

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

TOM XVII

---

STEFAN BANACH

WSTĘP DO  
TEORII FUNKCJI  
RZECZYWISTYCH

---

NAKŁADEM POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO  
Z SUBWENCJI MINISTERSTWA SZKÓŁ WYŻSZYCH I NAUKI

WARSZAWA — WROCŁAW 1951

02333

COPYRIGHT, 1951, by MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

WARSZAWA

(Poland)

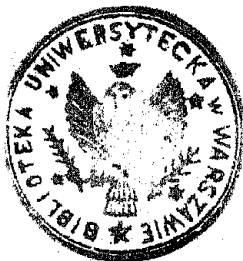
WROCLAW

Śniadeckich 8

Świerczewskiego 19

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced  
in any form, by mimeograph or any other means,  
without permission in writing from the publishers.



K  
22 X. 51  
Druki kł.

PRINTED IN POLAND

Państwowy Instytut Matematyczny — Warszawa 1951.

Nakład 800 egz.

Ark. druku  $14 \frac{4}{10}$ 

Drukarnia Uniw. Jagiell. — Kraków, Czapskich 4

Zam. 4. — 2. I. 1950.

Druk ukończono w maju 1951.

Papier druk. satyn. b/drz. 70×100 cm. 70 gr

M-55134

## PRZEDMOWA

Druk niniejszej książki profesora Banacha był rozpoczęty przed wojną. Miała ona stanowić dwutomowe dzieło utrzymane na wysokim poziomie naukowym, a zarazem mogące służyć za nowoczesny podręcznik teorii funkcji zmiennej rzeczywistej dla studentów matematyki. Pierwszych 10 arkuszy znajdowało się już w korektach, gdy rozpoczęła się druga wojna światowa. Hitlerowiec W. Haude, który z ramienia wojsk okupacyjnych zarządzał Drukarnią Uniwersytetu Jagiellońskiego w latach okupacji Krakowa, rozkazał skład rozebrać, rękopisy zniszczyć i korekty spalić. Poświęceniu i odwadze pracowników tej najstarszej w Polsce drukarni naukowej, której chlubne tradycje w służbie nauki naszej sięgają XVII w., zawdzięczać należy, że w drukarni tej została potajemnie przechowana część składu wspomnianych arkuszy, zwłaszcza zaś lwia część odbić korektowych, specjalnie sporządzonych i ukrytych. Cały rękopis tych arkuszy, jak i dalszego ciągu dzieła, uległ niestety straceniu.

Śmierć profesora Banacha 31 sierpnia 1945 r. uniemożliwiła rekonstrukcję jego dzieła przez niego samego. Na prośbę Komitetu Redakcyjnego „Monografii Matematycznych” uczniowie zmarłego, profesor Władysław Orlicz i docent Andrzej Alexiewicz, podjęli się uzupełnienia brakujących części tych rozdziałów, których fragmenty ocalały. Zнали oni intencje autora z wielu rozmów, które prowadził on z kolegami i uczniami o zamierzonej książce. Pierwszy jej tom miał zawierać wstęp do teorii funkcji zmiennej rzeczywistej, a w drugim miała być wyłożona sama teoria. Ten drugi tom miał zawierać m. in. rozdziały o mierze i całce Lebesgue'a, o całkach krzywoliniowych i powierzchniowych Lebesgue'a wraz z dowodami twierdzeń Greena, Gaussa i Stokesa — rzeczy, które w żadnym podręczniku nie były dotąd systematycznie i ściśle wyłożone. Niestety, temu tego odtworzyć już się nie da wobec doszczętnej utraty rękopisu.

