 + k^2)^{-1}, \qquad \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2 + s}.$$

2. Podać wykresy funkcji zdaniowych:

$$z < x < y, \qquad \sum_z (z < x < y), \qquad \sum_{yz} (z < x < y),$$

w których zmienne przebiegają zbiór liczb rzeczywistych.

3. Podać wykresy funkcji zdaniowych:

$$(1) \qquad x = y \cdot z,$$

$$(2) \qquad \sum_y (x = y \cdot z),$$

$$(3) \qquad \prod_z \left\{(z = 1) + (z = x) + \left[\sum_y (x = y \cdot z)\right]'\right\},$$

gdzie zmienne przebiegają liczby naturalne.

Odp.: Zaznaczmy w przestrzeni x, y, z punkty o współrzędnych naturalnych (t. zw. *punkty sieciowe*):

(1) Wykres składa się z tych punktów sieciowych przestrzennych, które leżą na paraboloidzie hiperbolicznej $x = y \cdot z$.

(2) Wykres składa się z wszystkich punktów sieciowych płaszczyzny x, z dla których $z = 1$, z co drugiego punktu prostej $z = 2$, z co trzeciego punktu prostej $z = 3$ i t. d.

(3) Wykres składa się z punktów, których odcięte są liczbami pierwszymi lub jednością.

Sprawdzić na tym przykładzie interpretację geometryczną kwantyfikatorów.

---

[1]) Geometryczna interpretacja kwantyfikatorów stanowi podstawę ważnych zastosowań logiki do niektórych działów teorii mnogości; por. K. Kuratowski i A. Tarski, *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fundamenta Mathematicae 17 (1931), str. 240-248. Interpretacja ta (lecz nie jej zastosowania) znana była zresztą już dawniej; ob. E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, tom 3, Lipsk 1895, str. 52 i H. Weyl, *Das Kontinuum*, Lipsk 1918, str. 15.

§ 2. Zastosowanie kwantyfikatorów do zapisywania twierdzeń matematycznych. Kwantyfikatory o ograniczonym zakresie. Podamy tu kilka przykładów, ilustrujących zastosowanie kwantyfikatorów do formułowania tez matematycznych.

1. Definicja granicy ciągu nieskończonego $\{a_n\}$:

$$\{g = \lim_n a_n\} \equiv \prod_\eta [\eta > 0 \to \sum_{n_0} (n_0 \epsilon N) \cdot \prod_n \{n \epsilon N \to [n > n_0 \to |a_n - g| < \eta]\}].$$

We wzorze tym funkcję zdaniową $n \epsilon N$ należy czytać: n jest liczbą naturalną; zmienne pod kwantyfikatorami przebiegają zbiór liczb rzeczywistych.

Można skrócić nieco tę definicję, wprowadzając t. zw. *kwantyfikatory o ograniczonym zakresie.* Jest mianowicie przyjęte pisać:

$$\prod_{\Phi(x)} \Psi(x) \qquad \text{zamiast} \qquad \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)],$$

$$\sum_{\Phi(x)} \Psi(x) \qquad \text{zamiast} \qquad \sum_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)].$$

Gdyby w funkcji zdaniowej $\Phi(x)$ występowała prócz zmiennej x jeszcze inna zmienna, należałoby dodać pod kwantyfikatorem jeszcze wskaźnik x.

Stosując kwantyfikatory o ograniczonym zakresie, napiszemy definicję 1 w postaci:

$$\{g = \lim_n a_n\} \equiv \prod_{\eta > 0} \sum_{n_0 \epsilon N} \prod_{n \epsilon N} [n > n_0 \to |a_n - g| < \eta].$$

2. Definicja jednostajnej ciągłości funkcji $f(x)$ w zbiorze Z:

$$\prod_{\eta > 0} \sum_{\delta > 0} \prod_{x_1 x_2 \epsilon Z} [|x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \eta].$$

Funkcję zdaniową $x_1 x_2 \epsilon Z$ należy czytać: x_1 *i* x_2 *należą do zbioru* Z.

3. Warunek Cauchy'ego istnienia granicy funkcji $f(x)$ dla x dążącego do a:

$$\prod_{\eta > 0} \sum_{\delta > 0} \prod_{x_1 x_2} [|x_1 - a| < \delta \cdot |x_2 - a| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \eta].$$

4. Twierdzenie Moore'a-Osgooda. Twierdzenie to orzeka, że jeśli funkcja $f(x, y)$ jest dla x dążącego do a jednostajnie zbieżna ze względu na y, a dla y dążącego do b zbieżna (choćby nie jednostajnie) dla każdego x, to funkcja $f(x, y)$ jest zbieżna

dla (x, y) dążącego do (a, b). Wzorami logicznymi zapiszemy to twierdzenie, jak następuje:

$$\prod_{\eta>0} \sum_{\delta>0} \prod_{y x_1 x_2} [|x_1 - a| < \delta \cdot |x_2 - a| < \delta \to |f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \eta] \cdot$$
$$\cdot \prod_{\eta>0} \prod_{x} \sum_{\delta>0} \prod_{y_1 y_2} [|y_1 - b| < \delta \cdot |y_2 - b| < \delta \to |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \eta] \to$$
$$\to \prod_{\eta>0} \sum_{\delta>0} \prod_{x_1 x_2 y_1 y_2} [|x_1 - a| < \delta \cdot |x_2 - a| < \delta \cdot |y_1 - b| < \delta \cdot |y_2 - b| < \delta \to$$
$$\to |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \eta]$$ [1].

5. Hipoteza Goldbacha. Brzmi ona: *każda liczba parzysta większa od 4 jest sumą dwu liczb pierwszych nieparzystych.*

Zapiszemy to zdanie przy pomocy wyrażeń logicznych oraz dwu funkcji zdaniowych $P(x, y, z)$ i $S(x, y, z)$, które będziemy czytać: x *jest iloczynem* y *i* z oraz x *jest sumą* y *i* z. Zakładamy, że zmienne przebiegają zbiór liczb naturalnych.

Zachodzą oczywiście równoważności:

$$(x=1) \equiv P(x, x, x),$$
$$(x=2) \equiv \sum_u [(u=1) \cdot S(x, u, u)] \equiv \sum_u [P(u, u, u) \cdot S(x, u, u)],$$
$$(x=4) \equiv \sum_v [(v=2) \cdot P(x, v, v)] \equiv \sum_{vu} [P(u, u, u) \cdot S(v, u, u) \cdot P(x, v, v)],$$
$$(x>4) \equiv \sum_{zt} [(z=4) \cdot S(x, z, t)] \equiv \sum_{ztuv} [P(u,u,u) \cdot S(v,u,u) \cdot P(z,v,v) \cdot S(x,z,t)],$$
$$(x \text{ jest liczbą pierwszą}) \equiv (x=1)' \cdot \prod_{yz} \{P(x,y,z) \to [(y=1)+(z=1)]\} \equiv$$
$$\equiv P'(x,x,x) \cdot \prod_{yz} \{P(x,y,z) \to [P(y,y,y) + P(z,z,z)]\},$$
$$(x \text{ jest liczbą parzystą}) \equiv \sum_s S(x, s, s).$$

Twierdzenie Goldbacha możemy więc napisać w postaci:

$$\prod_x \Big\{ \sum_{ztuv} [P(u,u,u) \cdot S(v,u,u) \cdot P(z,v,v) \cdot S(x,z,t)] \cdot \sum_s S(x,s,s) \to$$
$$\to \sum_{mn} [(\sum_s S(m,s,s))' \cdot P'(m,m,m) \cdot \prod_{yz} \{P(m,y,z) \to [P(y,y,y)+P(z,z,z)]\} \cdot$$
$$\cdot (\sum_s S(n,s,s))' \cdot P'(n,n,n) \cdot \prod_{yz} \{P(n,y,z) \to [P(y,y,y)+P(z,z,z)]\} \cdot S(x,m,n)] \Big\}.$$

Można też łatwo wykazać, że twierdzenie Fermata (dotyczące nierozwiązalności w liczbach całkowitych równania $x^n + y^n = z^n$ dla $n > 2$) daje się napisać przy pomocy symboli logicznych i funkcji zdaniowych $P(x, y, z)$ i $S(x, y, z)$, o ile n jest

[1]) Zob. Archie Blake, *A Boolean derivation of the Moore-Osgood theorem*, The Journal of Symbolic Logic 11 (1946), str. 65-70.

jakąkolwiek daną liczbą, np. $n=3$ lub $n=5$ i t.d. Znacznie trudniej natomiast byłoby napisać przy pomocy tych środków twierdzenie Fermata dla dowolnego n czyli zdanie

$$\prod_{xyzn} [(n > 2) \to (x^n + y^n \neq z^n)].$$

Głębsze badania wykazują jednak, że jest to możliwe [1]).

ĆWICZENIA. 1. Napisać z pomocą symboli logicznych następujące zdania:
(a) dwie proste równoległe do trzeciej są do siebie równoległe,
(b) jeśli dwie proste nie są równoległe, to mają punkt wspólny.

Wskazówki: (a) wprowadzić funkcję zdaniową $k \| l$, (b) wprowadzić funkcje zdaniowe: $k \| l$, k *jest prostą*, A *jest punktem*, A *leży na* k.

2. Napisać przy pomocy kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie definicję zbieżności ciągu funkcji $\{f_n(x)\}$ w każdym punkcie zbioru Z i definicję jednostajnej zbieżności tego ciągu w zbiorze Z.

3. Napisać przy pomocy kwantyfikatorów funkcję zdaniową: $f(x)$ *ma pochodną w punkcie* x_0.

§ 3. Reguły wnioskowania. Tautologie. W § 1 i § 2 zapoznaliśmy się z rozmaitymi funkcjami zdaniowymi, zawierającymi kwantyfikatory. Niektóre z tych funkcji zdaniowych są prawdziwe, inne fałszywe. Zasadniczym naszym zadaniem — podobnie jak w Rozdziale II — będzie zbadanie tych wyrażeń, które są prawdziwe, i to nie ze względu na treść występujących w nich pojęć pozalogicznych, lecz o których prawdziwości decyduje sama ich budowa. Mówiąc nieco dokładniej, będziemy rozpatrywali wyrażenia, dające się zbudować przy pomocy kwantyfikatorów i funktorów zdaniotwórczych z funkcji zdaniowych:

$$(\ast) \qquad \Phi(x), \quad \Psi(x, y), \quad \Theta(x, y, z), \quad \ldots,$$

i wśród wszystkich tych wyrażeń będziemy poszukiwali takich, które są prawdziwe dla dowolnych funkcji zdaniowych (*) [2]). Wyrażenia te nazwiemy — podobnie jak w Rozdziale II — *tautologiami* lub *prawami logicznymi.* Grają one zatem w rachunku kwantyfikatorów tę samą rolę, jaką odgrywały w rachunku zdań tautologie określone w Rozdziale II.

[1]) Ob. K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I,* Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), str. 173-198.

[2]) Litery Φ, Ψ, Θ, ... są więc tu zmiennymi, przebiegającymi zbiór wszystkich funkcji zdaniowych.

Zagadnienie należytego określenia tautologii jest jednak w rachunku kwantyfikatorów bez porównania trudniejsze niż w rachunku zdań. Pochodzi to stąd, że zdania mają tylko dwie wartości logiczne, prawdę i fałsz, funkcje zdaniowe zaś nie są ani prawdziwe, ani fałszywe, lecz ich wartość logiczna zależy od wartości, jaką nadajemy występującym w nich zmiennym. Na ogół tych wartości jest nieskończenie wiele (np. w przypadku zmiennych przebiegających zbiór liczb, punktów, i t. p.); dlatego rachunek kwantyfikatorów jest w odróżnieniu od rachunku zdań systemem infinistycznym: nie można oczekiwać, że uda się nam znaleźć metodę prób podobną do sprawdzania sposobem zerowo-jedynkowym, która by pozwoliła w zupełności scharakteryzować tautologie.

