

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY:

K. BORSUK, B. KNASTER, K. KURATOWSKI, W. SIERPİŃSKI,
H. STEINHAUS, W. ŚLEBODZIŃSKI I A. ZYGMUND

TOM XVI

DR EDWARD OTTO

PROFESOR POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

*Książka ta została wydrukowana w Szwecji
jako dar Rządu Szwedzkiego dla odbudowy
kultury polskiej*

GEOMETRIA WYKREŚLNA

Z ZASIĘKU MINISTERSTWA SZKÓŁ WYŻSZYCH I NAUKI



»CZYTELNIK«

SPÓŁDZIELNIA WYDAWNICZO-OŚWIATOWA

1950

Biblioteka Uniwersytecka w Warszawie



1000207268

02338

PRZEDMOWA

Kurs geometrii wykreślnej wykładany na politechnikach składa się zasadniczo z czterech części: rzutów cechowanych, rzutów Monge'a, aksonometrii i perspektywy. Prócz tych działów podaje się pewne fragmenty geometrii rzutowej, w szczególności teorię krzywych drugiego stopnia oraz wstęp do teorii powierzchni drugiego stopnia.

Każdy z tych działów posiada w naszej literaturze obszerne opracowania. Rzuty cechowane, rzuty Monge'a oraz rzuty perspektywiczne wyłożone są w trzech książkach prof. dr K. Bartla („Rzuty cechowane“, T. N. S. W. Lwów-Warszawa, 1928; „Geometria wykreślna“, T. N. S. W. Lwów-Warszawa, 1922; „Perspektywa malarska“ tom I, T. N. S. W. Lwów-Warszawa, 1926), aksonometria zaś i geometria rzutowa w trzech książkach prof. dr A. Plamitzera („Aksonometria prostokątna“, Książnica-Atlas, Lwów-Warszawa, 1925; „Elementy geometrii rzutowej“, K. S. Jakubowski, Lwów, 1927, „Geometria rzutowa“ K. W. P. A. Warszawa, 1938).

W związku z koniecznością usprawnienia studiów powstała potrzeba ujęcia przeznaczonego dla inżynierów materiału w jednym podręczniku o niewielkiej objętości. Celowi temu służyć ma niniejsza książka. Równocześnie została ona tak napisana, aby mógł z niej korzystać też student uniwersytetu.

Do napisania tej książki zachęcił mnie prof. dr K. Kuratowski. Jego też staraniom zawdzięczam ukazanie się jej w druku — za co składam Mu serdeczne podziękowanie.

Wiele cennych uwag podczas redakcji udzielił mi prof. dr B. Knaster, za co jestem Mu bardzo wdzięczny. Wyrażam również podziękowanie Spółdzielni Wydawniczej „Czytelnik“, Komitetowi „Monografii Matematycznych“ i Szwedzkiemu Komitetowi Pomocy.

Warszawa, styczeń 1946 r.

Edward Otto.

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE

All rights reserved



QA
501
.087
1950

E.O.
3.V.51.

PRINTED IN SWEDEN

SPIS RZECZY

PRZEDMOWA	VII
ROZDZIAŁ I. RZUTY CECHOWANE	
§ 1. Definicja i własności rzutu równoległego	1
§ 2. Rzut prostokątny i cecha punktu	3
§ 3. Proste równoległe	6
§ 4. Proste przecinające się	8
§ 5. Płaszczyzna	10
§ 6. Krawędź dwu płaszczyzn — Punkt przebicia płaszczyzny prostą	13
§ 7. Rzuty prostych prostopadłych	23
§ 8. Obroty i kłady	24
§ 9. Zastosowania	31
ROZDZIAŁ II. RZUTY NA DWIE PŁASZCZYZNY	
§ 10. Rzuty punktu	44
§ 11. Zadania	47
§ 12. Rzuty prostej	56
§ 13. Rzuty prostych równoległych, przecinających się i skośnych	60
§ 14. Płaszczyzna	63
§ 15. Krawędź dwu płaszczyzn — Punkt przebicia płaszczyzny prostą	67
§ 16. Konstrukcja obrotów i kładów w rzutach na dwie płaszczyzny	74
§ 17. Rzuty prostych i płaszczyzn prostopadłych	77
§ 18. Konstrukcje bez użycia śladów	83
§ 19. Zmiana układu	87
§ 20. Rzut boczny	90
§ 21. Cienie	95
ROZDZIAŁ III. KRZYWE DRUGIEGO STOPNIA	
§ 22. Punkty niewłaściwe	100
§ 23. Homologia, kolineacja i przekształcenie rzutowe	104
§ 24. Stosunek podziału i dwustosunek	116

§ 25. Twierdzenie Pappusa i zagadnienie jednoznaczności przekształceń rzutowych	119
§ 26. Definicje i ogólne własności krzywych stożkowych	123
§ 27. Konstrukcje krzywych stożkowych	131
§ 28. Przekroje stożków i walców	138
§ 29. Własności miarowe stożkowych	146