Dlatego Komitet Redakcyjny postanowił wydać jedynie ocalałą część tomu pierwszego, z takimi uzupełnieniami, by możliwie stanowiła ona zamkniętą całość. Studenci matematyki na wyższych

latach studiów znajdują w niej rozszerzenie i pogłębienie niektórych działów analizy matematycznej, znanych im już z wykładów rachunku różniczkowego i całkowego. Będzie ona też dla nich przygotowaniem do samodzielnej lektury większych dzieł z teorii funkcji i łączących się z nią działów analizy, jak teoria równań całkowych, teoria szeregów trygonometrycznych, teoria szeregów ortogonalnych, analiza funkcyjna, topologia przestrzeni euklidesowych. Zgodnie z tym w niniejszej książce jest mowa o tak podstawowych pojęciach, jak granica górna i dolna, zbieżność jednostajna i całka Riemanna, lecz ujętych i potraktowanych znacznie ściślej i obszerniej niż to się zazwyczaj robi w podręcznikach analizy. Zarazem, aby wprowadzić czytelnika w krąg metod i idei wyższych działów analizy, uzupełniono ten kurs wiadomościami z teorii miary Jordana, zwykle pomijanej w podręcznikach, jako też wiadomościami o przybliżaniu funkcji ciągłych i o przedłużaniu tych funkcji. Wprowadzeniem zaś w teorię funkcji zmiennej rzeczywistej są początkowe rozdziały, traktujące o symbolice logicznej i rachunku logicznym, bodajże pierwszy raz i — miejmy nadzieję — na stałe wprowadzone odtąd do literatury podręcznikowej, a dalej: o teorii mocy zbiorów, o zbiorach punktowych w przestrzeniach  $m$ -wymiarowych, o funkcjach Baire'a i o krzywych ciągłych.

Do zrozumienia tej książki wystarcza znajomość uniwersyteckiego kursu rachunku różniczkowego.

Uzupełnienia pióra Orlicza i Alexiewicza obejmują fragmenty dotyczące przestrzeni  $m$ -wymiarowej (str. 73-103), funkcji ciągłych (str. 104-114 i 119-122), zbieżności ciągów funkcyjnych (str. 127-130), funkcji Baire'a (str. 144-150) oraz o krzywych ciągłych (str. 155-161); reszta książki, to przedruk zachowanych korekt z bardzo nieznacznymi zmianami.

W uzupełnieniu i wydaniu tej książki cenną pomoc okazali Czesław Ryll-Nardzewski i Marceł Stark.

Wrocław, w lutym 1950 roku.

Komitet Redakcyjny

## WSTĘP

### LICZBY RZECZYWISTE

**1. Aksjomaty i definicje.** Arytmetykę liczb rzeczywistych można oprzeć na następujących 13 pewnikach (aksjomatach):

Aksjomaty dodawania. Każdej parze liczb  $a, b$  przyporządkowana jest liczba  $a+b$ , zwana ich *sumą* i czyniąca zadość następującym 3 aksjomatom:

$$\text{I. } a+b=b+a;$$

$$\text{II. } (a+b)+c=a+(b+c);$$

III. *Równanie*  $a+x=b$  *jest jednoznacznie rozwiązalne, t. zn. istnieje dokładnie jedna liczba*  $x$ , *która je spełnia.*

Z aksjomatów I-III wynika istnienie dokładnie jednej (t. zn. jednej i tylko jednej) liczby rzeczywistej  $0$  takiej, że  $a+0=a$  dla wszystkich liczb  $a$ .

Aksjomaty mnożenia. Każdej parze liczb  $a, b$  przyporządkowana jest liczba  $ab$ , zwana ich *iloczynem* i spełniająca następujące 4 aksjomaty:

$$\text{IV. } ab=ba;$$

$$\text{V. } (ab)c=a(bc);$$

VI. *Równanie*  $ax=b$  *jest jednoznacznie rozwiązalne dla każdej liczby*  $a \neq 0$ ;

$$\text{VII. } a(b+c)=ab+ac.$$

Z I-VII wynika istnienie dokładnie jednej liczby rzeczywistej  $1$  takiej, że  $a1=a$  dla wszelkich  $a$ .

Aksjomaty nierówności. Pomędzy liczbami określony jest *stosunek wielkości*; gdy  $a$  jest większe od  $b$ , piszemy  $a > b$  lub  $b < a$ . Dla stosunku tego przyjmujemy następujących 5 aksjomatów:

## SKOROWIDZ NAZW

Liczby oznaczają stronicę.