W niektórych prostych przypadkach możemy zorientować się na podstawie znaczenia, jakie przypisujemy stałym logicznym (funktorom zdaniotwórczym i kwantyfikatorom), że rozpatrywane wyrażenie jest prawdziwe dla wszelkich funkcji zdaniowych w nim występujących. Tak jest np. z wyrażeniem

$$\prod_x [\Phi(x) \rightarrow \Phi(x)].$$

Już jednak dla nieco dłuższych wyrażeń ta metoda, oparta na bezpośrednim wglądzie w sens wyrażenia, zawodzi. Nie jest na przykład bezpośrednio widoczne, że wyrażenie

$$\prod_y \sum_x \prod_u \sum_v [\Phi'(u, v) + \Phi(x, y)]$$

jest prawdziwe dla każdej funkcji zdaniowej Φ.

Z tego względu, jak również z uwagi na to, że pojęcie prawdziwości zdania nie jest bynajmniej jasne i zrozumiałe samo przez się, musimy rozejrzeć się za pewną metodą, która pozwalałaby nam ustalać prawdziwość zdań niezależnie od wszelkich intuicji.

Metoda, którą się posłużymy, nosi nazwę *aksjomatycznej*. Przyjmujemy w niej najpierw pewne określone wyrażenia za tautologie podstawowe (aksjomaty), nie uzasadniając bliżej ich wyboru. Naturalnym jest przyjęcie za tautologie podstawowe wszystkich tautologii rachunku zdań i wszystkich ich podstawień.

Przyjmujemy następnie kilka t. zw. *reguł wnioskowania*, t. j. operacji, które, wykonane na wyrażeniach, dają nowe wyrażenia. Wybór tych reguł jest zasadniczo dowolny; dbać jednak będziemy o to, by reguły wnioskowania, zastosowane do zdań intuicyjnie prawdziwych, prowadziły znów do takich zdań. W przeciwnym razie budowany przez nas rachunek byłby tylko formalną grą, nie zaś systemem logicznym, dającym się stosować w praktyce.

Potem już określamy tautologie jako wyrażenia, dające się uzyskać z aksjomatów przez wielokrotne stosowanie reguł wnioskowania.

Zaznaczmy od razu, że metoda aksjomatyczna ustępuje pod wieloma względami metodzie sprawdzania zerowo-jedynkowego. W rachunku zdań mogliśmy o każdym dowolnie danym wyrażeniu rozstrzygnąć (dokonując skończonej liczby prób) czy jest ono tautologią, czy nie.

Natomiast przy metodzie aksjomatycznej nie wydaje się to a priori możliwe. Możemy sprawdzić czy jedno-, dwu-, trzy- ... i n-krotne stosowanie reguł wnioskowania do określonych aksjomatów doprowadzi nas do danego wyrażenia, czy nie doprowadzi. Jeśli jednak wynik jest negatywny, to nie wiemy, czy jest to spowodowane tym, że w ogóle dowód nie istnieje, czy też tym, że dowód wymaga większej liczby kroków dowodowych.

Druga wada metody aksjomatycznej leży w tym, że nie daje nam ona żadnej pewności, czy w wyniku stosowania reguł wnioskowania do aksjomatów otrzymamy wszystkie wyrażenia intuicyjnie prawdziwe, czy tylko niektóre.

Dyskusją obu wspomnianych tu zagadnień zajmiemy się szerzej w Rozdziałach XI, § 8, XIII, §§ 6-8 i XIV. Na razie zauważymy tylko, że mimo braków i wad metody aksjomatycznej jest ona najdoskonalszą ze wszystkich, jakie znamy, i wiele kryteriów obiektywnych świadczy o tym, że zastąpienie jej metodą istotnie lepszą nie jest możliwe.

Przystąpimy obecnie do omówienia reguł wnioskowania. Wszystkie one mają postać następującą: jeśli pewne wyrażenie (lub wyrażenia) zostały już uznane za prawdziwe, to wolno też uznać za prawdziwe nowe wyrażenie, powstające z danych przez zastosowanie jednej z następujących operacji:

1. O p e r a c j a o d r y w a n i a. Operacja ta prowadzi od wyrażeń Φ i $\Phi \rightarrow \Psi$ do wyrażenia Ψ.

W myśl wyjaśnień z Rozdziału II, § 4, str. 11, operacja ta prowadzi zawsze od dwu wyrażeń prawdziwych do wyrażenia prawdziwego.

2. O p e r a c j a p o d s t a w i a n i a. Operacja ta prowadzi od funkcji zdaniowej $\Phi(x)$, zawierającej zmienną wolną x, do funkcji zdaniowej $\Phi(y)$, powstającej z $\Phi(x)$ przez zastąpienie zmiennej x zmienną y na każdym miejscu, gdzie zmienna x jest wolna, jednak przy założeniu, że zmienna y nie stanie się związana na żadnym miejscu, na którym zmienna x była wolna.

Jeśli założenie to nie jest spełnione, to operacja podstawiania wykonać się nie daje.

Łatwo zorientować się, że operacja podstawiania prowadzi od funkcji zdaniowej intuicyjnie prawdziwej znów do takiej funkcji zdaniowej. Istotnie, prawdziwość funkcji $\Phi(x)$ znaczy, że każdy przedmiot spełnia tę funkcję zdaniową, a ta własność jest niezależna od tego, czy za zmienną weźmiemy literę x, czy y. Zastrzeżenie, by zmienna y po podstawieniu nie stała się związana, wynika z odmiennej roli zmiennych wolnych i związanych; utożsamienie zmiennej wolnej i związanej zmieniłoby więc treść wyrażenia.

PRZYKŁADY. Podstawienie zmiennej y za zmienną x w funkcjach zdaniowych:

$$\prod_u [\Phi(x, u) \to \Psi(x)], \qquad \sum_x [\Phi(x) + \prod_y \Psi(x, y)] \to \sum_u \Theta(x, y, u),$$

daje:

$$\prod_u [\Phi(y, u) \to \Psi(y)], \qquad \sum_x [\Phi(x) + \prod_y \Psi(x, y)] \to \sum_u \Theta(y, y, u).$$

W funkcji zdaniowej

$$\sum_y \Phi(x, y) \to \prod_u \Theta(x, y, u)$$

podstawienie zmiennej y za zmienną x jest niewykonalne, bo po podstawieniu zmienna wolna x, występująca w poprzedniku, przeszłaby na zmienną związaną. Podobnie, niewykonalne jest podstawienie zmiennej x za zmienną y w funkcji zdaniowej

$$(^{**}) \qquad (y = 1) \to \prod_x [(x \neq 1) \to (y < x)].$$

Widzimy na tym przykładzie celowość zakazu, ograniczającego wykonalność podstawiania. Jeśli zmienne przebiegają zbiór liczb naturalnych, to funkcja zdaniowa (**) jest prawdziwa. Jeśli jednak zastąpimy zmienną wolną y przez zmienną x, to otrzymamy funkcję zdaniową

$$(x = 1) \to \prod_x [(x \neq 1) \to (x < x)],$$

którą już nie jest prawdziwa. Istotnie, liczba 1 nie spełnia tej funkcji zdaniowej, gdyż po wstawieniu jedynki na miejsce zmiennej wolnej x, otrzymujemy zdanie fałszywe: jeśli $1=1$, to każda liczba różna od 1 jest mniejsza od samej siebie.

3. Operacja opuszczania dużego kwantyfikatora. Operacja ta prowadzi od wyrażenia $\Phi \to \prod_x \Psi(x)$ do wyrażenia $\Phi \to \Psi(x)$.

Znów łatwo się przekonać, że operacja ta, zastosowana do funkcji zdaniowej prawdziwej, daje w wyniku zawsze funkcję zdaniową prawdziwą. Istotnie, prawdziwość wyrażenia $\Phi \to \prod_x \Psi(x)$ znaczy, że jeśli spełnione jest Φ, to dla każdego x zachodzi $\Psi(x)$. Zatem jeśli spełnione jest Φ, to musi być spełnione i $\Psi(x)$, a więc implikacja $\Phi \to \Psi(x)$ jest prawdziwa.

4. Operacja opuszczania małego kwantyfikatora. Operacja ta prowadzi od wyrażenia $\sum_x \Phi(x) \to \Psi$ do wyrażenia $\Phi(x) \to \Psi$.

Załóżmy prawdziwość wyrażenia $\sum_x \Phi(x) \to \Psi$. Jeśli spełnione jest wyrażenie $\Phi(x)$, to spełnione jest też wyrażenie $\sum_x \Phi(x)$, a więc w myśl założenia spełnione być musi i wyrażenie Ψ. Widzimy zatem, że prawdziwość zdania (lub funkcji zdaniowej) $\sum_x \Phi(x) \to \Psi$ pociąga za sobą prawdziwość funkcji zdaniowej $\Phi(x) \to \Psi$.

5. Operacja dołączania dużego kwantyfikatora. Operacja ta prowadzi od funkcji zdaniowej $\Phi \to \Psi(x)$, w której poprzedniku nie występuje zmienna wolna x, do funkcji zdaniowej lub zdania $\Phi \to \prod_x \Psi(x)$. Jeśli zmienna x jest wolna w poprzedniku funkcji zdaniowej $\Phi \to \Psi(x)$, to operacja dołączania kwantyfikatora dużego wykonać się nie daje.

Aby wytłumaczyć intuicyjną treść tej operacji i znaczenie zastrzeżenia, by zmienna x nie występowała w poprzedniku jako zmienna wolna, załóżmy prawdziwość wyrażenia $\Phi \to \Psi(x)$ i przyjmijmy, że zmienne przebiegają zbiór liczb naturalnych. Zdania (lub funkcje zdaniowe):

$$\Phi \to \Psi(1), \qquad \Phi \to \Psi(2), \qquad \Phi \to \Psi(3), \qquad \ldots$$

są więc wszystkie prawdziwe, a to nie znaczy nic innego, jak tylko, że wyrażenie $\Phi \to \prod_x \Psi(x)$ jest prawdziwe. Oczywiście, nie moglibyśmy tak wnioskować, gdyby zmienna x była wolna w Φ; można by wtedy tylko twierdzić, że zdanie $\prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)]$ jest prawdziwe.

6. Operacja dołączania małego kwantyfikatora. Operacja ta prowadzi od funkcji zdaniowej $\Phi(x) \to \Psi$, w której następniku nie występuje zmienna wolna x, do zdania (lub funkcji zdaniowej) $\sum_x \Phi(x) \to \Psi$.

Załóżmy prawdziwość funkcji zdaniowej $\Phi(x) \to \Psi$ i przypuśćmy, że istnieje przedmiot x_0, spełniający poprzednik. Zdanie $\Phi(x_0)$ jest więc prawdziwe, a ponieważ implikacja $\Phi(x_0) \to \Psi$ jest prawdziwa na mocy założenia, więc i zdanie Ψ musi być prawdziwe. Zatem zdanie (lub funkcja zdaniowa) $\sum_x \Phi(x) \to \Psi$ jest prawdziwe i widzimy, że stosowanie operacji dołączania małego kwantyfikatora do funkcji zdaniowej prawdziwej prowadzi do zdania (lub funkcji zdaniowej) prawdziwej. Jasne jest też, dlaczego niezbędne jest zastrzeżenie, by zmienna x nie występowała w następniku jako zmienna wolna: w przeciwnym razie z prawdziwości funkcji zdaniowej $\Phi(x) \to \Psi$ nie wynikałaby prawdziwość zdania $\Phi(x_0) \to \Psi$, lecz prawdziwość zdania $\Phi(x_0) \to \Psi(x_0)$, a więc moglibyśmy wywnioskować stąd tylko, że prawdziwe jest zdanie (lub funkcja zdaniowa) $\sum_x \Phi(x) \to \sum_x \Psi(x)$.

7. Operacja uogólniania. Operacja ta prowadzi od funkcji zdaniowej $\Phi(x)$ do funkcji zdaniowej (lub zdania) $\prod_x \Phi(x)$.

Uzasadnienie intuicyjne jest w tym wypadku oczywiste (por. podane dalej ćwiczenie 1, str. 58).

