ROZDZIAŁ III

ZBIORY PUNKTOWE

§ 1. Zbiory liniowe

1. Zbiory zamknięte. *Punktem skupienia* zbioru E nazywamy każdy taki punkt a, w którego każdym otoczeniu istnieje co najmniej jeden punkt zbioru E różny od a.

Np. zbiór liczb postaci $1/n$, gdzie $n=1,2,...$, ma punkt skupienia 0.

Z określenia punktu skupienia wynika, że w każdym jego otoczeniu istnieje nieskończenie wiele punktów zbioru E. Jeżeli zaś punkt a nie jest punktem skupienia zbioru E, wówczas istnieje otoczenie punktu a, nie zawierające żadnych punktów zbioru E poza ewentualnie punktem a.

Oczywistym jest, że zbiory skończone nie posiadają punktu skupienia.

(1.1) *Jeżeli kres górny (dolny) zbioru liniowego jest liczbą skończoną i do zbioru nie należy, wówczas jest jego punktem skupienia.*

Dowód. Jeżeli bowiem górnym kresem zbioru E jest liczba K skończona, wówczas dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje $x \epsilon E$, spełniające nierówność $K-\varepsilon<x\leqslant K$. Jeżeli zatem K nie należy do E, to w każdym otoczeniu liczby K istnieją punkty zbioru E różne od K.

(1.2) *Jeżeli a jest punktem skupienia zbioru E, wówczas E zawiera ciąg punktów $\{a_n\}$ różnych od a, zbieżny do a.*

Dowód. Ciąg $\{a_n\}$ otrzymamy, wyjmując z otoczenia

$$>a-1/n,\ a+1/n<$$

dowolny punkt $a_n \epsilon E$, różny od a. Punkt taki istnieje, gdyż każde otoczenie punktu a, jako punktu skupienia zbioru E, zawiera punkt zbioru E różny od a.

Na odwrót:

(1.3) *Jeżeli a jest granicą (skończoną) ciągu punktów zbioru E różnych od a, wówczas a jest punktem skupienia zbioru E.*

Łatwo widzieć, że:

(1.4) *Jeżeli $a_n \epsilon E$ dla $n=1,2,\dots$ i $a_n \to a \neq \infty$ dla $n\to\infty$, to a jest punktem skupienia zbioru E albo $a \epsilon E$. Ten ostatni przypadek zachodzi w szczególności wówczas, gdy $a_n = a$ dla $n=1,2,\dots$*

(1.5) *Jeżeli liczba skończona a jest punktem granicznym ciągu $\{a_n\}$ i $a_n \neq a$ dla $n=1,2,\dots$, wówczas a jest punktem skupienia zbioru liczb występujących w tym ciągu.*

(1.6) ***Twierdzenie Weierstrassa.*** *Każdy zbiór nieskończony i ograniczony E ma co najmniej jeden punkt skupienia.*

Dowód. Z założenia, że zbiór E jest nieskończony, wynika, że E zawiera ciąg $\{a_n\}$, złożony z punktów różnych. Ponieważ zaś E jest z założenia zbiorem ograniczonym, więc i ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, a zatem istnieje ciąg częściowy $\{a_{n_i}\}$ zbieżny i granica ciągu $\{a_{n_i}\}$ jest punktem skupienia zbioru E.

Uwaga. Zbiór nieskończony nieograniczony może nie mieć punktu skupienia. Przykładem takiego zbioru jest zbiór liczb naturalnych.

Z twierdzenia Weierstrassa wynika w szczególności na mocy tw. (1.2), że:

(1.7) *Każdy ciąg nieskończony ograniczony zawiera ciąg zbieżny do granicy skończonej.*

Punktem odosobnionym zbioru E nazywamy każdy taki punkt należący do E, który nie jest punktem skupienia zbioru E.

(1.8) *Każdy zbiór ma co najwyżej przeliczalną ilość punktów odosobnionych.*

Dowód. Oznaczmy dla każdego naturalnego n przez E_n zbiór takich punktów odosobnionych a zbioru E, że w otoczeniu $[a-1/n, a+1/n]$ nie ma oprócz a żadnego innego punktu zbioru E. Każdy punkt odosobniony zbioru E należy więc do jakiegoś zbioru E_n, gdyż każdy punkt odosobniony zbioru posiada otoczenie, nie zawierające poza tym punktem innych punktów tego zbioru. Wynika stąd, że suma zbiorów E_n zawiera wszystkie punkty odosobnione zbioru E.

Obierzmy dla każdego punktu zbioru E_n dowolne otoczenie o długości mniejszej niż $1/3n$. Otoczenia te będą rozłączne. Gdyby bowiem dwa takie otoczenia punktów a i a' zbioru E_n miały punkty wspólne, to odległość punktów a i a' od siebie byłaby mniejsza od $2/3n$ wbrew określeniu zbioru E_n. Ponieważ na mocy tw. (1.1), str. 44, zbiór przedziałów rozłącznych jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym, więc E_n jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Stąd, na mocy tw. (4.2), str. 24, suma zbiorów E_n, czyli zbiór punktów odosobnionych zbioru E, jest co najwyżej przeliczalny, c.b.d.d.

Zbiór złożony z samych punktów odosobnionych nazywamy *zbiorem odosobnionym*.

Z (1.8) wynika w szczególności, że *zbiór odosobniony jest zawsze zbiorem co najwyżej przeliczalnym*.

Przykładami zbiorów odosobnionych są: zbiór liczb naturalnych, zbiór liczb całkowitych.

Pochodną zbioru E nazywamy zbiór wszystkich jego punktów skupienia (należących doń lub nie).

Pochodną zbioru E oznaczamy przez E'.

PRZYKŁADY. Pochodną przedziału otwartego jest przedział zamknięty o tych samych końcach. Pochodną zbioru liczb wymiernych jest zbiór liczb rzeczywistych. Pochodną zbioru liczb postaci $k+(1/n)$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, zaś n naturalną, jest zbiór wszystkich liczb całkowitych.

(1.9) *Dla każdych dwóch zbiorów liniowych A i B zachodzi wzór:*

(1) $$(A+B)'=A'+B',$$

t. j. pochodna sumy dwóch zbiorów równa jest sumie pochodnych.

Dowód. Jeżeli bowiem $g\epsilon(A+B)'$, to na mocy tw. (1.2), str. 57, g jest granicą ciągu punktów $\{g_n\}$ należących do $A+B$ i różnych od g. Ponieważ w ciągu $\{g_n\}$ istnieje nieskończenie wiele wyrazów należących do A lub nieskończenie wiele wyrazów należących do B, zatem $g\epsilon A'$ lub $g\epsilon B'$, więc $g\epsilon A'+B'$. Udowodniliśmy więc, że $(A+B)'\subset A'+B'$.

Na odwrót, jeżeli $g\epsilon A'+B'$, to oczywiście $g\epsilon(A+B)'$. Zatem $(A+B)'\supset A'+B'$.

Zachodzi więc równość (1), c. b. d. d.

Tw. (1.9) zachodzi oczywiście dla sumy dowolnej skończonej ilości zbiorów.

Natomiast analogiczne twierdzenie dla sumy nieskończenie wielu zbiorów byłoby fałszywe.

Przykładem jest zbiór liczb wymiernych, uważany za sumę przeliczalnej rodziny zbiorów, z których każdy składa się z jednego tylko punktu.

Zbiór skończony nie posiada punktu skupienia.

Z określenia punktu skupienia wynika, że jeżeli g jest punktem skupienia części zbioru B, to g jest również punktem skupienia zbioru B. A więc:

(1.10) *Jeżeli* $A \subset B$, *wówczas* $A' \subset B'$.

(1.11) *Pochodna iloczynu ilukolwiek zbiorów jest zawarta w iloczynie pochodnych tych zbiorów.*

Dowód. Ponieważ iloczyn zbiorów mieści się w każdym jego czynniku, zatem z tw. (1.10) wynika, że pochodna iloczynu jest zawarta w pochodnej każdego czynnika, c. b. d. d.

Natomiast iloczyn pochodnych może nie zawierać się w pochodnej iloczynu.

Np. zbiory $\{1/n\}$ i $\{-1/n\}$, gdzie $n=1,2,\ldots$, nie mają punktu wspólnego, więc pochodna ich iloczynu jest zbiorem pustym, mają zaś wspólny punkt skupienia 0, a więc iloczyn ich pochodnych nie jest pusty.

Drugą pochodną zbioru E nazywamy pochodną jego pochodnej, *trzecią pochodną* pochodną drugiej pochodnej i t. d.

Drugą, trzecią i t. d. pochodną oznaczamy odpowiednio przez E'', E''' i t.d.

Zbiorem zamkniętym nazywamy zbiór, który zawiera swoją pochodną. Innymi słowy: E jest zbiorem zamkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy $E' \subset E$.

Zbiorami zamkniętymi są np.: przedział zamknięty, zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, zbiór nie mający punktów skupienia (gdyż wtedy E' jest zbiorem pustym, zatem $E' \subset E$), zbiór złożony z liczb postaci $1/n$, gdzie $n=1,2,\ldots$ i z liczby 0, zbiór pusty.

(1.12) *Pochodna każdego zbioru jest zbiorem zamkniętym.*

Dowód. Niech g będzie punktem skupienia pochodnej E' zbioru E i niech I będzie dowolnym otoczeniem punktu g. Z określenia punktu skupienia wynika, że I jest otoczeniem jakiegoś punktu $a' \epsilon E'$. Ponieważ a' jest punktem skupienia zbioru E, zaś I jest jego otoczeniem, więc w I istnieje nieskończenie wiele punktów zbioru E. Z uwagi na to, że I jest dowolnym otoczeniem punktu g, wnosimy stąd, że g jest punktem skupienia zbioru E, t. j. że $g \epsilon E'$. Zatem E' zawiera wszystkie swoje punkty skupienia, jest więc zbiorem zamkniętym, c. b. d. d.

Z tw. (1.12) wynika od razu, że

(1.13) *Pochodne E'', E''' i t. d. są zbiorami zamkniętymi, t. j.*

(2) $$E' \supset E'' \supset E''' \supset \ldots$$

(1.14) *Zbiór punktów granicznych skończonych dowolnego ciągu $\{a_n\}$ jest zbiorem zamkniętym.*

D o w ó d. Oznaczmy przez G zbiór punktów granicznych skończonych ciągu $\{a_n\}$. Niech $g \epsilon G'$. Wewnątrz dowolnego otoczenia I punktu g istnieje więc jakiś punkt $g' \epsilon G$, a zatem również nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$, co dowodzi, że g jest punktem granicznym. A więc $g \epsilon G$, c. b. d. d.

(1.15) *Suma skończonej liczby zbiorów zamkniętych jest zbiorem zamkniętym.*

D o w ó d. Wystarczy tego dowieść dla dwóch zbiorów zamkniętych A i B. Ponieważ $A' \subset A$ i $B' \subset B$, więc na mocy (1) mamy $(A+B)' \subset A+B$, a zatem $A+B$ jest zbiorem zamkniętym.

Natomiast już suma przeliczalnie wielu zbiorów zamkniętych może nie być zbiorem zamkniętym.

Przykładem jest zbiór liczb wymiernych, uważany za sumę zbiorów jednopunktowych.

(1.16) *Iloczyn ilukolwiek zbiorów zamkniętych jest zbiorem zamkniętym.*

D o w ó d. Ponieważ dla każdego zbioru zamkniętego A jest w myśl określenia $A' \subset A$, więc na mocy tw. (1.11) wynika stąd, że pochodna iloczynu zbiorów zamkniętych zawarta jest w tym iloczynie.

Zamknięciem zbioru nazywamy sumę zbioru i jego pochodnej.

Zamknięcie zbioru E oznaczamy przez $\bar{E}$. Zatem na mocy określenia:

(3) $$\bar{E} = E' + E.$$

(1.17) *Pochodna zbioru równa się pochodnej jego zamknięcia:*

(4) $$(\bar{E})' = E'.$$

Dowód. Na mocy wzorów (3) i (1) mamy $(\bar{E})' = E'' + E'$, z czego wynika (4), ponieważ $E'' \subset E'$ na mocy wzoru (2).

Z (3) i (4) wynika od razu, że:

(1.18) *Zamknięcie zbioru jest zbiorem zamkniętym.*

2. Zbiory brzegowe, otwarte, doskonałe. *Punktem wewnętrznym* zbioru nazywamy każdy taki punkt, którego pewne otoczenie jest w tym zbiorze zawarte.

Np. punkty leżące wewnątrz przedziału są punktami wewnętrznymi tego przedziału.

Z określenia wynika natychmiast, że:

(2.1) *Punkt wewnętrzny zbioru nie jest punktem skupienia dopełnienia zbioru.*

Na odwrót:

(2.2) *Każdy punkt zbioru, który nie jest punktem skupienia jego dopełnienia, jest punktem wewnętrznym zbioru.*

Punktem brzegowym zbioru nazywamy każdy punkt zbioru, który nie jest jego punktem wewnętrznym.

(2.3) *Punkt brzegowy zbioru jest punktem skupienia dopełnienia zbioru i na odwrót, każdy punkt zbioru, który jest punktem skupienia dopełnienia zbioru, jest punktem brzegowym zbioru.*

Np. końce przedziału zamkniętego są jego punktami brzegowymi.

Zbiorem brzegowym nazywamy zbiór, którego każdy punkt jest jego punktem brzegowym.

Np. zbiór liczb wymiernych jest zbiorem brzegowym.

Brzegiem zbioru nazywamy zbiór wszystkich tych punktów, które są punktami brzegowymi albo samego zbioru albo jego dopełnienia.

Np. brzegiem przedziału (otwartego lub zamkniętego) jest zbiór jego końców, brzegiem zbioru liczb wymiernych — cała oś liczbowa, brzegiem zbioru liczb naturalnych — on sam.

Z określenia punktu brzegowego wynika łatwo, że oznaczając przez $B(E)$ brzeg zbioru E, mamy wzór

(5) $$B(E) = \bar{E} \cdot (\overline{-E}).$$

Ponieważ zbiory $\bar{E}$ i $\overline{-E}$ są zbiorami zamkniętymi, zatem na mocy (5):

(2.4) *Brzeg zbioru jest zawsze zbiorem zamkniętym.*

Zbiorem otwartym nazywamy zbiór, którego każdy punkt jest jego punktem wewnętrznym.

Np. przedział otwarty jest zbiorem otwartym.

(2.5) *Dopełnienie zbioru zamkniętego jest zbiorem otwartym; dopełnienie zbioru otwartego jest zbiorem zamkniętym.*

D o w ó d. Jeżeli E jest zbiorem zamkniętym i $a \epsilon -E$, wówczas a nie jest punktem skupienia zbioru E. Każdy więc punkt $a \epsilon -E$ jest punktem wewnętrznym zbioru $-E$, zatem $-E$ jest zbiorem otwartym.

Jeżeli E jest zbiorem otwartym, to żaden punkt zbioru E nie jest punktem skupienia zbioru $-E$. Wynika stąd, że zbiór $-E$ zawiera wszystkie swoje punkty skupienia, jest więc zbiorem zamkniętym.

(2.6) *Suma ilukolwiek zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*

D o w ó d. Jeżeli $a \epsilon A$ i A jest jednym z rozważanych zbiorów, wówczas pewne otoczenie I punktu a jest zawarte w A; zatem I jest zawarte w sumie S rozważanych zbiorów, a więc a jest punktem wewnętrznym tej sumy. S składa się zatem z samych punktów wewnętrznych, jest więc zbiorem otwartym c. b. d. d.

(2.7) *Iloczyn skończonej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*

D o w ó d. Jeżeli A i B są zbiorami otwartymi i $g \epsilon AB$, to istnieją otoczenia I_1 i I_2 punktu g, zawarte odpowiednio w zbiorach A i B. Ponieważ iloczyn otoczeń $I_1 I_2$ jest również otoczeniem punktu g i jest zawarty w AB, zatem g jest punktem wewnętrznym zbioru AB. Udowodniliśmy więc, że iloczyn AB jest zbiorem otwartym. Wynika stąd, że jest tak również dla dowolnej skończonej rodziny zbiorów.

Natomiast już iloczyn przeliczalnie wielu zbiorów otwartych może nie być zbiorem otwartym.

Np. iloczyn przedziałów $\rangle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \langle$, gdzie $n=1,2,\ldots$, jest złożony z jednego tylko punktu 0.