- Aksjomat** Dedekinda 2, Zermeli (wyboru) 40, -y dodawania 1, -y mnożenia 1, -y nierówności 1.
- Algebraiczne liczby** 2, 26.
- Arzeli twierdzenie** 132.
- Baire'a klasyfikacja** 144, 148, 150.
- Barycentryczne współrzędne** 95.
- Bernsteina twierdzenie** 19, wielomiany 141.
- Bezpośrednio następujący element** 38.
- Borela-Lebesgue'a twierdzenie** 98.
- Brzeg przedziału** 76, zbioru 62, -owy punkt, zbiór 62.
- Całka** dolna, górna 165, 183, 205, Riemanna 162, wielokrotna 182.
- Cantora-Bendixsona twierdzenie** 101.
- Cantora twierdzenie** 21, 98, warunek 89, zbiór  $C$  65, 85.
- Cauchy'ego twierdzenie** 48, warunek 48, 78, 123.
- Charakterystyczna funkcja** 206, liczba kraty 77.
- Ciąg** 15, częściowy 48, malejący (nierosnący) 47, monotoniczny 47, nieskończony 15, normalny 162, 180, ograniczony 48, 78, regularny krat 77, rosnący (niemalejący) 47, skończony 15, ściśle malejący 47, ściśle rosnący 47, funkcj wspólnie ograniczony 122, zbieżny 48, 78, zstępujący 77, -u granica 48, -u granica dolna 53, -u granica górna 53, -u punkt graniczny 51.
- Ciągła funkcja** 106, w punkcie funkcja 105, 106, 112, krzywa 150.
- Ciągłości moduł** 114.
- Część wspólna zbiorów p. Iloczyn zbiorów**, zbioru 4.
- Dedekinda aksjomat** 2.
- Definicja Heinego** 106.
- De Morgana wzory** 5.
- Dirichleta funkcja** 148, 166.
- Długość przedziału** 45, 76.
- Dobrze uporządkowany zbiór** 37.
- Dodawania aksjomaty** 1.
- Dolna całka** 165, 183, 205, granica 53, suma 164, 183, -y kres 47.
- Doskonały zbiór** 64.
- Element bezpośrednio następujący** 38, -u obraz 14, -u przeciwobraz 14.
- Euklidesowa przestrzeń  $\mathcal{E}^n$**  73.
- Funkcja** 14, całkowalna w sensie Riemanna 163, 205, ciągła 106, ciągła w punkcie 105, 106, 112, charakterystyczna 206, Dirichleta 148, 166, jednostajnie ciągła 111, ograniczona 105, pierwotna 178, zdaniowa 8, -e jednakowo ciągłe 117, -e liniowo niezależne 134, -i granica 104, -i przedłużenie 118, przybliżanie 138, wykres 188, -yj ciąg wspólnie ograniczony 122.
- Gęsty zbiór** 65.
- Górna całka** 165, 183, 205, granica 53, suma 164, 183, -y kres 46.
- Granica ciągu** 48, ciągu funkcj 122, dolna ciągu 53, funkcji 104, górna ciągu 53.
- Graniczny punkt** 51.
- Heinego definicja** 106.
- Homotetyczne odwzorowanie** 113.
- Höldera nierówność** 74, warunek 115.
- Identyczny zbiór** 4.
- Iloczyn liczb** 1, zbiorów 4, 6.
- Indukcji pozaskończonej zasada** 43, zupełnej zasada 43.
- Infimum p. Kres dolny**.
- Jednakowo ciągłe funkcje** 117.
- Jednostajna zbieżność** 123, -ie ciągła funkcja 111.
- Jordana miara** 201, wewnętrzna 196, zewnętrzna 195.
- Kategoria zbioru** 68.
- Klasa wszystkich funkcj Baire'a** 150, zbiorów 5.
- Klasyfikacja Baire'a** 144, 148, 150.
- Końce odcinka** 76, przedziału 44.
- Kondensacji punkt** 99.
- Kontinuum** 68, 89.
- Krat ciąg regularny** 77, -u 77, -y liczba charakterystyczna 77.
- Kres dolny** 47, górny 46.
- Krzywa ciągła** 150, Peany 152, Sierpińskiego 154, -ej opis parametryczny 151.
- Kula otwarta** 79, zamknięta 79, 215.
- Kwantory** 9.
- Lebesgue'a miara** 170, 187.
- Leksykograficzne uporządkowanie** 37.
- Liczba iloczyn** 1, przekrój 2, suma 1, -a charakterystyczna kraty 77, -owa oś 3, -y algebraiczne 2, 26, -y nieskończone 3, -y niewymierne 2, -y otoczenie 45, -y przestępne 26, -y skończone 3, -y wymierne 2.
- Linia prosta** 75, -owe zbiory 3, 75, -owo niezależne funkcje 134.
- Limes inferior p. Granica dolna, superior p. Granica górna**.
- Lindelöfa twierdzenie** 97.
- Lipschitza warunek** 115.
- Luka** 37.
- Łamana** 76.
- Łańcuch** 89.
- Luk prosty** 151.
- Malejący ciąg** 47.
- Metoda przekątniowa** 17.
- Miara Jordana** 201, Jordana wewnętrzna 196, Jordana zewnętrzna 195, Lebesgue'a 170, 187, przedziału 76, 180.
- Mierzalny zbiór** 201.
- Mnożenia aksjomaty** 1.
- Moc kontinuum (continuum)** 27, f 34,  $\aleph_0$  22.
- Moduł ciągłości** 114, oscylacji 114.
- Monotoniczny ciąg** 47.
- Następczy podział** 179.
- Nastęstwa stosunek** 35.
- Nieciągłości punkt** 108.
- Niemalejący ciąg** 47.
- Nierosnący ciąg** 47.
- Nierówność Höldera** 74, Schwarza 74, trójkąta 71, 73, -ci aksjomaty 1.
- Nieskończona suma** 6, -e liczby 3, -y ciąg 15, -y iloczyn 6, -y produkt 15, -y przedział 45, -y zbiór 22.
- Niewymierne liczby** 2.
- Nigdzie nie gęsty zbiór** 66.
- Normalny ciąg** 162, 180.
- Obraz elementu** 14, zbioru 14.
- Obszar** 68.
- Odcinek** 38, 44, 76, -ka końce 76.
- Oddalone zbiory** 72.
- Odległość dwu punktów** 71, 73.
- Odosobniony punkt** 58, zbiór 59.
- Odstęp dwu zbiorów** 71, punktu od zbioru 71.
- Odwzorowanie zbioru** 14, homotetyczne 113, podobne 35, wzajemnie jednoznaczne 14.
- Ograniczona funkcja** 105, -y ciąg 48, 78, -y zbiór 46.
- Opis parametryczny krzywej** 151.
- Oscylacja funkcji** 106, -i moduł 114.
- Oś liczbowa** 3.