Zauważmy wreszcie, że wybór zmiennych x i y przy formułowaniu reguł 2-7 jest nieistotny. Będziemy stosowali te reguły do jakichkolwiek zmiennych, a więc np. dołączali kwantyfikator $\prod_u$ lub podstawiali zmienną u za zmienną t i t. p. — oczywiście, o ile spełnione są warunki, w których operacje te dają się wykonać.

Możemy podać obecnie dokładne określenie tautologii.

Definicja tautologii. Zdanie (lub funkcja zdaniowa) Φ nazywa się tautologią, jeśli istnieje skończony ciąg zdań lub funkcji zdaniowych

$$({}_*{}^*{}_*) \qquad \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n,$$

spełniających następujące trzy warunki:

1⁰ *Φ_n jest identyczne z Φ;*

2⁰ *Φ_1 jest tautologią rachunku zdań lub powstaje z tautologii rachunku zdań przez podstawienie pewnych wyrażeń na miejsce zmiennych zdaniowych;*

3⁰ *jeśli $1 < i \leqslant n$, to Φ_i bądź jest tautologią rachunku zdań (lub jej podstawieniem), bądź powstaje z jednego lub dwu wyrażeń Φ_j, Φ_k (gdzie $j < i$ oraz $k < i$) przez zastosowanie jednej z operacji 1-7.*

Zamiast mówić: *Φ jest tautologią*, pisać będziemy krótko $\vdash \Phi$ podobnie jak w Rozdziale II; często będziemy jednak dodawali słowo *tautologia* nawet wtedy, gdy występujący po nim znak $\vdash$ czyni je właściwie zbytecznym.

Ciąg $({}_*{}^*{}_*)$ nazywamy *dowodem* zdania (lub funkcji zdaniowej) Φ.

Przykłady tautologii poznamy w § 4; tutaj zwrócimy jeszcze uwagę na doniosłość tego pojęcia i podanego tu jego określenia. Mówiliśmy już poprzednio, że zadaniem logiki jest badanie formalnych kryteriów prawdziwości zdań. Tautologie są właśnie takimi zdaniami prawdziwymi formalnie; ich prawdziwość nie wynika ze znaczenia występujących w nich pojęć pozalogicznych, ani tym bardziej nie musi być uzasadniona przez porównanie z doświadczeniem (jak tego wymaga uzasadnienie praw przyrodniczych): prawdziwość tautologii wynika z samej ich budowy. Jest jasne, że zdania takie wyrażają najogólniejsze prawa, na których opieramy się w każdym rozumowaniu.

Określenie tautologii, z którym zapoznaliśmy się przed chwilą, pozwala uzasadniać te prawa w sposób zupełnie mechaniczny, nie odwołując się do żadnych intuicji, ani innych praw logicznych. Posiadanie takiej metody dowodów jest oczywiście bardzo ważne z uwagi na to, że tautologie logiczne mają być właśnie podstawowymi prawami myślenia, na których wszystkie inne będą się dopiero opierały. Jednocześnie stykamy się tutaj po raz pierwszy z charakterystyczną dla logiki tendencją zastępowania rozumowań intuicyjnych formalnymi przekształceniami wzorów logicznych [1]).

[1]) Myśl zastąpienia rozumowań rachunkiem formalnym powziął pierwszy G. W. Leibniz (1646-1716). Przypisywał on tej myśli wielką doniosłość, pisząc: *„Nikt inny, sądzę, tego nie spostrzegł, bo inaczej... porzuciłby wszystko, aby się tym zająć; nic bowiem większego człowiek nie może dokonać“*. Leibniz sam nie wprowadził jednak myśli swej w życie i dopiero w XX wieku udało się ją urzeczywistnić (zapewne jeszcze w sposób daleki od doskonałości).

ĆWICZENIA. 1. Udowodnić, nie opierając się na regule uogólniania, że *jeśli* $\vdash \Phi(x)$, to $\vdash \prod_x \Phi(x)$.

Odp.: Dowodem tautologii $\vdash \prod_x \Phi(x)$ jest ciąg funkcji zdaniowych:

$$\Phi(x) \to [(p \to p) \to \Phi(x)],\quad \Phi(x),\quad (p \to p) \to \Phi(x),\quad (p \to p) \to \prod_x \Phi(x),\quad p \to p,\quad \prod_x \Phi(x)$$

poprzedzony dowodem funkcji zdaniowej $\Phi(x)$.

Czwarta z nich otrzymuje się z trzeciej przez zastosowanie operacji dołączania kwantyfikatora ogólnego.

2. Wykazać, że jeśli $\vdash \Phi \to \Psi(x)$ i zmienna x nie jest wolna w Φ, to $\vdash \Phi \to \prod_{\Theta(x)} \Psi(x)$.

Uogólnić w podobny sposób inne reguły wnioskowania na kwantyfikatory o ograniczonym zakresie.

3. Udowodnić, że podana w tekście definicja tautologii równoważna jest następującej:

$\vdash \Phi$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg* $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ *taki, że:*

(1*) Φ_n *jest identyczne z* Φ;

(2*) Φ_1 *bądź jest podstawieniem tautologii rachunku zdań, bądź ma jedną z postaci:*

$$\prod_x \Psi(x) \to \Psi(x),\quad \Psi(x) \to \sum_x \Psi(x),\quad \Theta \equiv \prod_x \Theta,\quad \Theta \equiv \sum_x \Theta,$$

gdzie zmienna x *nie jest wolną w* Θ (litera x w tych wyrażeniach może być przy tym zastąpiona jakąkolwiek inną);

(3*) *jeśli* $1 < i \leqslant n$, *to bądź* Φ_i *spełnia warunek* (2*), *bądź istnieją takie mniejsze od* i *liczby* j, k, *że* Φ_i *powstaje z* Φ_j *przez operację podstawiania, albo* Φ_i *powstaje z* Φ_j *i* Φ_k *przez operację odrywania, albo wreszcie* Φ_j *ma postać* $\Psi(x) \to \Theta(x)$, *a* Φ_i *postać* $\prod_x \Psi(x) \to \prod_x \Theta(x)$ *lub postać* $\sum_x \Psi(x) \to \sum_x \Theta(x)$ (litera x może być przy tym zastąpiona dowolną inną zmienną).

§ 4. Przykłady tautologii. Przystępujemy obecnie do wyprowadzenia na podstawie definicji, podanej w § 3, szeregu ważnych tautologii, na które bezustannie powołujemy się w najprostszych nawet rozważaniach matematycznych. Nie mając zdefiniowanego ogólnie pojęcia funkcji zdaniowej, wzory, jakie podamy, uznać musimy raczej za *schematy tautologii* niż za konkretne tautologie: dopiero zastępując wyrażenia $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, $\Phi(x,y)$ i t. d. konkretnymi funkcjami zdaniowymi, otrzymamy z tych schematów konkretne tautologie.

(1) $$\vdash \prod_x \Phi(x) \to \Phi(y).$$

Dowód. Z $\vdash \prod_x \Phi(x) \to \prod_x \Phi(x)$ otrzymujemy $\vdash \prod_x \Phi(x) \to \Phi(x)$, stosując operację opuszczania dużego kwantyfikatora. Następnie podstawiamy zmienną y zamiast zmiennej x (zakładamy tu milcząco, że spełnione są warunki, w których operacja podstawiania jest wykonalna, a więc że zmienna y po podstawieniu nie stanie się nigdzie zmienną związaną).

Tautologia (1) nosi nazwę prawa *dictum de omni*. Stwierdza ona, że jeśli wszystkie przedmioty (rozważanego zbioru) mają pewną własność, to i dowolny poszczególny przedmiot należący do tego zbioru własność tę posiada.

(2) $$\vdash \Phi(y) \to \sum_x \Phi(x).$$

Dowód. Z $\vdash \sum_x \Phi(x) \to \sum_x \Phi(x)$ otrzymujemy $\vdash \Phi(x) \to \sum_x \Phi(x)$, stosując operację opuszczania małego kwantyfikatora. Następnie podstawiamy zmienną y za zmienną x, znów zakładając, że operacja ta jest wykonalna (dla pewnych zatem funkcji zdaniowych Φ należy podstawić za zmienną x nie zmienną y, lecz jakąś inną zmienną).

Zdania, zaczynające się od kwantyfikatora szczegółowego, noszą nazwę *egzystencjalnych*. Prawo (2) podaje pewien sposób dowodzenia takich zdań: jeśli mianowicie uda się nam wykazać, że jakiś przedmiot a ma własność, wyrażoną funkcją zdaniową $\Phi(x)$, to zdanie $\sum_x \Phi(x)$ będzie tym samym udowodnione. Np. 2 jest liczbą pierwszą i parzystą, zatem istnieje liczba pierwsza i parzysta. Takie dowody zdań egzystencjalnych możnaby nazwać dowodami przez podanie przykładu. Później zapoznamy się z innymi formami dowodów zdań egzystencjalnych (por. § 7, str. 74), zaznaczymy jednak od razu, że te inne dowody nie przez wszystkich logików są uznawane.

Z (1) i (2) wynika na mocy prawa sylogizmu i reguły odrywania

(3) $$\vdash \prod_x \Phi(x) \to \sum_x \Phi(x).$$

Z tautologii (3) widać, że reguły wnioskowania dostosowane są do przypadku, gdy zmienne przebiegają zbiór, zawierający choćby jeden przedmiot [1]), w przeciwnym bowiem razie następnik

[1]) Reguły wnioskowania, dające się zastosować i do przypadku pustego zakresu zmiennych, podał S. Jaśkowski w pracy: *On the rules of suppositions in formal logic*, Studia Logica 1 (1934), str. 27-30. Łatwo zdać sobie sprawę, że samo używanie zmiennych wolnych zakłada implicite istnienie przedmiotów, należących do zakresu zmienności tych zmiennych.

we wzorze (3) byłby zawsze fałszywy, podczas gdy poprzednik mógłby być prawdziwy.

Jeśli założymy, że w $\Phi(x)$ dopuszczalne jest podstawienie zmiennej y za zmienną x i że zmienna y nie jest wolna w $\Phi(x)$, to będziemy mieć tautologię (1), z której przez zastosowanie operacji dołączania dużego kwantyfikatora otrzymamy $\prod_x \Phi(x) \to \prod_y \Phi(y)$. Równie łatwo udowodnimy implikację odwrotną. Wobec $\vdash (p \to q) \to [(q \to p) \to (p \equiv q)]$ otrzymamy więc

(4) $$\vdash \prod_x \Phi(x) \equiv \prod_y \Phi(y).$$

W podobny sposób dowodzi się tautologii

(5) $$\vdash \sum_x \Phi(x) \equiv \sum_y \Phi(y).$$

Z tautologii (4) i (5) wynika, że zastąpienie w funkcji zdaniowej zmiennych związanych innymi zmiennymi (tak jednak, by spełnione były założenia, przy których wyprowadziliśmy tautologie (4) i (5)), powoduje przejście funkcji zdaniowej w wyrażenie równoważne. Tak np. dla zmiennych, przebiegających zbiór liczb naturalnych, zdania:

$$\sum_u \prod_x [(x \neq u) \to u < x)], \qquad \sum_v \prod_y [(y \neq v) \to (v < y)]$$

są sobie równoważne; natomiast zdanie $\prod_x \sum_y (x < y)$ nie jest równoważne zdaniu $\prod_x \sum_x (x < x)$.

Podobną własność mają także zmienne związane, występujące we wzorach matematycznych: zmienną związaną można zastąpić dowolną inną zmienną, byleby żadna zmienna wolna nie stała się wtedy związaną. Np.:

$$\int_0^1 \sin xz\, dz = \int_0^1 \sin xy\, dy \neq \int_0^1 \sin x^2\, dx.$$

(6) $$\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \cdot \Phi(y) \to \Psi(y).$$

Dowód. Z (1) wynika

$$\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \to [\Phi(y) \to \Psi(y)]$$

(t. zn. stosujemy tautologię (1) nie do funkcji zdaniowej $\Phi(x)$, lecz do funkcji zdaniowej $\Phi(x) \to \Psi(x)$; tautologia (1) była udowodniona dla wszystkich możliwych funkcji zdaniowych). Podstawmy teraz w tautologii

$$\vdash [p \to (q \to r)] \to (p \cdot q \to r),$$

za zmienne p, q, r odpowiednio wyrażenia $\prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)]$, $\Phi(y)$ i $\Psi(y)$. Po oderwaniu otrzymamy tautologię (6).