ROZDZIAŁ IV. POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA

§ 30. Kolineacja i przekształcenie rzutowe przestrzeni	158
§ 31. Definicja i ogólne własności powierzchni drugiego stopnia	162
§ 32. Rzuty powierzchni drugiego stopnia	174

ROZDZIAŁ V. PRZENIKANIE POWIERZCHNI

§ 33. Powierzchnie obrotowe	183
§ 34. Przykłady przenikania powierzchni	194

ROZDZIAŁ VI. AKSONOMETRIA

§ 35. Twierdzenie Pohlkego — Aksonometria ukośna	214
§ 36. Aksonometria prostokątna	222

ROZDZIAŁ VII. PERSPEKTYWA

§ 37. Definicja rzutu środkowego	229
§ 38. Rzut prostej — Płaszczyzna	231
§ 39. Konstrukcje podstawowe	241
§ 40. Rzuty krzywych drugiego stopnia	255
§ 41. Konstrukcje cieni w rzutach środkowych	263
§ 42. Anaglify	266
§ 43. Fotogrametria	268
Skorowidz nazw	271

ROZDZIAŁ I

RZUTY CECHOWANE

§ 1. Definicja i własności rzutu równoległego

Weźmy pod uwagę płaszczyznę π i prostą k nierównoległą do π . Przez dowolny punkt P wykreślmy prostą równoległą do k (rys. 1).

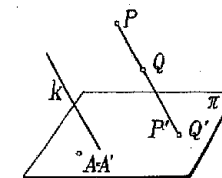
Definicja. Punkt P' , w którym prosta równoległa do k , a przechodząca przez P , przebija płaszczyznę π , nazywa się rzutem punktu P na π w kierunku k .

Płaszczyzna π nazywa się *płaszczyzną rzutu* lub *rzutnią*, a prosta PP' promieniem rzutującym.

Jest widoczne, że jeśli punkt A leży na płaszczyźnie π , to jego rzut A' pokrywa się z A .

Jeśli punkt Q leży na prostej równoległej do k i przechodzącej przez P , to $Q' = P'$.

Rzutem figury geometrycznej nazywa się zbiór rzutów punktów tej figury.



Rys. 1.

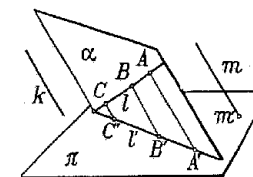
Weźmy pod uwagę prostą l nierównoległą do k (rys. 2). Promienie rzutujące, przechodzące przez punkty A, B, C, \dots prostej l , leżą w płaszczyźnie α równoległej do k ; nazywamy ją *płaszczyzną rzutującą*.

Punkty A', B', C', \dots , w których one przebijają rzutnię, leżą więc na krawędzi l' płaszczyzn α i π . Krawędź l' jest więc — zgodnie z definicją rzutu figury geometrycznej — rzutem prostej l .

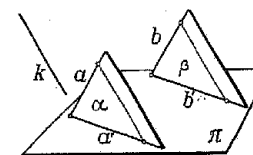
Jeśli prosta m jest równoległa do kierunku k , to wszystkie promienie rzutujące schodzą się z m i wówczas rzutem m jest punkt. Zatem:

1. *Rzutem prostej jest prosta lub punkt.*

Jeśli proste a i b są do siebie równoległe, a nierównoległe do k , to oczywiście prosta b albo jest równoległa do płaszczyzny rzutującej α , przechodzącej przez a , albo leży na niej (rys. 3). W pierwszym wypadku płaszczyzna rzutująca β jest równoległa do α , a więc rzut b' jest równoległy do a' , w drugim b' pokrywa się z a' . Widzimy więc, że:



Rys. 2.



Rys. 3.

można uzyskać plan przez równoległe do terenu ustawienie płaszczyzny α_1 . Z tego wynika, że przekształcenie $X' = f_{\varphi}(X_1) = F(X_1)$ jest rzutowe. Ponieważ każdy ruch w przestrzeni jest przekształceniem rzutowym (§ 23), więc też i w takim położeniu jak na rysunku 429 — które nie musi być identyczne z pierwotnym — mamy między $[\alpha_1]$ a $[\pi]$ przekształcenie rzutowe $X = F_1(X_1)$.

Z założeń naszych wynika, że $A' = F_1(A_1)$, $B' = F_1(B_1)$, $C' = F_1(C_1)$ i $D' = F_1(D_1)$. Te same jednak warunki spełnia kolineacja środkowa $X' = F_2(X_1)$ między $[\alpha_1]$ i $[\pi]$, dla której S jest środkiem kolineacji. Na mocy więc twierdzenia o jednoznaczności przekształceń rzutowych (§ 25), przekształcenie złożone $F_1(X_1)$ oraz przekształcenie bezpośrednie $F_2(X_1)$ są identyczne, tzn. punkty X' i X_1 leżą na prostej przechodzącej przez S .