(2.8) *Zbiór otwarty liniowy jest sumą skończonej lub przeliczalnej ilości przedziałów* (skończonych lub nie) *otwartych i rozłącznych.*

Dowód. Niech E będzie zbiorem otwartym. Dla każdego $a \epsilon E$ oznaczmy przez I_a sumę wszystkich przedziałów otwartych (skończonych lub nieskończonych), mieszczących się w E i zawierających punkt a. Oczywiście I_a jest przedziałem otwartym skończonym lub nieskończonym. Dwa przedziały I_{a_1} i I_{a_2} są albo identyczne albo rozłączne. Jeżeli bowiem I_{a_1} i I_{a_2} mają jakiś punkt wspólny, wówczas $I_{a_1}+I_{a_2}$ jest przedziałem otwartym (skończonym lub nieskończonym) zawierającym a_1 i a_2 i zawartym w E. Zatem $I_{a_1}+I_{a_2} \subset I_{a_1}$ oraz $I_{a_1}+I_{a_2} \subset I_{a_2}$. Wynika stąd, że $I_{a_1}=I_{a_2}$.

Ponieważ E jest sumą przedziałów I_a dla wszystkich $a \epsilon E$, a przedziałów otwartych rozłącznych może być co najwyżej przeliczalnie wiele (p. tw. (1.1), str. 44), zaś nieskończonych co najwyżej dwa, więc E jest sumą co najwyżej przeliczalnej ilości przedziałów otwartych rozłącznych, c. b. d. d.

Tw. (2.8) charakteryzuje zbiory otwarte liniowe. Z (2.6) i z uwagi, że przedział otwarty (skończony lub nie) jest zbiorem otwartym, wynika bowiem, że:

(2.9) *Suma skończonej lub przeliczalnej ilości przedziałów* (skończonych lub nie) *otwartych i rozłącznych jest zbiorem otwartym.*

Zbiorem doskonałym nazywamy zbiór zamknięty, zawarty w swojej pochodnej, t. j. którego każdy punkt jest punktem skupienia. Innymi słowy: E jest zbiorem doskonałym wtedy i tylko wtedy, gdy $E=E'$.

Zbiorami doskonałymi są np.: przedział zamknięty, suma skończonej liczby przedziałów zamkniętych, zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

(2.10) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by zbiór liniowy był doskonały, jest, by jego dopełnienie było sumą przedziałów* (skończonych lub nieskończonych) *otwartych i nie stykających się końcami.*

Dowód. Jeżeli E jest zbiorem doskonałym, to jego dopełnienie jest zbiorem otwartym, jest więc na mocy tw. (2.8) sumą przedziałów otwartych i rozłącznych, skończonych lub nie. Dwa takie przedziały nie mogą mieć końca wspólnego, gdyż koniec ten byłby punktem odosobnionym zbioru E, wbrew założeniu, że $E \subset E'$. Warunek jest więc konieczny.

Dostateczność warunku wynika z tw. (2.9) i (2.5) oraz z uwagi, że jeżeli jakiś punkt $a \epsilon E$ jest punktem odosobnionym zbioru E, to w dopełnieniu $-E$ istnieją dwa przedziały otwarte, mające a za koniec wspólny.

Zbiór Cantora jest to zbiór doskonały, nie zawierający żadnego przedziału. Będziemy go oznaczali przez C.

Zbiór ten otrzymuje się w sposób następujący:

Podzielmy przedział zamknięty $I=\langle 0,1\rangle$ na 3 równe części i wyrzućmy środkową, otwartą, tj. przedział $\rangle 1/3, 2/3\langle$. Z pozostałymi dwoma przedziałami zamkniętymi $\langle 0,1/3\rangle$ i $\langle 2/3,1\rangle$ uczyńmy to samo co poprzednio z przedziałem $\langle 0,1\rangle$, tzn. podzielmy każdy z nich na 3 równe części i wyrzućmy część środkową bez końców. Postępując tak dalej z pozostałymi przedziałami, wyrzucamy w ten sposób za k-tym razem z przedziału $\langle 0,1\rangle$ zbiór P_k złożony z 2^{k-1} przedziałów. Zbiór $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ jest więc sumą przeliczalną przedziałów otwartych. Oznaczmy przez C dopełnienie tej sumy do przedziału I. Zbiór C nie jest pusty, gdyż zawiera punkty 0, 1 i końce przedziałów rozłącznych, których sumą jest P_k (dla $k=1,2,\ldots$). Zauważmy, że przedziały te nie stykają się ze sobą i że ponadto 0 ani 1 nie jest końcem żadnego z nich. Oczywiście zbiór $-C$ jest sumą tych przedziałów oraz przedziałów otwartych $\rangle -\infty, 0\langle$ i $\rangle 1, +\infty\langle$. Ponieważ wszystkie te przedziały nie stykają się ze sobą, więc na mocy twierdzenia (2.10) C jest zbiorem doskonałym.

Zbiór C nie zawiera żadnego przedziału. Istotnie, po pierwszym wyrzuceniu każdy z pozostałych przedziałów ma długość 1/3. Po drugim wyrzuceniu pozostałe przedziały mają długość $1/3^2$. Ogólnie, po n-tym wyrzuceniu każdy z pozostałych przedziałów ma długość $1/3^n$. Gdyby więc C zawierał jakiś przedział, to długość jego musiałaby być mniejsza od $1/3^n$ dla $n=1,2,\ldots$, co jest niemożliwe.

Zauważmy, że za n-tym razem wyrzucamy 2^{n-1} przedziałów, z których każdy ma długość $1/3^n$. Suma długości przedziałów, których sumą rozłączną jest zbiór $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$, wynosi zatem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n = 1$.

3. Gęstość. *Zbiorem w sobie gęstym* nazywamy zbiór, którego każdy punkt jest jego punktem skupienia, tj. każdy taki zbiór E, że $E \subset E'$.

Zbiorami w sobie gęstymi są np.: zbiór liczb wymiernych, zbiór liczb niewymiernych, przedział (otwarty lub zamknięty), zbiór otwarty, zbiór doskonały.

Zbiór A nazywamy *gęstym w zbiorze B*, jeżeli każdy punkt zbioru B jest punktem zamknięcia zbioru A, tzn. jeżeli $B \subset \bar{A}$.

Np. zbiór liczb wymiernych zawartych w przedziale $\langle 0,1\rangle$ jest gęsty w tym przedziale (por. str. 59, przykłady).

W szczególności *zbiorem wszędzie gęstym* nazywamy zbiór, dla którego każdy punkt jest punktem skupienia (inaczej mówiąc, każdy zbiór gęsty w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych).

Zbiorami wszędzie gęstymi są np.: zbiór liczb wymiernych, zbiór liczb niewymiernych, w ogóle każdy zbiór, którego dopełnienie nie zawiera punktu wewnętrznego.

(3.1) *Każdy zbiór nieskończony zawiera podzbiór przeliczalny w nim gęsty.*

Dowód. Ustawmy wszystkie przedziały otwarte o końcach wymiernych, zawierające punkty zbioru E, w ciąg $I_1, I_2, \ldots$

Niech $a_n \in EI_n$ dla $n=1,2,\ldots$ i niech P oznacza zbiór złożony z punktów a_n. Zatem $P \subset E$. Udowodnimy, że $E \subset \bar{P}$. Istotnie, niech $I=[b,c]$ oznacza dowolne otoczenie punktu $a \in E$ i niech w_1 i w_2 będą takimi liczbami wymiernymi, że $b<w_1<a<w_2<c$. Z określenia ciągu $\{I_n\}$ wynika, że istnieje n, dla którego $\rangle w_1, w_2 \langle = I_n$. A więc $a_n \in IP$. W każdym otoczeniu punktu a istnieją więc punkty zbioru P, a zatem a albo jest punktem skupienia zbioru P, albo jest jednym z punktów tego zbioru, c. b. d. d.

(3.2) *Jeżeli zbiór E jest w sobie gęsty, to każdy punkt zbioru E jest punktem skupienia każdego zbioru D gęstego w E.*

Łatwo bowiem stwierdzić, że wówczas $D' \supseteq E'$.

Zbiorem nigdzie nie gęstym nazywamy zbiór, który nie jest gęsty w żadnym przedziale. Z definicji tej wynika, że:

(3.3) *Zbiór jest nigdzie nie gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy jego pochodna nie zawiera żadnego przedziału, tj. gdy w każdym przedziale istnieje przedział, który ze zbiorem E nie ma punktów wspólnych.*

(3.4) *Zbiór zamknięty jest nigdzie nie gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera żadnego przedziału.*

(3.5) *Zbiór Cantora $\mathfrak{C}$ jest zbiorem nigdzie nie gęstym.*

(3.6) *Podzbiór zbioru nigdzie nie gęstego jest zbiorem nigdzie nie gęstym.*

4. Spójność. Zbiór E nazywamy *spójnym*, jeżeli nie jest sumą dwu zbiorów A i B niepustych i rozłącznych, z których żaden nie zawiera punktów skupienia drugiego, tzn. jeżeli nie mogą być spełnione jednocześnie związki następujące:

$$(6) \qquad E = A + B, \quad AB = 0, \quad AB' = 0, \quad A'B = 0, \quad A \neq 0 \neq B.$$

Zbiorem spójnym skończonym jest oczywiście tylko zbiór złożony z jednego punktu.

(4.1) *Następujące zbiory są spójne: przedział (skończony lub nieskończony) i zbiór otrzymany z przedziału zamkniętego po odrzuceniu jednego lub obu jego końców.*

Zbiory te są jedynymi zbiorami spójnymi liniowymi nieskończonymi.

D o w ó d. Niech E będzie jednym ze zbiorów wymienionych w twierdzeniu. Przypuśćmy, że E nie jest zbiorem spójnym. Istnieją zatem dwa zbiory A i B, spełniające wzory (6). Niech $a \in A$, $b \in B$ i $a < b$. Wówczas $\langle a, b \rangle \subset E$. Oznaczmy przez K kres górny iloczynu $A \cdot \langle a, b \rangle$. Oczywiście $K \in \langle a, b \rangle$, zatem $K \in A + B$. Gdyby $K \in B$, wówczas K byłby na mocy tw. (1.1), str. 57, punktem skupienia zbioru A, co jest niemożliwe, gdyż $A'B = 0$ na mocy (6). Więc $K \in A \cdot [a, b]$, zatem $K < b$. Wynika stąd, że jeżeli $K < K' \leqslant b$, to $K' \in B$. Więc K jest punktem skupienia zbioru B, co na mocy (6) jest niemożliwe, gdyż $K \in A$ i $AB' = 0$. Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem niespójności zbioru E.

Na odwrót, niech E będzie zbiorem nieskończonym spójnym. Niech a i b będą dwoma dowolnymi punktami zbioru E i niech $a < b$. Udowodnimy, że $\langle a, b \rangle \subset E$. W przeciwnym bowiem razie istniałby punkt c nie należący do E i spełniający nierówność $a < c < b$. Jeżeli oznaczyć przez A i B odpowiednio iloczyny $E \cdot \rangle -\infty, c \langle$ i $E \cdot \rangle c, +\infty \langle$, to zbiory A i B spełniałyby związki (6). Zatem E nie byłby zbiorem spójnym wbrew założeniu. A więc E zawiera każdy przedział, którego końce należą do E. Stąd już łatwo wynika, że E musi być jednym ze zbiorów wymienionych w twierdzeniu, c. b. d. d.

(4.2) *Każdy zbiór zamknięty niespójny E jest sumą dwóch zbiorów zamkniętych, rozłącznych i niepustych.*

Dowód. W przypadku, gdy E jest zbiorem zamkniętym, zbiory A i B spełniające (6) są zbiorami zamkniętymi i rozłącznymi. Mamy bowiem na mocy (6) $A \subset E$, więc $A' \subset E' \subset E$. Ponieważ ponadto $A'B=0$, więc $A' \subset A$ i podobnie $B' \subset B$. Zatem A i B są zbiorami zamkniętymi.

Zbiór ograniczony, zamknięty i spójny nazywamy *kontinuum*.

Z (4.2) wynika, że:

(4.3) *Zbiór ograniczony, zamknięty i nie będący sumą dwu zbiorów zamkniętych rozłącznych i niepustych, jest kontinuum.*

Na mocy (4.1):

(4.4) *Przedział zamknięty jest jedynym kontinuum wśród zbiorów liniowych nieskończonych.*

Obszarem nazywamy zbiór otwarty i spójny.

Z (4.1) wynika, że obszarami liniowymi są tylko przedziały otwarte (ograniczone lub nieograniczone).

5. Kategoria zbioru. Zbiór E nazywamy *zbiorem I-ej kategorii*, jeżeli jest on sumą skończonej lub przeliczalnej rodziny zbiorów nigdzie nie gęstych.

Zbiorami I-ej kategorii są np. zbiory nigdzie nie gęste, zbiory przeliczalne.

Zbiór nie będący zbiorem I-ej kategorii nazywamy *zbiorem II-ej kategorii.*

(5.1) *Przedział jest zbiorem II-ej kategorii.*

Dowód. Przypuśćmy, że przedział I jest zbiorem I-ej kategorii, tzn. że $I=\sum_{i=1}^{\infty} E_i$, gdzie każdy ze zbiorów E_i jest nigdzie nie gęsty. Z określenia zbioru nigdzie nie gęstego (str. 66) wynika, że istnieje przedział zamknięty I_1 zawarty w I i nie mający punktów wspólnych ze zbiorem E_1. Podobnie I_1 zawiera przedział zamknięty I_2, nie mający punktów wspólnych z E_2. Ogólnie, każdy przedział zawiera pewien przedział rozłączny z E_n. Na zasadzie indukcji zupełnej możemy więc łatwo udowodnić, że istnieje taki ciąg przedziałów zamkniętych $\{I_n\}$, że $I_n \supset I_{n+1}$ i że I_n nie ma punktów wspólnych ze zbiorem E_n (dla $n=1,2,\ldots$). Na mocy twierdzenia (3.1), str. 45, istnieje punkt x należący do wszystkich przedziałów I_n. Otóż $x \in -E_n$ dla każdego $n=1,2,\ldots$, gdyż $x \in I_n$, a I_n nie ma punktów wspólnych z E_n. Z drugiej strony $x \in I$, zatem $x \in \sum_{n=1}^{\infty} E_n$. A więc doszliśmy do sprzeczności. Przedział I jest więc zbiorem II-ej kategorii.

Z twierdzenia (3.6), str. 66, wynika, że:

(5.2) *Każdy podzbiór zbioru I-ej kategorii jest również zbiorem I-ej kategorii; każdy zbiór zawierający zbiór II-ej kategorii jest zbiorem II-ej kategorii.*

(5.3) *Każdy zbiór zamknięty II-ej kategorii zawiera przedział.*

Jeżeli bowiem zbiór zamknięty nie zawiera przedziału, wówczas zgodnie z tw. (3.4), str. 66, jest zbiorem nigdzie nie gęstym, a więc I-ej kategorii.

6. Pokrycie zbioru. Niech E będzie zbiorem punktów, a $\boldsymbol{P}$ rodziną przedziałów.

Rodzinę $\boldsymbol{P}$ nazywamy *pokryciem* zbioru E, jeżeli każdy punkt zbioru E leży wewnątrz jakiegoś przedziału należącego do tej rodziny.

Np. pokryciem zbioru liczb całkowitych jest rodzina przedziałów postaci $[k-1/3, k+1/3]$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

(6.1) *Każde pokrycie $\boldsymbol{P}$ dowolnego zbioru E zawiera pokrycie skończone lub przeliczalne tegoż zbioru, tzn. że istnieje skończony lub nieskończony ciąg $\{I_n\}$ przedziałów należących do $\boldsymbol{P}$ i taki, że każdy punkt zbioru E leży wewnątrz co najmniej jednego z przedziałów I_n.*

Dowód. Niech $\boldsymbol{W}$ będzie rodziną wszystkich przedziałów zawartych w przedziałach rodziny $\boldsymbol{P}$ i mających oba końce wymierne. Rodzina $\boldsymbol{W}$ jest przeliczalna (p. przykład 2, str. 26). Istnieje więc ciąg $\{W_n\}$ utworzony ze wszystkich przedziałów rodziny $\boldsymbol{W}$.

Z określenia rodziny $\boldsymbol{W}$ wynika, że do każdego przedziału W_n istnieje taki przedział $I_n \epsilon \boldsymbol{P}$, że $I_n \supset W_n$. Wykażemy, że przedziały $\{I_n\}$ tworzą pokrycie zbioru E.