Prawo (6) znane było logice tradycyjnej i niesłusznie utożsamiane z t. zw. *sylogizmem Barbara* (por. Rozdział VI, § 3). Na tautologii (6) opieramy się np. w takim rozumowaniu: każda liczba podzielna przez 2 i przez 3 jest podzielna przez 6; 12 jest podzielne przez 2 i przez 3; zatem 12 jest podzielne przez 6.

(7) $$\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \to [\prod_x \Phi(x) \to \prod_x \Psi(x)].$$

Dowód. Opierając się na prawie mnożenia implikacji (Rozdział II, § 10, str. 29), otrzymujemy z (1)

$$\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \cdot \prod_x \Phi(x) \to \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \cdot \Phi(y);$$

stąd i z (6) wynika przez zastosowanie prawa sylogizmu

$$\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \cdot \prod_x \Phi(x) \to \Psi(y).$$

Dołączamy tu w następniku kwantyfikator $\prod_y$ i zastępujemy zmienną związaną y przez x. Wreszcie przekształcamy otrzymany wzór na mocy tautologii $\vdash (p \cdot q \to r) \to [p \to (q \to r)]$.

Tautologia (7) nazywa się *prawem rozkładania dużego kwantyfikatora*. Treść jej nietrudno zilustrować geometrycznie, zakładając np., że zmienne przebiegają zbiór punktów prostej. Niech mianowicie A oznacza wykres funkcji zdaniowej $\Phi(x)$, a B — wykres funkcji zdaniowej $\Psi(x)$. Założenie tautologii (7) stwierdza, że każdy punkt zbioru A należy też do B, t.j. że A jest częścią B. Zdania $\prod_x \Phi(x)$ i $\prod_x \Psi(x)$ orzekają, że A i B pokrywają całą prostą. Widzimy stąd, że tautologia (7) wyraża następującą banalną prawdę geometryczną: jeśli zbiór punktów A jest zawarty w B i przy tym A zawiera wszystkie punkty, to i B zawiera wszystkie punkty.

(8) $$\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \to [\sum_x \Phi(x) \to \sum_x \Psi(x)].$$

Dowód. Z (1) otrzymujemy

(i) $$\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \to [\Phi(y) \to \Psi(y)].$$

Z (2) wynika $\vdash \Psi(y) \to \sum_x \Psi(x)$, skąd na mocy tautologii

$$\vdash (p \to q) \to [(r \to p) \to (r \to q)]$$

otrzymamy

(ii) $$\vdash [\Phi(y) \to \Psi(y)] \to [\Phi(y) \to \sum_x \Psi(x)].$$

Opierając się na prawie sylogizmu, otrzymujemy z (i) i (ii):

(iii) $$\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \to [\Phi(y) \to \sum_x \Psi(x)].$$

Zastosujmy teraz do (iii) następującą tautologię, zwaną *prawem komutacji:*

$$\vdash [p \to (q \to r)] \to [q \to (p \to r)],$$

która pozwala zmieniać porządek poprzedników w implikacji $p \to (q \to r)$. Otrzymujemy wówczas:

$$\vdash \Phi(y) \to \{\prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \to \sum_x \Psi(x)\}.$$

W tej tautologii dołączamy w poprzedniku mały kwantyfikator $\sum_y$ (zob. § 3, operacja 6, str. 56), po czym zmieniamy zmienną związaną y na x (por. tautologię (5)). Wreszcie stosujemy raz jeszcze prawo komutacji i otrzymujemy tautologię (8).

Tautologia (8) nazywa się *prawem rozkładania małego kwantyfikatora*. Interpretacja geometryczna jest równie prosta jak dla prawa (7): jeśli zbiór A jest zawarty w B, to z założenia, że A ma choć jeden element, wynika, że i B ma choć jeden element.

Zbliżona do (8) jest tautologia

(9) $$\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi] \to [\sum_x \Phi(x) \to \Psi],$$

w której Ψ jest zdaniem lub funkcją zdaniową, nie zawierającą zmiennej wolnej x.

Dowód. Prawo (1) daje

$$\vdash \prod_x [\Phi(x) \to \Psi] \to [\Phi(y) \to \Psi].$$

Stosując prawo komutacji, otrzymamy

$$\vdash \Phi(y) \to \{\prod_x [\Phi(x) \to \Psi] \to \Psi\},$$

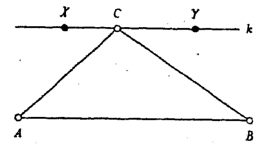
po czym stosujemy to samo postępowanie co w dowodzie tautologii (8).

Tautologii (9) używamy bardzo często w dowodach matematycznych, mianowicie wtedy, gdy w trakcie dowodzenia konstruujemy różne przedmioty (liczby, punkty, funkcje i t. d.), nie figurujące w tezie twierdzenia, lecz potrzebne tylko dla dowodu.

Dla przykładu zanalizujemy dowód następującego twierdzenia geometrycznego: *suma kątów w trójkącie równa się* 180^0.

Rozpatrzmy dowolny trójkąt ABC. Niech k będzie prostą, przechodzącą przez wierzchołek C i równoległą do AB, a X i Y

takimi punktami tej prostej, że C leży między nimi (p. rys. 2). Z pewnika Euklidesa wynika w znany sposób, że kąt BAC przystaje do kąta XCA, kąt zaś ABC — do kąta YCB. Zatem suma kątów trójkąta jest równa sumie kątów XCA, ACB i YCB, t. j. kątowi XCY czyli (zgodnie z definicją kąta półpełnego) 180^0.



Rys. 2

To rozumowanie streszcza się w następującym wzorze:

(i) $$\prod_{kXY} [(k \text{ przechodzi przez } C) \cdot (k \parallel AB) \cdot (X \text{ i } Y \text{ leżą na } k) \cdot (C \text{ leży między } X \text{ a } Y) \to (\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^0)].$$

Z drugiej strony, pewniki geometrii pouczają nas, że istnieją: prosta k, równoległa do prostej AB i przechodząca przez C, oraz takie punkty X i Y na k, że C leży między X a Y:

(ii) $$\sum_{kXY} [(k \text{ przechodzi przez } C) \cdot (k \parallel AB) \cdot (X \text{ i } Y \text{ leżą na } k) \cdot (C \text{ leży między } X \text{ a } Y)].$$

Ze wzorów (i) oraz (ii) wyprowadzamy teraz twierdzenie $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^0$, opierając się na tautologii (9). Przedmiotem, zbudowanym specjalnie dla dowodu twierdzenia, jest w tym przykładzie: prosta k oraz punkty X i Y.

Jest rzeczą ciekawą, że prawdziwa jest też implikacja odwrotna do tautologii (9):

(10) $$\vdash [\sum_x \Phi(x) \to \Psi] \to \prod_x [\Phi(x) \to \Psi].$$

Dowód. Na podstawie prawa sylogizmu mamy:

$$\vdash [\Phi(y) \to \sum_x \Phi(x)] \to \{[\sum_x \Phi(x) \to \Psi] \to [\Phi(y) \to \Psi]\}.$$

Na mocy (2) możemy do tej tautologii zastosować operację odrywania, co daje

$$\vdash [\sum_x \Phi(x) \to \Psi] \to [\Phi(y) \to \Psi].$$

Pozostaje dołączyć duży kwantyfikator w następniku i zmienić zmienną związaną y na x (na mocy tautologii (4)).

ĆWICZENIA. 1. Zanalizować pod względem zastosowania tautologii (9) dowód twierdzenia: *jeśli* $g = \lim_n a_n$ *i* $g' = \lim_n a'_n$, *to* $g + g' = \lim_n (a_n + a'_n)$.

2. Zbadać prawdziwość implikacji odwrotnych do (7) i (8).

3. Zbadać prawdziwość implikacji

$$\sum_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \to [\sum_x \Phi(x) \to \sum_x \Psi(x)].$$

4. Udowodnić, że

$$\vdash \sum_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \equiv \left[\prod_x \Phi(x) \to \sum_x \Psi(x)\right],$$

i okazać, że wyrażenie $\prod_x [\Phi(x) \to \Psi(x)] \equiv \left[\sum_x \Phi(x) \to \prod_x \Psi(x)\right]$ nie jest tautologią.

§ 5. Tautologie dotyczące rozdzielności. Wyprowadzimy obecnie tautologie, które można by nazwać *prawami rozdzielności*. Idzie mianowicie o związki między zdaniami

$$\prod_x [\Phi(x) \circ \Psi(x)] \quad \text{i} \quad \prod_x \Phi(x) \circ \prod_x \Psi(x)$$

oraz

$$\sum_x [\Phi(x) \circ \Psi(x)] \quad \text{i} \quad \sum_x \Phi(x) \circ \sum_x \Psi(x),$$

gdzie znak $\circ$ zastąpić należy którymkolwiek z funktorów zdaniotwórczych dwuargumentowych. Zauważmy, że już prawo rozkładania dużego kwantyfikatora miało charakter takiego prawa rozdzielności.

(11) $$\vdash \prod_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)] \equiv \left[\prod_x \Phi(x) \cdot \prod_x \Psi(x)\right].$$

D o w ó d. Z tautologii $\vdash p \cdot q \to p$ otrzymujemy

$$\vdash \Phi(x) \cdot \Psi(x) \to \Phi(x).$$

Zastosujmy do tej tautologii operację uogólniania (§ 3, str. 56), a następnie prawo rozkładania dużego kwantyfikatora. Tak otrzymujemy

$$\vdash \prod_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)] \to \prod_x \Phi(x).$$

W podobny sposób dowodzimy, że

$$\vdash \prod_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)] \to \prod_x \Psi(x),$$

a więc korzystając z tautologii $\vdash (p \to q) \to [(p \to r) \to (p \to q \cdot r)]$, otrzymamy

$$\vdash \prod_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)] \to \left[\prod_x \Phi(x) \cdot \prod_x \Psi(x)\right].$$

Aby udowodnić implikację odwrotną, wychodzimy z tautologii

$$\vdash \prod_x \Phi(x) \to \Phi(y) \quad \text{i} \quad \vdash \prod_x \Psi(x) \to \Psi(y).$$

Mnożymy te dwie implikacje przez siebie, korzystając z tautologii $\vdash (p \to q) \to [(r \to s) \to (p \cdot r \to q \cdot s)]$. Do otrzymanej w ten sposób tautologii

$$\vdash \prod_x \Phi(x) \cdot \prod_x \Psi(x) \to \Phi(y) \cdot \Psi(y)$$

stosujemy operację dołączania dużego kwantyfikatora i zmieniamy zmienną związaną y na x. Dowód prawa (11) jest w ten sposób zakończony.

Geometryczny sens prawa (11) jest bardzo prosty: stwierdza ono, że jeśli część wspólna dwu zbiorów liniowych A i B zawiera wszystkie punkty prostej, to każdy ze zbiorów A i B też zawiera wszystkie punkty prostej, i na odwrót.

Istnieje ścisły związek między prawem (11) a znanymi nam z rachunku zdań prawami łączności i przemienności koniunkcji. Jeśli bowiem założyć, że zmienna x przebiega zbiór skończony, składający się z przedmiotów $a, b, \ldots, k$, to można zastąpić kwantyfikatory przez wielokrotne koniunkcje. Lewa strona prawa (11) jest więc wtedy równoważna koniunkcji

$$[\Phi(a) \cdot \Psi(a)] \cdot [\Phi(b) \cdot \Psi(b)] \cdot \ldots \cdot [\Phi(k) \cdot \Psi(k)],$$

prawa zaś — koniunkcji

$$[\Phi(a) \cdot \Phi(b) \cdot \ldots \cdot \Phi(k)] \cdot [\Psi(a) \cdot \Psi(b) \cdot \ldots \cdot \Psi(k)].$$

Na mocy praw przemienności i łączności koniunkcji obie strony prawa (11) są więc równoważne.

