

$$\begin{aligned} XM' + YN' &= XM^o \cdot \cos \xi + YN^o \cdot \cos \eta = XY \cdot \cos^2 \xi + XY \cdot \cos^2 \eta = \\ &= XY \cdot (\cos^2 \xi + \cos^2 \eta), \end{aligned}$$

co na podstawie nierówności:

$$1 < \cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 2,$$

daje:

$$1 \cdot XY < XM' + YN' < 2 \cdot XY,$$

z czego oczywiście wynika, że C_1 i C_2 mają dwa punkty wspólne.

ĆWICZENIA.

1. Nakreślić rzut prostokątny sześciangu, przyjmując a) $l:m:n = 4:5:6$, b) $l:m:n = 1:1:1$.
2. Nakreślić rzut prostokątny kuli z równikiem, jednym równoleżnikiem i jednym południkiem, przyjmując $\xi = 45^\circ$, a $\eta = 30^\circ$.
3. Nakreślić rzut prostokątny części półkuli znajdującej się nad kwadratem wpisanym w równik, przyjmując $\xi = 45^\circ$ i $\eta = 15^\circ$.
4. Narysować zupełnie dowolnie rzut równoległy prostopadłościanu i znaleźć długości jego boków pod założeniem, że jest to rzut prostokątny.
(Przyjąć, że prosta na której leżą rzuty trzech krawędzi figury posiadające wspólny wierzchołek są rzutami prostokątnymi x , y i z osi układu).

ROZDZIAŁ VII.

PERSPEKTYWA

§ 37. Definicja rzutu środkowego

Weźmy pod uwagę płaszczyznę π i punkt S nie leżący na niej.

Niech P będzie dowolnym punktem różnym od S . Połączmy punkt P z punktem S i oznaczmy przez P' punkt przebiecia płaszczyzny π (rys. 357).

Jeśli S był punktem niewłaściwym, to P' nazywalismy rzutem równoległym punktu P na płaszczyznę π . W szczególnym przypadku, gdy S był punktem niewłaściwym prostopadłym do π , tzn. niewłaściwym punktem na prostych prostopadłych do π , P' nazywalismy rzutem prostokątnym.

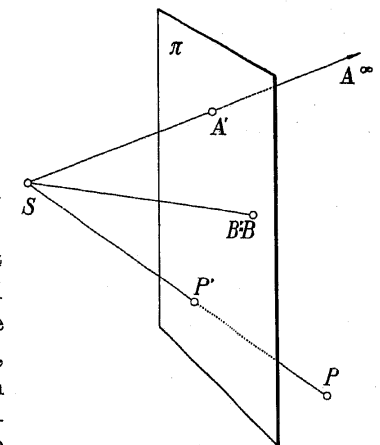
Obecnie zakładając będziemy, że S jest punktem właściwym.

Definicja. Punkt P' , w którym prosta SP przebija płaszczyznę π nazywamy rzutem środkowym, centralnym lub perspektywą punktu P , albo jeszcze obrazem punktu P .

Płaszczyznę π , na której znajduje się obraz punktu P , nazywać będziemy rzutnią, tłem lub płaszczyzną obrazu, punkt S środkiem rzutów lub okiem. Wiadomo, że patrząc jednym okiem umieszczonym w punkcie S nie potrafilibyśmy odróżnić punktu P od punktu P' na płaszczyźnie π .

W dotychczasowych metodach rzutów, tzn. w rzutach prostokątnych i ukośnych, rzutami punktów niewłaściwych były punkty niewłaściwe. Istotnie, łącząc punkty niewłaściwe S^∞ i P^∞ otrzymujemy prostą niewłaściwą, która oczywiście płaszczyznę π przebija w punkcie niewłaściwym P'^∞ .

W rzutach środkowych na ogół punkt niewłaściwy posiada rzut właściwy, jeśli bowiem prosta SA^∞ łącząca punkt A^∞ ze środkiem rzutów S nie jest równoległa do π , to rzut A' będzie punktem właściwym (rys. 357). Jedynie w przypadku, gdy prosta łącząca środek rzutów z punktem P będzie równoległa do π , perspektywa P'



Rys. 357.

będzie punktem niewłaściwym. Jest oczywiście, że może to zająć jedynie w przypadku, gdy prosta SP będzie znajdować się na płaszczyźnie π przechodzącej przez środek rzutów i równoległej do rzutni π . Nazywać ją będziemy *płaszczyzną zniknięcia* (rys. 358).

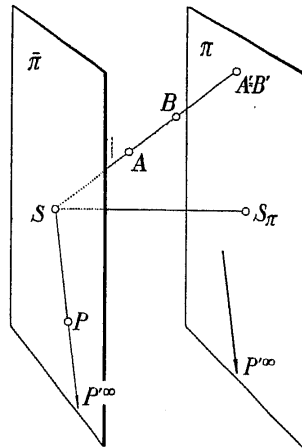
Widzimy więc, że punkty płaszczyzny zniknięcia π posiadają niewłaściwe rzuty.

Z definicji rzutu środkowego wynika, że perspektywy punktów A i B leżących na prostej przechodzącej przez środek S pokrywają się.

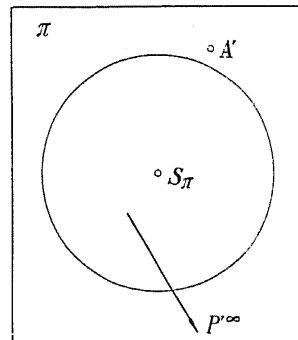
Rysunki 357 i 358 są szkicami wyjaśniającymi metodę rzutu środkowego. Samym rzutem środkowym jest to, co się znajduje na płaszczyźnie π . Jeśli teraz obraz znajdujący się na π chcemy umieścić na płaszczyźnie rysunku, to konieczne jest ustalenie położenia punktu S względem π .

Oznaczmy w tym celu przez S_π rzut prostokątny punktu S na π i zakreślmy okrąg o środku S_π i promieniu równym odległości S od π , tzn. odcinkowi SS_π ; będziemy go nazywali *okręgiem oddalenia* albo *okręgiem głębokości*. Jest oczywiście, że S_π i okrąg oddalenia określają jednoznacznie położenie środka rzutów, robimy tu bowiem jeszcze założenie, że S znajduje się po tej samej stronie płaszczyzny π co sam rysunek. Rzut więc A' punktu A będzie się przedstawiał jak na rys. 359. Łatwo zauważyć, że perspektywy punktów znajdujących się wewnątrz stożka o wierzchołku S , którego podstawą jest okrąg oddalenia, są położone wewnątrz okręgu oddalenia, perspektywy zaś punktów zewnętrznych zewnątrz. Jeśli punkt leży na naszym stożku, to jego rzut środkowy jest na okręgu oddalenia.

Uwaga I. Opierając się na definicji rzutu środkowego można perspektywę wykreślać tak jak na rysunku 360. Płaszczyzną rzutów π jest płyta szklana, środek rzutu zastąpiony jest otworkiem w listwie sztywno związanej z płytą. Patrząc jednym okiem przez otwór zaznaczać można na szkle punkty, które znajdują się na jednej linii prostej z punktami danej figury geometrycznej.

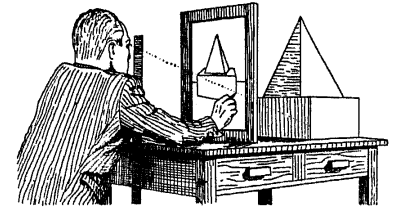


Rys. 358.



Rys. 359.

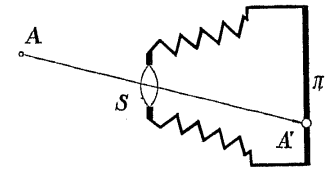
Mechanizmem, za pomocą którego otrzymać można rzut środkowy, jest aparat fotograficzny. Okiem jest tu środek optyczny obiektywu, płaszczyzną rzutów klisza (lub film). Promień światła (rys. 361) wychodzący z punktu A po przejściu przez obiektyw pozostawia ślad A' na kliszy.



Rys. 360.

Uwaga II. W pierwszym przypadku możemy wykreślić tylko rzuty tych figur, które znajdują się przed okiem, tzn. po tej stronie płaszczyzny zniknięcia co π , w drugim otrzymujemy na kliszy obrazy tych punktów, które znajdują się za okiem (lub dokładniej: wewnątrz pewnego stożka obrotowego o osi $S_\pi S$ i wierzchołku S , zwanego stożkiem widzenia).

W perspektywie traktowanej geometrycznie mowa będzie o wszystkich punktach z wyjątkiem S .



Rys. 361.

ĆWICZENIA.

1. Jaką figurą będzie rzut środkowy kwadratu leżącego w płaszczyźnie równoległej do π ?
2. Co będzie rzutem środkowym prostej przechodzącej przez środek S ?
3. Co jest perspektywą stożka, którego wierzchołkiem jest punkt S , a podstawą okrąg oddalenia? Gdzie znajduje się perspektywa hiperboli, w której płaszczyzna prostopadła do π przecina ten stożek?

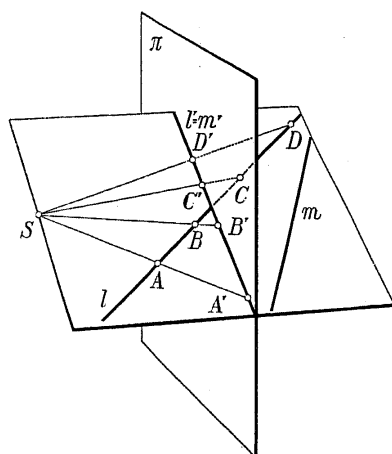
§ 38. Rzut prostej — Płaszczyzna

I. Niech l oznacza prostą nie przechodzącą przez punkt S (rys. 362).

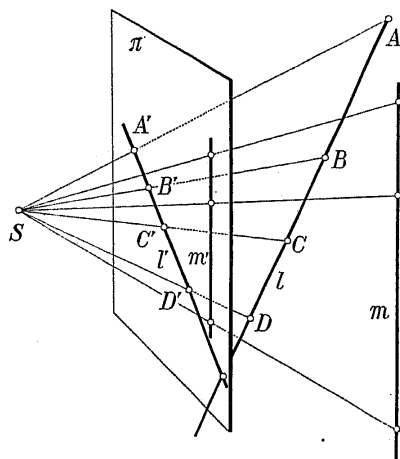
Aby wyznaczyć rzuty punktów $A, B, C, \dots$ prostej l , łączymy je ze środkiem rzutów S ; otrzymamy proste, które leżą w płaszczyźnie wyznaczonej punktem S i prostą l . Z tego wynika, że rzuty $A', B', C', \dots$ znajdować się muszą na krawędzi l' tej płaszczyzny i rzutni. Łatwo zauważyć, że punkt prostej l' jest rzutem środkowym jednego punktu na l . Mamy zatem:

Własność I: Rzutem linii prostej jest prosta lub punkt.

Ostatni przypadek zachodzi wtedy, gdy prosta przechodzi przez środek rzutów S .



Rys. 362.



Rys. 363.

Należy zwrócić uwagę na to, że rozważania nasze nie wykluczają prostej niewłaściwej, jeśli bowiem z^∞ będzie prostą niewłaściwą płaszczyzny α , to wszystkie proste łączące punkty $A^\infty, B^\infty, C^\infty, \dots$ prostej z^∞ ze środkiem rzutów S leżą w płaszczyźnie $\bar{\alpha}$ równoległej do α i oczywiście ich rzuty na krawędzi $\bar{\alpha}$ i π . Zatem i w tym przypadku rzutem prostej będzie prosta.

Weźmy teraz cztery punkty A, B, C i D prostej l (rys. 363). Ponieważ l nie przechodzi przez S , więc rzuty A', B', C' i D' są różnymi punktami prostej l' . Zauważmy, że odpowiedniość pomiędzy punktami a ich rzutami jest przekształceniem homologicznym, zatem na podstawie twierdzenia Pappusa

$$(A'B'C'D') = (ABCD).$$

Mamy więc:

Własność II. Wartości dwustosunków czterech punktów linii prostej i ich rzutów są równe.

Jeśli w szczególnym przypadku weźmiemy prostą m równoległą do rzutni, to perspektywą niewłaściwego punktu D^∞ tej prostej będzie oczywiście również niewłaściwy punkt $D'^\infty = D^\infty$. Ponieważ jak wiadomo,

$$(ABCD^\infty) = \frac{AC}{BC} \text{ oraz } (A'B'C'D'^\infty) = \frac{A'C'}{B'C'},$$

więc z równania (1) wynika, że:

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}.$$

Jeśli prosta jest równoległa do rzutni, to stosunki podziału jej punktów są równe stosunkom podziału ich rzutów.

Gdy np. punkt C jest środkiem odcinka AB równoległego do π , to rzut jego C' jest środkiem rzutu $A'B'$.

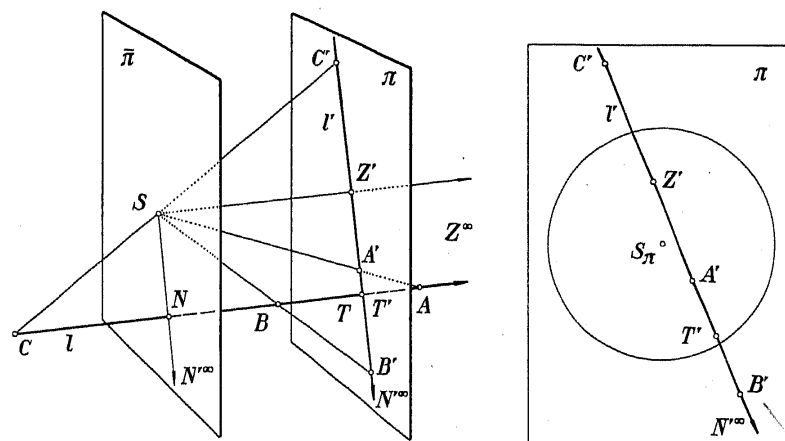
II. Gdy proste l i m znajdują się na jednej płaszczyźnie przechodzącej przez środek rzutów i żadna z nich nie zawiera S , to oczywiście krawędź jej z płaszczyzną π jest zarówno rzutem prostej l jak i rzutem prostej m (rys. 363). Wynika z tego, że rzut l' nie określa jednoznacznie prostej l .