Otoczenie liczby 45, punktu 80.  
 Otwarta kula 79; -y przedział 44, 76, -y zbiór 63.

**Pary** uporządkowane 10, 15.  
 Peany krzywa 152.  
 Pierwotna funkcja 178.  
 Płaski zbiór 75.  
 Płaszczyzna 75.  
 Pochodna zbioru 59.  
 Podobne odwzorowanie (podobieństwo) 35, zbiory 35.  
 Podzbiór 4.  
 Podział przedziału 162, 179, następczy 179.  
 Pokrycie zbioru 69, 97.  
 Porządek 35.  
 Powłoka wypukła 93.  
 Produkt 10, nieskończony 15.  
 Prosta linia 75, -y łuk 151.  
 Przeciwobraz elementu 14.  
 Przedłużenie funkcji 118.  
 Przedział 44, nieskończony 45, otwarty 44, 76, wymierny 44, zamknięty 44, 76, -u brzeg 76, -u długość 45, 76, -u końce 44, -u podział 162, 179, -u miara 76, 180, -u siatka 179, -u szerokość 76, -u ściana 76, -u wnętrze 44, 76, -y niezachodzące na siebie 44, 76, -y stykające się 44, 77.  
 Przekątniowa metoda 17.  
 Przekrój liczb 2, zbioru 36.  
 Przeliczalny zbiór 22.  
 Przystępne liczby 26.  
 Przestrzeń 5, euklidesowa  $\mathcal{E}^n$  73.  
 Przesunięcie 204.  
 Przybliżanie funkcji 138.  
 Punkt 73, brzegowy 62, graniczny 51, kondensacji (zageszczenia) 99, nieciągłości 108, odosobniony 58, skupienia 57, 80, wewnętrzny 62, wymierny 73, -u otoczenie 80, -u rzut 13, 187, -u współrzędne 3, 73, -y równe 73.  
 Pusty zbiór 4.