(12) $$\vdash \sum_x [\Phi(x) + \Psi(x)] \equiv \left[\sum_x \Phi(x) + \sum_x \Psi(x)\right].$$

D o w ó d tego prawa otrzymujemy z dowodu prawa (11) przez następujące przekształcenia formalne: znaki $\cdot$ i $\prod$ należy wszędzie zastąpić przez znaki $+$ i $\sum$, a wszystkie implikacje należy zastąpić odwrotnymi. W pierwszej części dowodu należy się powołać na prawo rozkładania nie kwantyfikatora dużego, lecz małego.

Geometrycznie prawo (12) orzeka, że jeśli suma dwu zbiorów A i B zawiera choć jeden punkt, to co najmniej jeden ze zbiorów A i B zawiera choć jeden punkt i na odwrót.

Prawo (12) pozostaje w analogicznym stosunku do praw przemienności i łączności dla alternatywy, jak prawo (11) do analogicznych praw dla koniunkcji.

Godną uwagi jest dwoistość praw (11) i (12): zamieniając symbole $\prod$ i $\cdot$ na $\sum$ i $+$, otrzymujemy z (11) prawo (12) i na odwrót. Taką dwoistość wzorów odnajdziemy w wielu jeszcze przykładach.

(13) $$\vdash \left[\prod_x \Phi(x) + \prod_x \Psi(x)\right] \to \prod_x [\Phi(x) + \Psi(x)].$$

D o w ó d. Z tautologii $\vdash p \to (p+q)$ wynika

$$\vdash \Phi(x) \to [\Phi(x) + \Psi(x)],$$

skąd przez uogólnienie i rozkład dużego kwantyfikatora otrzymamy

$$\vdash \prod_x \Phi(x) \to \prod_x [\Phi(x) + \Psi(x)].$$

W podobny sposób wykazujemy, że

$$\vdash \prod_x \Psi(x) \to \prod_x [\Phi(x) + \Psi(x)],$$

a stąd na mocy tautologii $\vdash (p \to r) \to \{(q \to r) \to [(p + q) \to r]\}$ wynika prawo (13).

Dwoiste względem (13) jest prawo

(14) $$\vdash \sum_x [\Phi(x) \cdot \Psi(x)] \to [\sum_x \Phi(x) \cdot \sum_x \Psi(x)].$$

D o w ó d. Korzystając z tautologii

$$\vdash (p \to q) \to [(r \to s) \to (p \cdot r \to q \cdot s)],$$

mnożymy przez siebie stronami implikacje:

$$\vdash \Phi(y) \to \sum_x \Phi(x), \qquad \vdash \Psi(y) \to \sum_x \Psi(x)$$

i otrzymujemy

$$\vdash \Phi(y) \cdot \Psi(y) \to \sum_x \Phi(x) \cdot \sum_x \Psi(x).$$

Wystarcza teraz zastosować operację dołączania małego kwantyfikatora i zmienić zmienną związaną y na x.

Z praw (13) i (14) wnosimy, że rozdzielność kwantyfikatora dużego (małego) względem alternatywy (koniunkcji) zachodzi w jedną stronę. Wykażemy teraz, że jeśli tylko jeden składnik alternatywy (czynnik koniunkcji) zawiera zmienną wolną x, to rozdzielność zachodzi w obie strony:

(15) $$\vdash \prod_x [\Psi + \Phi(x)] \equiv [\Psi + \prod_x \Phi(x)],$$

(16) $$\vdash \sum_x [\Psi \cdot \Phi(x)] \equiv \Psi \cdot \sum_x \Phi(x).$$

Udowodnimy obydwa te prawa jednocześnie. Z (1) i (2) otrzymujemy na mocy praw dodawania i mnożenia implikacji (Rozdział II, § 10, str. 29):

$$\vdash [\Psi + \prod_x \Phi(x)] \to [\Psi + \Phi(y)], \qquad \vdash \Psi \cdot \Phi(y) \to \Psi \cdot \sum_x \Phi(x).$$

Stosujemy teraz operacje dołączania kwantyfikatorów i zmieniamy zmienne związane y na x:

(i) $$\vdash [\Psi + \prod_x \Phi(x)] \to \prod_x [\Psi + \Phi(x)], \qquad \vdash \sum_x [\Psi \cdot \Phi(x)] \to \Psi \cdot \sum_x \Phi(x).$$

Aby wykazać słuszność implikacji odwrotnych, zauważmy, że z (1) i (2) wynikają tautologie:

$$\vdash \prod_x [\Psi + \Phi(x)] \to [\Psi + \Phi(y)], \qquad \vdash \Psi \cdot \Phi(y) \to \sum_x [\Psi \cdot \Phi(x)].$$

Przekształćmy te tautologie na mocy praw rachunku zdań:

(ii) $$\vdash [p \to (q + r)] \equiv (p \cdot q' \to r), \qquad \vdash (p \cdot q \to r) \equiv [q \to (p \to r)].$$

Otrzymamy wówczas:

$$\vdash \prod_x [\Psi + \Phi(x)] \cdot \Psi' \to \Phi(y), \qquad \vdash \Phi(y) \to \{\Psi \to \sum_x [\Psi \cdot \Phi(x)]\}.$$

Do tych tautologii stosujemy operacje dołączania kwantyfikatorów i zmieniamy zmienne związane y na x. Przekształcając wreszcie otrzymane w ten sposób tautologie na mocy równoważności (ii), otrzymujemy:

$$\vdash \prod_x [\Psi + \Phi(x)] \to [\Psi + \prod_x \Phi(x)], \qquad \vdash \Psi \cdot \sum_x \Phi(x) \to \sum_x [\Psi \cdot \Phi(x)].$$

Na mocy (i) wynikają stąd od razu prawa (15) i (16).

Tautologie (i) można by też wyprowadzić z praw (13) i (14), opierając się na następujących dwu prawach, które stwierdzają, że jeśli poprzedzimy kwantyfikatorem wyrażenie nie zawierające zmiennej, to otrzymamy wyrażenie równoważne poprzedniemu:

(17) $$\vdash \prod_x \Psi \equiv \Psi, \qquad \vdash \sum_x \Psi \equiv \Psi.$$

D o w ó d. Do implikacji $\vdash \Psi \to \Psi$ stosujemy w następniku operację dołączania dużego kwantyfikatora oraz w poprzedniku operację dołączania małego kwantyfikatora. Operacje te są wykonalne, gdyż zmienna x nie występuje w Ψ. W ten sposób uzyskujemy tautologie $\vdash \Psi \to \prod_x \Psi$ i $\vdash \sum_x \Psi \to \Psi$. Implikacji odwrotnych dowodzimy, stosując do tautologii $\vdash \prod_x \Psi \to \prod_x \Psi$ operację opuszczania dużego kwantyfikatora, a do tautologii $\vdash \sum_x \Psi \to \sum_x \Psi$ — małego.

ĆWICZENIA. 1. Podać przykłady funkcji zdaniowych $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$, dla których implikacje odwrotne do (13) i (14) byłyby fałszywe.

2. Z jakich praw rachunku zdań uzyskać można prawa (13), (14), (15) i (16), gdy zmienna x przebiega zbiór skończony?

3. Udowodnić, że:

$$\vdash \prod_x [\Phi(x) \equiv \Psi(x)] \to [\prod_x \Phi(x) \equiv \prod_x \Psi(x)],$$

$$\vdash \prod_x [\Phi(x) \equiv \Psi(x)] \to [\sum_x \Phi(x) \equiv \sum_x \Psi(x)].$$

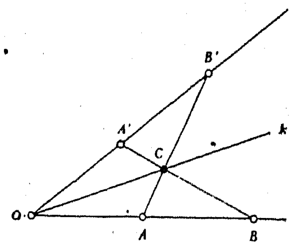
Zbadać prawdziwość implikacji odwrotnych.

4. Zbadać rozdzielność kwantyfikatora ogólnego i szczegółowego względem funktorów: dyzjunkcji i jednoczesnego zaprzeczenia (por. Rozdział II, § 7, str. 16).

5. Uogólnić prawa (1)-(17) na przypadek, gdy występują w nich kwantyfikatory o ograniczonym zakresie.

§ 6. Zastosowania do dowodów matematycznych. Podamy tu dwa dowody matematyczne, w których korzysta się z kilku spośród tautologii (1)-(17).

1. Dowód istnienia dwusiecznej dowolnego kąta przeprowadzić można, jak następuje. Na obu ramionach kąta odkładamy od wierzchołka O odcinki OA, AB, OA' i $A'B'$, wszystkie przystające do siebie (t. j. równej długości). Następnie łączymy A z B' i B z A'. Prosta k, łącząca O z punktem przecięcia C prostych AB' i BA', jest dwusieczną (rys. 3).



Rys. 3.

Rozumowanie, prowadzące do tego wniosku, opiera się na pewnych twierdzeniach geometrycznych i na pewnych prawach logicznych. Przyjmiemy bez dowodu twierdzenia geometryczne, uzasadnimy zaś szczegółowo przekształcenia logiczne.

Funkcję zdaniową: *A i B leżą na jednym ramieniu kąta, A' i B' na drugim oraz odcinki OA, AB, OA' i $A'B'$ przystają do siebie* zapiszemy dla krótkości jako $\Phi(X)$, przy czym litera X zastępuje tu układ liter O, A, A', B, B'. Niech $\Psi(X, C)$ będzie funkcją zdaniową:

C leży na prostych AB' i $A'B$,

$\Theta(C, k)$ — funkcją zdaniową:

k jest prostą OC

i wreszcie $\Delta(k)$ — funkcją zdaniową:

k jest dwusieczną danego kąta.

Przyjmujemy za udowodnione następujące cztery twierdzenia geometryczne:

(i) $$\prod_X [\Phi(X) \to \sum_C \Psi(X, C)],$$

(ii) $$\prod_{XCk} [\Phi(X) \cdot \Psi(X, C) \cdot \Theta(C, k) \to \Delta(k)],$$

(iii) $$\sum_X \Phi(X),$$

(iv) $$\prod_C \sum_k \Theta(C, k).$$

Pierwsze z nich orzeka, że proste AB' i $A'B$ przecinają się, drugie — że kąty COA i COA' przystają do siebie, trzecie — że na każdym z ramion kąta można odłożyć odcinki OA, AB, OA' i $A'B'$ przystające do siebie, wreszcie czwarte — że przez punkty O i C zawsze przechodzi prosta [1]).

Zastosujmy teraz do twierdzeń (i)-(iv) następujące przekształcenia logiczne. Z (ii) wynika na mocy (1):

$$\prod_k [\Phi(X) \cdot \Psi(X, C) \cdot \Theta(C, k) \to \Delta(k)].$$

Stosując prawo rozkładania małego kwantyfikatora i przekształcając poprzednik na mocy prawa (16), otrzymamy:

$$\Phi(X) \cdot \Psi(X, C) \cdot \sum_k \Theta(C, k) \to \sum_k \Delta(k),$$

czyli (na mocy tautologii $\vdash (p \cdot q \to r) \equiv [q \to (p \to r)]$):

$$\sum_k \Theta(C, k) \to [\Phi(X) \cdot \Psi(X, C) \to \sum_k \Delta(k)].$$

Zastosujmy do tego twierdzenia operację uogólniania, a następnie prawo rozkładania kwantyfikatora $\prod_C$. Po oderwaniu twierdzenia (iv), otrzymujemy:

$$\prod_C [\Phi(X) \cdot \Psi(X, C) \to \sum_k \Delta(k)],$$

skąd na mocy praw (16) i (9) wynika:

$$\Phi(X) \cdot \sum_C \Psi(X, C) \to \sum_k \Delta(k).$$

Twierdzenie to przekształcamy na mocy tautologii

$$\vdash (p \cdot q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)],$$

otrzymując:

$$[\Phi(X) \to \sum_C \Psi(X, C)] \to [\Phi(X) \to \sum_k \Delta(k)].$$

Stosujemy znów operację uogólniania i prawo rozkładania dużego kwantyfikatora. Po oderwaniu (i) wyniknie stąd:

$$\prod_X [\Phi(X) \to \sum_k \Delta(k)],$$

czyli na mocy (9)

$$\sum_X \Phi(X) \to \sum_k \Delta(k).$$

Odrywając (iii), otrzymamy już twierdzenie $\sum_k \Delta(k)$, którego mieliśmy dowieść.