Założmy, że prosta l nie jest równoległa do płaszczyzny π i oznaczmy przez T punkt wspólny z rzutnią, a przez Z^∞ jej punkt niewłaściwy. Rzut T' będzie oczywiście identyczny z T , rzut punktu Z^∞ znajdować się będzie w przecięciu prostej l' równoległej do l i przechodzącej przez S płaszczyzną π . Będziemy go oznaczali przez Z (zamiast Z^∞) i nazywali *śladem zbiegu* prostej l (rys. 364). Punkt $T' = T$ nazywamy dla odróżnienia od Z *śladem tłowym*.

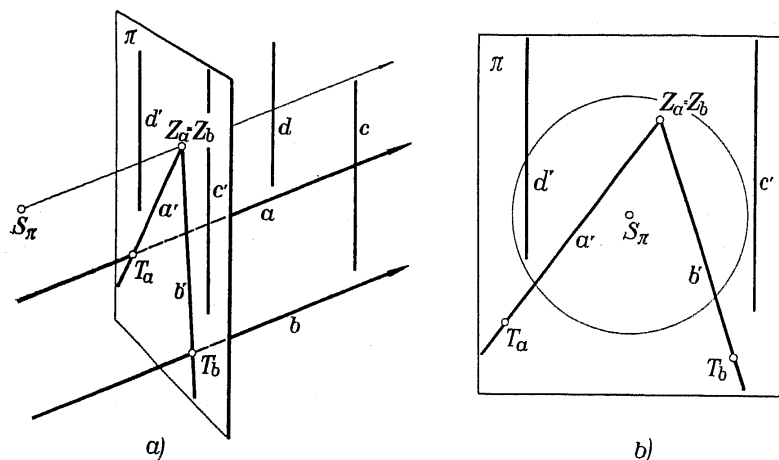
Jak łatwo widać, ślad tłowy i ślad zbiegu określają jednoznacznie położenie prostej. Istotnie, jeśli Z i T są dane, to wystarczy Z połączyć ze środkiem rzutów S (który znajduje się w odległości równej promieniowi okręgu oddalenia na prostopadłej z S_π) i przez ślad tłowy T przeprowadzić prostą równoległą do niej.

Rozpatrzmy bliżej położenia punktów prostej l i ich rzutów.

Jeśli punkt A (rys. 364) znajduje się względem S po przeciwnej stronie rzutni, to jego obraz A' jest położony na odcinku ograniczonym śladami T i Z . Punkt B odcinka NT prostej l ograniczonego płaszczyzną rzutów i płaszczyzną



Rys. 364.



Rys. 365.

zniknienia posiada obraz B' poza odcinkiem ZT po stronie T . Jeśli wreszcie C leży po przeciwnej stronie płaszczyzny zniknienia względem rzutni, to jego obraz C' leży zewnątrz odcinka ZT po stronie Z . Widzimy więc, że:

- a) rzutem półprostej TZ^∞ nie zawierającej punktu N jest odcinek TZ ,
- b) rzutem odcinka TN , gdzie N jest punktem przebiecia płaszczyzny zniknienia prostą l , jest półprosta TN'^∞ nie zawierająca śladu zbiegu Z ,
- c) rzutem półprostej NZ^∞ nie zawierającej śladu tłowego T jest półprosta ZN'^∞ nie zawierająca śladu tłowego T .

Gdy prosta l przechodzi przez środek rzutów S , to rzuty wszystkich jej punktów znajdują się w jednym punkcie.

Dla prostej równoległej do rzutni można tak samo określić ślady zbiegu i tłowy; będą one znajdowały się oczywiście w punkcie niewłaściwym prostej l' (a więc też i prostej l).

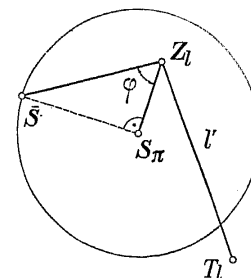
Z definicji śladu zbiegu wynika, że w przypadku, gdy proste a i b są do siebie równoległe, tzn. mają wspólny punkt niewłaściwy Z^∞ , perspektywy ich będą miały wspólny ślad zbiegu, a więc $Z_a = Z_b$. W ogólnym więc przypadku rzuty prostych równoległych są prostymi przecinającymi się w punkcie właściwym Z . Jeśli proste c i d są do siebie równoległe do π , to ślad zbiegu $Z_c^\infty = Z_d^\infty$ jest punktem niewłaściwym; rzuty c' i d' są więc do siebie równoległe (rys. 365 a i b).

Zauważmy, że położenie śladu zbiegu Z zależy od kierunku prostej. Jest widoczne, że

- a) prosta prostopadła do rzutni posiada ślad zbiegu w punkcie S_π ,

- b) prosta nachylona do rzutni pod kątem 45° posiada ślad zbiegu na okręgu głębokości tłowej,
- c) prosta zawierająca z rzutnią kąt $< 45^\circ$ ze wewnątrz okręgu,
- d) prosta zawierająca z rzutnią kąt $> 45^\circ$ wewnątrz okręgu oddalenia.

Ponieważ prosta $l = SZ_l$ jest równoległa do l' , więc rzeczywistą wielkość między l i π można znaleźć obracając o 90° trójkąt $Z_l S_\pi S$ (rys. 366). Rzutem prostokątnym tego trójkąta jest odcinek $Z_l S_\pi$. Kład jego $Z_l S_\pi S$ otrzymamy kreśląc z S_π prostą prostopadłą do $Z_l S_\pi$. Oczywiście S znajduje się na okręgu oddalenia.



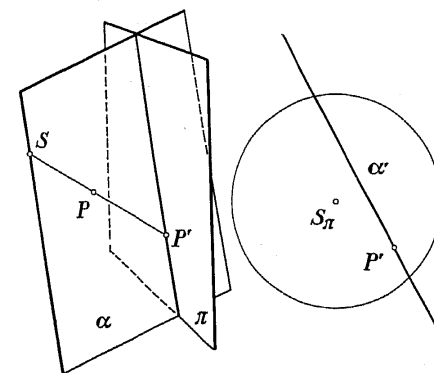
Rys. 366.

III. Weźmy pod uwagę płaszczyznę α nierównoległą do π . Jeśli nie przechodzi ona przez środek rzutów S , to na każdej prostej przechodzącej przez S istnieje jeden punkt płaszczyzny α ; rzutem jego jest oczywiście punkt przebiecia z płaszczyzną π . Wynika z tego, że każdy punkt na tle π będzie rzutem jednego punktu płaszczyzny α . Jedynie w przypadku, gdy płaszczyzna przechodzi przez S , rzuty jej punktów znajdują się na krawędzi jej z tłem, ponieważ oczywiście promienie łączące jej punkty ze środkiem rzutów będą na niej leżały. W tym położeniu, jak łatwo widać, rzut, tzn. prosta α' , określa (rys. 367) jednoznacznie płaszczyznę α . (Nasuwa się tu analogia z rzutami prostokątnymi, gdzie rzutem płaszczyzny prostopadłej do π jest również prosta).

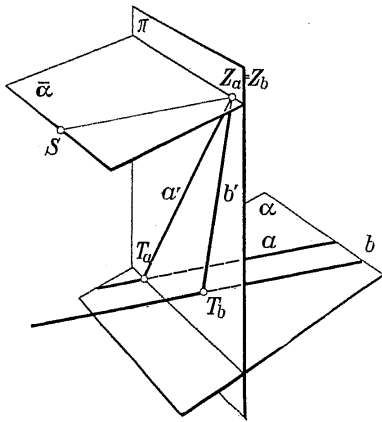
W przypadku jednak, gdy α nie przechodzi przez S , nie będziemy mówili o rzucie jej na π , gdyż byłaby to cała płaszczyzna π , lecz zrobimy umowę o wykreślaniu na rzutni tylko pewnych prostych płaszczyzny α . Podobnie jak dla linii prostej weźmiemy:

- 1° krawędź przecięcia α i π ; nazywać ją będziemy *śladem tłowym* α i oznaczać symbolem t_α oraz
- 2° prostą niewłaściwą z^∞ .

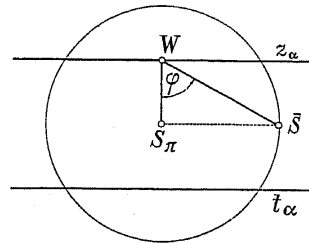
Obrazem prostej niewłaściwej z^∞ jest według definicji krawędź π i płaszczyzny α równoległej do α i przechodzącej przez S ; jest to oczywiście, gdyż promienie łączące S z punktami prostej z^∞ leżą na α . Oznaczmy przez z_α (zamiast z^∞) rzut prostej z^∞ ; nazywać go będziemy *śladem zbiegu płaszczyzny* α .



Rys. 367.



Rys. 368.



Rys. 369.

Rzutem prostej t_α jest oczywiście ta sama prosta. Mamy więc na tle dwie proste (rys. 368 i 369): t_α i z_α (oczywiście $t_\alpha \parallel z_\alpha$, gdyż $\alpha \parallel \bar{\alpha}$). Łatwo zauważyć, że położenie płaszczyzny α jest tymi śladami jednoznacznie określone; rzeczywiście, dla ustawienia α wystarczy przez punkt S i z_α poprowadzić płaszczyznę $\bar{\alpha}$ i przez t_α poprowadzić płaszczyznę α do niej równoległą.

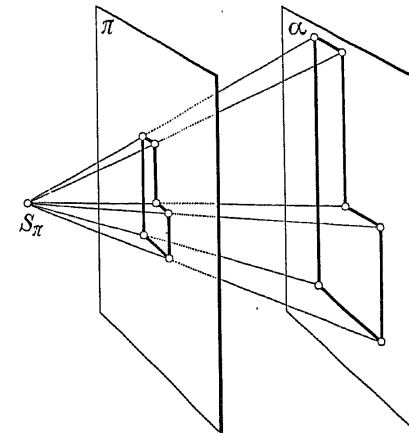
Łatwo zauważyć, że:

- a) płaszczyzna prostopadła do rzutni posiada ślad zbiegu przechodzący przez punkt S_π ,
- b) płaszczyzna nachylona do rzutni pod kątem 45° posiada ślad zbiegu styczny do okręgu oddalenia,
- c) ślad zbiegu płaszczyzny nachylonej do rzutni pod kątem mniejszym od 45° nie przecina okręgu głębokości,
- d) ślad zbiegu płaszczyzny nachylonej do rzutni pod kątem większym od 45° przecina okrąg głębokości w dwóch punktach.

Aby znaleźć rzeczywistą wielkość kąta między α a π , wystarczy wykonać kład kąta między $\bar{\alpha}$ a π . W tym celu obierzmy za jedno ramię kąta prostą przechodzącą przez S ; oczywiście drugie przejdzie przez S_π (rys. 369). Rzuty ich będą się znajdowały na prostej prostopadłej do śladu Z_α , gdyż jest on krawędzią obu płaszczyzn. Wykonując kład punktu S korzystamy z tego, że jego oddaleniem (cechą) od π jest promień okręgu głębokości.

Z definicji śladów prostej i płaszczyzny wynika, że:

- a) jeśli prosta a leży na α , to ślad zbiegu znajduje się na śladzie zbiegu płaszczyzny, a ślad tłowy na śladzie tłowym płaszczyzny (rys. 368),
- b) jeśli prosta a jest równoległa do α , to jej ślad zbiegu leży na śladzie zbiegu płaszczyzny, ślad zaś tłowy nie leży na śladzie tłowym płaszczyzny.



Rys. 370.

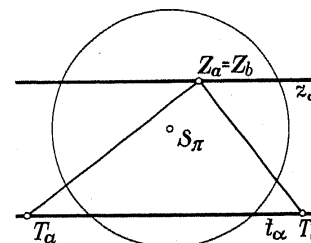
Jeśli płaszczyzna α jest równoległa do rzutni, to oczywiście jej ślad tłowy jest prostą niewłaściwą t_α^∞ . Ślad zbiegu, jako przecięcie π i $\bar{\alpha} = \bar{\pi}$, pokrywa się w tym przypadku ze śladem tłowym. Obrazem figury geometrycznej znajdującej się na takiej płaszczyźnie jest figura podobna do niej (rys. 370).

ZADANIE I. *Narysować ślady płaszczyzny przechodzącej przez dwie proste równoległe a i b .*

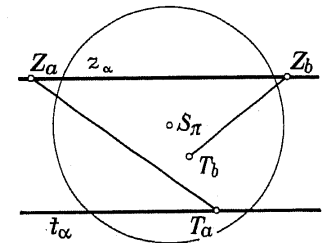
Ślad tłowy t_α będzie przechodził przez ślady T_a i T_b danych prostych, ślad zaś zbiegu z_α przez wspólny ślad zbiegu $Z_a = Z_b$ i będzie równoległy do t_α (rys. 371).

ZADANIE II. *Dane są dwie proste nierównoległe a i b ; nakreślić ślady płaszczyzny α przechodzącej przez a i równoległej do b .*

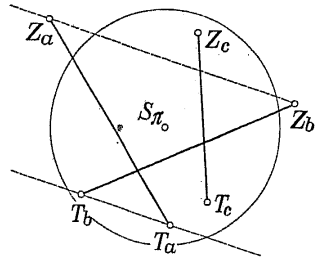
Ślad zbiegu płaszczyzny α przechodzi przez ślady zbiegu Z_a i Z_b obu prostych, ślad tłowy t_α przez T_a i jest równoległy do z_α (rys. 372).