Jeżeli bowiem $x \epsilon E$, wówczas x leży wewnątrz pewnego przedziału $I \epsilon \boldsymbol{P}$. Możemy zatem znaleźć taki przedział wymierny W, który jest zawarty w I i zawiera wewnątrz punkt x. Wynika stąd, że $W \epsilon \boldsymbol{W}$, a więc dla pewnego wskaźnika n musi być $W = W_n$. Ponieważ $W_n \subset I_n$, więc x leży wewnątrz I_n, c. b. d. d.

Z twierdzenia (6.1) wynika, że możemy się ograniczyć do pokryć, które są skończonymi lub przeliczalnymi rodzinami przedziałów.

Nasuwa się pytanie, czy twierdzenia (6.1) nie możnaby wzmocnić, mianowicie, czy każde pokrycie $\boldsymbol{P}$ zbioru E zawiera pokrycie złożone ze skończonej liczby przedziałów. Następujący przykład wskazuje, że byłoby to fałszywe.

Niech E będzie zbiorem odosobnionym, złożonym z liczb $1/n$, a $\boldsymbol{P}$ rodziną przedziałów $I_n=\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}}, \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right]$, gdzie $n=1,2,\ldots$ Oczywiście punkt $1/n$ leży wewnątrz przedziału I_n, gdyż

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\frac{1}{n}<\frac{1}{n-\frac{1}{2}} \qquad \text{dla} \quad n\geqslant 1.$$

Łatwo zauważyć, że I_n nie zawiera poza $1/n$ żadnego innego punktu zbioru E. Zatem żadna rodzina utworzona ze skończonej ilości przedziałów I_n nie pokryje zbioru E. Skończona bowiem ilość przedziałów, nie należących do pokrycia $\boldsymbol{P}$, zawiera tylko skończenie wiele punktów zbioru E.

Okażemy teraz, że twierdzenie (6.1) daje się zaostrzyć w podany wyżej sposób, gdy E jest zbiorem zamkniętym i ograniczonym:

(6.2) *Jeżeli $\boldsymbol{P}$ jest pokryciem zbioru zamkniętego i ograniczonego E, to istnieje skończona liczba przedziałów należących do $\boldsymbol{P}$, które stanowią pokrycie zbioru E.*

Dowód. Na mocy tw. (6.1) istnieje ciąg co najwyżej przeliczalny przedziałów $\{I_n\}$ należących do $\boldsymbol{P}$, który stanowi pokrycie zbioru E. Wystarczy udowodnić, że dla pewnego n już rodzina złożona z n pierwszych przedziałów $I_1, I_2, \ldots, I_n$ pokrywa zbiór E.

Przypuśćmy, że takiego n nie ma, tj. że dla żadnego n rodzina złożona z przedziałów $I_1, I_2, \ldots, I_n$ nie pokryje zbioru E. Wynika stąd, że dla każdego n istnieją punkty zbioru E, nie należące do sumy $\sum\limits_{k=1}^{n} I_k$. Dla każdego n oznaczmy więc przez x_n jeden z takich punktów. Punkt x_n nie leży zatem wewnątrz żadnego z przedziałów I_m, gdzie $n\geqslant m$.

Ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, gdyż jego wyrazy są elementami zbioru E, ograniczonego z założenia. Ciąg $\{x_n\}$ zawiera zatem na mocy tw. (1.7), str. 58, ciąg częściowy $\{x_{n_i}\}$, zbieżny do pewnego punktu x_0. Ponieważ punkty x_n są elementami zbioru E, a E jest z założenia zbiorem zamkniętym, więc $x_0 \in E$.

Wynika stąd, że dla pewnego wskaźnika $n=m$ punkt x_0 leży wewnątrz przedziału I_m. Zatem przedział I_m zawierałby w swoim wnętrzu nieskończenie wiele punktów ciągu $\{x_{n_i}\}$, co jest niemożliwe, gdyż — jak dowiedliśmy przed chwilą — punkty x_{n_i}, gdzie $n_i > m$, nie mogą leżeć wewnątrz przedziału I_m. Przypuszczenie nasze prowadzi więc do sprzeczności, c. b. d. d.

7. Odległość, odstęp, średnica. *Odległością* dwu punktów a i b osi liczbowej nazywamy liczbę $|a-b|$ i oznaczamy przez $\varrho(a,b)$.

Łatwo sprawdzić, że tak określona odległość $\varrho(a,b)$ spełnia dla każdych trzech liczb a,b,c tzw. *nierówność trójkąta*:

(7.1) $$\varrho(a,b) \leqslant \varrho(a,c) + \varrho(c,b).$$

Odstępem punktu a od zbioru E nazywamy kres dolny odległości punktu a od punktów tego zbioru, tzn. kres dolny liczb $\varrho(a,x)$, gdzie $x \in E$.

Odstęp a od E oznaczamy przez $d(a,E)$.

Z określenia kresu dolnego wynika, że odstęp spełnia warunki:

(i) *$d(a,E) \leqslant \varrho(a,x)$ dla wszystkich $x \in E$,*

(ii) *jeżeli $d(a,E) < d'$, wówczas istnieje punkt $x \in E$ dla którego $\varrho(a,x) < d'$.*

Warunki (i) i (ii) są równoważne określeniu liczby $d(a,E)$ jako kresu dolnego. Oczywiście $d(a,E) \geqslant 0$ dla wszelkich a i E.

Jeżeli $a \in E$ lub $a \in E'$ (czyli jeżeli $a \in \bar{E}$), to $d(a,E)=0$ i na odwrót, jeżeli $d(a,E)=0$, to $a \in \bar{E}$. Wynika stąd w szczególności, że:

(7.2) *Jeżeli E jest zbiorem zamkniętym i $a \in -E$, to odstęp punktu a od zbioru E jest dodatni.*

Odstępem dwu zbiorów A i B nazywamy kres dolny liczb $\varrho(a,b)$, gdzie $a \in A$ i $b \in B$; oznaczamy go przez $d(A,B)$.

Odstęp zbiorów spełnia zatem warunki:

(i) *$d(A,B) \leqslant \varrho(a,b)$ dla $a \in A$ i $b \in B$,*

(ii) *jeżeli $d(A,B) < d'$, wówczas istnieją punkty $a \in A$ i $b \in B$, dla których $\varrho(a,b) < d'$.*

Z określenia tego wynika natychmiast, że:

(7.3) *Jeżeli E jest zbiorem zamkniętym i $a \in -E$, to istnieje taki punkt $b \in E$, że $\varrho(a,b) = d(a,E)$.*

Dowód. Na mocy warunku (ii) istnieje w zbiorze E taki ciąg punktów $\{b_n\}$, że $\varrho(a,b_n)<d(a,E)+1/n$. Ciąg $\{b_n\}$ jest więc ograniczony, a zatem zawiera on na mocy tw. (1.7), str. 58, ciąg częściowy zbieżny $\{b_{n_i}\}$. Oznaczmy przez b punkt, który jest granicą tego ciągu. Wówczas $b\in E$, ponieważ zbiór E jest z założenia zamknięty. Mamy dla $i=1,2,\dots$

$$\varrho(a,b)\leqslant\varrho(a,b_{n_i})+\varrho(b_{n_i},b)<d(a,E)+\frac{1}{n_i}+\varrho(b_{n_i},b),$$

skąd

$$\varrho(a,b)\leqslant d(a,E)+\overline{\lim_{i\to\infty}}\left[\frac{1}{n_i}+\varrho(b_{n_i},b)\right],$$

więc $\varrho(a,b)\leqslant d(a,E)$. Z drugiej strony z $b\in E$ wynika na mocy (i) że $d(a,E)\leqslant\varrho(a,b)$. Zatem $\varrho(a,b)=d(a,E)$, c. b. d. d.

(7.4) *Jeżeli zbiory A i B mają punkt wspólny, wówczas ich odstęp jest zerem.*

Zbiory A i B nazywamy *oddalonymi* od siebie, jeżeli ich odstęp jest dodatni.

Zbiory oddalone są oczywiście rozłączne, ale nie na odwrót.

Np. zbiory $\{1/n\}$ i $\{-1/n\}$, gdzie $n=1,2,\dots$, są rozłączne, ich odstęp jest jednak zerem, gdyż $\varrho(1/n,-1/n)=|1/n-(-1/n)|=2/n\to 0$ dla $n\to\infty$.

(7.5) *Każde dwa zbiory A i B zamknięte i rozłączne, z których co najmniej jeden jest ograniczony, są od siebie oddalone.*

Dowód. Załóżmy, że zbiór A jest ograniczony. Gdyby $d(A,B)=0$, to istniałyby takie ciągi $\{a_n\}\subset A$ i $\{b_n\}\subset B$, że $\varrho\{a_n,b_n\}\to 0$ dla $n\to\infty$. Ciąg $\{a_n\}$, jako ograniczony, zawierałby na mocy tw. (1.7), str. 58, ciąg częściowy $\{a_{n_i}\}$, zbieżny do pewnego punktu g. Ponieważ $\varrho(a_{n_i},b_{n_i})\to 0$ dla $i\to\infty$, więc również $b_{n_i}\to g$ dla $i\to\infty$. Z założenia, że A i B są zbiorami zamkniętymi, wynika, że $g\in A$ i $g\in B$. Zatem A i B miałyby punkt wspólny wbrew założeniu.

Z (7.4) i (7.5) wynika, że:

(7.6) *Dwa zbiory ograniczone A i B są oddalone od siebie wtedy i tylko wtedy, gdy ich zamknięcia $\bar{A}$ i $\bar{B}$ są rozłączne.*

Średnicą zbioru E nazywamy kres górny odległości między punktami tego zbioru, tzn. kres górny liczb $\varrho(a_1,a_2)$, gdzie $a_1\in E$ i $a_2\in E$. Średnicę zbioru E oznaczamy przez $\delta(E)$.

Np. średnicą przedziału $[a,b]$ jest jego długość $|b-a|$.

Łatwo udowodnić ogólnie, że średnicą zbioru ograniczonego jest różnica $K-k$, gdzie K i k oznaczają odpowiednio kresy górny i dolny tego zbioru.

Łatwo też dowieść, że:

(7.7) *Jeżeli* $AB \neq 0$, *to* $\delta(A+B) \leqslant \delta(A)+\delta(B)$;

(7.8) $\delta(A)=\delta(\bar{A})$ *dla każdego zbioru* A;

(7.9) *Na to, by zbiór* E *był ograniczony, potrzeba i wystarcza, żeby było* $\delta(E)<\infty$.

§ 2. Zbiory w przestrzeni m-wymiarowej.

1. Definicje podstawowe. *Przestrzenią euklidesową m-wymiarową* nazywamy zbiór wszystkich układów $p=(x_1,...,x_m)$, złożonych z m liczb rzeczywistych. Przestrzeń tę oznaczamy przez $\mathcal{E}^m$.

Element p nazywamy *punktem* przestrzeni $\mathcal{E}^m$ lub — gdy nie ma obawy nieporozumień — krótko *punktem*. Liczbę x_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ nazywamy *k-tą współrzędną* punktu p. Punkt $(0,...,0)$ oznaczamy zwykle przez O. Punkt, którego wszystkie współrzędne są wymierne, nazywamy *punktem wymiernym*.

Dwa punkty $p=(x_1,...,x_m)$ i $q=(y_1,...,y_m)$ uważamy za *równe* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1=y_1,\ x_2=y_2,...,\ x_m=y_m.$$

Piszemy wówczas $p=q$.

Odległością dwu punktów $p=(x_1,...,x_m)$ i $q=(y_1,...,y_m)$ przestrzeni $\mathcal{E}^m$ nazywamy liczbę

$$\varrho(p,q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_m-y_m)^2}.$$

(1.1) *Odległość* $\varrho(p,q)$ *ma następujące własności:*

(1) $\varrho(p,q)=0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $p=q$;

(2) $\varrho(p,q)=\varrho(q,p)$;

(3) $\varrho(p,q) \leqslant \varrho(p,r)+\varrho(r,q)$.

Nierówność (3) nosi nazwę *nierówności trójkąta*.

Zanim przystąpimy do dowodu nierówności (3), która jedynie go wymaga, udowodnimy pewne nierówności arytmetyczne, które będą nam przydatne również w § 1,6, str. 115.

(1.2) ***Nierówność Höldera.*** *Jeżeli $\alpha>1$ i $\beta=\alpha/(\alpha-1)$, wówczas dla wszelkich liczb $x_1,\ldots,x_m$ i $y_1,\ldots,y_m$ zachodzi następujący wzór, zwany nierównością Höldera:*

$$\sum_{i=1}^{m}|x_iy_i|\leqslant(\sum_{i=1}^{m}|x_i|^{\alpha})^{1/\alpha}(\sum_{i=1}^{m}|y_i|^{\beta})^{1/\beta}.$$

Dowód. Weźmy pod uwagę funkcję $\varphi(\xi)=\frac{1}{\alpha}\xi^{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\xi$ dla $\xi\geqslant0$. Obliczając jej minima podług reguł rachunku różniczkowego, widzimy, że jedyne minimum przyjmuje ona dla $\xi=1$, a ponieważ $\varphi(1)=0$, więc

$$\xi\leqslant\frac{1}{\alpha}\xi^{\alpha}+\frac{1}{\beta}\quad \text{dla}\quad \xi\geqslant0.$$

W szczególności dla $\xi=\frac{|x|}{|y|^{1/(\alpha-1)}}$ z tej nierówności dostajemy po obustronnym pomnożeniu przez $|y|^{\beta}$

$$|xy|\leqslant\frac{1}{\alpha}|x|^{\alpha}+\frac{1}{\beta}|y|^{\beta}. \tag{4}$$

Podstawiając teraz w nierówności (4) kolejno

$$\bar{x}_i=x_i/(|x_1|^{\alpha}+\ldots+|x_m|^{\alpha})^{1/\alpha}\quad \text{i}\quad \bar{y}_i=y_i/(|y_1|^{\beta}+\ldots+|y_m|^{\beta})^{1/\beta}$$

zamiast x_i i y_i oraz sumując według $i=1,2,\ldots,m$, dostajemy, po uwzględnieniu, że $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, nierówność Höldera.

Dla $\alpha=2$ jest $\beta=2$ i z nierówności Höldera dostajemy tzw.

(1.3) ***Nierówność Schwarza.*** *Dla wszelkich liczb $x_1,\ldots,x_m$ i $y_1,\ldots,y_m$ zachodzi następujący wzór*

$$\sum_{i=1}^{m}|x_iy_i|\leqslant(\sum_{i=1}^{m}x_i^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^{m}y_i^2)^{1/2},$$

zwany nierównością Schwarza.

Obecnie możemy udowodnić nierówność trójkąta. Niech

$$p=(x_1,\ldots,x_m),\quad q=(y_1,\ldots,y_m),\quad r=(z_1,\ldots,z_m).$$

Wówczas

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)(x_i-z_i)+\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)(z_i-y_i).$$

Stosując nierówność Schwarza do obu sum po prawej stronie, dostajemy

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2 \leqslant [\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2]^{1/2}[\sum_{i=1}^{m}(x_i-z_i)^2]^{1/2}+[\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2]^{1/2}[\sum_{i=1}^{m}(z_i-y_i)^2]^{1/2}.$$

Dzieląc obie strony przez $[\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2]^{1/2}$, otrzymujemy

$$[\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2]^{1/2} \leqslant [\sum_{i=1}^{m}(x_i-z_i)^2]^{1/2}+[\sum_{i=1}^{m}(z_i-y_i)^2]^{1/2},$$

tj. $\varrho(p,q) \leqslant \varrho(p,r)+\varrho(r,q)$ czyli nierówność (3), c. b. d. d.

Jest widoczne, że dla $n=1$ przestrzeń $\mathcal{E}^1$ można uważać za identyczną ze zbiorem liczb rzeczywistych i że odległość obecnie zdefiniowana jest równa odległości zdefiniowanej na str. 71. Z tej przyczyny przestrzeń $\mathcal{E}^1$ nazywamy też *linią prostą*, a zbiory w niej leżące — *zbiorami liniowymi*.

Przestrzeń $\mathcal{E}^2$ nazywamy *płaszczyzną 2-wymiarową*.

Ogólnie, w przestrzeni $\mathcal{E}^m$ zbiór punktów $p=(x_1,...,x_m)$, spełniających równanie

$$a_1x_1+...+a_mx_m=b,$$

w którym nie wszystkie współczynniki $a_1,...,a_m$ są równe 0, nazywamy *płaszczyzną*.

