WSTĘP

LICZBY RZECZYWISTE

1. Aksjomaty i definicje. Arytmetykę liczb rzeczywistych można oprzeć na następujących 13 pewnikach (aksjomatach):

Aksjomaty dodawania. Każdej parze liczb a,b przyporządkowana jest liczba $a+b$, zwana ich *sumą* i czyniąca zadość następującym 3 aksjomatom:

I. $a+b=b+a$;

II. $(a+b)+c=a+(b+c)$;

III. *Równanie* $a+x=b$ *jest jednoznacznie rozwiązalne*, t. zn. istnieje dokładnie jedna liczba x, która je spełnia.

Z aksjomatów I-III wynika istnienie dokładnie jednej (t. zn. jednej i tylko jednej) liczby rzeczywistej 0 takiej, że $a+0=a$ dla wszystkich liczb a.

Aksjomaty mnożenia. Każdej parze liczb a,b przyporządkowana jest liczba ab, zwana ich iloczynem i spełniająca następujące 4 aksjomaty:

IV. $ab=ba$;

V. $(ab)c=a(bc)$;

VI. *Równanie* $ax=b$ *jest jednoznacznie rozwiązalne dla każdej liczby* $a\neq 0$;

VII. $a(b+c)=ab+ac$.

Z I-VII wynika istnienie dokładnie jednej liczby rzeczywistej 1 takiej, że $a1=a$ dla wszelkich a.

Aksjomaty nierówności. Pomiędzy liczbami określony jest *stosunek większości*; gdy a jest większe od b, piszemy $a>b$ lub $b<a$. Dla stosunku tego przyjmujemy następujących 5 aksjomatów:

VIII. *Dla wszelkich a i b zachodzi dokładnie jedno z trojga:*

$$a=b, \quad a<b, \quad a>b;$$

IX. *Jeżeli $a<b$ i $b<c$, to $a<c$;*

X. *Jeżeli $a<b$, to $a+c<b+c$;*

XI. *Jeżeli $a<b$ i $c>0$, to $ac<bc$.*

Przed podaniem aksjomatu XIII wprowadzimy pojęcie przekroju.

Przekrojem nazywamy podział wszystkich liczb rzeczywistych na dwa zbiory A i B o własnościach następujących:

1⁰ Każda liczba należy dokładnie do jednego ze zbiorów A, B.

2⁰ Każda liczba zbioru A jest mniejsza od każdej liczby zbioru B;

3⁰ Zbiory A i B są niepuste, t. zn. każdy z nich zawiera jakąś liczbę.

Z własności 2⁰ wynika, że jeżeli jakaś liczba a należy do zbioru A, to każda liczba $a'<a$ należy również do A i, podobnie, jeżeli jakaś liczba b należy do B, to każda liczba $b'>b$ też należy do B.

Przykładem przekroju jest podział: do zbioru A zaliczamy wszystkie liczby $x\leqslant 5$, do zbioru B wszystkie liczby $x>5$.

XII. Aksjomat Dedekinda. *Jeżeli zbiory A, B tworzą przekrój liczb rzeczywistych, wówczas albo w zbiorze A istnieje liczba największa* (t. zn. większa od wszystkich innych liczb zbioru A), *albo w zbiorze B istnieje liczba najmniejsza.*

XIII. *Istnieją co najmniej dwie różne liczby rzeczywiste.*

Opierając się na aksjomatach I-XIII, możemy określić pozostałe działania arytmetyczne, jak *odejmowanie*, *dzielenie*, *potęgowanie* i t. d.

Możemy również określić liczby *naturalne* $1, 2, \ldots$, *całkowite* $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Liczbami *wymiernymi* nazywamy liczby postaci p/q, gdzie p i q są liczbami całkowitymi, przy czym $q\neq 0$. Liczby, które nie są liczbami wymiernymi (jak np. $\sqrt{2}$), nazywamy liczbami *niewymiernymi*.

Liczbą *algebraiczną* nazywamy liczbę, która jest pierwiastkiem jakiegoś równania

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są liczbami całkowitymi i $a_n\neq 0$.

2. Zbiory liniowe. Każdemu punktowi *osi* (t. j. dowolnej prostej, na której obrany jest *zwrot* i punkt zwany *początkiem*) możemy przyporządkować liczbę rzeczywistą zwaną *współrzędną* tego punktu.

Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada wtedy dokładnie jeden punkt, którego współrzędną jest ta liczba. Z tego powodu liczby nazywamy często punktami, zbiory liczb zbiorami *liniowymi*, oś zaś *osią liczbową*.

3. Liczby nieskończone. Niekiedy wygodnie jest posługiwać się t. zw. *liczbami nieskończonymi*, które oznacza się przez $+\infty$ i $-\infty$, pamiętając, że nie są to liczby rzeczywiste w sensie aksjomatów I-XIII.

Dla odróżnienia liczby rzeczywiste nazywamy także liczbami *skończonymi*.

Dla liczb nieskończonych określamy nierówności i niektóre działania przez następujące wzory (w których a oznacza dowolną liczbę skończoną):

$$-\infty<a, \qquad a<+\infty, \qquad -\infty<+\infty, \tag{1}$$

$$+\infty+a=a+\infty=+\infty, \qquad -\infty+a=a-\infty=-\infty; \tag{2}$$

$$+\infty+\infty=+\infty, \qquad -\infty-\infty=-\infty, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty,\\ (-\infty)(+\infty)=(+\infty)(-\infty)=-\infty,\end{gathered} \tag{4}$$

$$a(+\infty)=(+\infty)a=+\infty, \qquad a(-\infty)=(-\infty)a=-\infty, \qquad \text{jeżeli } a>0; \tag{5}$$

$$a(+\infty)=(+\infty)a=-\infty, \qquad a(-\infty)=(-\infty)a=+\infty, \qquad \text{jeżeli } a<0. \tag{6}$$

Uwaga. Dla uniknięcia nieporozumień zaznaczamy, że ilekroć mówimy „liczba“ bez podania, czy to jest liczba skończona czy nieskończona, to mamy zawsze na myśli liczbę skończoną.