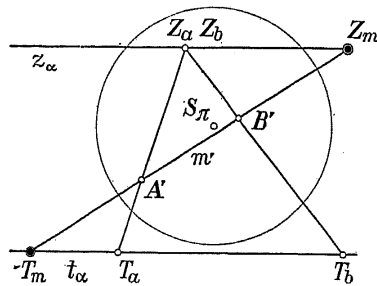
Rys. 371.



Rys. 372.



Rys. 373.



Rys. 374.

Weźmy dwie proste przecinające się a i b (rys. 373). Ponieważ płaszczyzna, która przez nie przechodzi, posiada ślad zbiegu zawierający ślady Z_a i Z_b , oraz ślad tłowy zawierający T_a i T_b , więc $T_a T_b \parallel Z_a Z_b$.

Z tego wynika, że w przypadku, gdy Z_a i Z_b są różne i prosta $Z_a Z_b$ nie jest równoległa do $T_a T_b$, proste a i b ani nie są równoległe, ani nie przecinają się w punkcie właściwym, ponieważ nie leżą na jednej płaszczyźnie. Jak wiadomo, takie proste nazywamy *skośnymi*.

Widzimy więc, że w przypadku, gdy ślady Z_a, T_a, Z_b i T_b są właściwe, można z ich położenia wnioskować o ustawieniu prostych a i b względem siebie. Z tego bowiem, że trzy rodzaje wzajemnych położenia prostych a i b wykluczają się, wynika, że wnioski nasze można odwrócić. Otrzymamy więc następujące uwagi (rys. 373):

- jeśli $Z_a \neq Z_b$ i $Z_a Z_b \parallel T_a T_b$, to a i b przecinają się w punkcie właściwym;
- jeśli $Z_a \neq Z_c$, $T_a \neq T_c$ i $Z_a Z_b \nparallel T_a T_b$, to proste a i c są skośne i wreszcie
- jeśli $Z_a = Z_b$, to $a \parallel b$.

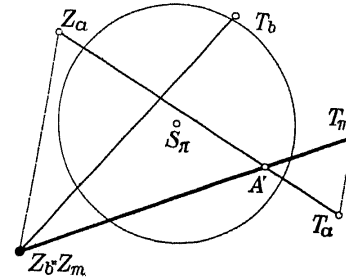
Wyłączenie śladów niewłaściwych jest zrozumiałe, gdyż wówczas przez Z_a i $T_a = Z_a$ prosta a nie jest określona.

ZADANIE III. Znaleźć ślady T_m i Z_m prostej m przechodzącej przez punkty A i B położone na danych prostych równoległych a i b .

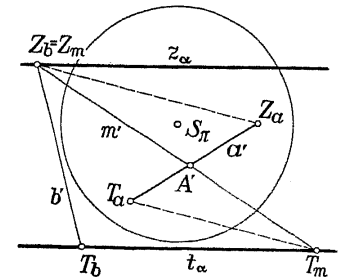
Rzut m' prostej m będzie oczywiście przechodził przez rzuty A' i B' punktów A i B . Kreśląc ślady t_a i z_a płaszczyzny przechodzącej przez a i b (zad. I) otrzymujemy na przecięciu t_a i m' ślad tłowy T_m , na przecięciu zaś z_a i m' ślad zbiegu Z_m .

ZADANIE IV. Przez punkt A na prostej a narysować prostą m równoległą do danej prostej b .

Z równoległości prostych m i b wynika, że $Z_m = Z_b$ (rys. 375). Łącząc Z_b z rzutem A' , otrzymujemy rzut m' prostej m . Ślad tłowy T_m znajduje się na



Rys. 375.



Rys. 376.

prostej przechodzącej przez T_a i równoległej do $Z_a Z_m$, ponieważ a i m są prostymi przecinającymi się.

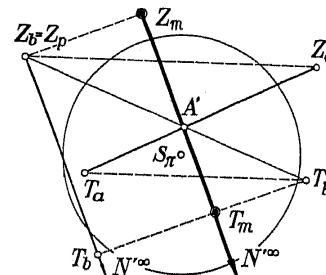
ZADANIE V. Przez punkt A na prostej a oraz prostą b przeprowadzić płaszczyznę.

W celu wyznaczenia śladów płaszczyzny kreślimy przez dany punkt A prostą m równoległą do b ; należy więc dla znalezienia jej śladu T_m powtórzyć zadanie poprzednie.

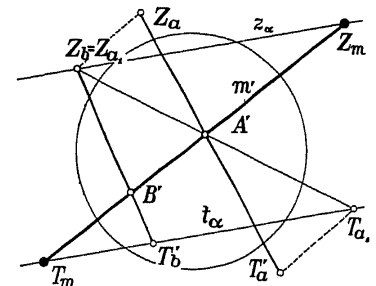
Oczywiście ślad tłowy żądanej płaszczyzny przechodzi przez T_b i T_m , ślad zbiegu przez $Z_b = Z_m$ jest do niego równoległy (rys. 376).

ZADANIE VI. Dany jest punkt A na prostej a oraz prosta b ; narysować ślady prostej m łączącej punkt A z punktem N , w którym b przebija płaszczyznę zniknięcia.

Jak wiadomo, obrazem punktu N jest punkt niewłaściwy N'^∞ (rys. 377). Rzut zatem m' prostej m łączy A' i N'^∞ . Aby znaleźć ślady T_m i Z_m , zauważmy, że m znajduje się w płaszczyźnie przechodzącej przez punkt A i prostą b . Znajdujemy więc jak w zadaniu poprzednim ślady tej płaszczyzny za pomocą prostej p równoległej do b i zaznaczamy na przecięciu z m' ślady prostej m .



Rys. 377.



Rys. 378.

ZADANIE VII. Dane są punkty A i B na skośnych prostych a i b ; znaleźć ślady prostej m łączącej A i B .

Zadanie różni się tym od zadania III, że proste a i b są skośne. Można zatem rozwiązać je kreśląc najpierw prostą a_1 przechodzącą przez A i równoległą do b . Mamy więc $Z_{a_1} = Z_b$, $T_{a_1}T_a // Z_{a_1}Z_a$. Jeśli teraz weźmiemy płaszczyznę α przechodzącą przez a_1 i b , to otrzymamy Z_m na z_α , a T_m na t_α .

ZADANIE VIII. Znaleźć środek odcinka AB .

Oznaczmy szukany środek przez C i weźmy pod uwagę czwórkę punktów A, B, C i Z^∞ na prostej AB . Jak wiadomo, jest to czwórka harmoniczna. Z własności II wynika, że rzut C' środka musi spełniać równanie:

$$(A'B'C'Z') = (ABCZ^\infty) = -1,$$

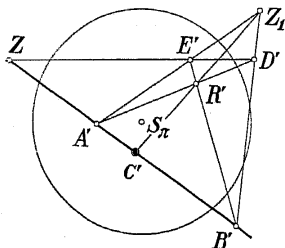
gdzie Z' jest rzutem punktu Z^∞ , tzn. śladem zbiegu prostej AB . Możemy więc znaleźć C' , korzystając z własności czworokąta zupełnego (§ 25, ćwiczenie 3, rys. 240). Kreślimy zatem prostą $E'D'$ przechodzącą przez Z (rys. 379), łączymy $A'E'$ i $B'D'$ oraz $A'D'$ i $B'E'$; punkt przecięcia jednej pary jest punktem przekątnym Z_1 czworokąta zupełnego $A'B'D'E'$, punkt zaś przecięcia drugiej pary drugim punktem przekątnym R' .

Prosta Z_1R' przecina $A'B'$ w punkcie C' , który jest obrazem środka odcinka.

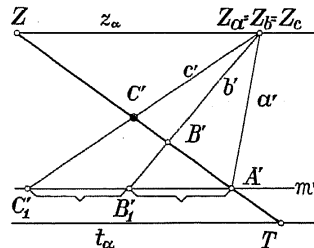
Łatwo zauważyć, że konstrukcję tę można wyjaśnić jako perspektywę równoległoboku $ABDE$. Istotnie, jeśli Z_1 uważać będziemy za obraz punktu niewłaściwego, tzn. ślad zbiegu prostych AE i BD , to R' będzie obrazem punktu przecięcia przekątnych, a prosta $R'Z_1$ obrazem prostej równoległej do boków AE i BD . Oczywiście punkt C' przecięcia $R'Z_1$ z $A'B'$ jest obrazem środka odcinka AB .

ZADANIE IX. Na prostej AB odmierzyć odcinek $BC = AB$.

Zadanie to można by wykonać posługując się konstrukcją poprzednią i kreśląc perspektywy dwóch przystających równoległoboków o wspólnym boku BD .



Rys. 379.



Rys. 380.

Rysunek jednak będzie prostszy, jeśli na pewnej płaszczyźnie α zawierającej dany odcinek (rys. 280) nakreślimy trzy proste równoległe a, b i c przechodzące odpowiednio przez punkty A, B i C . W tym celu wybieramy na z_α ślad zbiegu $Z_a = Z_b = Z_c$ i przecinamy proste a i b prostą m równoległą do rzutni, a więc równoległą do t_α . Ponieważ według wniosku z własności II, stosunki podziału na m równe są stosunkom podziału w rzucie, więc odmierzając na m' odcinek $B_1C_1 = AB_1$ otrzymamy $B'_1C'_1 = A'B'_1$. Jeśli więc z punktu C_1 poprowadzimy prostą c równoległą do a i b , to oczywiście odległość b od c równać się będzie odległości a od b i punkt przecięcia c z prostą AB spełniać będzie żądany warunek $BC = AB$.

ĆWICZENIA.

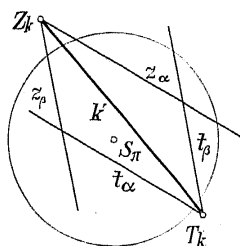
1. Wskazać rzuty punktów przecięcia prostej ze stożkiem, którego podstawą jest okrąg głębokości, a wierzchołkiem środek rzutów.
2. Nakreślić rzut nieograniczonego graniastopu prostego, którego podstawą jest kwadrat na rzutni.
3. Znaleźć odległość dwóch prostych a i b , gdy rzuty dane są tak, że $Z_a = Z_b = S_\pi$.
4. Jaka krzywa będzie konturem rzuconym kuli o środku na prostej $S_\pi S'$?
5. Przez punkt A na danej prostej wykreślić prostą prostopadłą do π .
6. Przez daną prostą poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do π .
7. Dane są punkty A, B i C na prostych a, b i c , przy czym $a // b$, a c jest prostą skośną względem b ; znaleźć ślady płaszczyzny przechodzącej przez A, B i C .
8. Wykonać ćwiczenie 7 przy założeniu, że dane proste a, b i c są parami skośne.
9. Dane są: punkt A na prostej a oraz proste b i c . Narysować ślady płaszczyzny przechodzącej przez A i równoległej do b i c .
10. Wykazać, że jeśli $\alpha // \beta$, to $z_\alpha = z_\beta$.
11. Przez punkt A na prostej a narysować płaszczyznę α równoległą do danej płaszczyzny β .
12. Dane są ślady równoległych do siebie płaszczyzn α i β ; narysować ślady płaszczyzny równoległej do nich i równo oddalonej od nich.
13. Znaleźć środek odcinka, gdy jego końce A i B są dane na prostych skośnych a i b .
14. Podzielić w rzucie odcinek AB na trzy równe części.
15. Dana jest płaszczyzna α i punkt A nie leżący na niej. Narysować ślady płaszczyzny β przechodzącej przez A i krawędź przecięcia α i płaszczyzny zniknięcia.
16. Narysować ślady płaszczyzny przechodzącej przez daną prostą a i punkt N , w którym prosta b przecina płaszczyznę zniknięcia.
17. Narysować perspektywę rzutu prostokątnego danej prostej na płaszczyznę π .

§ 39. Konstrukcje podstawowe

I. Niech będą dane dwie nierównoległe do siebie ani do rzutni płaszczyzny α i β . Krawędź ich jako prosta leżąca na α musi mieć ślad słowy T_k na t_α , a ślad zbiegu Z_k na z_α ; podobnie z tego, że krawędź leży na płaszczyźnie β ,

wynika, że T_k znajduje się na t_β , a Z_k na z_β . Widzimy zatem, że T_k jest punktem przecięcia śladów tłowych, a Z_k punktem przecięcia śladów zbiegu.

Jeśli ślady płaszczyzn α i β nie są równoległe do siebie, to ślady krawędzi będą punktami właściwymi i rzut k' otrzymamy bezpośrednio (rys. 381). Jeśli $z_\alpha // z_\beta$, to Z_k jest punktem niewłaściwym. Wystarczy znaleźć jeszcze jeden punkt wspólny płaszczyzn α i β . W tym celu przecinamy obie płaszczyzny pewną płaszczyzną γ . Jeśli a i b są krawędziami α i γ oraz β i γ , to punkt ich przecięcia jest jednym z punktów prostej k . Rzut k' otrzymujemy łącząc go z punktem niewłaściwym na z_α (rys. 382).



Rys. 381.

Jeśli jedna z płaszczyzn np. α jest równoległa do π , to oczywiście krawędź k będzie równoległa do rzutni, a więc też do śladu t_β , ponieważ k leży na β .