W szczególności zbiór punktów spełniających równanie $x_i=b$ jest płaszczyzną.

Zbiór E, zawarty w jakiejś płaszczyźnie, nazywamy *płaskim*.

(1.4) *Przez każde m punktów przechodzi co najmniej jedna płaszczyzna.*

Dowód. Niech $p_1,...,p_m$ będą dowolnymi punktami; niech $p_i=(x_1^i,...,x_m^i)$. Weźmy pod uwagę układ równań

$$\begin{array}{c} a_1x_1^1+...+a_m x_m^1=b \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1x_1^m+...+a_m x_m^m=b. \end{array}$$

o niewiadomych $a_1,...,a_m, b$. Jest to układ m równań o $m+1$ niewiadomych.

Ma on więc niezerowe rozwiązanie $a_1,\dots,a_m,b$ takie, że liczby $a_1,\dots,a_m$ nie są równocześnie równe 0. Tym samym twierdzenie jest dowiedzione.

Weźmy pod uwagę dwa punkty:

$$p_1=(x_1^1,\dots,x_m^1) \quad \text{i} \quad p_2=(x_1^2,\dots,x_m^2).$$

Zbiór punktów $p=(x_1,\dots,x_m)$ takich, że $x_i=\vartheta x_i^1+(1-\vartheta)x_i^2$, gdzie $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$, nazywamy *odcinkiem łączącym punkty* p_1 *i* p_2, lub krótko *odcinkiem*. Oznaczamy go przez $\overline{p_1p_2}$.

Punkty p_1,p_2 nazywamy *końcami* odcinka.

Dla k punktów $p_1,p_2,\dots,p_k$ zbiór $\overline{p_1p_2}+\dots+\overline{p_{k-1}p_k}$ nazywamy *łamaną łączącą punkty* $p_1,p_2,\dots,p_k$ i oznaczamy przez $\overline{p_1p_2\dots p_k}$.

2. Przedziały. Niech dane będą w przestrzeni $\mathcal{E}^m$ takie dwa punkty $a=(a_1,\dots,a_m)$ i $b=(b_1,\dots,b_m)$, że $a_i<b_i$ dla $i=1,2,\dots,m$.

Zbiór punktów $p=(x_1,\dots,x_m)$, których współrzędne spełniają warunki $a_i<x_i<b_i$ nazywamy *przedziałem otwartym* i oznaczamy przez $\rangle a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_m\langle$ lub przez $\rangle a_i; b_i\langle$.

Zbiór punktów $p=(x_1,\dots,x_m)$, dla których są spełnione warunki $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$, nazywamy *przedziałem zamkniętym* i oznaczamy przez $\langle a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_m\rangle$ lub przez $\langle a_i; b_i\rangle$. Tak określone przedziały otwarte i zamknięte będziemy też oznaczali wspólnym symbolem $[a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_m]$ lub $[a_i; b_i]$.

Szerokością przedziału $I=[a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_m]$ nazywamy liczbę $\min\limits_{i=1,\dots,m}(b_i-a_i)$, a *długością* przedziału I nazywamy liczbę $\max\limits_{i=1,\dots,m}(b_i-a_i)$.

Miarą przedziału $I=[a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_m]$ nazywamy liczbę $(b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_m-a_m)$.

Ścianą przedziału $[a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_m]$ nazywamy każdą część wspólną przedziału $\langle a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_m\rangle$ z którąkolwiek z $2n$ płaszczyzn o równaniach $x_i=a_i$, $x_i=b_i$, gdzie $i=1,2,\dots,m$.

Brzegiem przedziału nazywamy sumę (oczywiście w sensie sumy zbiorów) wszystkich ścian przedziału.

Wnętrzem przedziału $[a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_m]$ nazywamy zbiór punktów $p=(x_1,\dots,x_m)$ takich, że $a_i<x_i<b_i$ dla $i=1,2,\dots,m$.

Dwa przedziały, których wnętrza nie mają punktów wspólnych, nazywamy *niezachodzącymi na siebie*.

Dwa przedziały niezachodzące na siebie, których brzegi mają punkty wspólne, nazywamy *stykającymi się*.

(2.1) *Każdy zbiór przedziałów niezachodzących na siebie jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. Możemy każdemu przedziałowi danego zbioru przedziałów przyporządkować pewien punkt wymierny należący do wnętrza tego przedziału. W ten sposób otrzymujemy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru przedziałów na część zbioru wszystkich układów $(x_1,...,x_m)$, złożonych z m liczb wymiernych, a zbiór takich układów jest przeliczalny na mocy tw. (4.4), str. 25.

(2.2) *Jeżeli ciąg przedziałów zamkniętych $\{I_n\}$ jest zstępujący (tj. każdy z nich zawiera następny), wówczas istnieje co najmniej jeden punkt należący do wszystkich przedziałów tego ciągu.*

Dowód. Niech $I_n = \langle a_1^n,...,a_m^n; b_1^n,...,b_m^n\rangle$; ponieważ $I_n \supset I_{n+1}$, więc musi być $a_j^n \leqslant a_j^{n+1} < b_j^{n+1} \leqslant b_j^n$ dla $j=1,2,...,m$ i $n=1,2,...$ Oznaczając przez I_j^n przedział liniowy $\langle a_j^n, b_j^n\rangle$, mamy zatem $I_j^n \supset I_j^{n+1}$ dla $n=1,2,...$ Na mocy twierdzenia (3.1), str. 45, istnieją takie liczby x_j, że $a_j^n \leqslant x_j \leqslant b_j^n$ dla $j=1,2,...,m$ i $n=1,2,...$ Punkt $p=(x_1,...,x_m)$ należy zatem do każdego z przedziałów I_n. c. b. d. d.

Każdy zbiór $\boldsymbol{K}$ nie zachodzących na siebie przedziałów, pokrywający łącznie przestrzeń, nazywamy *kratą*.

Liczbą charakterystyczną kraty $\boldsymbol{K}$ nazywamy kres górny długości przedziałów tworzących tę kratę; oznaczamy ją przez $\Delta(\boldsymbol{K})$.

Regularnym ciągiem krat nazywamy każdy ciąg $\{\boldsymbol{K}_i\}$ krat o tej własności, że każdy przedział kraty $\boldsymbol{K}_{i+1}$ jest zawarty w pewnym przedziale kraty $\boldsymbol{K}_i$ oraz $\Delta(\boldsymbol{K}_i)\to 0$.

(2·3) *Istnieje regularny ciąg krat.*

Dowód. Oznaczmy przez $\boldsymbol{K}_i$ zbiór wszystkich przedziałów postaci $\left\langle\frac{k_1}{2^i},...,\frac{k_m}{2^i}; \frac{k_1+1}{2^i},...,\frac{k_m+1}{2^i}\right\rangle$, gdzie $k_1,...,k_m$ są dowolnymi liczbami całkowitymi. Widzimy odrazu, że $\boldsymbol{K}_i$ jest kratą i że $\Delta(\boldsymbol{K}_i)=1/2^i$. Przedziały kraty $\boldsymbol{K}_{i+1}$ powstają przez podział przedziałów kraty $\boldsymbol{K}_i$ na 2^m części; wynika stąd, że każdy przedział kraty $\boldsymbol{K}_{i+1}$ jest zawarty w jakimś przedziale kraty $\boldsymbol{K}$. Ciąg krat $\{\boldsymbol{K}_i\}$ jest więc regularny.

3. Granice. Ciąg punktów $\{p_n\}$ nazywa się *zbieżny* do punktu p_0, jeżeli $\varrho(p_n, p_0) \to 0$; piszemy to w postaci $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0$ lub $p_n \to p_0$.

(3.1) *Na to, by ciąg* $\{p_n\}$, *gdzie* $p_n = (x_1^n, \ldots, x_m^n)$, *był zbieżny do punktu* $p_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$, *potrzeba i wystarcza, żeby*

(1) $$\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i^0 \qquad \textit{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Dowód. Konieczność warunku wynika natychmiast z nierówności $|x_i^n - x_i^0| \leqslant \varrho(p_n, p_0)$. Dla dowodu dostateczności niech $p_n^k = (x_1^n, \ldots, x_k^n, x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0)$ dla $k = 1, 2, \ldots, m-1$ i niech $p_n^m = p_n$. Widzimy od razu, że $\varrho(p_n^k, p_n^{k+1}) = |x_{k+1}^n - x_{k+1}^0|$ dla $k = 1, 2, \ldots, m-1$ oraz $\varrho(p_0, p_n^1) = |x_1^n - x_1^0|$.

Stosując m-krotnie nierówność trójkąta, otrzymujemy

$$\varrho(p_0, p) \leqslant \varrho(p_0, p_n^1) + \varrho(p_n^1, p_n^2) + \ldots + \varrho(p_n^{m-1}, p_n) =$$
$$= |x_1^0 - x_1^n| + |x_2^0 - x_2^n| + \ldots + |x_m^0 - x_m^n|.$$

Z (1) wynika więc, że $\varrho(p_0, p_n) \to 0$.

(3.2) *Następujący warunek jest konieczny i wystarczający na to, by ciąg punktów* $\{p_n\}$ *był zbieżny*:

Warunek Cauchy'ego. *Do każdej liczby* $\varepsilon > 0$ *istnieje taka liczba* N, *że dla wszystkich* $r \geqslant N$ *i* $s \geqslant N$ *zachodzi nierówność*

$$\varrho(p_r, p_s) < \varepsilon.$$

Dowód. Konieczność warunku wynika natychmiast z nierówności trójkąta. Dostateczność zaś wynika z nierówności $|x_i^r - x_i^s| \leqslant \varrho(p_r, p_s)$, gdzie $p_n = (x_1^n, \ldots, x_m^n)$, z twierdzenia (2.1), str. 48, oraz z twierdzenia (3.1).

Ciąg $\{p_n\}$ nazywamy *ograniczonym*, jeżeli istnieje taka liczba M, że $\varrho(p_n, 0) \leqslant M$.

Z łatwością dowodzi się następującego twierdzenia:

(3.3) *Na to, by ciąg* $\{p_n\}$, *gdzie* $p_n = (x_1^n, \ldots, x_m^n)$, *był ograniczony, potrzeba i wystarcza, by istniała taka liczba* N, *że* $|x_i^n| < N$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, m$ *oraz* $n = 1, 2, \ldots$

Twierdzenia (3.1) i (3.2) pozwalają sprowadzić badanie zbieżności i ograniczoności ciągów punktów w $\mathcal{E}^m$ do badania ciągów liczbowych. Korzystając z tego i ze znanych twierdzeń o ciągach liczbowych, dowodzi się łatwo, że

(3.4) *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

(3.5) *Każdy ciąg częściowy ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.*

(3.6) *Ciąg powstały przez zmianę porządku wyrazów ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.*

3.7) ***Twierdzenie Weierstrassa dla przestrzeni $\mathcal{E}^m$.*** *Każdy ciąg ograniczony zawiera ciąg częściowy zbieżny.*

4. Otoczenie. Niech r będzie liczbą dodatnią.

Kulą otwartą o środku p_0 i promieniu r nazywamy zbiór punktów p, spełniających nierówność $\varrho(p,p_0)<r$, a *kulą zamkniętą* o tymże środku i promieniu nazywamy zbiór punktów p spełniających nierówność $\varrho(p,p_0)\leqslant r$.

Kulę otwartą oznaczać będziemy przez $K(p_0,r)$, a zamkniętą — przez $\overline{K}(p_0,r)$:

$$K(p_0,r)=\mathop{E}_{p}\{\varrho(p,p_0)<r\},\quad \overline{K}(p_0,r)=\mathop{E}_{p}\{\varrho(p,p_0)\leqslant r\}.$$

(4.1) *Jeżeli $K=K(p_0,r)$ jest kulą otwartą i $p\in K$, to istnieje przedział $I\subset K$, do którego wnętrza należy punkt p.*

Dowód. Niech $d=r-\varrho(p_0,p)$; łatwo widzieć, że $d>0$. Niech $p=(x_1,\dots,x_m)$ oraz $I=\left\rangle x_i-\frac{d}{\sqrt{m}};\ x_i+\frac{d}{\sqrt{m}}\right\langle$. Oczywiście punkt p należy do wnętrza przedziału I. By okazać, że $I\subset K$, weźmy pod uwagę inny punkt $\overline{p}=(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_m)\in I$ i niech $x_1^0,\dots,x_m^0$ będą współrzędnymi punktu p_0. Mamy

$$\varrho(p_0,\overline{p})\leqslant\varrho(p_0,p)+\varrho(p,\overline{p})=\varrho(p_0,p)+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\overline{x}_i)^2}<$$

$$<\varrho(p_0,p)+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{d}{\sqrt{m}}\right)^2}=\varrho(p_0,p)+d=r,$$

zatem $\overline{p}\in K$.

Równie łatwo dowodzi się twierdzenia:

(4.2) *Jeżeli I jest dowolnym przedziałem otwartym i $p \in I$, to istnieje taka kula $K \subset I$, że $p \in K$.*

(4.3) *Dla każdych dwóch różnych punktów p_1 i p_2 istnieją takie kule zamknięte K_1 i K_2, że $p_1 \in K_1$, $p_2 \in K_2$ i $K_1 K_2 = 0$.*

Dowód. Wystarczy przyjąć $r = \varrho(p_1, p_2)$, $K_1 = \bar{K}(p_1, r/3)$ i $K_2 = \bar{K}(p_2, r/3)$.

Otoczeniem punktu p nazywamy każdą kulę otwartą zawierającą punkt p.

Punktem skupienia zbioru E nazywamy każdy punkt p, w którego każdym otoczeniu istnieje co najmniej jeden punkt zbioru E różny od p.

Zauważmy, że w Rozdziale III (§ 1) definicje zbioru odosobnionego, pochodnej zbioru, zbioru zamkniętego, zamknięcia zbioru, zbioru otwartego, zbioru brzegowego, brzegu zbioru, zbioru w sobie gęstego, gęstego w drugim zbiorze, kontinuum, zbioru wszędzie gęstego, doskonałego, nigdzie nie gęstego oraz zbiorów I-ej i II-ej kategorii zostały tak sformułowane, że możemy przenieść je bez zmian na zbiory w przestrzeni $\mathcal{E}^m$. W dalszym ciągu będziemy więc używali tych samych pojęć i symbolów co w Rozdziale III, w szczególności symbolu E' dla oznaczenia pochodnej zbioru E, symbolu $\bar{E}$ dla oznaczenia jego zamknięcia itd.

Wnętrzem zbioru E będziemy nazywali zbiór punktów wewnętrznych tego zbioru i oznaczali je przez $W(E)$.

Zbiór $W(E)$ jest oczywiście otwarty i równość $E = W(E)$ charakteryzuje zbiory otwarte.

Można obecnie przenieść twierdzenia Rozdziału III na zbiory przestrzeni $\mathcal{E}^m$, czyniąc pewne drobne zmiany formalne w niektórych dowodach. W ten sposób można z łatwością dowieść następujących twierdzeń dla zbiorów w przestrzeni $\mathcal{E}^m$:

(4.4) *Każdy zbiór ma co najwyżej przeliczalną ilość punktów odosobnionych.*

(4.5) *Dla wszelkich zbiorów A i B mamy:*

($\bar{1}$) $(A+B)' = A' + B'$; $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$;

($\bar{2}$) *jeżeli $A \subset B$, to $A' \subset B'$;*

($\bar{3}$) $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$.