**Regularny** ciąg krat 77.  
 Riemanna całka 162.  
 Rodzina zbiorów 5.  
 Rosnący ciąg 47.  
 Rozłączne zbiory 4.  
 Równe punkty 73.  
 Równoważne zdania 6.  
 Różnica zbiorów 4.  
 Rzut punktu, zbioru 13, 187.

**Schwarza** nierówność 74.  
 Siatka przedziału 179.  
 Sierpińskiego krzywa 154, twierdzenie 158.  
 Simpleks 94, -u ściana 96.  
 Składowa zbioru 88.  
 Skok 37.  
 Skondensowany zbiór 99.  
 Skończone liczby 3, -y ciąg 15, -y zbiór 22.  
 Skupienia punkt 57, 80.  
 Spójny zbiór 67, 87.  
 Stosunek następstwa (porządkujący) 35, większości 1, wynikania 7.  
 Suma dolna 164, 183, górna 164, 183, liczb 1, zbiorów 4, 6, szeregu 51.  
 Supremum p. Kres górny.  
 Szereg 51, -u suma 51.  
 Szerokość przedziału 76.

**Ściana** przedziału 76, simpleksu 96, wielościanu 97.  
 Ścisłe malejący ciąg 47, rosnący ciąg 47.  
 Średnica zbioru 72.

**Trójkąta** nierówność 71, 73.  
 Trójki uporządkowane 10, 15.  
 Twierdzenie Arzeli 132, Bernsteina 19, Borela-Lebesgue'a 98, Cantora 21, 98, Cantora-Bendixsona 101, Cauchy'ego 48, Lindelöfa 97, Sierpińskiego 158, Weierstrassa 58, 79, 110, 139, Zermeli 40.  
 Typ  $\eta$ ,  $\lambda$  36.

**Uporządkowane** pary 10, 15, trójki 10, 15, -ieleksykograficzne 37, -yzbiór 35.  
 Uzupelnienie (dopełnienie) zbioru 5.

**Warunek** Cantora 89, Cauchy'ego 48, 78, 123, Höldera 115, Lipschitza 115.  
 Weierstrassa twierdzenie 58, 79, 110, 139.  
 Wewnętrzny punkt 62.  
 Większości stosunek 1.  
 Wielokrotna całka 132.  
 Wielomiany Bernsteina 141.  
 Wielościan 97.  
 Własność (S) 155.  
 Wnętrze przedziału 44, 76, zbioru 80.  
 W sobie gęsty zbiór 65.  
 Wspólnie ograniczony ciąg funkcji 122.  
 Współrzędne barycentryczne 95, punktu 3, 73.  
 Wszędzie gęsty zbiór 66.  
 Wyboru aksjomat 40.  
 Wykres funkcji 188.  
 Wymiernie liczby 2, -y przedział 44, -y punkt 73.  
 Wynikania stosunek 7.  
 Wypukła powłoka 93, -y zbiór 92.  
 Wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie 14.  
 Wzory de Morgana 5.

**Zageszczenia** punkt 99, -ony zbiór 99.  
 Zamknięcie zbioru 61, -ta kula 79, 215, -ty przedział 44, 76.  
 Zasada indukcji pozaskończonej 43, indukcji zupełnej 43.