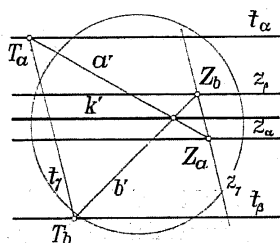
Załóżmy, że płaszczyzna α przechodzi przez punkt A leżący na danej prostej a (rys. 383). Przyjmijmy przez a płaszczyznę γ i znajdziemy jej krawędź d z płaszczyzną α . Jest oczywiste, że płaszczyzna γ przecina β w prostej c równoległej do t_β , a przechodzącej przez A oraz α w szukanej krawędzi k równoległej do t_β , a przechodzącej przez punkt przecięcia c i d .

II. Weźmy teraz płaszczyznę α i prostą a i znajdziemy punkt wspólny.

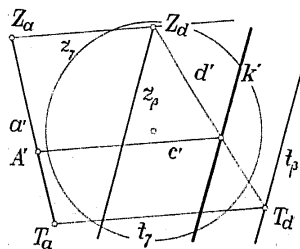
W tym celu narysujmy ślady płaszczyzny β przechodzącej przez a i znajdziemy jej krawędź z daną płaszczyzną α . Jest oczywiste, że punkt przecięcia krawędzi i prostej a jest szukanym punktem przebiecia (rys. 384).

Jeśliby prosta a była równoległa do rzutni, a więc określona swoim rzutem i punktem na danej prostej b , to zamiast dowolnej płaszczyzny przechodzącej przez a weźmiemy oczywiście płaszczyznę zawierającą b .

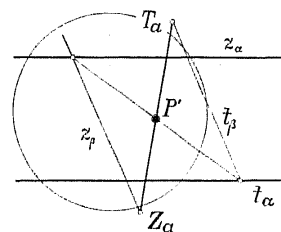
ZADANIE I. Dane są proste a i b oraz punkt P na prostej c ; znaleźć ślady prostej p przechodzącej przez punkt P i przecinającej a i b .



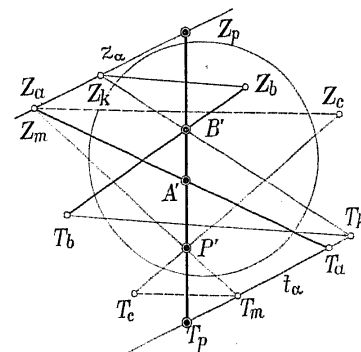
Rys. 382.



Rys. 383.



Rys. 384.



Rys. 385.

Szukana prosta musi leżeć w płaszczyźnie α wyznaczonej prostą a i punktem P . Aby znaleźć ślady t_α i z_α , kreślimy przez P prostą m równoległą do a ($Z_m = Z_a$, $T_m T_c // Z_m Z_c$).

Ponieważ prosta p ma przecinać b , musi więc zawierać punkt B , w którym b przebiega α . Po znalezieniu B łączymy go z P . Ślady prostej p znajdują się na śladach płaszczyzny α (rys. 385).

ZADANIE II. Dane są proste a , b i c ; narysować rzut prostej m równoległej do c , a przecinającej a i b .

Prosta m znajduje się w płaszczyźnie α przechodzącej przez a i równoległej do c oraz w płaszczyźnie β przechodzącej przez b i równoległej do c .

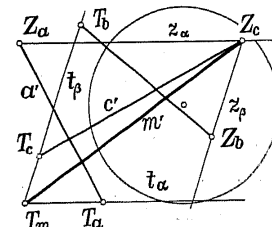
Szukana więc prosta jest krawędzią płaszczyzn α i β (rys. 386).

III. Wszystkie proste prostopadłe do płaszczyzny α są do siebie równoległe, mają więc wspólny ślad zbiegu Z_p .

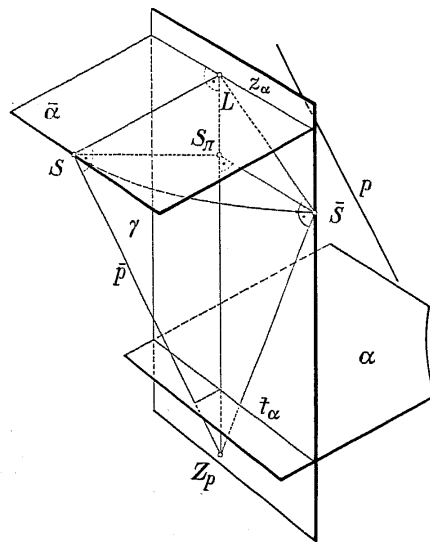
Aby wskazać położenie punktu Z_p , założmy najpierw, że płaszczyzna α nie jest ani równoległa, ani prostopadła do rzutni. Niech $\bar{\alpha}$ oznacza płaszczyznę równoległą do α i przechodzącą przez środek rzutów (rys. 387), $\bar{p}$ prostą równoległą do p i przechodzącą przez S .

Weźmy pod uwagę płaszczyznę γ zawierającą prostą p i SS_π . Płaszczyzna γ jest prostopadła do śladu zbiegu z_α płaszczyzny α , mamy bowiem:

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha} \perp \bar{p}) &\rightarrow (z_\alpha \perp \bar{p}) \\ (\pi \perp SS_\pi) &\rightarrow (z_\alpha \perp SS_\pi) \end{aligned} \rightarrow (z_\alpha \perp \gamma).$$



Rys. 386.



Rys. 387.

Wynika z tego, że prosta z_α jest prostopadła do prostej $Z_p S_\pi$ leżącej na γ . Oznaczmy przez L punkt przecięcia $Z_p S_\pi$ i z_α .

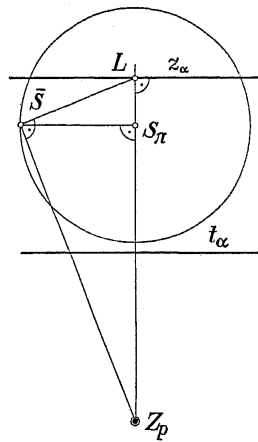
Aby więc znaleźć Z_p , należy wziąć pod uwagę trójkąt prostokątny LSZ_p , którego przeciwprostokątna LZ_p jest prostopadła do z_α , a wysokość jest równa odcinkowi SS_π . Można konstrukcję wykonać na płaszczyźnie π (rys. 388) obracając trójkąt LSZ_p dookoła przeciwprostokątnej $Z_p L$ o 90° . Oczywiście wtedy punkt S znajdzie się w punkcie $\bar{S}$ na okręgu głębokości, przy czym $\bar{S}S_\pi \perp LZ_p$.

Jeśli płaszczyzna α jest prostopadła do rzutni π , to z_α przechodzi przez punkt S_π , a Z_p jest punktem niewłaściwym na prostej prostopadłej do z_α (rys. 389). Jeśli α jest płaszczyzną równoległą do π , to oczywiście ślad zbiegu prostych prostopadłych Z_p pokrywa się z punktem S_π .

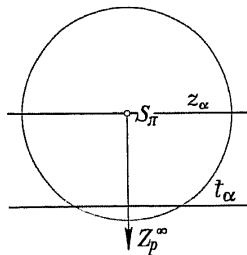
ZADANIE III. Przez punkt A na prostej a przeprowadzić prostą prostopadłą do danej płaszczyzny.

Ślad zbiegu Z_p szukanej prostej znajdujemy jak na rysunku 388; znając Z_p możemy narysować rzut p' i ślad tłowy T_p opierając się na tym, że proste a i p przecinają się ($T_p T_a \parallel Z_p Z_a$) (rys. 390).

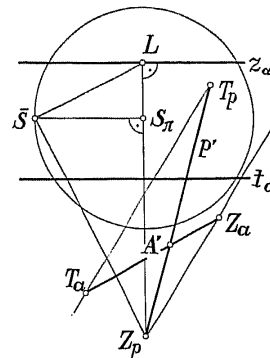
ZADANIE IV. Dany jest punkt A na prostej a i prosta p ; narysować ślady płaszczyzny α przechodzącej przez A i prostopadłej do p .



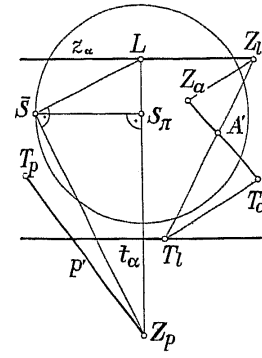
Rys. 388.



Rys. 389.



Rys. 390.



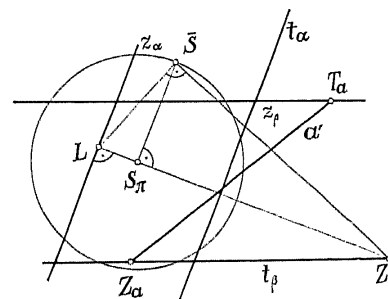
Rys. 391.

Wyznaczanie śladu zbiegu Z_α płaszczyzny α jest odwróceniem konstrukcji poprzedniej. A więc (rys. 391): punkt Z_p łączymy z S_π , kreślimy kład $\bar{S}$ na okręgu głębokości tak, by $Z_p S_\pi \perp S_\pi \bar{S}$, następnie znajdujemy na prostej $Z_p S_\pi$ taki punkt L , aby $Z_p \bar{S} \perp \bar{S} L$ i wreszcie rysujemy ślad zbiegu z_α przez punkt L prostopadłe do $Z_p S_\pi$.

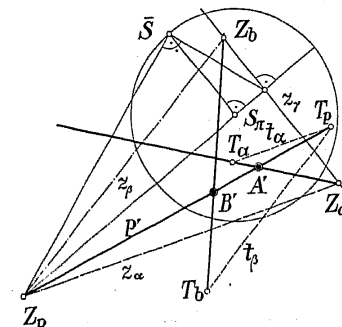
W celu wykreślenia śladu tłowego t_α przyjmijmy na płaszczyźnie α prostą l przechodzącą przez punkt A . Ślad zbiegu Z_l możemy wybrać dowolnie na z_α , ślad tłowy T_l należy znaleźć opierając się na tym, że l przecina daną prostą a . Po wyznaczeniu T_l rysujemy t_α przez T_l i równoległe do z_α .

ZADANIE V. Przez prostą a przeprowadzić płaszczyznę β prostopadłą do danej płaszczyzny α .

Jeśli płaszczyzna β ma być prostopadła do α , to muszą na niej istnieć proste prostopadłe do α . Znajdźmy ich ślad zbiegu Z_β . Ponieważ ślad zbiegu z_β musi zawierać Z_p , więc $z_\beta = Z_p Z_\beta$. Ślad tłowy t_β przechodzi oczywiście przez T_a i jest równoległy do z_β .



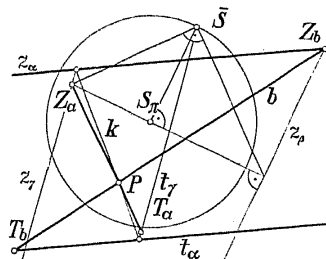
Rys. 392.



Rys. 393.

ZADANIE VI. Narysować prostą p przecinającą dwie dane proste skośne a i b i prostopadłą do nich.

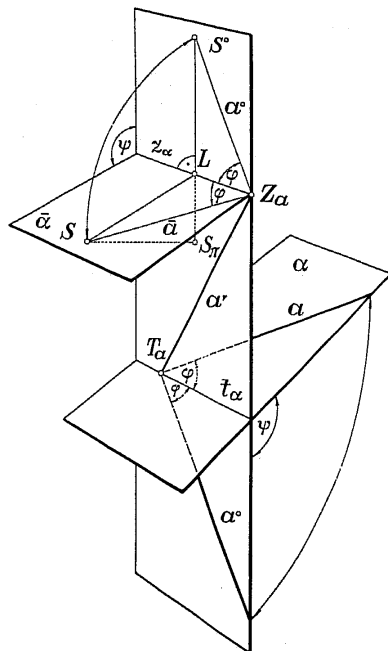
Wyobraźmy sobie płaszczyznę γ równoległą do obu prostych. Jest oczywiste, że prosta p prostopadła do a i b musi być prostopadła do γ . W celu rozwiązania naszego zadania łączymy więc (rys. 393) ślady zbiegu Z_a i Z_b uzyskując z_γ oraz znajdujemy ślad Z_p prostych prostopadłych do γ . Ponieważ prosta p ma przecinać a , musi więc znajdować się z_a w jednej płaszczyźnie α ; podobnie musi leżeć w jednej płaszczyźnie β z prostą b . Znajdujemy więc ślady obu płaszczyzn i przez ich przecięcie szukaną prostą p .



Rys. 394.

ZADANIE VII. Dana jest prosta a i płaszczyzna α ; należy znaleźć prostą b zawierającą punkt przebicia α prostą a , zawartą w α i prostopadłą do a .

Znajdźmy punkt P , w którym prosta a przebija płaszczyznę α (rys. 394). Jak wiadomo, wszystkie proste przechodzące przez P i prostopadłe do a leżą w płaszczyźnie β prostopadłej do a . Aby więc znaleźć szukaną prostą, kreślimy najpierw ślad zbiegu płaszczyzny β ; oczywiście prostą spełniającą warunki zadania jest krawędź płaszczyzn α i β . Rzut jej otrzymamy łącząc jej ślad zbiegu z rzutem punktu P .

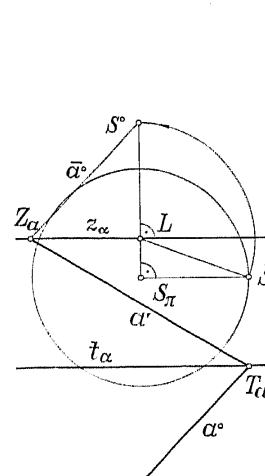


Rys. 395.

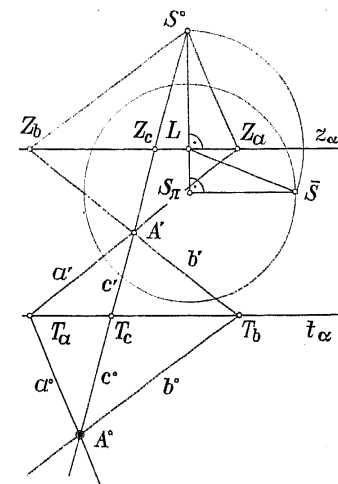
IV. Przyjmijmy płaszczyznę α nie-równoległą do π i leżącą na niej prostą a (rys. 395).