(4.6) *Pochodna iloczynu ilukolwiek zbiorów jest zawarta w iloczynie pochodnych tych zbiorów.*

(4.7) *Pochodna każdego zbioru jest zbiorem zamkniętym.*

(4.8) *Iloczyn ilukolwiek zbiorów zamkniętych jest zbiorem zamkniętym. Suma skończonej liczby zbiorów zamkniętych jest zbiorem zamkniętym.*

(4.9) *Suma ilukolwiek zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. Iloczyn skończonej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*

(4.10) *Jeżeli zbiór E jest otwarty, to zbiór $-E$ jest zamknięty. Jeżeli zbiór E jest zamknięty, to zbiór $-E$ jest otwarty.*

(4.11) *Każdy zbiór nieskończony zawiera podzbiór przeliczalny, w nim gęsty.*

(4.12) *Przedział jest zbiorem II-ej kategorii.*

Ponieważ każdy zbiór zawierający zbiór II-ej kategorii sam jest oczywiście zbiorem II-ej kategorii, więc

(4.13) *Każdy zbiór otwarty niepusty (a więc i cała przestrzeń $\mathcal{E}^m$) jest zbiorem II-ej kategorii.*

(4.14) *Każdy zbiór zamknięty II-ej kategorii zawiera kulę.*

Wynika stąd na mocy twierdzenia (4.1), str. 79, że:

(4.15) *Każdy zbiór zamknięty II-ej kategorii zawiera przedział.*

(4.16) *Suma przeliczalnej ilości zbiorów I-ej kategorii jest zbiorem I-ej kategorii.*

W szczególności więc *zbiór przeliczalny jest I-ej kategorii.*

(4.17) *Jeżeli zbiór E jest I-ej kategorii, to zbiór $-E$ jest II-ej kategorii.*

Twierdzenie (2.8), str. 63, dla przestrzeni $\mathcal{E}^m$, gdzie $m>1$, byłoby fałszywe; łatwo np. okazać, że kula nie da się przedstawić jako suma przeliczalnej mnogości przedziałów otwartych rozłącznych.

Prawdziwe jest natomiast następujące twierdzenie:

(4.18) *Każdy zbiór otwarty G jest sumą co najwyżej przeliczalnej mnogości przedziałów zamkniętych, nie zachodzących na siebie.*

Dowód. Niech $\{\boldsymbol{K}_i\}$ będzie regularnym ciągiem krat, a H_i — sumą tych przedziałów kraty $\boldsymbol{K}_i$, które są zawarte w zbiorze G.

Okażemy, że $G=\sum_{i=1}^{\infty} H_i$. Jest jasne, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} H_i \subset G. \tag{2}$$

Niech p będzie dowolnym punktem zbioru G; istnieje więc kula $K=\overline{K}(p,r)\subset G$; istnieje też takie i_0, że $\Delta(\boldsymbol{K}_{i_0})<\frac{r}{\sqrt{m}}$. Jeżeli dwa punkty p_1,p_2 należą do jakiegoś przedziału $I\in\boldsymbol{K}_{i_0}$, to

$$\varrho(p_1,p_2)\leqslant\sqrt{m\left(\frac{r}{\sqrt{m}}\right)^2}=r. \tag{3}$$

Istnieje taki przedział $I\in\boldsymbol{K}_{i_0}$, że $p\in I$; wobec (3) jest $\varrho(p,q)\leqslant r$ dla każdego punktu $q\in I$, skąd $I\subset K\subset G$, a więc $p\in H_{i_0}$. W ten sposób okazaliśmy, że

$$G\subset\sum_{i=1}^{\infty} H_i,$$

co łącznie z (2) daje równość $G=\sum_{i=1}^{\infty} H_i$.

Ustawmy teraz wszystkie przedziały, które wchodzą w skład zbiorów H_i dla $i=1,2,\ldots$, w ciąg $\{I_n\}$. Można to uczynić, ponieważ jest ich przeliczalnie wiele na mocy tw. 2.1, str. 77. Jeżeli usuniemy z tego ciągu przedziały, które są zawarte w poprzedzających (a tylko ten wypadek jest możliwy, bo ciąg krat jest z założenia regularny), to otrzymamy ciąg przedziałów nie zachodzących na siebie, którego sumą jest nadal $\sum_{i=1}^{\infty} H_i$, a więc zbiór G.

(4.19) *Każdy zbiór otwarty G jest sumą co najwyżej przeliczalnej ilości kul otwartych (niekoniecznie rozłącznych).*

Dowód. Niech $p_1,p_2,\ldots$ będzie zbiorem wszystkich punktów wymiernych, należących do G. Dla każdego p_n istnieją takie liczby r, dla których $K(p_n,r)\subset G$. Niech r_n będzie ich kresem górnym.

Okażemy, że $K(p_n,r_n)\subset G$. Istotnie, gdyby istniał punkt $p_0\in K(p_n,r_n)-G$, to byłoby $\varrho(p_0,p_n)<r_n$ i p_0 non $\in G$, skąd dla $r=\frac{1}{2}[r_n+\varrho(p_0,p_n)]$ mielibyśmy $r_n>r>\varrho(p_0,p_n)$, a więc punkt $p_0\in K(p_n,r)$ i tym samym kula $K(p_n,r)$ nie byłaby zawarta w zbiorze G. Tym bardziej żadna kula $K(p_n,\bar{r})$, gdzie $\bar{r}>r$, nie byłaby zawarta w G, co jest sprzeczne z określeniem liczby r_n.

Okażemy teraz, że $G=\sum\limits_{n=1}^{\infty}K_n$, gdzie $K_n=K(p_n,r_n)$. Jasne jest, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty}K_n\subset G$. Wystarczy więc dowieść, że $G\subset\sum\limits_{n=1}^{\infty}K_n$. Niech $p=(x_1,\ldots,x_m)\,\epsilon\,G$. Istnieje więc taka kula $K(p,r)\subset G$ i takie liczby wymierne $w_1,\ldots,w_m$, że $|w_i-x_i|<\dfrac{r}{2\sqrt{m}}$ dla $i=1,2,\ldots,m$. Dla $\overline{p}=(w_1,\ldots,w_m)$ mamy więc

$$\varrho(p,\overline{p})=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(w_i-x_i)^2}<\sqrt{m\left(\frac{r}{2\sqrt{m}}\right)^2}=\frac{r}{2},$$

a zatem $p\,\epsilon\,K\left(\overline{p},\dfrac{r}{2\sqrt{m}}\right)$. Nadto $K\left(\overline{p},\dfrac{r}{2\sqrt{m}}\right)\subset K(p,r)\subset G$, albowiem dla każdego punktu $p'\,\epsilon\,K\left(\overline{p},\dfrac{r}{2\sqrt{m}}\right)$ jest

$$\varrho(p,p')\leqslant\varrho(p,\overline{p})+\varrho(\overline{p},p')<\frac{r}{2}+\frac{r}{2\sqrt{m}}<r.$$

Punkt $\overline{p}$ występuje w ciągu $p_1,p_2,\ldots$ Niech więc $\overline{p}=p_n$. Musi być $\dfrac{r}{2\sqrt{m}}\leqslant r_n$, gdyż $K\left(p_n,\dfrac{r}{2\sqrt{m}}\right)\subset G$, a zatem $p\,\epsilon\,K(p_n,r_n)$. W ten sposób okazaliśmy, że $G\subset\sum\limits_{n=1}^{\infty}K_n$.

PRZYKŁADY. 1. Zbiory zamknięte i doskonałe.

(a) *Zbiór pusty jest zamknięty*, gdyż nie posiada żadnych punktów skupienia; pochodna jego jest więc zbiorem pustym, zatem jest w nim zawarta.

(b) *Cała przestrzeń $\mathcal{E}^m$ jest zbiorem zamkniętym.*

(c) *Każdy przedział zamknięty $I=\langle a_1,\ldots,a_m;\,b_1,\ldots,b_m\rangle$ jest zbiorem doskonałym.*

Istotnie, niech $p_n=(x_1^n,\ldots,x_m^n)\,\epsilon\,I$ i $p_n\to p_0=(x_1^0,\ldots,x_m^0)$. Wówczas mamy $a_i\leqslant x_i^n\leqslant b_i$, a na mocy tw. (3.1), str. 78, jest $\lim\limits_{n\to\infty}x_i^n=x_i^0$ dla $i=1,2,\ldots,m$. Wynika stąd, że $a_i\leqslant x_i^0\leqslant b_i$, a więc $x_0\,\epsilon\,I$.

(d) *Każdy odcinek $\overline{pq}$ jest zbiorem zamkniętym.*

Jest to oczywiste, gdy $p=q$; załóżmy więc, że $p\neq q$. Jeżeli ciąg $\{p_n\}$ punktów odcinka $\overline{pq}$ dąży do punktu $p_0=(x_1^0,\ldots,x_m^0)$, i jeżeli $p=(x_1,\ldots,x_m)$, $q=(y_1,\ldots,y_m)$, $p_n=(x_1^n,\ldots,x_m^n)$ to mamy $x_i^n=\vartheta_n x_i+(1-\vartheta_n)y_i$, gdzie $0\leqslant\vartheta_n\leqslant 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^n=x_i^0$. Istnieje poza tym takie i_0, że $x_{i_0}\neq y_{i_0}$; wówczas $\vartheta_n=\dfrac{x_{i_0}^n-y_{i_0}}{x_{i_0}-y_{i_0}}\to\dfrac{x_{i_0}^0-y_{i_0}}{x_{i_0}-y_{i_0}}=\vartheta_0$ i jasne jest, że $0\leqslant\vartheta_0\leqslant 1$. Stąd $x_i^n\to\vartheta_0 x_i+(1-\vartheta_0)y_i=x_i^0$, więc $p_0\in\overline{pq}$.

Łatwo można okazać, że *płaszczyzna jest zbiorem zamkniętym.*

(e) *Łamana jest zbiorem zamkniętym,* jako suma skończonej liczby odcinków, które są zamknięte.

(f) *Jeżeli z przedziału zamkniętego I usuniemy przeliczalny zbiór przedziałów otwartych, nie zachodzących na siebie, otrzymamy zbiór doskonały.*

Niech bowiem $\{I_n\}$ będzie ciągiem przedziałów otwartych, które usunęliśmy z przedziału I, i niech $E=I-\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_n$. Na mocy tw. (4.10), str. 81, zbiór E jest zamknięty.

Pozostaje do okazania, że $E\subset E'$. Niech $p\in E$. Jeżeli p nie jest punktem skupienia zbioru $I-E$, to oczywiście $p\in E'$; jeżeli zaś $p\in(I-E)'$, to istnieje taki ciąg $\{p_n\}$ punktów zbioru $I-E$, że $p_n\to p$. Do każdego n istnieje taka liczba k_n, że $p_n\in I_{k_n}$. Widzimy, że odcinek $d_n=\overline{pp_n}$ nie może być zawarty w zbiorze I_{k_n}, gdyż p non $\in I_{k_n}$.

Jeżeli więc $p\in\bar{I}_{k_n}$, to p należy do jednej ze ścian S przedziału I_{k_n}; mamy wówczas $S\subset E$, gdyż przedziały I_n nie zachodzą na siebie. Ścianę S możemy uważać za przedział w przestrzeni $\mathcal{E}^{m-1}$, więc $S\subset S'$, a stąd $p\in S'\subset E'$.

Jeżeli zaś p non $\in\bar{I}_{k_n}$, to na odcinku d_n musi istnieć punkt $q_n\in E$, a wówczas $\varrho(p,q_n)\leqslant\varrho(p,p_n)$ i z $p_n\to p$ wynika $q_n\to p$, skąd $p\in E'$. Zatem $E\subset E'$, c. b. d. d.

(g) *Zbiór Cantora $\mathcal{C}_2$ w $\mathcal{E}^2$ jest zbiorem doskonałym nigdzie nie gęstym.*

Zbiór ten tworzy się w sposób następujący. Dzielimy przedział zamknięty $I=\langle 0,0;1,1\rangle$ na 9 równych przedziałów $\langle a_1,a_2;b_1,b_2\rangle$, gdzie a_1, a_2 przebiegają liczby $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, a $b_1=a_1+\frac{1}{3}$ i $b_2=a_2+\frac{1}{3}$. Z I usuwamy przedział otwarty środkowy, tj. przedział $\rangle\frac{1}{3},\frac{1}{3};\frac{2}{3},\frac{2}{3}\langle$. Każdy z pozostałych 8 przedziałów dzielimy znów na 9 równych przedziałów, z których usuwamy przedział otwarty środkowy. Postępując tak dalej, usuwamy za k-tym razem z przedziału I zbiór P_k złożony z 8^{k-1} przedziałów otwartych. Zbiór $H=\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ jest więc zbiorem otwartym. Zbiór $\mathcal{C}_2=I-H$ nazywamy *zbiorem Cantora w* $\mathcal{E}^2$. Zbiór ten jest doskonały na mocy (f). Dowód, że jest on nigdzie nie gęsty przebiega podobnie jak dla zbioru $\mathcal{C}$ na linii prostej.

W analogiczny sposób buduje się zbiór Cantora $\mathcal{C}_m$ w $\mathcal{E}^m$ dla $m>2$, który też jest doskonały i nigdzie nie gęsty.

(h) *Kula zamknięta jest zbiorem zamkniętym* (co uzasadnia oznaczanie jej przez $\bar{K}(p,r)$).

Łatwy dowód pozostawiamy czytelnikowi.

2. Zbiory otwarte.

(i) *Zbiór pusty i przestrzeń* $\mathcal{E}^m$ *są zbiorami otwartymi.*

Okażemy na str. 91, że te dwa zbiory są jedynymi, które są równocześnie zamknięte i otwarte.

(j) *Kula otwarta jest zbiorem otwartym.*

Jeżeli bowiem $p \in K(p_0,r)$, to $\varrho(p_0,p)<r$. Niech $r_1=r-\varrho(p_0,p)$. Jeżeli $q \in K(p,r_1)$, to $\varrho(q,p_0)\leqslant\varrho(q,p)+\varrho(p,p_0)<[r-\varrho(p_0,p)]+\varrho(p_0,p)=r$, a więc $K(p,r_1)\subset K(p_0,r)$. W ten sposób okazaliśmy, że p jest punktem wewnętrznym kuli $K(p_0,r)$.

Podobnie dowodzi się, że

(k) *przedział otwarty jest zbiorem otwartym.*

3. Zamknięcie, wnętrze, brzeg. Pozostawiamy czytelnikowi do okazania, że

(l) *Zamknięciem przedziału* $[a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_m]$ *jest przedział zamknięty* $\langle a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_m\rangle$; *wnętrzem tego przedziału jest przedział otwarty* $\rangle a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_m\langle$; *brzegiem* (zbiorem punktów brzegowych) *tego przedziału jest zbiór wszystkich punktów, które należą do przedziału zamkniętego* $\langle a_1,\dots,a_m; b_1,\dots,b_m\rangle$ *i do którejkolwiek z płaszczyzn o równaniach* $x_i=a_i$, $y_i=b_i$.

To uzasadnia nazwę *brzeg przedziału* użytą w § 2,2, str. 76.

(m) *Zamknięciem kuli* $K(p,r)$ *jest zbiór*

$$\bar{K}(p,r)=\underset{q}{E}\{\varrho(p,q)\leqslant r\};$$

wnętrzem kuli zamkniętej $\overline{K}(p,r)$ *jest kula* $K(p,r)$; *brzegiem kuli* $K(p,r)$ *jest zbiór*

$$\underset{q}{E}\{\varrho(p,q)=r\}.$$

(n) *Brzegiem odcinka* $\overline{pq}$ *w przestrzeni* $\mathcal{E}^m$ *dla* $m>1$ *jest cały ten odcinek.*

Stąd wynika, że *odcinek i łamana są w* $\mathcal{E}^m$ *dla* $m>1$ *zbiorami brzegowymi.*

5. Odstęp, średnica. W Rozdziale III (§ 1,7, str. 71) zdefiniowaliśmy odstęp punktu od zbioru, odstęp dwu zbiorów, średnicę zbioru dla zbiorów liniowych oraz zbiory oddalone. Definicje te są tak sformułowane, że można je przenieść bez zmiany na zbiory w przestrzeni $\mathcal{E}^m$. Z łatwością stwierdzamy, że i w tym wypadku wszystkie udowodnione tam twierdzenia pozostają prawdziwe.

PRZYKŁADY. 1. *Odstęp punktu* q *od kuli* $K=K(p_0,r)$ *jest równy* 0, *gdy* $\varrho(p_0,q)\leqslant r$, *a równy* $\varrho(p_0,q)-r$, *gdy* $\varrho(p_0,q)>r$.

Istotnie, w pierwszym wypadku $q\in\overline{K}$, w drugim zaś jest dla każdego $p'\in K$

$$\varrho(q,p')\geqslant\varrho(p_0,q)-\varrho(p',p_0)>\varrho(p_0,q)-r,$$

skąd

$$d(q,K)\geqslant\varrho(p_0,q)-r. \tag{4}$$

Z drugiej strony, niech $0<\varepsilon<r$, $p_0=(x_1^0,\dots,x_m^0)$, $q=(x_1,\dots,x_m)$. Połóżmy $x_i'=\vartheta x_i^0+(1-\vartheta)x_i$, $p'=(x_1',\dots,x_m')$ i obierzmy $\vartheta=1-\dfrac{r-\varepsilon}{\varrho(p_0,q)}$. Wyliczamy łatwo, że $\varrho(p',p_0)=r-\varepsilon$, więc $p'\in K(p_0,r)$ oraz, że $\varrho(p',q)=\varrho(p_0,q)-r+\varepsilon$, skąd, wobec dowolności ε, $d(q,K)\leqslant\varrho(p_0,q)-r$.