**Zbieżność** jednostajna 123.  
 Zbieżny ciąg 48, 78.  
 Zbiór brzegowy 62, Cantora C 65, 85, dobrze uporządkowany 37, doskonały 64,  $F_\sigma$  102,  $G_\delta$  102, gęsty 65, identyczny 4, mierzalny 201, mocy  $\aleph$  34, mocy kontinuum (continuum) 27, nieskończony 22, nigdzie nie gęsty 66, odosobniony 59, ograniczony 46, otwarty 63, o własności (S) 155, płaski 75, przeliczalny (mocy  $\aleph_0$ ) 22, pusty 4, skondensowany (zageszczony) 99, skończony 22, spójny 67, 87, typu  $\eta$ ,  $\lambda$  36, uporządkowany 35, w sobie gęsty 65, wszędzie gęsty 66, wypukły 92, zageszczony 99, zamknięty 60, zwarty 130, -ów iloczyn 4, -ów klasa 5, -ów rodzina 5, -ów różnica 4, -ów suma 4, -u brzeg 62, -u część 4, -u kategoria 68, -u obraz 14, -u odwzorowanie 14, -u pochodna 59, -u pokrycie 69, 97, -u przekrój 36, -u rzut 13, 187, -u składowa 88, -u średnica 72, -u uzupełnienie (dopełnienie) 5, -u wnętrze 80, -u zamknięcie 61, -y liniowe 3, 75, -y miary Lebesgue'a 170, 187, -y oddalone 72, -y podobne 35, -y rozłączne 4, -y równej mocy 15.  
 Zdania równoważne 6, -owa funkcja 8.  
 Zermeli aksjomat 40, twierdzenie 40.  
 Zstępujący ciąg 77.  
 Zwarty zbiór p. Zbiór zwarty.

## SKOROWIDZ NAZWISK

Liczby oznaczają stronicę.

<b>A</b> rzela 132.	<b>L</b> ebesgue 98, 170, 172, 187, 190.
<b>B</b> aire 144, 148.	Lindelöf 97.
Banach 138, 217.	Lipschitz 115.
Bendixson 101.	<b>M</b> arczewski 127.
Bernstein 19, 141.	Morgan, de 5, 6.
Borel 98.	<b>N</b> osarzewska 127.
<b>C</b> antor 21, 65, 85, 89, 98, 101.	<b>P</b> eano 152, 154.
Cauchy 11, 13, 48, 78, 105, 123.	<b>R</b> iemann 162, 163, 168.
<b>D</b> edekind 2.	<b>S</b> chwartz 74.
Dirichlet 148, 166.	Sierpiński 51, 95, 150, 154, 158.
<b>H</b> ausdorff 105.	<b>W</b> eierstrass 58, 79, 110, 139.
Heine 106.	<b>Z</b> ermelo 40.
Hölder 74, 115.	
<b>J</b> ordan 195, 201.	

## ERRATA

Stronica, wiersz:	Jest:	Powinno być,
105 <sup>17</sup>	14	46 i 47
105 <sup>20</sup>	$p^0$	$p_0$

## SPIS RZECZY

	Str.
PRZEDMOWA . . . . .	III
WSTĘP. <b>Liczby rzeczywiste</b> . . . . .	1
1. Aksjomaty i definicje. 2. Zbiory liniowe. 3. Liczby nieskończone.	
<b>ROZDZIAŁ I. Teoria zbiorów.</b>	
§ 1. <b>Algebra zbiorów</b> . . . . .	4
1. Działania na zbiorach. 2. Działania nieskończone. 3. Znakowanie logiczne.	
4. Produkt zbiorów. Funkcje zdaniowe wielu zmiennych. 5. Interpretacja geometryczna kwantora.	
§ 2. <b>Odwzorowania zbiorów, pojęcie ciągu, produkt nieskończony zbiorów</b> .	14
1. Odwzorowanie (funkcja). 2. Ciąg. 3. Produkt nieskończony.	
§ 3. <b>Moce zbiorów</b> . . . . .	15
1. Równość mocy. 2. Moc produktu. 3. O porównywaniu mocy zbiorów.	
4. Zbiory przeliczalne. 5. Zbiory mocy $c$ (continuum). 6. Zbiory mocy $f$ .	
§ 4. <b>Zbiory uporządkowane</b> . . . . .	35
1. Porządek. 2. Zbiory podobne. 3. Zbiory typu $\eta$ i $\lambda$ . 4. Przekrój.	
§ 5. <b>Zbiory dobrze uporządkowane</b> . . . . .	37
1. Pojęcie dobrego uporządkowania. 2. Odcinki zbioru dobrze uporządkowanego. 3. Twierdzenia o podobieństwie. 4. Twierdzenie o dobrym uporządkowaniu. 5. Indukcja pozaskończona.	
<b>ROZDZIAŁ II. Granica ciągu.</b>	
§ 1. <b>Przedziały</b> . . . . .	44
1. Przedziały skończone. 2. Przedziały nieskończone. 3. Część wspólna ciągu przedziałów.	
§ 2. <b>Kresy zbioru</b> . . . . .	46
1. Zbiory ograniczone. 2. Kres górny. 3. Kres dolny.	
§ 3. <b>Granice</b> . . . . .	47
1. Granica ciągu. 2. Warunki zbieżności. 3. Działania na ciągach. 4. Szeregi.	
5. Punkt graniczny ciągu. 6. Granica górna i dolna ciągu.	
<b>ROZDZIAŁ III. Zbiory punktowe.</b>	
§ 1. <b>Zbiory liniowe</b> . . . . .	57
1. Zbiory zamknięte. 2. Zbiory brzegowe, otwarte, doskonałe. 3. Gęstość.	
4. Spójność. 5. Kategoria zbioru. 6. Pokrycie zbioru. 7. Odległość, odstęp, średnica.	