Wiele zadań o charakterze miarowym wykonywaliśmy w rzutach prostokątnych za pomocą układu płaszczyzny. Okazuje się, że i tu będziemy mogli je w taki sam sposób rozwiązać. W tym celu zastanówmy się nad konstrukcją układu.

Obróćmy płaszczyznę α dookoła śladu tłowego t_α o kąt, jaki ona zawiera z rzutnią π . Równocześnie płaszczyznę $\bar{\alpha}$ przechodzącą przez środek i do niej



Rys. 396.



Rys. 397.

równoległą obróćmy o ten sam kąt dookoła z_u i zaznaczmy kład S° punktu S . Aby znaleźć S° , zwróćmy uwagę na to, że punkt S odbywa ruch obrotowy w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu z_α . Środkiem obrotu jest punkt L , w którym płaszczyzna obrotu przecina z_α , tzn. na prostej prostopadłej do z_α i przechodzącej przez S_π , promieniem obrotu odcinek SL . Odmierzając SL na prostej $S_\pi L$ otrzymujemy S° .

Na płaszczyźnie $\bar{\alpha}$ znajduje się prosta $\bar{a}$ przechodząca przez S i równoległa do a . Obracając ją razem z płaszczyzną $\bar{\alpha}$ otrzymamy kład $\bar{a}^\circ$ przez połączenie punktów Z_a i S° .

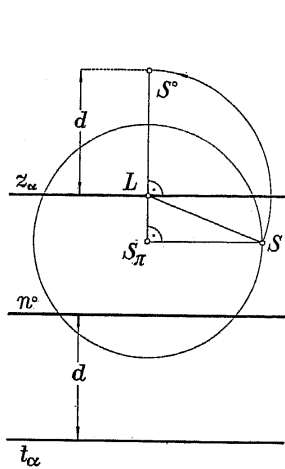
Aby znaleźć kład prostej a , wystarczy zauważyć, że kąt zawarty między t_α i a równy jest kątowi między z_α i $\bar{a}$. Ponieważ przy obrocie kąty prostych z osiami nie ulegają zmianie, więc $a^\circ \parallel \bar{a}^\circ$; oczywiście a° musi przechodzić przez T_a .

Opisaną konstrukcję podaje rysunek 396. Rzeczywistą długością promienia obrotu SL dla środka rzutu jest długość $\bar{S}L$. Po wykreśleniu $\bar{a}^\circ = S^\circ Z_a$ narysowano a° przez T_a i równoległe do $\bar{a}^\circ$.

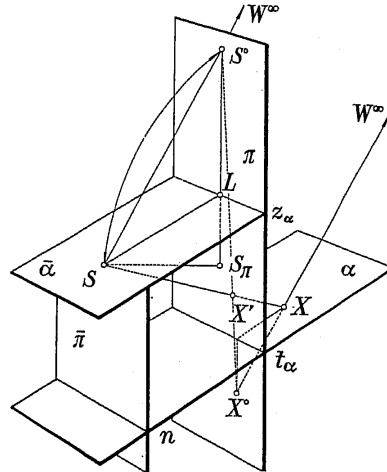
Przyjmijmy teraz na płaszczyźnie α punkt A . Aby wykreślić kład A° punktu A , przyjmijmy przezeń na α dwie proste a i b . Oczywiście znajdując a° i b° otrzymamy na przecięciu kład A° .

Konstrukcję można nieco uprościć; można bowiem udowodnić, że punkty A° , A' i S° leżą na prostej.

Istotnie, weźmy przez A na płaszczyźnie α taką prostą c , żeby jej rzut c' przechodził przez kład S° ; wówczas wyznaczając c° jak na rysunku 396,



Rys. 398.



Rys. 399.

sprawdzamy, że kład c° pokrywa się z rzutem c' . Ponieważ c° musi zawierać A° , więc S° , A' i A° znajdują się na prostej.

Uwaga: W rzutach prostokątnych kład prostej uzyskiwaliśmy za pomocą kładów dwóch punktów leżących na niej. W rzutach środkowych jest odwrotnie: za pomocą bezpośredniej konstrukcji znajdujemy kład prostej, a kład punktu jest konstrukcją złożoną, należy bowiem wykonać kłady dwóch prostych przechodzących przez punkt.

Weźmy teraz odpowiedniość między rzutami X' a kładami X° punktów płaszczyzny α . Punktem prostej a' odpowiadają punkty prostej a° . Ponieważ według udowodnionego związku przypisane sobie punkty $\bar{X}'$ i X° znajdują się na prostej przechodzącej przez S° , więc odpowiedność nasza jest kolineacją środkową o środku S° (rozdz. III, § 23, III).

Ośią tej kolineacji jest, jak łatwo widać, ślad tłowy t_α płaszczyzny α , ponieważ kład i rzut każdego punktu prostej t_α znajdują się w tym samym miejscu. Prosta graniczną jest tu ślad zbiegu z_α . Istotnie, punkty prostej z_α są rzutami punktów niewłaściwych płaszczyzny α ; ponieważ kładami punktów niewłaściwych są punkty niewłaściwe, więc punktom prostej z_α° odpowiadają w kładzie punkty niewłaściwe; z_α jest więc jedną prostą graniczną. Aby znaleźć drugą prostą graniczną, należy wskazać w kładzie taką prostą n° , której perspektywą jest prosta niewłaściwa. Wiadomo jednak, że jedyną prostą płaszczyzny α , która posiada rzut niewłaściwy, jest jej krawędź n z płaszczyzną zniknięcia.

Ponieważ odległość n od t_α równa jest odległości S od z_α , więc kład n° otrzymamy odmierając (z zachowaniem zwrotu) odległości S° i z_α od t_α . Łatwo

zauważyć, że proste graniczne z_α i n° są położone między S° i t_α , albo S° i t_α między z_α i n° (rys. 398).

Należy zwrócić uwagę na to, że rozważania nasze dotyczą kolineacji między rzutem $[\alpha']$ układu płaskiego $[\alpha]$ a kładem $[\alpha^\circ]$, a nie między układami $[\alpha]$ i $[\alpha^\circ]$.

Kolineację między $[\alpha']$ a $[\alpha^\circ]$ można określić jako superpozycję dwóch kolineacji. Niech bowiem $X' = S(X)$ oznacza przekształcenie środkowo kolineacyjne, które każdemu punktowi X układu $[\alpha]$ przypisuje jego rzut X' . Środkiem tej kolineacji jest punkt S , osią t_α , prostymi granicznymi z_α i n (rys. 399). Niech dalej $X = W(X^\circ)$ będzie obrotem, tzn. przekształceniem, w którym punkt X odpowiada punktowi X° uzyskanemu po obrocie płaszczyzny α o kąt między α i π .

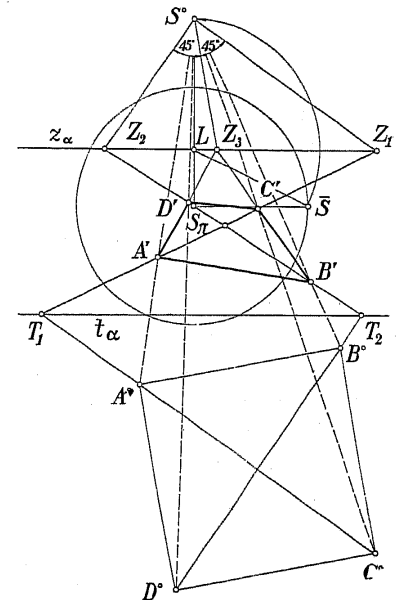
Obrót jest kolineacją o środku W^∞ na prostej prostopadłej do płaszczyzny symetrii kąta α i π , osią jest również t_α . Prostymi granicznymi są proste niewłaściwe płaszczyzn α i π , ponieważ w przypadku środka niewłaściwego kolineacji jest przekształceniem afinicznym.

Przekształcenie złożone $X' = SW(X^\circ)$ jest kolineacją środkową o środku w punkcie przebiecia π prostą SW^∞ (§ 23, II), tzn. w S° . Ośią kolineacji złożonej jest ślad t_α , a prostymi granicznymi proste z_α i n° , ponieważ w kolineacji $W(X^\circ)$ prostym właściwym odpowiada właściwe, a niewłaściwym — niewłaściwe.

ZADANIE VIII. *Nakreślić rzut kwadratu leżącego w płaszczyźnie α mając daną przekątną AC w rzucie.*

Obróćmy płaszczyznę α dokoła śladu tłowego i nakreślmy kład $A^\circ C^\circ$ odcinka AC (rys. 400). Rysując w kładzie drugą przekątną $B^\circ D^\circ$ będziemy mogli znaleźć jej rzut $B'D'$ opierając się na tym, że: 1° ślad tłowy T_2 prostej BD znajduje się na przecięciu jej kładu z osią obrotu, tzn. t_α , 2° ślad zbiegu Z_2 leży na z_α i spełnia warunek $Z_2 S^\circ \parallel B^\circ D^\circ$.

Zauważmy, że proste $Z_1 S^\circ$ i $Z_2 S^\circ$ są do siebie prostopadłe jako proste równoległe do kładów $A^\circ C^\circ$ i $B^\circ D^\circ$. Podobnie $\angle (Z_1 S^\circ Z_3) = 45^\circ$, jeśli Z_3 oznacza ślad zbiegu boków AD i CB .

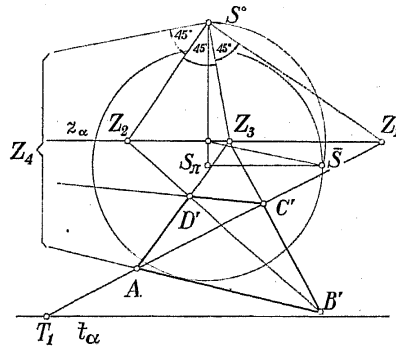


Rys. 400.

Opierając się na tym, będziemy mogli wykonać zadanie bez pomocy kładu.

Po wykreśleniu śladów zbiegu Z_2 i Z_3 i śladu zbiegu Z_4 boków AB i CD (rys. 401), łączymy A' z Z_3 i C' z Z_4 uzyskując rzut D' wierzchołka D . Łącząc wreszcie C' z Z_3 i A' z Z_4 otrzymujemy na przecięciu rzut wierzchołka B .

Postępując się śladami zbiegu w miejscach kładu, należy zwrócić uwagę na to, że rzut kąta i kąt równy rzeczywistej jego wielkości a posiadający wierzchołek S° opierają się na tym samym odcinku (albo półprostej) śladu zbiegu (np. rzut $\angle (Z_1CZ_3)$ i rzeczywista wielkość, tzn. $\angle (Z_1S^\circ Z_3)$ opierając się na odcinku Z_1Z_3).

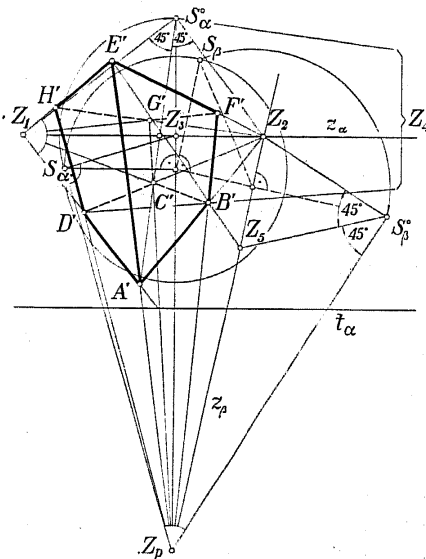


Rys. 401.

ZADANIE IX. Narysować rzut środkowy sześciannu, którego podstawa znajduje się na danej płaszczyźnie.

Rzut podstawy $ABCD$ na danej płaszczyźnie został znaleziony na rysunku 402 za pomocą kładu S° i śladów zbiegu Z_1, Z_2, Z_3 i Z_4 jak na rysunku poprzednim.

Dla nakreślenia krawędzi prostopadłych do podstawy narysowany został ich wspólny ślad zbiegu Z_p . Pozostaje do wyznaczenia rzut jeszcze jednego wierzchołka. W tym celu należy na ścianie $ABFE$ znaleźć przekątną BE . Ślad zbiegu tej ściany jest oczywiście prostą łączącą Z_p i Z_2 . Obróćmy więc środek rzutów S dookoła tego śladu i zaznaczmy jego kład S°_β . Dzieląc na połowy kąt $\angle (Z_2S_\beta Z_p)$ otrzymujemy ślad Z_5 przekątnej BE . Teraz wystarczy już posługiwać się śladami Z_1 i Z_2 , aby narysować dalsze krawędzie.



Rys. 402.

V. Uwagi podane przy rozwiązywaniu zadania VIII pozwalają na odmierzanie kątów w perspektywie

bez pomocy kładu. Nie czyniło to jednak kładu zbyt dużą konstrukcją, gdyż dla wyznaczenia rzeczywistych wielkości odcinków musieliśmy używać kładu.

Obecnie podamy konstrukcję, która bez pomocy kładu pozwoli znaleźć rzeczywistą długość odcinka.

Rozważmy w tym celu związek, jaki zachodzi między rzutem i kładem odcinka znajdującego się na płaszczyźnie α . Odróżnimy dwa przypadki:

1. Jeśli ślad tłowy T prostej AB jest punktem właściwym (rys. 403), to obróćmy kład $A^\circ B^\circ$ dookoła T w położenie $\bar{A}\bar{B}$ na śladzie t_α . Otrzymamy trapez równoramienny $A^\circ B^\circ \bar{A}\bar{B}$ w kładzie (oczywiście klady punktów $\bar{A}$ i $\bar{B}$ pokrywają się z nimi).