[1]) Twierdzenia te można wyprowadzić np. z aksjomatów geometrycznych Hilberta. Zob. słynną książkę D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, wyd. 7-e, Lipsk-Berlin, 1930, str. 1-33.

Widzimy z tego przykładu, jak liczne i różnorodne są prawa logiczne, na których opiera się tak proste twierdzenie.

Zauważmy, że i twierdzenia (i)-(iv) można by wyprowadzić podobnym rachunkiem logicznym z aksjomatów geometrii. Wywód taki byłby jednak niezmiernie długi. Matematyk musi więc w swych dowodach pomijać szereg przekształceń logicznych i zastępować rozumowaniami intuicyjnymi świadome stosowanie tautologii logicznych. Każde jednak intuicyjne rozumowanie da się (po większej lub mniejszej pracy) zastąpić formalnym rachunkiem logicznym.

2. Uproszczenie definicji granicy. W tym przykładzie zmienna n przebiegać będzie zbiór N liczb naturalnych, a zmienne x i y — zbiór liczb rzeczywistych. Funkcja zdaniowa $n\in N$ będzie więc miała takie samo znaczenie jak w § 2 (ob. str. 49, przykład 1).

Załóżymy, że $\Phi(x)$ jest funkcją zdaniową, dla której prawdziwe jest twierdzenie:

(i) $$\prod_{xy}[\Phi(x)\cdot(y>x)\to\Phi(y)].$$

Ponadto oprzemy się na dwu prawach arytmetycznych:

(ii) $$\prod_{n\in N}\left(\frac{1}{n}>0\right)$$ (iii) $$\prod_{x>0}\sum_{n\in N}\left(x>\frac{1}{n}\right).$$

Udowodnimy następującą równoważność:

(iv) $$\prod_{x>0}\Phi(x)\equiv\prod_{n\in N}\Phi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Z (1) i z definicji kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie wynika:

$$\prod_{x>0}\Phi(x)\to[(x>0)\to\Phi(x)],$$

skąd wobec $\vdash[p\to(q\to r)]\to\{(s\to q)\to[p\to(s\to r)]\}$ otrzymujemy:

$$[(n\in N)\to(x>0)]\to\left\{\prod_{x>0}\Phi(x)\to[(n\in N)\to\Phi(x)]\right\}.$$

Podstawmy ułamek $\frac{1}{n}$ za zmienną x. Po oderwaniu twierdzenia $(n\in N)\to\left(\frac{1}{n}>0\right)$, wynikającego z (ii) na mocy (1), otrzymujemy:

$$\prod_{x>0}\Phi(x)\to\left[(n\in N)\to\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

a więc po dołączeniu kwantyfikatora $\prod_n$:

(v) $$\prod_{x>0}\Phi(x)\to\prod_{n\in N}\Phi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dla dowodu implikacji odwrotnej stosujemy (1) do (i) i podstawiamy zmienną x za zmienną y, a ułamek $\frac{1}{n}$ za zmienną x:

(vi) $$\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(x>\frac{1}{n}\right)\to\Phi(x).$$

Z (1) wynika dalej:

$$\prod_{n\in N}\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\to\left[n\in N\to\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

skąd na mocy tautologii $\vdash[p\to(q\to r)]\to(p\cdot q\cdot s\to r\cdot s)$:

$$\prod_{n\in N}\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot(n\in N)\cdot\left(x>\frac{1}{n}\right)\to\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(x>\frac{1}{n}\right).$$

Na mocy (vi) wynika stąd według prawa sylogizmu:

$$\prod_{n\in N}\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot(n\in N)\cdot\left(x>\frac{1}{n}\right)\to\Phi(x).$$

Stosujemy teraz operację uogólniania oraz prawa (9) i (16). Otrzymujemy wówczas:

$$\prod_{n\in N}\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sum_n\left[(n\in N)\cdot\left(x>\frac{1}{n}\right)\right]\to\Phi(x),$$

co możemy też napisać w postaci:

$$\prod_{n\in N}\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sum_{n\in N}\left(x>\frac{1}{n}\right)\to\Phi(x).$$

Zastosujmy wreszcie operację uogólniania, dołączając kwantyfikator $\prod_{x>0}$, i prawo rozkładania dużego kwantyfikatora:

$$\prod_{x>0}\left[\prod_{n\in N}\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sum_{n\in N}\left(x>\frac{1}{n}\right)\right]\to\prod_{x>0}\Phi(x).$$

Czynnik $\prod_{n\in N}\Phi\left(\frac{1}{n}\right)$ możemy wynieść przed kwantyfikator $\prod_{x>0}$ na mocy praw (17) i (11):

$$\prod_{n\in N}\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\prod_{x>0}\sum_{n\in N}\left(x>\frac{1}{n}\right)\to\prod_{x>0}\Phi(x),$$

a stąd przez zastosowanie tautologii $\vdash (p \cdot q \to r) \to [q \to (p \to r)]$ i oderwanie twierdzenia (iii) uzyskujemy implikację

(vii) $$\prod_{n \in N} \Phi\left(\frac{1}{n}\right) \to \prod_{x>0} \Phi(x).$$

Wzór (iv) jest w ten sposób udowodniony.

Zauważmy, że założenie (i) jest spełnione zawsze, gdy $\Phi(x)$ jest nierównością postaci $z < x$ albo implikacją, której następnik ma tę postać. Opierając się na twierdzeniu (iv), możemy zatem nadać np. definicji granicy (§ 2, str. 49, przykład 1) postać następującą:

$$\{g = \lim_n a_n\} \equiv \prod_{p \in N} \sum_{n_0 \in N} \prod_{n \in N} \left[(n > n_0) \to |a_n - g| < \frac{1}{p}\right].$$

§ 7. Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów. Prawa przestawiania kwantyfikatorów. Jako dalsze przykłady tautologii udowodnimy przede wszystkim dwie ważne tautologie, zwane prawami de Morgana dla rachunku kwantyfikatorów:

(18) $$\vdash [\prod_x \Phi(x)]' \equiv \sum_x \Phi'(x), \qquad \vdash [\sum_x \Phi(x)]' \equiv \prod_x \Phi'(x).$$

Dowód. Z (2) otrzymujemy na mocy prawa dodawania implikacji (Rozdział II, § 10, str. 29):

$$\vdash [\Phi(y) + \Phi'(y)] \to [\Phi(y) + \sum_x \Phi'(x)].$$

Poprzednik możemy oderwać na mocy prawa wyłączonego środka (Rozdział II, § 9, str. 26); otrzymujemy:

$$\vdash \Phi(y) + \sum_x \Phi'(x),$$

skąd na mocy reguły uogólniania (§ 3, str. 56, operacja 7) wynika:

$$\vdash \prod_y [\Phi(y) + \sum_x \Phi'(x)].$$

Stosując prawo (15), otrzymamy stąd:

$$\vdash \prod_y \Phi(y) + \sum_x \Phi'(x).$$

Zmieniając zmienną związaną y na x i stosując tautologię $\vdash (p+q) \equiv (p' \to q)$, otrzymamy wreszcie:

(i) $$\vdash [\prod_x \Phi(x)]' \to \sum_x \Phi'(x).$$

Dowód implikacji odwrotnej jest krótszy: z (1) wynika na mocy prawa transpozycji

$$\vdash \Phi'(y) \to [\prod_x \Phi(x)]'$$

i wystarczy zastosować operację dołączania małego kwantyfikatora przy jednoczesnej zmianie zmiennej związanej y na x, aby uzyskać tautologię

(ii) $$\vdash \sum_x \Phi'(x) \to [\prod_x \Phi(x)]'.$$

Z (i) i (ii) otrzymujemy pierwszą z tautologii (18). Druga wynika z pierwszej w sposób następujący. Stosując udowodnioną już tautologię do funkcji zdaniowej $\Phi'(x)$, otrzymamy

(iii) $$\vdash [\prod_x \Phi'(x)]' \equiv \sum_x \Phi''(x).$$

Ale $\vdash \Phi''(x) \equiv \Phi(x)$, skąd (por. § 5, str. 67, ćwiczenie 3):

$$\vdash \prod_x [\Phi''(x) \equiv \Phi(x)] \quad \text{i} \quad \vdash \sum_x \Phi''(x) \equiv \sum_x \Phi(x).$$

Zatem z (iii) wynika:

(iv) $$\vdash [\prod_x \Phi'(x)]' \equiv \sum_x \Phi(x).$$

Stosując teraz tautologię $\vdash (p' \equiv q) \to (q' \equiv p)$, otrzymamy z (iv) drugie z praw (18).

Prawa (18) pokazują, że *negacja zdania egzystencjalnego jest równoważna zdaniu ogólnemu* (t. j. rozpoczynającemu się od dużego kwantyfikatora) i na odwrót. Wynika stąd, że mały kwantyfikator daje się zdefiniować przy pomocy dużego kwantyfikatora i negacji; podobnie, duży kwantyfikator daje się zdefiniować przy pomocy małego kwantyfikatora i negacji.

Tautologia (iv) służyć może za definicję zdania egzystencjalnego. Zdanie: *istnieje przedmiot, spełniający warunek* $\Phi(x)$ jest równoważne zdaniu: *nie jest prawdą, że żaden przedmiot nie spełnia warunku* $\Phi(x)$. Tak np. twierdzenie: *istnieją proste równoległe* jest równoważne twierdzeniu: *nie jest prawdą, że każde dwie proste przecinają się* (czyli są nie-równoległe); twierdzenie: *istnieją liczby pierwsze parzyste* jest równoważne twierdzeniu: *nie jest prawdą, że każda liczba pierwsza jest nieparzysta*, i t. p.

Z tych przykładów widać, że intuicyjna słuszność praw de Morgana nie podlega dyskusji. Czytelnik może się zatem zdziwi, gdy usłyszy, że istnieje cały kierunek logiczno-matematyczny, znany pod nazwą *intuicjonizmu* [1]), którego przedstawi-

---

[1]) Inne nazwy: *empiryzm, realizm, konstruktywizm*. Twórcą intuicjonizmu jest współczesny matematyk holenderski L. E. J. Brouwer. Jako wstęp do studium tego ciekawego systemu logicznego polecić można cytowaną już na str. 41 pracę Zawirskiego.

ciele zaprzeczają słuszności praw de Morgana. Pogląd ten związany jest ze specyficznym pojmowaniem kwantyfikatora szczegółowego. Intuicjoniści uznają mianowicie zdanie egzystencjalne $\sum_x \Phi(x)$ za prawdziwe tylko wtedy, gdy wskazana jest metoda konstrukcji przedmiotu, spełniającego funkcję zdaniową $\Phi(x)$. Otóż zdarzyć się może taka sytuacja, że umiemy obalić przypuszczenie $\prod_x \Phi(x)$, np. potrafimy wyprowadzić z tego przypuszczenia sprzeczność, dzięki czemu zdanie $[\prod_x \Phi(x)]'$ jest udowodnione, ale nie jest wskazana metoda konstrukcji przedmiotu, spełniającego funkcję zdaniową $\Phi'(x)$. Dlatego też intuicjoniści nie uznają implikacji $[\prod_x \Phi(x)]' \rightarrow \sum_x \Phi'(x)$, chociaż implikacja odwrotna jest przez nich uznawana za prawdziwą.

Poglądy intuicjonistów na znaczenie kwantyfikatora szczegółowego prowadzą w konsekwencji do odrzucenia nietylko praw de Morgana, ale i wielu innych praw rachunku kwantyfikatorów i rachunku zdań, np. prawa wyłączonego środka, z którego korzystaliśmy w dowodzie implikacji (i). Z wyprowadzonych dotychczas tautologii tylko (15) i (18) nie są uznawane przez intuicjonistów.