Zachodzi jeszcze pytanie, czy istnieje takie ustawienie jak na rysunku 429. Można udowodnić, że jest ich nieskończenie wiele. Jednym z nich jest położenie płaszczyzny π w chwili zdjęcia, jeśli równocześnie płaszczyznę α_1 wyobrazimy sobie w położeniu równoległym do terenu, a wierzchołki czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ na promieniach SA , SB , SC i SD . Środkiem kolineacji będzie punkt O obiektu.

Korzystamy z tego przy sporządzaniu planów na podstawie zdjęć fotograficznych ze samolotu.

Zaznaczone w terenie wierzchołki A , B , C , i D czworokąta przenosimy na płaszczyznę (w obranej skali), opierając się na pomiarach w terenie. Następnie ustawiamy kliszę i źródło światła jak na rysunku 429. Jeśli teraz na płaszczyźnie α_1 umieścimy papier światłoczuły, to po wywołaniu otrzymamy cień figur znajdujących się na π , który jest już żądanym planem.

W fotogrametrii opisana czynność nazywa się *prostowaniem zdjęć lotniczych*.

SKOROWIDZ NAZW

- Afiniczne przekształcenie 114
 aksonometria prostokątna 222, ukośna 215
 anaglify 236
 asymptoty hiperboli 131
- Biegun 128
 biegunowa 123
 biegunowe sprzężone 129
- Cecha punktu 3, kolineacji 158
 czworokąt zupełny 122
 czwórka harmoniczna 119
- Dwustosunek 116
- Elipsa 131
 elipsoida 176
 eliptyczny punkt powierzchni 186
- Fikspunkt przekształcenia 109
- Geometria rzutowa 101
 głębokość punktu 46
- Homologia 104
 hiperbola 131
 hiperboloida dwupowłokowa 175, jednowłokowa 170, 184
- Kład odcinka 26, 74, punktu 25, 27, 247
 kierownica stożkowej 148
 kierunek powinowactwa 113
 kolineacja inwolucyjna 160, środkowa 108
 kontur powierzchni 189, rzucony 189
 krzywe drugiego stopnia 123
 kwadryka 162
- Linia przenikania 18, 71, 183—213, spadu 24
- Metoda Monge'a 44, aksonometryczna 218
 moduł płaszczyzny 11, prostej 5
- Nieziemiennik rzutowania 2
- Obrót 24, 74, 115
 ognisko stożkowej 148
 okrąg głębokości 230, krzywiznowy 153, oddalenia 230, szczytny 183
 oś kolineacji 108, powinowactwa 113, rzeczywista i urojona hiperboli 138, 169, paraboloidy eliptycznej 175, paraboloidy hiperbolicznej 175, stożka 178
- Parabola 131
 paraboloida eliptyczna 175, hiperboliczna 175
 pary nie przedzielające się 119, przedzielające się 119
 pęk płaszczyzn 170, prostych 100
 perspektywa 229
 płaszczyzna biegunowa 123, graniczna 159, kolineacji 159, niewłaściwa 103, powinowactwa 160, rzutowa 102, średnicowa kwadryki 165, zniknięcia 230
 podobieństwo 114
 południk powierzchni 183
 powierzchnia drugiego stopnia 158, obrotowa 183, pierścieniowa 185, stożkowa 146, topograficzna 39
 powinowactwo środkowe 113
 promień krzywizny 156, rzutujący 1
 prosta graniczna 109, niewłaściwa 103, Pascala 126, stała 109
 proste sprzężone względem kwadryki 165
 prostowanie zdjęć lotniczych 270
 przekształcenie afiniczne 114, homograficzne 105, homologiczne 104, kolineacyjne 108, rzutowe 105, środkowo-kolineacyjne 108, 158
 przestrzeń Euklidesa 101, rzutowa 102
 przesunięcie 115
 przystawanie 114
 punkt eliptyczny 186, hiperboliczny 187,

- mierzenia 251, niewłaściwy 101, regularny 185, stożkowy 184
 Równik 183
 równoleżnik 183
 rzut boczny 90, centralny 229, pionowy 44, poziomy 44, środkowy 229
 rzutnia 1, 44, 214, 229
 Skarpy nasypu 36, wykopu 36
 sklepienie klasztorne 209, krzyżowe 209, 220
 stały punkt przekształcenia 109
 stopień krzywej 205
 stosunek podziału 2, 116
 stożek asymptotyczny 173, 178, obrotowy 178, trójosiowy 178
 styczna 124, 138, 164, 185
 szereg punktów 104
 Ślad poziomy i pionowy prostej 57, płaszczyzny 66, zbiegu 223, 235
 średnice sprzężone 130
 środek kolineacji 108, krzywizny 153, kwadranty 165, rzutów 229, stożkowej 130
 Tło 229
 torus 185
 twierdzenie Pappusa 120, Pascala 126, Pohlkego 215, Staudta 121
 tworząca 138
 Układ płaski 107
 Warstwica 10, 39
 walec hiperboliczny 160, paraboliczny 160
 wiązka 107, 121
 Zmiana układu 87