2. *Średnica przedziału* $I=\langle a_1,\dots,a_m;b_1,\dots,b_m\rangle$ *jest równa*

$$\delta(I)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i-b_i)^2}.$$

Dla dowolnych bowiem punktów $p'=(x_1',\dots,x_m')$ i $p''=(x_1'',\dots,x_m'')$ przedziału I jest $|x_i'-x_i''|\leqslant b_i-a_i$, skąd

$$\varrho(p',p'')=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i'-x_i'')^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i)^2},$$

a więc

$$\delta(I)\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i)^2}.$$

Z drugiej strony, punkty $p=(a_1,...,a_m)$ i $q=(b_1,...,b_m)$ należą do I, więc

$$\delta(I)\geqslant\varrho(p,q)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i)^2}.$$

3. *Średnica kuli $K(p,r)$ jest równa $2r$.*

6. Spójność. Zbiór E nazywamy *spójnym*, jeżeli nie jest sumą dwóch zbiorów A i B niepustych, rozłącznych, i z których żaden nie zawiera punktów skupienia drugiego:

(5) $$E=A+B,\quad A\neq 0,\quad B\neq 0,\quad AB+AB'+A'B=0.$$

(6.1) *Suma dowolnej mnogości zbiorów spójnych, z których każde dwa mają punkt wspólny, jest zbiorem spójnym.*

Dowód. Niech E będzie sumą zbiorów rodziny $\boldsymbol{H}$ złożonej ze zbiorów spójnych, z których każde dwa mają punkt wspólny.

Przypuśćmy, że zbiór E nie jest spójny. Istnieją więc zbiory A i B, dla których zachodzi (5). W szczególności istnieją wśród zbiorów rodziny $\boldsymbol{H}$ dwa takie zbiory C i D, że $AC\neq 0$ i $BD\neq 0$. Wówczas $C\subset A$, bo gdyby było $CB\neq 0$, to dla zbiorów

$$A_1=AC \quad\text{i}\quad B_1=BC$$

mielibyśmy

$$C=A_1+B_1,\quad A_1\neq 0,\quad B_1\neq 0\quad\text{i}\quad A_1B_1'+A_1'B_1+A_1B_1=0$$

wbrew spójności zbioru C. Podobnie musi być $D\subset B$. Na mocy założenia istnieje punkt $p\in CD$, a ponieważ $C\subset A$ i $D\subset B$, więc $p\in AB$, skąd wynika, że $AB\neq 0$ wbrew (5).

(6.2) *Jeżeli zbiór E jest spójny, to każdy taki zbiór H, że $E\subset H\subset\bar{E}$, jest spójny.*

Dowód. Przypuśćmy, że zbiór H nie jest spójny. Istnieją więc takie zbiory A i B, że

$$H=A+B, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad AB'=0.$$

Niech $A_1=AE$ i $B_1=BE$. Oczywiście $E=A_1+B_1$. Ponieważ zbiór E jest spójny, to A_1 lub B_1, np. A_1, jest pusty, czyli $AE=0$, skąd $A \subset H-E \subset \bar{E}-E$, a więc każdy punkt zbioru A jest punktem skupienia zbioru E. Ponieważ zaś $E \subset H-A=B$, więc każdy punkt zbioru A jest punktem skupienia zbioru B wbrew założeniu, że $AB'=0$.

Z łatwością dowodzi się również następującego twierdzenia:

(6.3) *Jeżeli dla wszelkich dwóch punktów p i q zbioru E istnieje podzbiór spójny H zbioru E, zawierający te punkty, to zbiór E jest spójny.*

Niech teraz p będzie dowolnym punktem zbioru E. Oznaczmy przez S sumę wszystkich podzbiorów spójnych zbioru E, zawierających punkt p. Zbiór S jest niepusty, gdyż zbiór złożony z samego punktu p jest spójny i zawarty w E.

Zbiór S nazywamy *składową punktu p w zbiorze E*.

Ogólnie zbiór S nazywamy *składową* zbioru E, jeżeli S jest składową jakiegoś punktu w zbiorze E.

Każdy punkt p zbioru E należy do jakiejś składowej zbioru E (mianowicie do składowej punktu p w zbiorze E).

(6.4) *Każda składowa zbioru E jest zbiorem spójnym.*

Dowód. Niech S będzie składową punktu p w zbiorze E. Na mocy (6.1) i definicji składowej punktu w zbiorze, zbiór S jest spójny.

(6.5) *Dwie składowe zbioru E są albo rozłączne, albo identyczne.*

Dowód. Niech S_1 i S_2 będą składowymi zbioru E i niech $S_1S_2 \neq 0$. Istnieje więc punkt $p \in S_1S_2$. Oznaczając przez S składową tego punktu w zbiorze E, mamy $S_1 \subset S$ i $S_2 \subset S$, gdyż S jest sumą wszystkich zbiorów spójnych zawierających punkt p, a zbiory S_1 i S_2 są spójne na mocy tw. (6.4).

Z drugiej strony S_1 jest na mocy definicji składową jakiegoś punktu p_1 w zbiorze E, a ponieważ zbiór S_1+S jest spójny, więc $S_1+S \subset S_1$, skąd $S \subset S_1$; podobnie $S \subset S_2$. Wynika stąd, że $S_1=S_2=S$.

W ten sposób — jak widzimy — każdy zbiór E rozpada się na pewną mnogość zbiorów spójnych rozłącznych, zwanych składowymi. Każda składowa zbioru E ma tę własność, że każdy zawierający ją podzbiór zbioru E albo jest z nią identyczny, albo nie jest spójny. Z twierdzenia (6.2) wynika, że

(6.6) *Każda składowa zbioru zamkniętego jest zbiorem zamkniętym.*

Niech teraz ε będzie dowolną liczbą dodatnią.

Będziemy mówili, że dwa punkty p i q zbioru E można *połączyć w E łańcuchem ε*, jeżeli istnieje taki ciąg skończony $p_1, p_2, \ldots, p_n$ punktów zbioru E, że

$$p_1 = p, \quad p_n = q \quad \text{i} \quad \varrho(p_i, p_{i+1}) < \varepsilon \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

(6.7) *Jeżeli zbiór E jest spójny, to dla każdego $\varepsilon > 0$ dowolne dwa punkty zbioru E można połączyć w E łańcuchem ε.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje takie $\varepsilon > 0$, dla którego pewne dwa punkty p_1 i p_2 zbioru E nie dadzą się połączyć w E łańcuchem ε. Niech A będzie zbiorem tych punktów zbioru E, które dają się połączyć w E z punktem p_1 łańcuchem ε. Niech $B = E - A$. Wówczas $E = A + B$, $p_1 \in A$ i $p_2 \in B$, więc $A \neq 0$, $B \neq 0$ i $AB = 0$. Jasne jest, że dla dowolnych dwóch punktów $q_1 \in A$ i $q_2 \in B$ musi być $\varrho(q_1, q_2) \geqslant \varepsilon$, a zatem $AB' + A'B = 0$, wbrew spójności zbioru E.

Warunek (6.6) jest tylko konieczny, ale nie dostateczny na to, by zbiór E był spójny. Np. zbiór punktów wymiernych w $\mathcal{E}^1$ nie jest spójny, mimo że każde dwa dowolne jego punkty dadzą się w nim połączyć łańcuchem ε przy każdym $\varepsilon > 0$.

Zbiór ograniczony, zamknięty i spójny, zawierający co najmniej dwa punkty, nazywamy *kontinuum* (por. str. 68).

(6.8) *Na to, by zbiór ograniczony zamknięty E był kontinuum, potrzeba i wystarcza, by spełniał on następujący*

Warunek Cantora. *Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ dowolne dwa jego punkty dają się w nim połączyć łańcuchem ε.*

Dowód. Konieczność warunku wynika z twierdzenia (6.7), pozostaje więc tylko okazać, że warunek jest dostateczny. Gdyby zbiór E nie był spójny, to istniałyby zbiory A i B spełniające wzory (5), str. 87. Gdyby było $A'B' \neq 0$, to ze względu na to, że $A'B' \subset E' \subset E$, byłoby $A'B'(A+B) \neq 0$, skąd $A'B + AB' \neq 0$ wbrew ostatniemu ze wzorów (5).

Zatem $A'B'=0$. Wynika stąd dalej, że $\bar{A}\bar{B}=0$, gdyż

$$\bar{A}\bar{B}=(A+A')(B+B')=AB+AB'+A'B+A'B'.$$

Ponieważ zaś

$$\bar{A}+\bar{B}=A+B=\bar{E}=E,$$

więc zbiór E byłby sumą dwu zbiorów A i B, zamkniętych, ograniczonych, rozłącznych i niepustych, a zatem oddalonych, czyli takich, że $d(A,B)=\delta>0$. Jest jasne, że żadne dwa punkty $p_1 \epsilon A$ i $p_2 \epsilon B$ nie dadzą się połączyć w E łańcuchem $\varepsilon<\delta$ wbrew twierdzeniu (6.7).

Jeżeli w tw. (6.8) opuścimy założenie ograniczoności, otrzymane twierdzenie może być fałszywe. Np. niech w płaszczyźnie $\mathcal{E}$ zbiór E będzie złożony z osi x i hiperboli $xy=1$. Zbiór ten jest zamknięty, każde jego dwa punkty dadzą się w nim połączyć łańcuchem ε dla dowolnego $\varepsilon>0$, a mimo to zbiór E ma trzy składowe.

(6.9) *Każde kontinuum jest zbiorem doskonałym.*

D o w ó d. Ponieważ każde kontinuum jest zbiorem zamkniętym na mocy definicji, więc pozostaje do okazania, że jest ono zbiorem w sobie gęstym. Otóż gdyby jakiś punkt p kontinuum E nie był punktem skupienia tego kontinuum, to istniałaby taka kula $K(p,r)$, że żadne punkty tej kuli, z wyjątkiem p, nie należałyby do E. Zbiory $A=E\cdot K(p,r)=(p)$ i $B=E-K(p,r)$ spełniałyby więc warunki (5), a zatem zbiór E nie byłby spójny.

Zbiór otwarty i spójny nazywamy *obszarem* (por. str. 68).

(6.10) *Na to, by zbiór otwarty G był obszarem, potrzeba i wystarcza, by każde dwa jego punkty p_1 i p_2 dały się w nim połączyć łamaną.*

D o w ó d. Warunek jest konieczny. Istotnie, przypuśćmy, że zbiór G jest obszarem i że punkt $p_1 \epsilon G$ nie da się połączyć z punktem $p_2 \epsilon G$ łamaną leżącą w G. Oznaczmy przez A zbiór tych punktów, które dają się połączyć z punktem p_1 łamaną leżącą w zbiorze G, i niech $B=G-A$. Zbiór A jest oczywiście otwarty. Zbiór B jest też otwarty. Gdyby bowiem jakiś punkt $p \epsilon B$ nie był punktem wewnętrznym zbioru B, to w każdej kuli $K(p,r)$ zawartej w G, a takie kule istnieją na mocy tw. (4.19) str. 82, istniałby punkt zbioru A. Niech $p_0 \epsilon K(p,r)A$. Istnieje łamana $\overline{p_1p_2...p_0}$ leżąca w G i łącząca p_1 z p_0; łamana $\overline{p_1p_2...p_0p}$ leży też w G i łączy punkt p_1 z p. Byłoby więc $p \epsilon A$, a nie $p \epsilon B$. Zbiór B jest zatem otwarty.

Zbiory A i B są niepuste, gdyż $p_1 \epsilon A$ i $p_2 \epsilon B$. Łatwo zauważyć, że zbiory A i B czynią zadość warunkom (5), zbiór G nie byłby więc spójny.

Dostateczność warunku wynika natychmiast z tw. (6.1) i stąd, że każdy odcinek (a więc i łamana) jest zbiorem spójnym (p. przykłady 1 i 2, str. niniejsza).

(6.11) *Zamknięcie każdego obszaru jest kontinuum.*

Dowód wynika natychmiast z (6.2).

(6.12) *Jeżeli zbiór E jest równocześnie zamknięty i otwarty, to albo $E=0$, albo $E=\mathcal{E}^m$.*

Dowód. Przypuśćmy, że zbiór E jest niepusty i że $E \neq \mathcal{E}^m$; zatem $-E \neq 0$. Ze spójności przestrzeni $\mathcal{E}^m$ wynika więc, że $E(-E)'+E'(-E)\neq 0$; nadto zbiór $-E$ jest równocześnie otwarty i zamknięty, podobnie jak E. Stąd

$$0 \neq E(-E)'+E'(-E) \subset E(-E)+E(-E)=E(-E)=0,$$

co niemożliwe.

Z (6.12) wynika w szczególności, że dla $m>1$ odcinek, a dla $m>2$ płaszczyzna nie są zbiorami otwartymi w $\mathcal{E}^m$.

PRZYKŁADY. 1. *Odcinek jest zbiorem spójnym.* Niech bowiem $p=(x_1,\dots,x_m)$ i $q=(y_1,\dots,y_m)$ będą punktami odcinka I i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ odcinek jest zbiorem zamkniętym i ograniczonym, wystarczy okazać, że punkty p i q można w nim połączyć łańcuchem ε. Niech

$$x_i(\vartheta)=\vartheta x_i+(1-\vartheta)y_i \quad \text{i} \quad p(\vartheta)=(x_1(\vartheta),\dots,x_m(\vartheta)).$$

Łatwo sprawdzamy, że

$$p(\vartheta) \epsilon I \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1,$$

$$\varrho(p(\vartheta_1),p(\vartheta_2))=|\vartheta_1-\vartheta_2|\varrho(p,q),$$

$$p(0)=q, \quad p(1)=p.$$

Niech $s>\varrho(p,q)/\varepsilon$. Ciąg punktów $p_i=p(i/s)$ dla $s=0,1,\dots,s$ jest łańcuchem ε, łączącym punkty p i q w I.

2. *Łamana jest zbiorem spójnym.* Wynika to przez łatwą indukcję z twierdzenia (6.1) i ze spójności odcinka.

3. *Kula (zamknięta i otwarta) jest zbiorem spójnym.* Wynika to ze spójności odcinka, z tw. (6.3) i stąd, że jeżeli p i q są punktami kuli, to odcinek $\overline{pq}$ jest podzbiorem tej kuli.

4. *Kula pozbawiona jednego punktu jest zbiorem spójnym.* Istotnie, niech p i q będą dwoma punktami kuli K, z której usunięto punkt p_0. Okażemy, że punkty p i q można połączyć łamaną $Ł$. leżącą w $K-(p_0)$. Jeżeli punkt p_0 nie leży na odcinku $\overline{pq}$, to niech $Ł=\overline{pq}$, jeżeli zaś $p_0 \epsilon \overline{pq}$, to niech p_1 będzie dowolnym punktem kuli K, nie leżącym na odcinku $\overline{pq}$ i takim, że

$$\varrho(p_1,p_0) \leqslant \min[\varrho(p,p_0), \varrho(q,q_0)].$$

Łatwo obliczyć, że wówczas punkt p_0 nie leży ani na odcinku $\overline{pp_1}$, ani na odcinku $\overline{p_1q}$. Wystarczy więc wziąć $Ł=\overline{pp_1}+\overline{p_1q}$.

5. *Brzeg kuli jest zbiorem spójnym.* Przypuśćmy bowiem, że brzeg S kuli K rozpada się na sumę dwóch zbiorów E i H takich, że $E \neq 0$, $H \neq 0$ i $EH+EH'+E'H=0$. Oznaczmy przez K^* kulę K pozbawioną środka p_0. Zbiór ten jest spójny (przykład 4). Niech E^* będzie zbiorem punktów różnych od p_0 i leżących na jakimkolwiek odcinku łączącym punkt p_0 z punktami zbioru E, a H^* niech będzie analogicznym zbiorem dla H. Wówczas $K^*=E^*+H^*$, skąd wnosimy z łatwością, że $E^*H^*+E^{*\prime}H^*+E^*H^{*\prime}=0$, $E^* \neq 0$ i $H^* \neq 0$. Zbiór K^* nie byłby więc spójny.