Zwrócimy jeszcze uwagę na *dwoistość praw de Morgana:* wystarczy mały kwantyfikator zastąpić przez duży i na odwrót, żeby z pierwszego z praw de Morgana otrzymać drugie i na odwrót.

Jest jasne, że w przypadku, gdy zmienna przebiega skończony zbiór przedmiotów, prawa de Morgana dla kwantyfikatorów są bezpośrednimi wnioskami z praw de Morgana rachunku zdań (por. Rozdział II, § 10, str. 31, ćwiczenie 5).

Można łatwo uogólnić prawa de Morgana na kwantyfikatory o ograniczonym zakresie (por. § 2, str. 49). Zachodzą mianowicie równoważności:

(19) $\vdash [\prod_{\Psi(x)} \Phi(x)]' \equiv \sum_{\Psi(x)} \Phi'(x), \qquad \vdash [\sum_{\Psi(x)} \Phi(x)]' \equiv \prod_{\Psi(x)} \Phi'(x).$

Dowód. $\prod_{\Psi(x)} \Phi(x)$ w myśl definicji jest równoważne z $\prod_x [\Psi(x) \rightarrow \Phi(x)]$. W myśl więc (18)

(i) $$\vdash [\prod_{\Psi(x)} \Phi(x)]' \equiv \sum_x [\Psi(x) \rightarrow \Phi(x)]'.$$

Ponieważ jednak $\vdash [\Psi(x) \rightarrow \Phi(x)]' \equiv \Psi(x) \cdot \Phi'(x)$, więc

(ii) $$\vdash \sum_x [\Psi(x) \rightarrow \Phi(x)]' \equiv \sum_x [\Psi(x) \cdot \Phi'(x)].$$

Prawa strona jest równoważna z $\sum_{\Psi(x)} \Phi'(x)$ w myśl definicji kwantyfikatora o ograniczonym zakresie; z (i) i (ii) wynika zatem na mocy prawa sylogizmu pierwsza z tautologii (19). Dowód drugiej jest analogiczny.

Tautologie (18) i (19) dają łatwy sposób tworzenia negacji wyrażeń, rozpoczynających się od kwantyfikatorów: wystarcza mianowicie każdy duży kwantyfikator zastąpić małym, każdy mały — dużym, a po kwantyfikatorach wypisać negację pierwotnego wyrażenia podkwantyfikatorowego. Z praw de Morgana rachunku zdań wynika przy tym, że jeśli tym wyrażeniem podkwantyfikatorowym była implikacja $p \rightarrow q$, to negacja jego jest równoważna koniunkcji $p \cdot q'$ (zob. Rozdział II, § 9, str. 27).

Zastosujmy to postępowanie do przykładów 1-3, podanych w § 2 (str. 49). Otrzymamy następujące równoważności:

$$\{\textit{ciąg } \{a_n\} \textit{ nie jest zbieżny do } g\} \equiv$$
$$\equiv \sum_{\eta>0} \prod_{n_0 \in N} \sum_{n \in N} [(n > n_0) \cdot (|a_n - g| \geqslant \eta)],$$

$$\{\textit{funkcja } f(x) \textit{ nie jest jednostajnie ciągła w zbiorze } Z\} \equiv$$
$$\equiv \sum_{\eta>0} \prod_{\delta>0} \sum_{x_1 x_2 \in Z} [(|x_1 - x_2| < \delta) \cdot (|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \eta)],$$

$$\{\textit{funkcja } f(x) \textit{ nie spełnia warunku Cauchy'ego dla } x \rightarrow a\} \equiv$$
$$\equiv \sum_{\eta>0} \prod_{\delta>0} \sum_{x_1 x_2} [(|x_1 - a| < \delta) \cdot (|x_2 - a| < \delta) \cdot (|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \eta)].$$

Zakończymy przykłady tautologii trzema twierdzeniami o przestawianiu kwantyfikatorów.

(20) $\vdash \prod_x \prod_y \Phi(x,y) \equiv \prod_y \prod_x \Phi(x,y), \quad \vdash \sum_x \sum_y \Phi(x,y) \equiv \sum_y \sum_x \Phi(x,y).$

Dowód. Z (1) wynika, że

$$\vdash \prod_x \prod_y \Phi(x,y) \rightarrow \prod_y \Phi(x,y) \quad \text{i} \quad \vdash \prod_y \Phi(x,y) \rightarrow \Phi(x,y),$$

a więc

$$\vdash \prod_x \prod_y \Phi(x,y) \rightarrow \Phi(x,y).$$

Ponieważ zmienne x i y są związane w poprzedniku, więc możemy zastosować operację dołączania kwantyfikatora ogólnego. Dołączając najpierw kwantyfikator $\prod_x$, a potem $\prod_y$, otrzymamy

$$\vdash \prod_x \prod_y \Phi(x,y) \rightarrow \prod_y \prod_x \Phi(x,y).$$

Dowód implikacji odwrotnej jest analogiczny. Otrzymujemy w ten sposób pierwszą z równoważności (20).

W podobny sposób udowodnić też można drugie z praw (20). Można także wyprowadzić je z pierwszego na mocy praw de Morgana. Istotnie, z $\vdash \prod_x \prod_y \Phi'(x,y) \equiv \prod_y \prod_x \Phi'(x,y)$ wynika w myśl prawa transpozycji $\vdash [\prod_x \prod_y \Phi'(x,y)]' \equiv [\prod_y \prod_x \Phi'(x,y)]'$, skąd na mocy praw de Morgana:

$$\vdash \sum_x \sum_y \Phi''(x,y) \equiv \sum_y \sum_x \Phi''(x,y),$$

a stąd na mocy praw podwójnego przeczenia otrzymujemy drugą z tautologii (20).

Tautologie (20) uogólnić można na większą ilość kwantyfikatorów. Będziemy dla krótkości pisali zawsze $\prod_{xyz\ldots}$ zamiast $\prod_x \prod_y \prod_z \ldots$ i podobnie dla kwantyfikatorów małych.

$$\vdash \sum_x \prod_y \Phi(x,y) \to \prod_y \sum_x \Phi(x,y). \tag{21}$$

Dowód. Z (1) i (2) wynika, że

$$\vdash \prod_y \Phi(x,y) \to \Phi(x,y) \quad \text{i} \quad \vdash \Phi(x,y) \to \sum_x \Phi(x,y),$$

a zatem

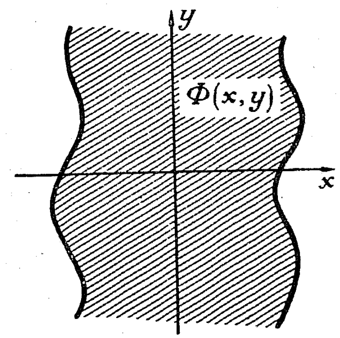
$$\vdash \prod_y \Phi(x,y) \to \sum_x \Phi(x,y).$$

Stosując do tej tautologii operację dołączania kwantyfikatora ogólnego w następniku i szczegółowego w poprzedniku, otrzymamy wzór (21).

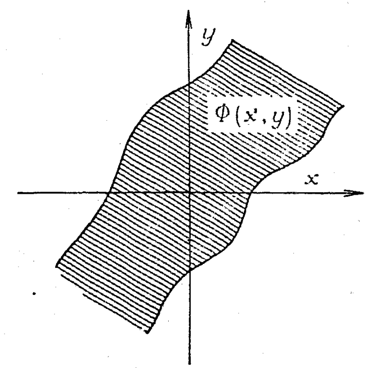
Prawo (21) jest bardzo ważne i warto objaśnić jego sens: poprzednik orzeka istnienie takiego przedmiotu a_0, że jakiekolwiek byłoby b, przedmioty a_0 i b spełniają funkcję zdaniową $\Phi(x,y)$. Następnik stwierdza, że dla każdego b istnieje takie a, że a i b spełniają $\Phi(x,y)$. Jest więc oczywiste, że z poprzednika wynika następnik, gdyż za a wziąć możemy] a_0 (bez względu na wartość b).

Jeszcze wyraźniej przedstawić można treść prawa (21), używając interpretacji geometrycznej. Poprzednik stwierdza, że istnieje prosta pionowa leżąca całkowicie w wykresie funkcji zdaniowej $\Phi(x,y)$ (p. rys. 4), a następnik — że każda prosta

pozioma przecina wykres $\Phi(x,y)$ co najmniej w jednym punkcie (p. rys. 5). Widoczne jest stąd także, że implikacja odwrotna do (21) jest na ogół fałszywa.



Rys. 4.



Rys. 5.

PRZYKŁADY. 1. W zbiorze liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza (mianowicie liczba 1). Jeśli więc zmienne przebiegają zbiór liczb naturalnych, to

$$\sum_x \prod_y (x \leqslant y).$$

Opierając się na prawie (21), otrzymujemy stąd $\prod_y \sum_x (x \leqslant y)$, t. zn.: dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba od niej mniejsza lub jej równa.

Z drugiej strony $\prod_y \sum_x (y < x)$, gdyż do każdej liczby naturalnej istnieje liczba od niej większa, ale zdanie $\sum_x \prod_y (y < x)$ jest fałszywe, bo nie istnieje największa liczba naturalna. Widać stąd, że implikacja odwrotna do (21) jest fałszywa.

2. Z analizy matematycznej znane są różne pojęcia jednostajne, np. jednostajna ciągłość, jednostajna zbieżność i t. p. Definicje pojęć jednostajnych różnią się od definicji pojęć zwykłych tylko kolejnością pewnej pary następujących po sobie kwantyfikatorów $\prod$ i $\sum$.

Pokażemy to na przykładzie pojęć: zbieżności ciągu funkcji $\{f_n(x)\}$ w każdym punkcie zbioru Z i zbieżności jednostajnej tego ciągu w zbiorze Z.

Definicje[1]) tych pojęć są następujące:

$$\prod_{\eta>0} \prod_{x \epsilon Z} \sum_{n_0 \epsilon N} \prod_{n_1 n_2 \epsilon N} [(n_1 > n_0) \cdot (n_2 > n_0) \rightarrow (|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \eta)].$$

$$\prod_{\eta>0} \sum_{n_0 \epsilon N} \prod_{x \epsilon Z} \prod_{n_1 n_2 \epsilon N} [(n_1 > n_0) \cdot (n_2 > n_0) \rightarrow (|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \eta)],$$

Dostrzegamy w drugim wzorze charakterystyczne dla pojęć jednostajnych następstwo kwantyfikatorów $\sum_{n_0 \epsilon N} \prod_{x \epsilon Z}$, podczas gdy w pierwszym wzorze następstwo ich jest odwrotne.

Zgodnie z tymi uwagami oraz z tautologią (21), pojęcia jednostajne są na ogół węższe od zwykłych: ciąg jednostajnie zbieżny w zbiorze Z jest zbieżny w każdym punkcie tego zbioru, funkcja jednostajnie ciągła w zbiorze Z jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru i t. d. Fakt, że pojęcia jednostajne nie są na ogół równoważne zwykłym, stanowi jeszcze jeden dowód na to, że implikacja odwrotna do (21) nie jest tautologią.

Jak zauważyliśmy już w § 4 (str. 58), prawa udowodnione w § 4, § 5 i § 7 są nie tyle tautologiami, ile s c h e m a t a m i t a u t o l o g i i. Dopiero zastępując w tych wzorach występujące w nich wyrażenia $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ i t. d. konkretnymi funkcjami zdaniowymi, otrzymujemy konkretne tautologie.

ĆWICZENIA. 1. Wyprowadzić tautologię (14) z (13) przy pomocy praw de Morgana.

W s k.: Zastąpić funkcję zdaniową $\Phi(x)$ przez $\Phi'(x)$, a $\Psi(x)$ przez $\Psi'(x)$ i zastosować prawo transpozycji.

2. Wyrażenie W nazywa się *dwoistym* względem V, jeśli powstaje ono z V przez zastąpienie każdego funktora zdaniotwórczego funktorem względem niego dwoistym (zob. Rozdział II, § 12, str. 38, ćwiczenie 1) oraz każdego kwantyfikatora Π kwantyfikatorem Σ i na odwrót. Piszemy wówczas $W = V_d$.