Rzut tego trapezu można wykonać znajdując ślad zbiegu M prostych $A\bar{A}$ i $B\bar{B}$. Wiadomo, że M jest punktem śladu zbiegu z_α płaszczyzny α i $MS^\circ \parallel A^\circ \bar{A}$. Z podobieństwa trójkątów $A^\circ \bar{A}T$ i $MS^\circ Z$ wynika, że $ZM = ZS^\circ$, ponieważ $TA^\circ = T\bar{A}$. Można więc znaleźć punkt M odmierzając ZS° na z_α . Zatem odcinek $\bar{A}\bar{B}$ równy istotnej wielkości odcinka AB otrzymujemy na śladzie tłowym t_α , przecinając go prostymi MA' i MB' .

Punkt M o tej własności nazywamy *punktem mierzenia*.

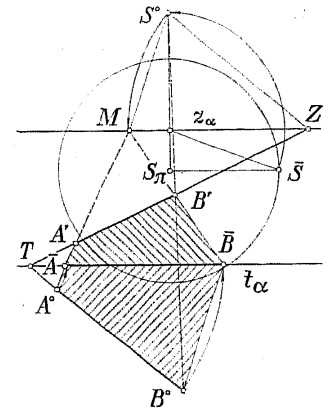
Zauważmy, że odcinek ZM jest równy odległości ZS śladu zbiegu prostej od środka rzutów.

2. Jeśli T jest punktem niewłaściwym, to rzut $A'B'$ i kład $A^\circ B^\circ$ odcinka są równoległe do śladu tłowego płaszczyzny (rys. 404).

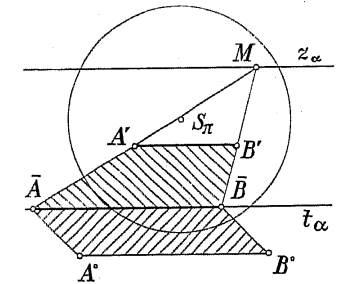
Weźmy dowolny równoległobok $A^\circ B^\circ \bar{A}\bar{B}$, gdzie $\bar{A}$ i $\bar{B}$ są punktami śladu tłowego t_α . Jego rzutem jest trapez $A'B'\bar{A}\bar{B}$, przy czym $A\bar{A}$ i $B\bar{B}$ mają wspólny ślad zbiegu M na z_α .

Dowolność kierunku $A\bar{A}$ na α oznacza oczywiście dowolność śladu zbiegu M na z_α . Ponieważ $\bar{A}\bar{B} = A^\circ B^\circ$, więc M odgrywa tu rolę punktu mierzenia. Widzimy zatem, że każdy punkt M na z_α jest punktem mierzenia dla prostej leżącej na α i równoległej do π .

ZADANIE X. Narysować rzut prostokąta o bokach 2 cm i 3 cm leżącego na danej płaszczyźnie.



Rys. 403.



Rys. 404.

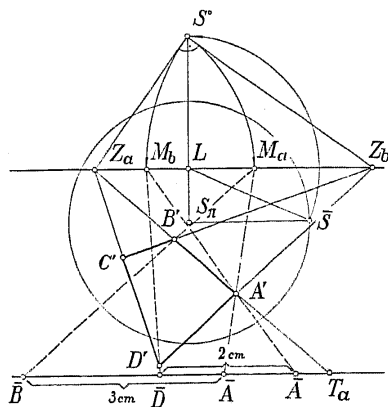
Wierzchołek A i prostą a przyjęto na rysunku 405 dowolnie. W celu nakreślenia boku $AB = 3$ cm na prostej a znaleziono dla niej punkt mierzenia M_a za pomocą układu S° ($Z_a S^\circ = Z_a M_a$). Odmierzając od punktu A na t_a odcinek $AB = 3$ cm i łącząc B z M otrzymamy rzut B .

Ślad zbiegu Z_b boków AD i BC spełnia warunek: $\angle (Z_b S^\circ Z_a) = 90^\circ$. Mając teraz Z_b możemy znaleźć M_b i odmierzyć na prostej b odcinek $AD = 2$ cm.

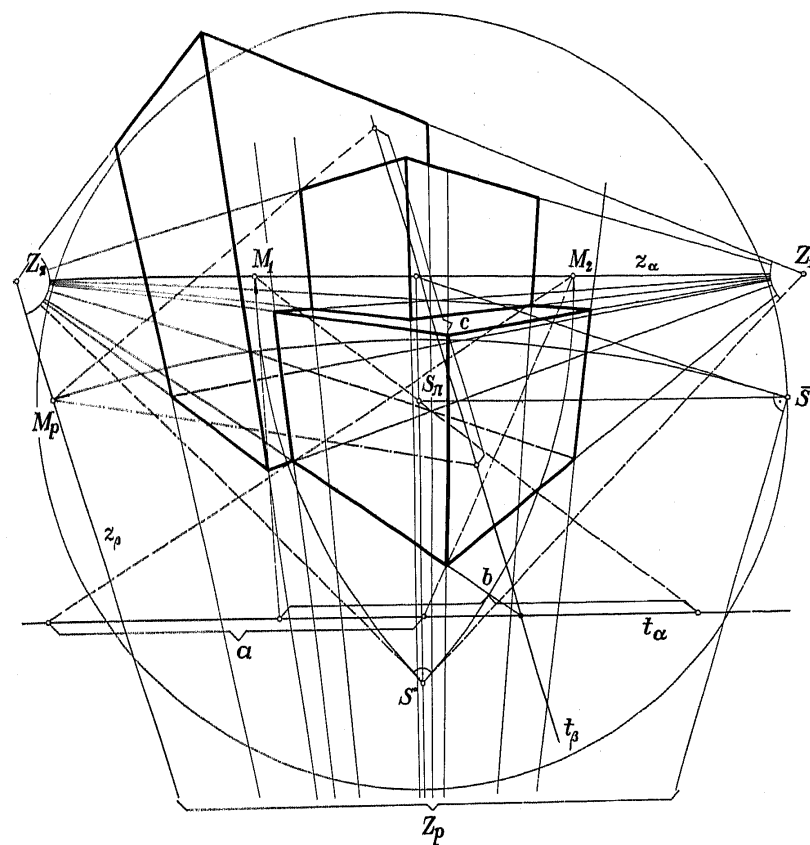
ZADANIE XI. Dana jest płaszczyzna α i punkt A na niej leżący. Na prostej p prostopadłej do α odmierzyć odcinek $AB = 4$ cm.

Rozwiążemy najpierw zadanie w przypadku, gdy płaszczyzna α nie jest prostopadła do rzutni (rys. 406).

Ślad zbiegu Z_p znajdujemy jak na rysunku 388. Następnie przeprowadzamy przez prostą p pewną płaszczyznę β . W tym celu przyjmujemy na α prostą a



Rys. 405.



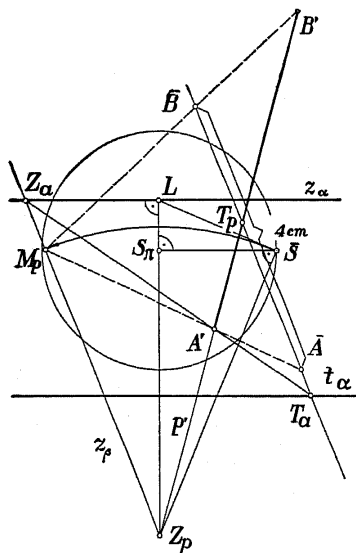
Rys. 408.

przechodzącą przez punkt A ; łącząc Z_a i Z_p i rysując przez T_a prostą równoległą otrzymujemy z_β i t_β .

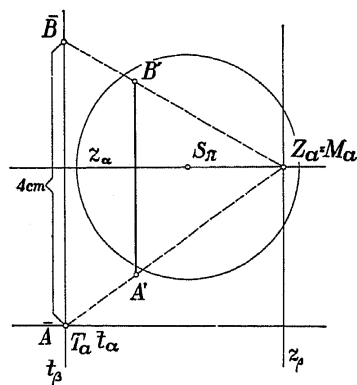
Punkt mierzenia M_p dla prostej p znajduje się na z_β w odległości równej odcinkowi $Z_p S$ od Z_p ; odcinek ten jest już jednak znaleziony w układzie przy wyznaczaniu śladu Z_p ; jest bowiem $Z_p \bar{S} = Z_p S$.

Odmierzamy więc $Z_p \bar{S}$ na z_β i otrzymujemy M_p . Rzut końca B' odcinka $AB = 4$ cm dostaniemy więc ostatecznie kresląc proste $M_p A$ i $M_p B$, przy czym $\bar{A} B = AB$.

W przypadku, gdy płaszczyzna α jest prostopadła do rzutni, ślad zbiegu Z_p jest punktem niewłaściwym prostopadłym do z_α , tzn. punktem prostopadłej do z_α (rys. 407).



Rys. 406.



Rys. 407.

Narysujmy — podobnie jak poprzednio — prostą a przechodzącą przez punkt A i leżącą na α oraz ślady płaszczyzny β zawierającej a i p . Ponieważ AB jest odcinkiem równoległym do t_β , więc też $A'B'$ jest równoległe do t_β . Punktem mierzenia może być zatem każdy punkt śladu z_α . Na rysunku 407 przyjęto $M_p = Z_\alpha$.

Korzystając z podanych konstrukcji wykonano na rysunku 408 rzut perspektywiczny figury stojącej na danej płaszczyźnie nieprostokątnej do rzutni. Kład S° punktu S umieszczono po stronie S_π względem z_α . Na płaszczyźnie α uwidoczniło się jedynie sposobu odmierzenia odcinka a i b . Punkt mierzenia M_p odcinka c znaleziono jak na rysunku 406.

ĆWICZENIA.

1. Dana jest prosta m równoległa do płaszczyzny α przy pomocy rzutu m' i warunku, że przecina daną prostą a ; znaleźć punkt, w którym m przebija płaszczyznę β określoną śladami.
2. Przez punkt A na prostej a przechodzi płaszczyzna α równoległa do rzutni; znaleźć punkt, w którym prosta b określona śladami przebija α .
3. Dane są proste a i b przy pomocy śladów Z_a, T_a, Z_b, T_b znajdujących się na prostej $a' = b'$; znaleźć rzut punktu przecięcia.
4. Dane są proste a i d przy pomocy śladów znajdujących się na prostej $a' = b'$ oraz proste c i d również przy pomocy śladów na prostej $c' = d'$; znaleźć ślady prostej m przecinającej a, b, c i d .
5. Gdzie znajduje się punkt przecięcia płaszczyzny prostą a , jeśli $1^\circ z_\alpha = t_\alpha, 2^\circ Z_\alpha = T_\alpha, 3^\circ$ równocześnie $z_\alpha = t_\alpha$ i $Z_\alpha = T_\alpha$?
6. Znaleźć prostą przecinającą cztery proste a, b, c i d , gdy $a \parallel b$.
7. Narysować prostą przechodzącą przez dany punkt A na prostej a i równoległą do płaszczyzny α i β .
8. Dane są proste a, b i c parami skośne; narysować prostą m równoległą do c i przecinającą a i b .
9. Przez punkt A znajdujący się na danej płaszczyźnie α narysować prostą prostopadłą do π .
10. Przez punkt A na prostej a narysować płaszczyznę prostopadłą do prostej a .
11. Dane są proste a i b przechodzące przez punkt A , przy czym $a \parallel \pi$ i $b \nparallel \pi$; narysować ślady płaszczyzny α prostopadłej do a i przechodzącej przez A .
12. Dana jest prosta a i płaszczyzna α nie zawierająca a ; znaleźć perspektywę rzutu prostokątnego a na α .
13. Dane są proste a i b oraz punkt M na prostej m ; znaleźć ślady prostej przechodzącej przez M , przecinającej a i prostopadłej do b .
14. Wykreślić rzut sześciokąta foremnego znajdującego się na danej płaszczyźnie $1)$ przy pomocy kładu, $2)$ posługując się jedynie śladami zbiegu par boków, jeśli dana jest przekątna.
15. Dany jest rzut $A'B'$ boku prostokąta $ABCD$, w którym $BC = \frac{2}{3} AB$; narysować rzut prostokąta $1)$ przy pomocy kładu, $2)$ posługując się śladami zbiegu boków i przekątnej prostokąta.
16. Narysować rzut środkowy szachownicy $1)$ przy pomocy kładu, $2)$ posługując się śladami zbiegu boków i przekątnych.

17. Przyjąć w rzucie dowolny trójkąt na płaszczyźnie i narysować jego wysokości bez pomocy kładu.
18. Na prostych m i n dane są punkty A, B i C, D ; znaleźć środek kuli przechodzącej przez te punkty.
19. Znaleźć kąt między danymi prostymi a i b .
20. Znaleźć kąt między danymi płaszczyznami α i β .
21. Dana jest prosta a i płaszczyzna α nie zawierająca a ; znaleźć kąt między a i α .
22. Narysować rzut środkowy ośmiościanu foremnego, którego przekątną jest dany odcinek i $1)$ jedna krawędź jest równoległa do rzutni, $2)$ druga przekątna jest równoległa do rzutni.
23. Narysować rzut środkowy czworościanu foremnego, którego podstawa znajduje się na danej płaszczyźnie α , a jeden wierzchołek w punkcie A nie leżącym na α .
24. Gdzie się znajdują wszystkie punkty mierzenia prostej a nierównoległej do rzutni?
25. Na prostej prostopadłej do rzutni odmierzyć od śladu łowego 10 cm.
26. Nakreślić rzut środkowy dwunastościanu foremnego, którego jedna ściana znajduje się na płaszczyźnie α prostopadłej do rzutni, posługując się rysunkiem 103 (tzn. kreśląc w kładzie rzut poziomy i korzystając z rzutu pionowego dla narysowania punktów nie leżących na α).
27. Znaleźć odległość prostych skośnych a i b .
28. Dany jest punkt A na prostej a i prosta b ; narysować ślady płaszczyzny, która przechodzi przez b i jest oddalona od punktu A o połowę odległości A od b .
29. Dany jest punkt A na prostej a i prosta b ; znaleźć taką prostą m przechodzącą przez A i prostopadłą do b , żeby odległość b od m równa była połowie odległości b od A .