7. Zbiory wypukłe. Zbiór E mający tę własność, że jeżeli dwa punkty p i q należą do E, to i odcinek $\overline{pq}$ jest zawarty w E, nazywamy *wypukłym*.

PRZYKŁADY. 1. *Zbiór pusty i przestrzeń $\mathcal{E}^m$ są zbiorami wypukłymi.*

2. *Odcinek jest zbiorem wypukłym.* Wynika to natychmiast z definicji.

3. *Przedział i kula są zbiorami wypukłymi.* Dla dowodu p. przykłady 1 i 3, str. 91 i 92.

Z definicji zbioru wypukłego wnosimy z łatwością, że

(7.1) *Iloczyn dowolnej ilości zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.*

Z twierdzenia (6.3), str. 88, wynika od razu, że

(7.2) *Każdy zbiór wypukły jest spójny.*

Niech teraz $E \subset \mathcal{E}^m$. Oznaczmy przez $\operatorname{conv}(E)$ iloczyn wszystkich zbiorów wypukłych, zawierających zbiór E. Zbiory takie istnieją, gdyż np. $\mathcal{E}^m$ jest zbiorem wypukłym, zawierającym E. Na mocy twierdzenia (7.1) zbiór $\operatorname{conv}(E)$ jest wypukły; jest to zarazem najmniejszy zbiór wypukły zawierający zbiór E, tj. $\operatorname{conv}(E)$ jest podzbiorem każdego zbioru wypukłego, zawierającego zbiór E.

Zbiór $\operatorname{conv}(E)$ nazywamy *powłoką wypukłą zbioru E*.

Zajmiemy się zbiorami wypukłymi w $\mathcal{E}^m$.

(7.3) *Jeżeli zbiór E jest wypukły i jeżeli punkty $p_i = (x_1^i, \ldots, x_m^i)$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$, należą do E, to każdy punkt $p = (x_1, \ldots, x_m)$, którego współrzędne wyrażają się wzorami:*

$$x_k = \vartheta_1 x_k^1 + \ldots + \vartheta_n x_k^n, \quad \text{gdzie} \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \vartheta_i \geqslant 0 \quad \text{i} \quad \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n = 1$$

również należy do E.

Dowód. Udowodnimy to przez indukcję zupełną względem liczby n punktów p_i. Dla $n = 1$ twierdzenie to jest oczywiste. Załóżmy więc, że jest ono prawdziwe dla $n - 1 > 1$ punktów, i niech $p_i = (x_1^i, \ldots, x_m^i) \in E$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $\vartheta_i \geqslant 0$ i $\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n = 1$. Wystarczy wziąć pod uwagę wypadek, gdy $\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_{n-1} > 0$. Niech p będzie punktem o współrzędnych

$$x_k = \vartheta_1 x_k^1 + \ldots + \vartheta_n x_n^n,$$

a $\overline{p}$ — punktem o współrzędnych

$$\overline{x}_k = (\vartheta_1 x_k^1 + \ldots + \vartheta_{n-1} x_k^{n-1})(\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_{n-1})^{-1}.$$

Na mocy założenia indukcyjnego jest $\overline{p} \in E$. Ale współrzędne punktu p możemy przedstawić w postaci $x_k = (\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_{n-1})\overline{x}_k + \vartheta_n x_k^n$, zatem $p \in \overline{\overline{p}p_n} \subset E$ czyli $p \in E$.

(7.4) *Powłoka wypukła zbioru E jest identyczna ze zbiorem wszystkich punktów $p = (x_1, \ldots, x_m)$, których współrzędne x_k są postaci*

$$x_k = \vartheta_1 x_1^1 + \ldots + \vartheta_n x_k^n \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{6}$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, $\vartheta_i \geqslant 0$, $\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n = 1$ i gdzie liczby $(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_m^k)$ są współrzędnymi jakiegoś punktu zbioru E.

Dowód. Oznaczmy przez H zbiór punktów, których współrzędne są postaci (6). Bez trudu stwierdzamy, że zbiór H jest wypukły, a ponieważ $E \subset H$, więc $\operatorname{conv} E \subset H$. Z drugiej strony, z tw. (7.4) i z uwagi na to, że $\operatorname{conv} E$ jest zbiorem wypukłym zawierającym E, mamy $H \subset \operatorname{conv} E$. Stąd $H = \operatorname{conv} E$.

Niech będzie danych $m+1$ dowolnych punktów $p_1, \ldots, p_{m+1}$, które nie leżą na jednej płaszczyźnie. Powłokę wypukłą zbioru złożonego z tych punktów nazywamy *simpleksem (rozpiętym na punktach* $p_1, \ldots, p_{m+1}$*)*.

PRZYKŁADY. *Simpleksem w* $\mathcal{E}^1$ *jest odcinek, w* $\mathcal{E}^2$ *trójkąt, w* $\mathcal{E}^3$ *czworościan.*

Dowód przeprowadzimy np. dla płaszczyzny $\mathcal{E}^2$. Niech $p_i = (x_1^i, x_2^i)$, gdzie $i = 1, 2, 3$, nie leżą na jednej prostej i niech S będzie simpleksem rozpiętym na tych trzech punktach. Okażemy, że zbiór S jest identyczny z trójkątem T o wierzchołkach p_1, p_2, p_3.

Istotnie, z geometrii elementarnej wiadomo, że zbiór T jest wypukły, a ponieważ $p_1, p_2, p_3 \in T$, więc $S \subset T$.

By zaś dowieść, że $T \subset S$, zauważmy naprzód, że odcinki $\overline{p_1 p_2}$, $\overline{p_2 p_3}$, $\overline{p_3 p_1}$ są podzbiorami simpleksu S jako zbioru wypukłego, a zatem obwód trójkąta T jest zawarty w S. Jeżeli teraz punkt p należy do trójkąta i nie leży na obwodzie, przeprowadźmy przez p równoległą np. do odcinka $\overline{p_1 p_2}$ i oznaczmy przez p_1', p_2' jej punkty przecięcia z bokami $\overline{p_1 p_3}$, $\overline{p_2 p_3}$. Na mocy udowodnionej już części twierdzenia jest $p_1', p_1'' \in S$, a ponieważ $p \in \overline{p_1' p_2'}$, więc $p \in S$. Zatem $T \subset S$, c. b. d. d.

(7.5) *Jeżeli punkty* $p_1, \ldots, p_{m+1}$ *nie leżą na jednej płaszczyźnie, to dla każdego punktu* $p = (x_1, \ldots, x_m)$ *przestrzeni* $\mathcal{E}^m$ *istnieje dokładnie jeden taki układ liczb* $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{m+1}$, *że*

$$\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_{m+1} = 1 \quad i \quad x_i = \vartheta_1 x_i^1 + \ldots + \vartheta_{m+1} x_i^{m+1},$$

gdzie liczby $x_1^i, \ldots, x_m^i$ *są współrzędnymi punktu* p_i.

Dowód. Weźmy pod uwagę układ równań

$$x_1^i \xi_1 + \ldots + x_m^i \xi_m + \xi_{m+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1). \tag{7}$$

Gdyby układ ten miał rozwiązanie $\xi_1,\dots,\xi_{m+1}$ nie złożone z samych zer, to już któraś z pierwszych m liczb musiałaby być różna od 0, bo gdyby było $\xi_1=\dots=\xi_m=0$, to równanie (7) dałoby też $\xi_{m+1}=0$. Gdyby jednak co najmniej jedna z liczb $\xi_1,\dots,\xi_m$ była różna od 0, to z równań (7) wynikałoby, że punkty $p_1,\dots,p_{m+1}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Jedynym rozwiązaniem układu równań (7) jest więc $\xi_1=\dots=\xi_{m+1}=0$.

Ze znanych twierdzeń algebry[1]) wiadomo, że wyznacznik układu równań (7) jest różny od 0. Weźmy teraz pod uwagę układ równań

$$(8)\qquad \begin{aligned} x_i^1\xi_1+\dots+x_i^{m+1}\xi_{m+1}&=x_i \qquad (i=1,2,\dots,m),\\ \xi_1+\dots+\xi_{m+1}&=1. \end{aligned}$$

Wyznacznik układu (8) jest równy wyznacznikowi układu (7), a więc też różny od 0, wobec czego[2]) układ (8) ma dokładnie jedno rozwiązanie $\vartheta_1,\dots,\vartheta_{m+1}$, c. b. d. d.

Z twierdzenia (7.5) wynika, że *każdy punkt simpleksu da się w jeden tylko sposób przedstawić w postaci* (6).

Liczby $\vartheta_1,\dots,\vartheta_{m+1}$, których istnienia dowiedliśmy w twierdzeniu (7.5), noszą nazwę *współrzędnych barycentrycznych* punktu p.

Z toku dowodu twierdzenia (7.5) i ze znanych własności wyznaczników wynika, że współrzędne barycentryczne punktu p wyrażają się w postaci $\vartheta_i=d_i/d$, gdzie d jest liczbą dodatnią, zależną tylko od współrzędnych punktów p_i, a liczba d_i jest kombinacją liniową współrzędnych punktu p o współczynnikach zależnych tylko od współrzędnych punktów p_i. Wynika stąd twierdzenie:

(7.6) *Do każdej liczby M istnieje taka liczba N, że współrzędne barycentryczne każdego punktu, odległego od punktu O o mniej niż o M, są mniejsze od N co do wartości bezwzględnej.*

(7.7) *Wnętrze simpleksu S jest identyczne ze zbiorem tych punktów, których wszystkie współrzędne barycentryczne są dodatnie.*

---

[1]) Ob. np. W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław (1946), str. 50, tw. 6.

[2]) Ob. tamże, str. 40, tw. 2.

Dowód. Oznaczmy przez Q zbiór tych punktów, których współrzędne barycentryczne są dodatnie. Oczywiście $Q \subset S$. Okażemy, że każdy punkt p zbioru Q jest punktem wewnętrznym zbioru S. Niech punkt p ma współrzędne barycentryczne $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{m+1}$. Gdyby punkt p nie należał do wnętrza zbioru S, to istniałby taki ciąg $\{p_n\}$ punktów zbioru $-S$, że $p_n \to p$. Niech p_n ma współrzędne barycentryczne $\vartheta_1^n, \ldots, \vartheta_{m+1}^n$. Z tw. (7.6) wynika, że zbiór liczb ϑ_i^n, gdzie $i=1,2,\ldots,m$ i $n=1,2,\ldots$, jest ograniczony. Istnieje więc taki ciąg wskaźników $\{s_n\}$, że dla $i=1,\ldots,m+1$ istnieje granica $\bar{\vartheta}_i = \lim\limits_{n\to\infty} \vartheta_i^{s_n}$. Z (7.4) wynika, że co najmniej jedna ze współrzędnych ϑ_i^n punktu p_n jest ujemna; możemy zatem założyć, że dla nieskończenie wielu s_n zachodzi nierówność $\vartheta_1^{s_n} < 0$. Istnieje więc taki ciąg częściowy $\{k_n\}$ ciągu $\{s_n\}$, że $\vartheta_1^{k_n} < 0$. Niech $p_n = (y_1^n, \ldots, y_m^n)$ i $p = (y_1, \ldots, y_m)$. Wówczas

$$y_i^n = \vartheta_1^n x_i^1 + \ldots + \vartheta_{m+1}^n x_i^{m+1}, \quad y_i = \vartheta_1 x_i^1 + \ldots + \vartheta_{m+1} x_i^{m+1},$$

zatem $y_i^{k_n} \to \bar{\vartheta}_1 x_1^1 + \ldots + \bar{\vartheta}_{m+1} x_i^{m+1}$, co wobec jednoznaczności współrzędnych barycentrycznych daje $\vartheta_i = \bar{\vartheta}_i$ dla $i=1,2,\ldots,m+1$. Jest to jednak niemożliwe, skoro $\bar{\vartheta}_1 \leqslant 0$, a $\vartheta_1 > 0$. W ten sposób dowiedliśmy, że $Q \subset W(S)$.

Okażemy teraz, że $W(S) \subset Q$. Gdyby jakiś punkt q o współrzędnych barycentrycznych $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{m+1}$ należał do zbioru $W(S) - Q$, to co najmniej jedna z liczb $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{m+1}$ byłaby równa 0; możemy przyjąć, że $\vartheta_1 = 0$. Oznaczmy przez p_n punkt o współrzędnych barycentrycznych $-1/n$, $\vartheta_2 + 1/n$, $\vartheta_3, \ldots, \vartheta_{m+1}$. Łatwo stwierdzamy, że $p_n \epsilon -S$ i $p_n \to p$, a zatem $p \epsilon \overline{-S}$. Ponieważ $p \epsilon S$, więc p musi należeć do brzegu zbioru S, a nie do wnętrza, wbrew założeniu.

Z (7.7) wynika, że brzeg simpleksu S jest identyczny ze zbiorem tych punktów simpleksu, dla których co najmniej jedna współrzędna barycentryczna jest równa 0.

Zbiór T_i tych punktów simpleksu, dla których i-ta współrzędna barycentryczna ϑ_i jest zerem, nazywamy *ścianą przeciwległą do punktu* p_i, krótko — *ścianą* simpleksu.

Brzeg simpleksu składa się więc z $m+1$ ścian.

(7.8) *Każda ściana simpleksu S w przestrzeni $\mathcal{E}^m$ leży w jakiejś płaszczyźnie $\mathcal{E}^{m-1}$.*

Dowód. Udowodnimy to np. dla ściany T_1 przeciwległej do punktu p_1. Mamy $p_i \in T_1$ dla $i=2,\dots,m+1$; na mocy tw. (1.4), str. 75, istnieje płaszczyzna π przechodząca przez punkty $p_2,\dots,p_{m+1}$; istnieją więc takie liczby $a_1,\dots,a_m,b$, że $|a_1|+\dots+|a_m|>0$ i

$$(9)\qquad a_1x_1^i+a_2x_2^i+\dots+a_mx_m^i+b=0 \quad \text{dla } i=2,\dots,m+1,$$

przy czym, jak zwykle, $p_i=(x_1^i,\dots,x_m^i)$. Niech $p=(x_1,\dots,x_m)\in T_1$ i niech $\vartheta_1,\dots,\vartheta_{m+1}$ będą współrzędnymi barycentrycznymi tego punktu. Zatem

$$(10)\qquad x_i=\vartheta_1x_i^1+\dots+\vartheta_{m+1}x_i^{m+1}, \quad \vartheta_1=0.$$

Mnożąc równania (9) przez ϑ_i i dodając do siebie dla $i=2,\dots,m$, oraz pamiętając, że $\vartheta_2+\dots+\vartheta_m=1$ i $\vartheta_1=0$, dostajemy

$$a_1x_1+\dots+a_mx_m+b=0.$$

Zatem ściana T_1 jest częścią płaszczyzny π.

Wielościanem [1]) będziemy nazywali każdy zbiór spójny, który jest sumą skończenie wielu simpleksów.

Brzeg wielościanu złożonego z simpleksów $S_1,\dots,S_n$ jest zawarty w sumie T ścian poszczególnych simpleksów $S_1,\dots,S_m$. Zatem w myśl tw. (7.8) brzeg wielościanu leży na skończonej liczbie płaszczyzn.

Iloczyn jakiejkolwiek ściany należącej do T i brzegu wielościanu nazywamy *ścianą wielościanu*.

Zatem *brzeg wielościanu składa się ze skończonej liczby ścian, z których każda leży w jakiejś płaszczyźnie*.

8. Pokrycie zbioru. Niech E będzie zbiorem punktów, a $\boldsymbol{P}$ — dowolną rodziną zbiorów otwartych. Mówimy, że rodzina $\boldsymbol{P}$ *pokrywa* zbiór E, jeżeli każdy punkt zbioru E należy do jakiegoś zbioru rodziny $\boldsymbol{P}$ (por. Rozdział III, § 1,6, str. 69).

(8.1) ***Twierdzenie Lindelöfa.*** *Jeżeli rodzina $\boldsymbol{P}$ zbiorów otwartych pokrywa zbiór E, to istnieje taki ciąg $\{G_n\}$ zbiorów rodziny $\boldsymbol{P}$, że $E\subset\sum_{n=1}^{\infty}G_n$.*

[1]) Ta definicja odbiega nieco od definicji z geometrii elementarnej, gdzie wielościanami nazywa się zbiory, czyniące zadość jeszcze pewnym dodatkowym warunkom.