	Str.
§ 2. Zbiory w przestrzeni $m$ -wymiarowej . . . . .	73
1. Definicje podstawowe. 2. Przedziały. 3. Granice. 4. Otoczenie. 5. Odstęp, średnica. 6. Spójność. 7. Zbiory wypukłe. 8. Pokrycie zbioru. 9. Pewne własności ciągów zbiorów zamkniętych. 10. Struktura zbiorów zamkniętych. 11. Zbiory $F_\sigma$ i $G_\delta$ .	
<b>ROZDZIAŁ IV. Funkcje w <math>\mathcal{G}^m</math>.</b>	
§ 1. Funkcje ciągłe . . . . .	104
1. Granica funkcji. 2. Ciągłość. 3. Własności funkcji ciągłych. 4. Ciągłość jednostajna. 5. Funkcje o wartościach z $\mathcal{G}^n$ . 6. Podział ciągłości. Warunek Höldera. 7. Przedłużanie funkcji ciągłych.	
§ 2. Ciągi funkcji. Zbiory zwarte funkcji . . . . .	122
1. Granica ciągu funkcji. 2. Zbieżność jednostajna. 3. Zbiory zwarte funkcji.	
§ 3. Przybliżanie funkcji ciągłych wielomianami. Wielomiany Bernsteina . . . . .	137
1. Lemat o linii łamanej. 2. Przybliżanie funkcji $ \alpha $ . 3. Przybliżanie dowolnej funkcji ciągłej. 4. Wielomiany Bernsteina. 5. Funkcje 1-ej klasy Baire'a. 6. Klasyfikacja Baire'a.	
§ 4. Krzywe w przestrzeniach $\mathcal{G}^n$ . . . . .	150
1. Definicje. 2. Krzywa Peany. 3. Krzywa ciągła wypełniająca przedział w $\mathcal{G}^n$ . 4. Charakterystyka krzywych ciągłych.	
<b>ROZDZIAŁ V. Całka Riemanna.</b>	
§ 1. Całka pojedyncza . . . . .	162
1. Podział przedziału. 2. Całka Riemanna. 3. Całka sumy funkcji. 4. Sumy dolna i górna. 5. Całki górna i dolna. 6. Warunki całkowalności funkcji według Riemanna. 7. Zbiory miary Lebesgue'a 0. 8. Warunki całkowalności funkcji według Lebesgue'a. 9. Własności funkcji całkowalnych $\mathcal{R}$ . 10. Całka Riemanna a funkcja pierwotna.	
§ 2. Całki wielokrotne . . . . .	179
1. Podział przedziału. 2. Miara przedziału. 3. Określenie całki wielokrotnej. 4. Sumy dolne i górne. 5. Całki dolne i górne. 6. Warunki całkowalności $\mathcal{R}$ . 7. Zbiory miary Lebesgue'a 0. 8. Warunki Lebesgue'a całkowalności $\mathcal{R}$ . 9. Własności całki wielokrotnej. 10. Całka wielokrotna jako całka iterowana.	
§ 3. Miara Jordana. Całka $\mathcal{R}$ na zbiorze . . . . .	195
1. Miara zewnętrzna $\mathcal{J}$ . 2. Miara wewnętrzna $\mathcal{J}$ . 3. Własności miary Jordana. 4. Zbiory mierzalne $\mathcal{J}$ . 5. Przesunięcie równoległe. 6. Całka $\mathcal{R}$ funkcji w zbiorze. 7. Miara Jordana jako całka. 8. Warunki całkowalności $\mathcal{R}$ funkcji w zbiorze. 9. Całka Riemanna jako miara Jordana. 10. Całka w zbiorze jako całka iterowana. 11. Miara (objętość) kuli w $\mathcal{G}^n$ .	
SKOROWIDZ NAZW . . . . .	218
SKOROWIDZ NAZWISK . . . . .	222
ERRATA . . . . .	222