Wykazać, że z $\vdash U \rightarrow V$ wynika $\vdash V_d \rightarrow U_d$, a z $\vdash U \equiv V$ wynika $\vdash U_d \equiv V_d$.

W s k.: Przeprowadzić rozumowanie takie, jak w Rozdziale II, § 12, str. 38.

3. Napisać przy pomocy kwantyfikatorów definicję ciągłości i różniczkowalności funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 oraz otrzymać stąd na podstawie praw de Morgana definicję nieciągłości i nieróżniczkowalności.

4. Napisać przy pomocy kwantyfikatorów definicję jednostajnej ciągłości funkcji w zbiorze Z i porównać ją z definicją ciągłości funkcji w każdym punkcie zbioru Z.

[1]) Są to właściwie tylko prawe strony definicji, czyli t. zw. *difiniensy*. W podobnym znaczeniu użyliśmy już słowa *definicja* na str. 49.

5. Udowodnić i objaśnić geometrycznie tautologię

$$\vdash \sum_{xy} [\Phi(x) \cdot \Psi(y)] \equiv [\sum_x \Phi(x)] \cdot [\sum_y \Psi(y)].$$

6. Wykazać, że $\vdash \prod_x [\Phi(x) + \Psi(x)] \rightarrow \sum_x \prod_t [\Phi(x) + \Psi(t)]$; natomiast wyrażenie

$$\prod_{xu} [\Phi(x, u) + \Psi(x, u)] \rightarrow \sum_x \prod_{tu} [\Phi(x, u) + \Psi(t, u)]$$

nie jest tautologią. Podać przykłady funkcji zdaniowych, dla których wyrażenie to jest fałszywe.

§ 8. Postacie normalne. Mówimy, że wyrażenie W ma postać *normalną*, jeśli rozpoczyna się ono układem kwantyfikatorów, po których następuje wyrażenie wolne od kwantyfikatorów. System kwantyfikatorów, umieszczony na początku wyrażenia W, nazywa się jego *charakterystyką* (nie wyłączamy przypadku, gdy charakterystyka liczy 0 kwantyfikatorów); wyrażenie zaś bez kwantyfikatorów, następujące po charakterystyce, nosi nazwę *macierzy* wyrażenia W.

Np. jeśli funkcje zdaniowe $\Phi(x, y)$ i $\Psi(z, u)$ nie zawierają kwantyfikatorów, to wyrażenie

$$\prod_x \sum_y \prod_u \prod_z [\Phi(x, y) + \Psi(z, u)]$$

ma postać normalną. Charakterystyką jest układ kwantyfikatorów $\prod_x \sum_y \prod_u \prod_z$, a macierzą wyrażenie $\Phi(x, y) + \Psi(z, u)$.

Zastosujemy tautologie, z którymi zapoznaliśmy się w § 4, § 5 i § 7, do sprowadzenia dowolnego wyrażenia do postaci normalnej.

T w i e r d z e n i e 1. Jeśli W ma postać normalną, to $\prod_x W$ i $\sum_x W$ też mają postać normalną (zmienna x może być przy tym zastąpiona dowolną inną).

D o w ó d wynika wprost z definicji.

T w i e r d z e n i e 2. Jeśli W ma postać normalną, to istnieje takie wyrażenie o postaci normalnej V, że $\vdash W' \equiv V$. Wyrażenie V ma przy tym te same zmienne wolne co W.

D o w ó d. W myśl praw d e M o r g a n a wyrażenie V, powstające z W przez zastąpienie każdego dużego kwantyfikatora małym i na odwrót oraz umieszczenie znaku negacji po macierzy wyrażenia W, spełnia warunek $\vdash W' \equiv V$. Tak powstałe wyrażenie V ma oczywiście postać normalną i te same zmienne wolne co W.

Twierdzenie 3. Jeśli wyrażenia W i V mają postać normalną, to istnieje takie wyrażenie U o postaci normalnej, że $\vdash U \equiv (W+V)$. Wyrażenie U ma przy tym te same zmienne wolne co $W+V$.

Dowód. Załóżmy, że charakterystyka wyrażenia W ma n, a charakterystyka wyrażenia V ma p kwantyfikatorów. Zastosujemy indukcję względem $n+p$.

Jeśli $n+p=0$, to twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy zatem, że $n+p=k>0$ i że twierdzenie jest prawdziwe dla takich wyrażeń W i V, dla których suma $n+p$ jest mniejsza od k.

Wobec $k>0$ charakterystyka jednego z wyrażeń W i V zawiera co najmniej 1 kwantyfikator. Możemy założyć, że od kwantyfikatora rozpoczyna się np. wyrażenie V. Alternatywa $W+V$ ma więc jedną z postaci:

$$W+\prod_x V_1, \qquad W+\sum_x V_1.$$

Zmienną związaną x możemy na mocy tautologii (4) i (5) zamienić na inną zmienną, nie występującą w W. Możemy zatem od razu założyć, że zmienna x nie występuje w W. Na mocy tautologii (15) i (16) alternatywa $W+V$ jest więc równoważna jednemu z wyrażeń

$$\prod_x (W+V_1), \qquad \sum_x (W+V_1).$$

Suma $n+p$ dla wyrażenia $W+V_1$ jest mniejsza od k. W myśl założenia indukcyjnego istnieje więc wyrażenie U_1 o postaci normalnej takie, że $\vdash (W+V_1) \equiv U_1$ i zmienne wolne w U_1 są te same co w $W+V_1$. Alternatywa $W+V$ jest więc równoważna jednemu z wyrażeń

$$\prod_x U_1, \qquad \sum_x U_1,$$

które w myśl twierdzenia 1 mają postać normalną, przy czym zmienne wolne w tych wyrażeniach są oczywiście te same co w $W+V$. Twierdzenie 3 jest w ten sposób udowodnione.

Z twierdzeń 1-3 wynika jako łatwy wniosek

Twierdzenie 4. Dla każdego wyrażenia W, które powstaje z funkcji zdaniowych bez kwantyfikatorów przez łączenie ich funktorami zdaniotwórczymi, poprzedzanie kwantyfikatorami oraz umieszczanie pod znakiem negacji, istnieje takie wyrażenie V o postaci normalnej, że $\vdash V \equiv W$ i przy tym zmienne wolne w V są te same co w W.

Dowód. Twierdzenie 4 jest oczywiste dla wyrażeń bez kwantyfikatorów. Z twierdzeń 1-3 wynika, że jeśli twierdzenie 4 zachodzi dla wyrażeń W_1 i W_2, to zachodzi ono też dla wyrażeń

$$\prod_x W_1, \qquad \sum_x W_1, \qquad W_1' \quad \text{i} \quad W_1+W_2.$$

Ponieważ wszystkie funktory zdaniotwórcze dają się wyrazić przy pomocy alternatywy i negacji, więc wnosimy stąd, że twierdzenie jest prawdziwe także dla wyrażeń

$$W_1 \cdot W_2, \qquad W_1 \to W_2 \quad \text{i} \quad W_1 \equiv W_2.$$

Twierdzenie 4 jest więc prawdziwe dla wszelkich wyrażeń, powstających z funkcji zdaniowych bez kwantyfikatorów przy pomocy wymienionych w tym twierdzeniu operacji.

PRZYKŁADY. 1. Sprowadźmy do postaci normalnej wyrażenie

$$\text{(i)} \qquad \sum_x \prod_y \Phi(x,y) \to \prod_y \sum_x \Phi(x,y).$$

Zmieniamy w tym celu zmienne x i y w poprzedniku na u i v oraz wyrażamy implikację przez alternatywę, otrzymując

$$\prod_u \sum_v \Phi'(u,v) + \prod_y \sum_x \Phi(x,y).$$

Stosując teraz tautologie (15) i (16), przekształcamy kolejno to wyrażenie w następujący sposób:

$$\prod_u \left[\sum_v \Phi'(u,v) + \prod_y \sum_x \Phi(x,y)\right], \qquad \prod_u \sum_v \left[\Phi'(u,v) + \prod_y \sum_x \Phi(x,y)\right],$$

$$\prod_u \sum_v \prod_y \left[\Phi'(u,v) + \sum_x \Phi(x,y)\right], \qquad \prod_u \sum_v \prod_y \sum_x \left[\Phi'(u,v) + \Phi(x,y)\right].$$

Sprowadziliśmy więc dane wyrażenie do postaci normalnej.

Można też wynieść kwantyfikatory przed nawias w innej kolejności. Wyrażenia

$$\prod_u \prod_y \sum_v \sum_x \left[\Phi'(u,v) + \Phi(x,y)\right] \quad \text{i} \quad \prod_y \sum_x \prod_u \sum_v \left[\Phi'(u,v) + \Phi(x,y)\right]$$

są także równoważne danemu wyrażeniu. Sprowadzenie do postaci normalnej daje się więc na ogół wykonać na wiele sposobów.

2. Sprowadzimy do postaci normalnej implikację

$$\text{(ii)} \qquad \prod_y \sum_x \Phi(x,y) \to \sum_x \prod_y \Phi(x,y),$$

odwrotną do (i). Stosując analogiczne postępowanie jak w przykładzie 1, dojdziemy do jednego z wyrażeń:

$$\sum_u \prod_v \sum_x \prod_y \left[\Phi'(v,u) + \Phi(x,y)\right], \qquad \sum_x \sum_u \prod_y \prod_v \left[\Phi'(v,u) + \Phi(x,y)\right].$$

Widzimy z tych przykładów, że postacie normalne tautologii nie różnią się niczym szczególnym od postaci normalnych dowolnych wyrażeń. W przeciwieństwie więc do rachunku zdań (por. Rozdział II, § 11, str. 35, tw. 9) nie można przez analizę struktury wyrażenia o postaci normalnej rozstrzygnąć od razu, czy jest ono tautologią.

ĆWICZENIA. 1. Sprowadzić do postaci normalnej tautologie (1)-(21).

2. Każde wyrażenie można przekształcić na równoważne mu wyrażenie o postaci normalnej, którego charakterystyka rozpoczyna się dużym kwantyfikatorem, a kończy małym.

Wsk.: Oprzeć się na tautologii

$$\vdash W \equiv [W + \prod_x \Phi(x) \cdot \sum_x \Phi'(x)]$$

i sprowadzić prawą jej stronę do postaci normalnej.

CZĘŚĆ DRUGA

ROZDZIAŁ IV

ALGEBRA ZBIORÓW I RELACJI

§ 1. Zbiory i relacje. W Części pierwszej tej książki zajmowaliśmy się badaniem praw logicznych, na których opiera się każde rozumowanie matematyczne. W Części drugiej badać będziemy treść pojęć, z którymi mamy do czynienia w matematyce, a więc pojęć takich jak liczba, funkcja, działanie i in. Wykażemy, że wszystkie te pojęcia dają się sprowadzić do dwu: *zbioru* i *relacji*, których już określać nie będziemy; objaśnimy jednak ich znaczenie na przykładach.

Będziemy zakładali, że w każdym rozumowaniu dany jest pewien dowolny, lecz w ciągu tego rozumowania już nie ulegający zmianie, zespół przedmiotów. Będziemy go nazywali *zbiorem pełnym* i oznaczali przez 1.

Aby dopomóc wyobraźni, możemy np. założyć, że 1 składa się z liczb naturalnych, albo z punktów płaszczyzny, albo z figur geometrycznych i t. p.

Każda własność przedmiotów wyodrębnia ze zbioru pełnego pewien na ogół inny zespół przedmiotów, mianowicie zespół tych przedmiotów, należących do zbioru pełnego, które tę własność posiadają. Takie zespoły przedmiotów nazywamy *zbiorami.*

Pojęcie zbioru utożsamiamy zatem z pojęciem własności w tym sensie, że wyrażenie: *przedmiot x ma własność X* uważamy za równoznaczne z wyrażeniem: *przedmiot x należy do zbioru X.*

Np. własność: *być liczbą pierwszą* utożsamiamy w tym sensie ze zbiorem utworzonym z liczb naturalnych 2, 3, 5, 7, 11, ...