Dowód. Niech $\boldsymbol{K}$ będzie rodziną wszystkich takich kul otwartych o środkach w punktach wymiernych i promieniach wymiernych, które są zawarte w poszczególnych zbiorach rodziny $\boldsymbol{P}$. Rodzina $\boldsymbol{K}$ jest przeliczalna; istnieje zatem ciąg $\{\boldsymbol{K}_n\}$ wszystkich kul rodziny $\boldsymbol{K}$. Na mocy definicji tej rodziny, dla każdej kuli K_n istnieje taki zbiór G_n rodziny $\boldsymbol{P}$, że $K_n \subset G_n$.

Okażemy, że $E \subset \sum_{n=1}^{\infty} G_n$. Jeżeli bowiem $p \in E$, to istnieje taki zbiór otwarty $G \in \boldsymbol{P}$, że $p \in G$. Istnieje też kula otwarta $K = K(p,r) \subset G$ i taki punkt wymierny $\overline{p}$, że $\varrho(p,\overline{p}) < r/4$. Niech $\overline{r}$ będzie taką liczbą wymierną, że $r/4 < \overline{r} < r/2$. Wówczas $K(\overline{p},\overline{r}) \subset K(p,r)$; istnieje więc n, dla którego $K(\overline{p},\overline{r}) = K_n$. Ponieważ, jak łatwo widzieć, $p \in K_n$, więc z określenia zbioru G_n wynika, że $p \in G_n$.

(8.2) ***Twierdzenie Borela-Lebesgue'a.*** *Jeżeli rodzina $\boldsymbol{P}$ zbiorów otwartych pokrywa zbiór zamknięty i ograniczony E, to istnieje taki układ skończony $G_1, \ldots, G_n$ zbiorów rodziny $\boldsymbol{P}$, że $E \subset \sum_{k=1}^{n} G_k$.*

Dowód. Na mocy twierdzenia Lindelöfa istnieje taki ciąg $\{G_n\}$ zbiorów rodziny $\boldsymbol{P}$, że $E \subset \sum_{k=1}^{\infty} G_k$. Przypuśćmy, że dla żadnego n nie jest $E \subset \sum_{k=1}^{n} G_k$. Dla każdego n istniałby wówczas punkt $p_n \in E - \sum_{k=1}^{n} G_k$. Ciąg $\{p_n\}$ jest ograniczony, zawiera więc ciąg częściowy $\{p_{n_i}\}$ zbieżny do pewnego punktu p_0. Ponieważ $p_{n_i} \in E$ i zbiór E jest zamknięty, więc $p_0 \in E$. Istnieje zatem taki zbiór otwarty G_m, że $p_0 \in G_m$; wynika stąd, że istnieje otoczenie K punktu p_0, zawarte w G_m. Ponieważ $p_{n_i} \to p_0$, więc $p_{n_i} \in K \subset G_m$ dla $i \geqslant i_0$, przy czym można przyjąć, że $n_{i_0} > m$. Jest to jednak sprzeczne z tym, że dla $n_i \geqslant m$ mamy

$$p_{n_i} \in E - \sum_{k=1}^{n_i} G_k \subset E - \sum_{k=1}^{m} G_k \subset E - G_m.$$

9. Pewne własności ciągów zbiorów zamkniętych. Udowodnimy obecnie

(9.1) ***Twierdzenie Cantora.*** *Jeżeli $\{E_n\}$ jest ciągiem zstępującym zbiorów niepustych, zamkniętych i ograniczonych, to istnieje co najmniej jeden punkt p, należący do wszystkich zbiorów E_n.*

Dowód. Niech p_n będzie dowolnym punktem zbioru E_n. Ponieważ $E_n \subset E_1$, więc $\{p_n\}$ jest ciągiem punktów zbioru E_1. Ponieważ zbiór E_1 jest ograniczony, więc i ciąg $\{p_n\}$ jest ograniczony. Na mocy tw. (3.7), str. 79, istnieje zatem ciąg częściowy $\{p_{n_i}\}$, zbieżny do jakiegoś punktu p_0. Niech E_n będzie dowolnym wyrazem ciągu $\{E_i\}$ i niech $n_j > n$. Ponieważ ciąg $\{E_n\}$ jest z założenia zstępujący, więc $E_n \supset E_{n_j} \supset E_{n_j+1} \supset \ldots$, a zatem ciąg $\{p_{n_j}, p_{n_j+1}, \ldots\}$ jest złożony z punktów zbioru E_n. Ponieważ ciąg ten jest zbieżny do p_0 i zbiór E_n jest zamknięty, więc $p_0 \in E_n$. Wobec dowolności n wnosimy, że p_0 należy do wszystkich zbiorów E_n, c. b. d. d.

W twierdzeniu (9.1) wystarczy założyć, że zbiory E_n są ograniczone, począwszy od pewnego wskaźnika n; założenie to możemy też napisać w postaci $\delta(E_n) < \infty$ (por. tw. (7.9) str. 73). Jeżeli więc zbiory E_n są zamknięte, $E_n \supset E_{n+1}$ i $\delta(E_n) \to 0$, to spełnione są założenia tw. (9.1). Niech $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$. Ponieważ $E \subset E_n$ więc $\delta(E) \leqslant \delta(E_n)$, skąd $\delta(E) = 0$, a zatem zbiór E składa się z jednego tylko punktu. W ten sposób otrzymujemy twierdzenie:

(9.2) *Jeżeli $\{E_n\}$ jest ciągiem zstępującym zbiorów zamkniętych o średnicach dążących do* 0, *to istnieje dokładnie jeden punkt należący do wszystkich zbiorów E_n.*

10. Struktura zbiorów zamkniętych. Punkt p nazywamy *punktem kondensacji* (lub *punktem zagęszczenia*) zbioru E, jeżeli w każdym otoczeniu punktu p znajduje się nieprzeliczalnie wiele elementów zbioru E.

Zbiór punktów kondensacji zbioru E oznaczamy przez E^C.

Jeżeli każdy punkt zbioru E jest jego punktem kondensacji, tj. jeżeli $E \subset E^C$, to zbiór E nazywa się *skondensowany* (*zagęszczony*).

(10.1) *Dla każdego zbioru E zbiór $E - E^C$ jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. Każdy punkt $p \in E - E^C$ da się pokryć kulą otwartą K, która zawiera co najwyżej przeliczalnie wiele punktów zbioru E. Na mocy twierdzenia Lindelöfa istnieje ciąg $\{K_n\}$ takich kul, pokrywający zbiór $E - E^C$. Zatem zbiór $E \sum_{n=1}^{\infty} K_n$, a tym bardziej zawarty w nim zbiór $E - E^C$ jest co najwyżej przeliczalny, c. b. d. d.

Z (10.1) wynika natychmiast wniosek:

(10.2) *Każdy zbiór nieprzeliczalny zawiera nieprzeliczalnie wiele punktów kondensacji.*

(10.3) *Zbiór punktów kondensacji każdego zbioru E jest skondensowany.*

Dowód. Trzeba okazać, że $E^C \subset E^{CC}$. Niech $p \in E^C$ i niech K będzie dowolnym otoczeniem punktu p. Zbiór KE jest więc nieprzeliczalny. Na mocy (10.2) istnieje zatem w K nieprzeliczalnie wiele punktów zbioru E^C, c. b. d. d.

(10.4) *Zbiór punktów kondensacji każdego zbioru E jest doskonały.*

Dowód. Oczywiście $\overline{E^C} \subset E^C$ i $E^C \subset E^{CC} \subset \overline{E^C}$.

(10.5) *Każdy zbiór doskonały niepusty E jest mocy kontinuum.*

Dowód. Istnieją co najmniej dwa punkty $p_0, p_1 \in E$. Na mocy tw. (4.3), str. 80, istnieją takie kule otwarte K_0 i K_1, że $p_0 \in K_0$, $p_1 \in K_1$ i $\overline{K}_0 \overline{K}_1 = 0$. Ponieważ punkt p_0 jest punktem skupienia zbioru E, więc w kuli K_0 istnieją dwa punkty $p_{00} = p_0$ i p_{01} zbioru E, a więc i takie dwie kule otwarte $K_{00} \subset K_0$ i $K_{01} \subset K_0$, że $p_0 \in K_{00}$, $p_{01} \in K_{01}$ i $\overline{K}_{00} \overline{K}_{01} = 0$. Możemy nadto założyć, że średnice kul K_{00} i K_{01} są mniejsze od $\frac{1}{2}$. Podobnie, istnieją takie kule $K_{10} \subset K_1$ i $K_{11} \subset K_1$, że $K_{10}E \neq 0$, $K_{11}E \neq 0$ i $\overline{K}_{10} \overline{K}_{11} = 0$, i znów możemy założyć, że średnice tych kul są mniejsze od $\frac{1}{2}$. Wynika stąd łatwo przez indukcję, że dla każdego skończonego układu wskaźników $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, złożonego z zer i jedynek, istnieje kula $K_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$ o następujących własnościach:

(i) $K_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}} \subset K_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$,

(ii) $K_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} E \neq 0$,

(iii) jeżeli $\varepsilon_n' \neq \varepsilon_n''$, to $\overline{K}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n'} \overline{K}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n''} = 0$,

(iv) średnica kuli $K_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$ jest mniejsza od $1/n$.

Niech $F_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} = E\overline{K}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$. Zbiór ten jest niepusty i zamknięty jako iloczyn dwu zbiorów zamkniętych.

Z (ii) wynika, że

(a) jeżeli $\varepsilon_n' \neq \varepsilon_n''$, to $F_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n'} \neq F_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n''}$.

Z (iii) wynika, że

(b) $F_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}} \subset F_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$.

Z (iv) wynika, że

(c) $\delta(F_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}) < 1/n$.

Niech $\{\varepsilon_n\}$ będzie dowolnym ciągiem nieskończonym zer i jedynek. Na mocy (b), (c) i twierdzenia Cantora (str. 98) istnieje dokładnie jeden punkt $p_{\{\varepsilon_n\}} \epsilon E_{\varepsilon_1} E_{\varepsilon_1 \varepsilon_1} E_{\varepsilon_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3} \ldots$

Z (a) wynika, że jeżeli $\{\varepsilon_n'\}$ i $\{\varepsilon_n''\}$ są różnymi ciągami zer i jedynek, to $p_{\{\varepsilon_n'\}} \neq p_{\{\varepsilon_n''\}}$. W ten sposób ustaliliśmy przyporządkowanie wzajemnie jednoznaczne między zbiorem $\mathcal{E}$ ciągów złożonych z zer i jedynek a częścią zbioru E. Ponieważ zbiór $\mathcal{E}$ jest mocy continuum, na podstawie tw. (5.10), str. 32, więc zbiór E jest mocy co najmniej continuum. Z drugiej strony zbiór E jest mocy co najwyżej continuum, bo cała przestrzeń $\mathcal{E}^m$ jest tej mocy. Zatem zbiór E jest mocy continuum, c. b. d. d.

Zauważmy, że w tym dowodzie, mając daną dowolną kulę K taką, że $KE \neq 0$, mogliśmy dobrać kule $K_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}$ tak, by były one zawarte w K. Stąd wynika, że jeżeli E jest zbiorem doskonałym, a p dowolnym jego punktem, to w każdym otoczeniu punktu p istnieje continuum punktów zbioru E. Zatem:

(10.6) *Każdy zbiór doskonały niepusty jest skondensowany.*

(10.7) ***Twierdzenie Cantora-Bendixsona.*** *Każdy zbiór zamknięty E można przedstawić i to w jeden tylko sposób w postaci sumy dwóch zbiorów rozłącznych, z których jeden jest doskonały, a drugi conajwyżej przeliczalny.*

Dowód. Niech $E_1 = E^C$ i $E_2 = E - E^C$. Ponieważ zbiór E jest zamknięty, więc $E \supset E^C$, skąd $E = E_1 + E_2$. Na mocy (10.4) zbiór E^C jest doskonały, a na mocy (10.1) zbiór E_2 jest co najwyżej przeliczalny.

By dowieść, że rozkład ten jest jedyny, załóżmy, że $E = E_1^* + E_2^*$, gdzie zbiór E_1^* jest doskonały, a zbiór E_2^* co najwyżej przeliczalny, i niech $E_1^* E_2^* = 0$. Gdyby istniał punkt $p \epsilon E_2^* - E_2$, to byłoby $p \epsilon E_1$, a więc p byłby punktem kondensacji zbioru E. W każdym otoczeniu punktu p istniałoby zatem nieprzeliczalnie wiele punktów zbioru E, a ponieważ zbiór E_2^* jest co najwyżej przeliczalny, więc byłyby to punkty zbioru $E - \overline{E_2^*} = E_1^*$, skąd $p \epsilon \overline{E_1^*}$. Ponieważ jednak $\overline{E_1^*} = E_1^*$, więc $p \epsilon E_1^*$ co niemożliwe, gdyż $p \epsilon E_2^*$. Okazaliśmy więc, że $E_2^* \subset E_2$. W podobny sposób $E_2 \subset E_2^*$, skąd $E_2 = E_2^*$, a więc i $E_1 = E_1^*$, c. b. d. d.

Z twierdzenia (10.5) wynika, że *każde kontinuum jest zbiorem mocy continuum.*

11. Zbiory F_σ i G_δ. Zbiór, który jest sumą przeliczalnej mnogości zbiorów zamkniętych, nazywamy F_σ. Zbiór, który jest iloczynem przeliczalnej ilości zbiorów otwartych nazywamy G_δ.

Oczywiste jest, że

(11.1) *Suma przeliczalnie wielu zbiorów F_σ jest F_σ.*

(11.2) *Iloczyn przeliczalnie wielu zbiorów G_δ jest G_δ.*

(11.3) *Na to, by zbiór E był F_σ, potrzeba i wystarcza, aby zbiór $-E$ był G_δ.*

(11.4) *Na to, by zbiór E był G_δ, potrzeba i wystarcza, aby zbiór $-E$ był F_σ.*

Dowód obu ostatnich twierdzeń wynika natychmiast ze wzorów de Morgana, str. 6, i z twierdzenia (4.10), str. 81.

(11.5) *Każdy zbiór zamknięty E jest zarazem F_σ i G_δ. Tak samo każdy zbiór otwarty.*

Dowód. Niech G_n będzie sumą wszystkich kul o promieniu $1/n$, których środki należą do E. Zbiór G_n jest otwarty na mocy tw. (4.9), zbiór $H=\prod_{n=1}^{\infty} G_n$ jest więc G_δ i oczywiście $E\subset H$. By dowieść, że $H\subset E$, oznaczmy przez p dowolny punkt zbioru H. Istnieją więc takie kule $K_n\subset G$ o środkach $p_n\in E$ i promieniu $1/n$, że $p\in K_n$. Zatem $\varrho(p_n,p)\to 0$, co daje $p\in E$ wobec zamkniętości zbioru E. Druga część twierdzenia wynika stąd na mocy (11.3) i (11.4).

Przykładem zbioru F_σ, który nie jest zamknięty, jest zbiór $\mathcal{R}$ punktów wymiernych przestrzeni $\mathcal{E}^m$; przykładem zbioru G_δ, który nie jest otwarty, jest oczywiście zbiór $-\mathcal{R}$. Zbiór $\mathcal{R}$ nie jest jednak G_δ. Ogólniej:

(11.6) *Każdy zbiór przeliczalny wszędzie gęsty E jest F_σ, lecz nie jest G_δ.*

Dowód. Jako przeliczalny, innymi słowy jako suma przeliczalnej ilości zbiorów jednopunktowych, a więc zamkniętych, zbiór E jest oczywiście F_σ.

Przypuśćmy, że zbiór E jest G_δ. Wówczas zbiór $-E$ byłby F_σ. Istniałyby więc takie zbiory zamknięte F_n, że

$$(11)\qquad -E=\sum_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Zbiór E jest I-ej kategorii na mocy tw. (4.16), str. 81; zbiór $-E$ jest więc II-ej kategorii na mocy tw. (4.17), str. 81, skąd wynika wobec (11), że nie wszystkie zbiory F_n są nigdzie nie gęste. Co najmniej jeden z nich — oznaczmy go przez F_{n_0} — musi więc być gęsty w pewnej kuli K, czyli $K\subset\overline{F}_{n_0}$, a jest to zbiór zamknięty, więc musi być $K\subset F_{n_0}$. Ze względu na (11) jest zatem $K\subset -E$, co niemożliwe, bo zbiór E jest z założenia wszędzie gęsty.