## „MONOGRAFIE MATEMATYCZNE“

WARSZAWA  
ul. Śniadeckich 8

WROCŁAW  
ul. Świerczewskiego 19

- I. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932, VIII+256.  
 II. S. Saks, Théorie de l'intégrale, 1933, X+292, wyczerpane.  
 III. C. Kuratowski, Topologie I, 1933, X+288.  
 IV. W. Sierpiński, Hypothèse du continu, 1934, VI+194.  
 V. A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935, IV+332.  
 VI. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, 1935, VI+300.  
 VII. S. Saks, Theory of the Integral, 1937, VIII+348.  
 VIII. S. Banach, Mechanika I, 1938, VI+234, wydanie trzecie niezmiennione, 1950.  
 IX. S. Banach, Mechanika II, 1938, 235-556, wydanie trzecie niezmiennione, 1950.  
 X. S. Saks i A. Zygmund, Funkcje Analityczne, 1938, VIII+432, wydanie drugie niezmiennione, 1948.  
 XI. W. Sierpiński, Zasady Algebry Wyższej, 1946, XII+438, wyczerpane.  
 XII. K. Borsuk, Geometria Analityczna w  $n$  wymiarach, 1950, IV+448.  
 XIII. W. Sierpiński, Działania Nieskończone, wydanie trzecie niezmiennione, 1947, XI+503.  
 XIV. W. Sierpiński, Rachunek Różniczkowy (poprzedzony badaniem funkcji elementarnych), wydanie drugie niezmiennione, 1947, VII+262.  
 XV. K. Kuratowski, Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego I, 1948, 236, nowe wydanie niezmiennione, 1949.  
 XVI. E. Otto, Geometria Wykreślna, VI+272.  
 XVII. S. Banach, Teoria Funkcji Zmiennej Rzeczywistej, 1951, IV+224.  
 XVIII. A. Mostowski, Logika Matematyczna, 1948, VIII+388.  
 XIX. W. Sierpiński, Teoria Liczb, wydanie trzecie powiększone, 1950, VIII+544.  
 XX. C. Kuratowski, Topologie I, wydanie drugie powiększone, 1948, XII+452.  
 XXI. C. Kuratowski, Topologie II, 1950, VIII+444.  
 XXII. W. Rubinowicz, Wektory i Tensory, 1950, IV+170.  
 XXIII. W. Sierpiński, Algèbre des Ensembles (w druku).  
 XXIV. S. Banach, Mechanics (przekład angielski) (w druku).  
 XXV. W. Nikliborc, Równania Różniczkowe (w druku).

## W PRZYGOTOWANIU:

- M. Biernacki, Geometria Różniczkowa.  
 K. Borsuk i W. Szmielew, Geometria wyższa.  
 M. Kac and H. Steinhaus, Independent Functions.  
 K. Kuratowski, Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego II.  
 K. Kuratowski i A. Mostowski, Kurs Teorii Mnogości.  
 E. Marczewski, General Theory of Measure.  
 S. Mazur, Functional Analysis.  
 S. Mazurkiewicz, Rachunek Prawdopodobieństwa.  
 A. Mostowski, Mathematical Logic.  
 A. Mostowski i M. Stark, Algebra.  
 S. Saks and A. Zygmund, Analytic Functions (przekład angielski).  
 W. Sierpiński, Arytmetyka Teoretyczna.  
 W. Sierpiński, The Axiom of Choice and the Continuum Hypothesis.  
 W. Sierpiński, Teoria Mnogości, wydanie nowe powiększone.  
 W. Ślebodziński, Formes différentielles symboliques et leurs applications.  
 T. Ważewski, Teoria Równań Różniczkowych.  
 A. Zygmund, Trigonometrical Series, 2 tomy, wydanie drugie powiększone.