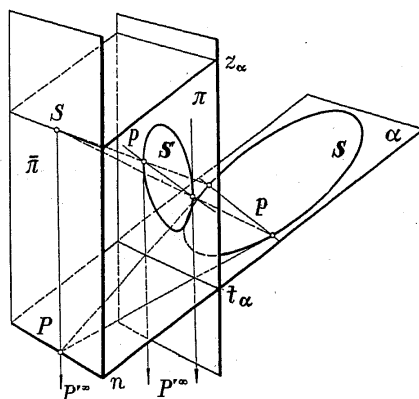
§ 40. Rzuty krzywych drugiego stopnia

Weźmy na płaszczyźnie α nie przechodzącej przez środek rzutów S krzywą drugiego stopnia S . Ponieważ między punktami płaszczyzny α a ich rzutami zachodzi kolineacja środkowa, więc krzywej S odpowiada jako rzut krzywa drugiego stopnia S' .

Krzywe drugiego stopnia podzieliśmy na trzy rodzaje: elipsy, parabole i hiperbole w zależności od ilości punktów przecięcia prostą niewłaściwą. Ponieważ prosta niewłaściwa płaszczyzny rysunku jest obrazem prostej n na płaszczyźnie zniknięcia, więc jest widoczne, że rzut S' krzywej S będzie miał tyle punktów niewłaściwych, ile punktów stożkowej S zawiera prosta n . Odróżnimy zatem trzy przypadki:

1) *Stożkowa S nie posiada punktów na prostej n (rys. 409).*

Rzut S' nie posiada wówczas punktów niewłaściwych, jest więc elipsą. Weźmy pod uwagę średnicę p' elipsy S' ; jest ona biegunową punktu niewłaściwego P'^∞ na π . Oczywiście punkt P'^∞ jest rzutem punktu P prostej n . Z własności biegunów i biegunowych wynika, że prosta p' jest rzutem prostej p , biegunowej punktu P względem stożkowej S .



Rys. 409.

Aby więc znaleźć jakąś średnicę rzutu S' , rysujemy najpierw biegunową p pewnego punktu P na prostej n i następnie kreślimy jej rzut p' . Oczywiście konstrukcje wykonywamy w kładzie.

W tym celu znajdujemy najpierw kład n° prostej n . Jak wynika z rozważań poprzedniego paragrafu, odległość n° od t_α jest równa odległości S° od z_α i pary t_α, z_α i n°, S° rozdzielają się.

Na rys. 410 przyjęto okrąg S w kładzie tak, aby nie przecinał prostej n° . Punkt P° przyjęto na n° dowolnie, a biegunową p° znaleziono za pomocą stycznych z P° do okręgu. Rzut prostej p , tzn. średnicę p' otrzymujemy jak zwykle, za pomocą śladu zbiegu Z_p , który spełnia warunek $S^\circ Z_p \parallel p^\circ$. Punkty przecięcia A' i B' elipsy S' jej średnicą p' są rzutami końców A i B cięciwy okręgu ($A^\circ A'$ i $B^\circ B'$ przechodzą przez S°).

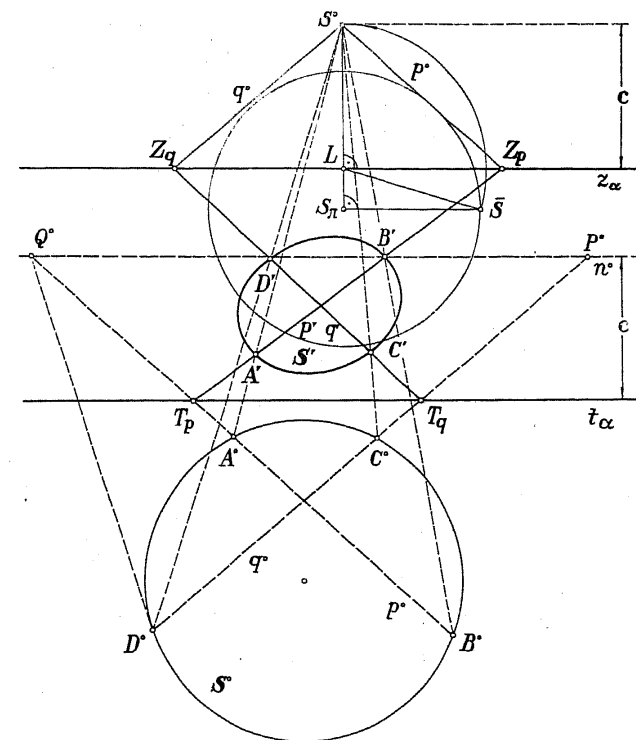
Średnica sprzężona z p' jest biegunową punktu niewłaściwego Q'^∞ prostej p' . Ponieważ kład tego punktu znajdować się musi na n° i p° , więc można będzie wyznaczyć najpierw jego biegunową q° , a następnie przenieść ją do rzutu. Punkty C' i D' otrzymujemy na przecięciu $C^\circ S^\circ$ i $D^\circ S^\circ$ prostą q' .

2) Weźmy teraz na płaszczyźnie α stożkową S styczną do płaszczyzny zniknięcia (rys. 411).

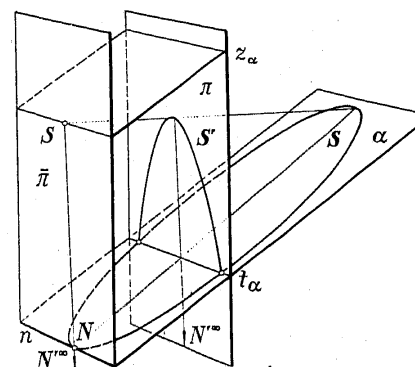
Ponieważ rzut S' będzie zawierał tylko jeden punkt niewłaściwy, mianowicie rzut N'^∞ punktu N styczności, więc będzie parabolą. Oczywiście oś paraboli S' będzie zawierała punkt niewłaściwy N'^∞ , a więc będzie równoległa do SN .

Na rysunku 412 przyjęto w kładzie okrąg S' , styczny do n° w punkcie N° .

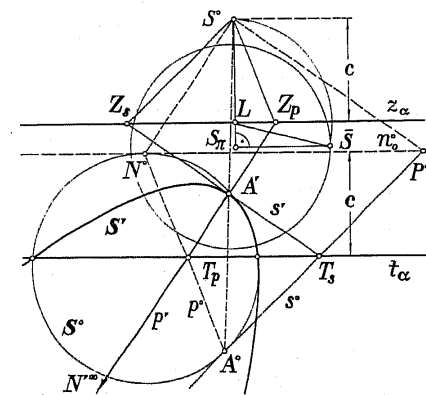
W celu wyznaczenia średnicy paraboli S' przyjmujemy na n° dowolny punkt P° różny od N° i znajdujemy jego biegunową $p^\circ = N^\circ A^\circ$ względem S° . Rzutem jej będzie prosta p' , przy czym punkty A i N będą miały rzuty A' i N'^∞ .



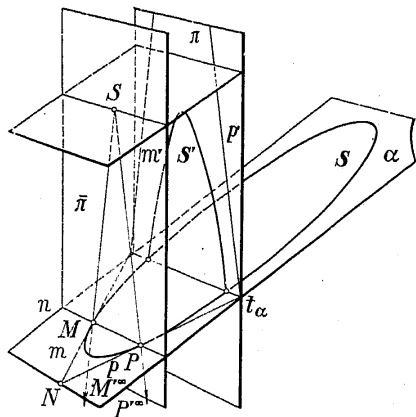
Rys. 410.



Rys. 411.



Rys. 412.



Rys. 413.

Dla wykreślenia paraboli rysujemy jeszcze styczną s' w punkcie A' , odpowiadającą stycznej s° w punkcie A° do okręgu i rzut jednego punktu krzywej S , który otrzymujemy przenosząc z kładu do rzutu przyjęty punkt na S° . Jeśli S° przecina ślad tłowy t_α płaszczyzny, to oczywiście parabola przechodzi przez te punkty.

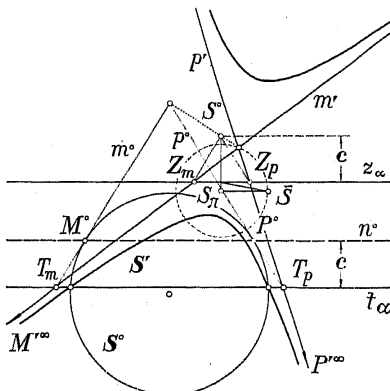
Gdybyśmy zamiast dowolnej średnicy $A'N'^\infty$ chcieli narysować oś paraboli S' , to musielibyśmy korzystać z prostej granicznej n° (zamiast z_α) i z powodu równoległości $A'N'^\infty$ i $S^\circ N^\circ$ oraz s' i $S^\circ P^\circ$ obrócić P° na prostej $S^\circ P^\circ$ prostopadłej do $S^\circ N^\circ$.

3) W przypadku, gdy stożkowa S posiada dwa różne punkty M i P na płaszczyźnie zniknięcia, obraz jej S' ma dwa różne punkty niewłaściwe, jest więc hiperbolą (rys. 413).

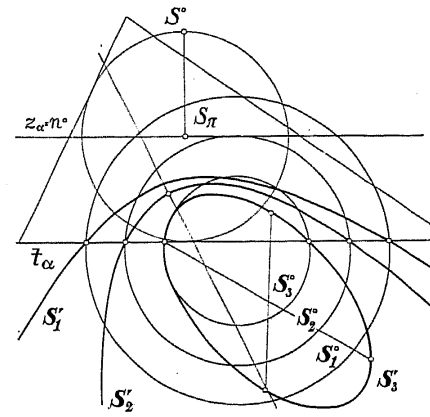
Wykreślmy styczne m i p w punktach M i P . Na płaszczyźnie π będą im odpowiadały jako rzuty proste m' i p' styczne do S' w punktach niewłaściwych M'^∞ i P'^∞ . Zgodnie z definicją są więc one asymptotami hiperboli S'^∞ . Rzut N' punktu przecięcia asymptot jest środkiem krzywej, ponieważ jego biegunowa $n'^\infty = M'^\infty P'^\infty$ jest prostą niewłaściwą.

Oznaczmy przez S_1 i S_2 łuki, na które płaszczyzna zniknięcia rozcina stożkową S . Łatwo zauważyć, że obrazem łuku S_1 jest część hiperboli znajdująca się w jednym kącie, którego ramionami są asymptoty, a obrazem łuku S_2 część hiperboli zawarta w drugim kącie (wierzchołkowym) o tych samych ramionach.

Na rysunku 414 wykonano konstrukcje korzystając, podobnie jak w dwóch poprzednich przypadkach, z kładu płaszczyzny α . Stożkowa S° jest tu okręgiem przecinającym n° w dwóch punktach M° i P° . Aby znaleźć asymptoty m'



Rys. 414.



Rys. 415.

i p' , narysowano najpierw styczne m° i p° w punktach M° i P° do S° , a następnie korzystając ze znanych związków ($S^\circ Z_m \parallel m^\circ$ i $S^\circ Z_p \parallel p^\circ$), rzuty m' i p' . Do określenia hiperboli należy jeszcze znaleźć jeden punkt; można to osiągnąć obierając punkt na S° i rysując jego rzut.

Jeśli S ma punkty wspólne ze śladem tłowym t_α , to oczywiście należą one do rzutu S' .

ZADANIE I. Narysować w perspektywie trzy okręgi współśrodkowe na płaszczyźnie prostopadłej do rzutni o równych różnicach promieni obierając je tak, aby rzut jednego był elipsą, drugiego parabolą, a trzeciego hiperbolą.

Jest oczywiste, że dla rozwiązania zadania wystarczy złączyć rysunki 410, 412 i 414. Na rysunku 415 podano jedną tylko część hiperboli odpowiadającą łukowi S_1 . Dla uproszczenia konstrukcji ślad tłowy płaszczyzny przyjęto styczny do okręgu głębokości; ponieważ w tym przypadku odległość środka rzutów od śladu zbiegu równa się odległości prostej n od śladu tłowego, więc $n^\circ = z_\alpha$.

ZADANIE II. Dany jest punkt O na prostej a oraz promień r ; narysować kontur kuli o środku O i promieniu r .

Jeśli punkt S uważać będziemy za źródło światła, to zadanie można będzie rozwiązać tak samo jak cień kuli na rzutni (rys. 274, 275 i 276).

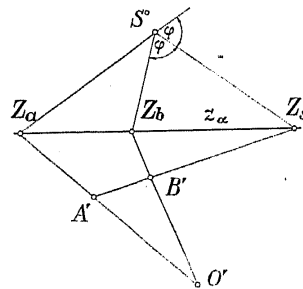
W tym celu znajdziemy rzut prostej b przechodzącej przez O i prostopadłej do rzutni; oczywiście ślad zbiegu Z_b jest w punkcie S_π , a ślad tłowy spełnia warunek $T_b T_\alpha \parallel Z_b Z_\alpha$ (rys. 416). Weźmy teraz kład płaszczyzny β przechodzącej przez b i środek rzutów $S(z_\beta = t_\beta = b')$. Punkt S° znajduje się na okręgu głębokości (przy czym $S_\pi S^\circ \perp t_\beta$), a prosta b° przechodzi przez T_b i jest równoległa do $S^\circ Z_b$.

Wystarczy w tym celu zauważyć, że prosta AB (rys. 419) jest prostopadła do dwusiecznej kąta między a i b zawierającego odcinek AB . Opierając się na tym, znajdujemy ślad prostej AB dzieląc odpowiedni kąt między $Z_a S^\circ$ i $Z_b S^\circ$ na połowy (tzn. ten, który nie zawiera odcinka $Z_a Z_b$).

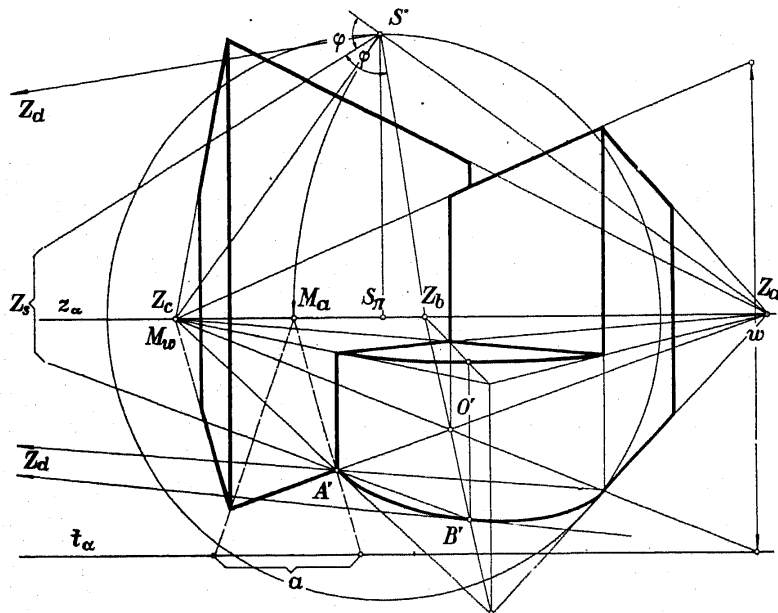
Znajdując jak na rysunku 418 osiem stycznych do obrazu okręgu łatwo zauważyć, że mamy równocześnie ich punkty styczności. Jeśli nie chodzi o wielką dokładność, to można rzut okręgu narysować posługując się tylko tymi punktami i stycznymi. Metoda ta jest bardzo dogodna, gdyż — jak łatwo widać — nie zależy od tego, czy rzut okręgu będzie elipsą, parabola czy hiperbola.

Za pomocą tej metody znaleziono trzy styczne wraz z punktami styczności okręgów na rysunku 420.

Podstawa figury znajduje się na płaszczyźnie prostopadłej do rzutni, więc



Rys. 419.



Rys. 420.

punktami mierzenia dla krawędzi pionowych mogą być dowolne punkty na śladzie zbiegu podstawy.

Punkt środkowy łuku kołowego na podstawie znaleziono odmierzając na dwusiecznej promień okręgu metodą podaną na rysunku poprzednim.

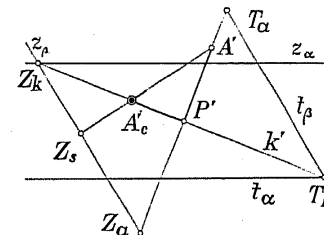
ĆWICZENIA.

1. Jaką krzywą jest perspektywa paraboli o osi równoległej do π ?
2. Jaką krzywą jest perspektywa hiperboli o jednej asymptocie równoległej do π ?
3. Narysować rzut środkowy stożka obrotowego o osi prostopadłej do rzutni i znaleźć przekrój daną płaszczyzną α .
4. Narysować rzut środkowy stożka obrotowego o podstawie na danej płaszczyźnie α i znaleźć przekrój płaszczyzną β , gdy 1) $\beta \parallel \alpha$, 2) $\beta \nparallel \alpha$.
5. Walec obrotowy o podstawie na danej płaszczyźnie α przecięć płaszczyzną β .
6. Z przyjętego punktu T na π wykreślić prostą prostopadłą do π i znaleźć na niej taki punkt O , aby $OT = SS_\pi = 3$ cm i punkty S i O leżały po przeciwnych stronach π , następnie narysować kontur kuli o środku O i promieniu 1) 3 cm, 2) 6 cm, 3) 9 cm. Jaką linią będzie kontur kuli przechodzącej przez środek rzutów, jeśli środek nie znajduje się na prostej SS_π ?
7. Narysować perspektywy równika, jednego równoleżnika i jednego południka kuli o środku na płaszczyźnie π .

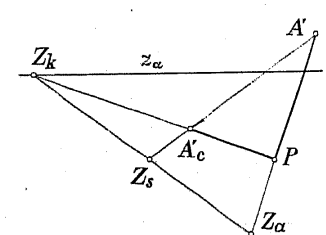
§ 41. Konstrukcje cieni w rzutach środkowych

Objaśnienia konstrukcji cieni rozpoczniemy — jak w metodzie rzutów prostokątnych — od sposobu wyznaczania cienia punktu na płaszczyznę.

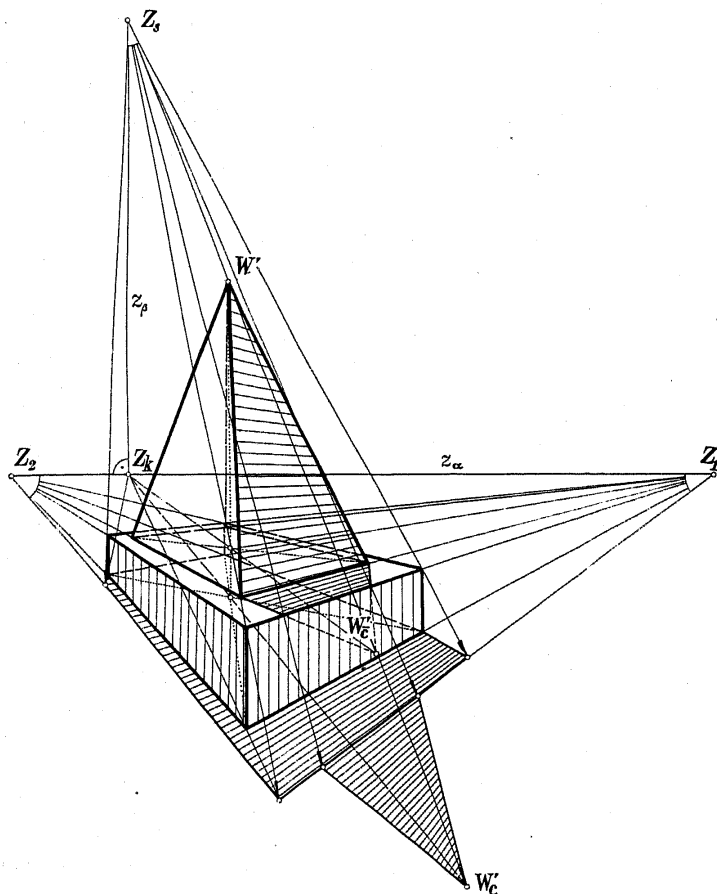
Niech α będzie dowolną płaszczyzną, a Z_s śladem zbiegu promieni światła. Aby znaleźć cień punktu A położonego na prostej a , połączmy jego rzut A' ze śladem zbiegu Z_s (rys. 421). Otrzymamy rzut promienia światła. Punkt przebiecia płaszczyzny α promieniem będzie szukanim cieniem A_c punktu A . Leży on na krawędzi k płaszczyzny α i płaszczyzny β przechodzącej przez promień światła i prostą a , na której znajduje się dany punkt (oczywiście $z_3 = Z_a Z_s$, t_3 przechodzi przez T_a).



Rys. 421.



Rys. 422.



Rys. 423.

Zauważmy, że równocześnie znaleziony został punkt P , w którym prosta a przebija płaszczyznę α . Odcinek PA_c jest oczywiście cieniem odcinka AP na α .

Z tego wynika, że gdyby punkt P był dany w rzucie, to można by konstrukcję uprościć (rys. 422). Wystarczyłoby bowiem dla wyznaczenia cienia odcinka AP połączyć ślady zbiegu Z_a i Z_s , przeciąć prostą z_a i uzyskany punkt Z_k połączyć z punktem P . Cień punktu A będzie na przecięciu prostych Z_kP i Z_sA .

ZADANIE I. Znaleźć cień figury, której podstawa znajduje się na danej płaszczyźnie α prostopadłej do rzutni.

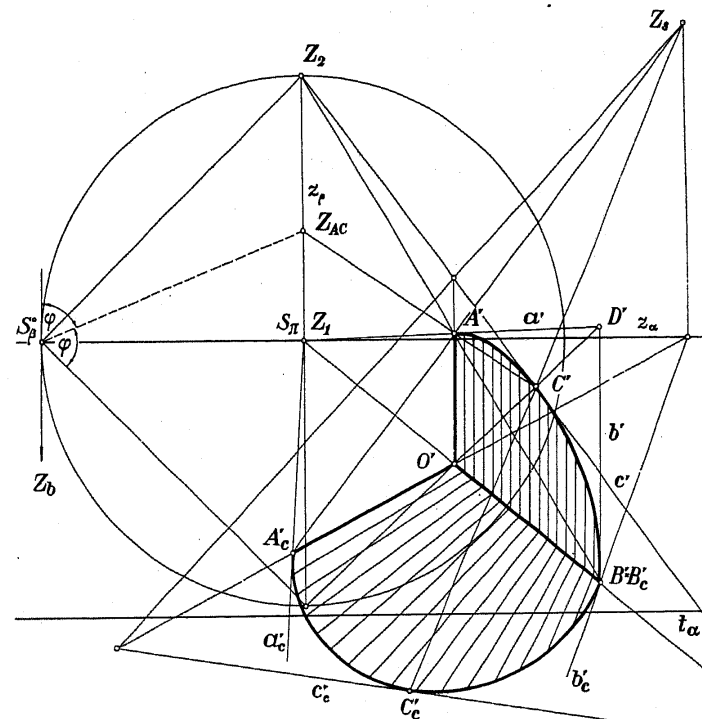
Ponieważ podstawa znajduje się na płaszczyźnie α prostopadłej do rzutni, więc rzuty wszystkich odcinków prostopadłych do α są prostopadłe do jej śladu zbiegu. Cień tych odcinków na α znaleziono na rysunku 423 metodą wyjaśnioną na poprzednim rysunku, tj. przez połączenie śladu Z_s ze śladem Z_p prostych prostopadłych do α i przecinanie odpowiednich promieni światła krawędziami płaszczyzny α i płaszczyzn wyznaczonych odcinkami i promieniami światła.

Tym samym sposobem znaleziono cień wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę górnej podstawy graniastoslupa, gdyż znany jest rzut wysokości ostrosłupa.

Elementy nie wchodzące w konstrukcję zostały na rysunku pominięte (S_π , okrąg głębokości i ślady tłowe płaszczyzn).

ZADANIE II. Wykreślić cień ćwiartki koła na płaszczyznę prostopadłą do π .

Czwarta część koła została na rysunku 424 umieszczona na płaszczyźnie β prostopadłej do π . Kwadrat, którego bokami są promienie AO i OB , zbud-



Rys. 424.

wano za pomocą śladu zbiegu $Z_1 = S_\pi$ boków OB i AD , niewłaściwego śladu zbiegu boków OA i BD oraz punktu Z_2 na okręgu głębokości, który jest śladem zbiegu przekątnej. Promień OC na przekątnej OD odmierzone za pomocą śladu zbiegu Z_{AC} cięciwy AC prostopadłej do dwusiecznej kąta $\angle AOC$, opierając się na uwagach podanych w paragrafie poprzednim (rys. 419). Obraz łuku ACB okręgu narysowano korzystając jedynie ze stycznych w punktach A , C i B (oczywiście styczna c w punkcie C jest równoległa do cięciwy AB , a więc ma z nią wspólny ślad zbiegu Z_2).

W celu nakreślenia cienia na płaszczyznę α przechodzącą przez środek okręgu i prostopadłą do promienia OA wyznaczono cienie punktów A i C oraz cienie stycznych a , b i c .

ĆWICZENIA.

1. Narysować rzut środkowy sześcianu, którego jedna ściana znajduje się na płaszczyźnie α prostopadłej do rzutni i znaleźć cień odcinka łączącego obrany punkt na α z wierzchołkiem nie leżącym na α .

2. Znaleźć cień okręgu na płaszczyznę równoległą.

3. Narysować cień kuli na daną płaszczyznę α .

Wsk.: Przeciąć kulę płaszczyzną prostopadłą do promieni światła i znaleźć cień na płaszczyźnie α .

§ 42. Anaglify

Z definicji rzutu środkowego punktu wynika, że każdy punkt A' na płaszczyźnie π jest rzutem wszystkich punktów prostej AS przechodzącej przez środek rzutów. Toteż we wszystkich zadaniach rozdziału VII, gdy chodziło o jednoznaczne określenie położenia punktu, zakładaliśmy, że znajduje się on na pewnej prostej nie przechodzącej przez środek rzutów lub na płaszczyźnie nie zawierającej S . Wiadomo, że prosta i płaszczyzna są jednoznacznie określone swoimi śladami. Jeśli więc poprowadzimy przez rzut A' promień AS , to na przecięciu z prostą, wzgl. płaszczyzną, otrzymamy właściwe położenie punktu A .

Obserwując więc perspektywę F' pewnej figury F jednym okiem umieszczonym w środku rzutów S , nie możemy odpowiedzieć na pytanie, który z punktów promienia AS jest właściwym położeniem punktu A figury F . Nie można więc twierdzić, że np. jakiś czworokąt widoczny na rysunku przedstawia kwadrat, a nie trapez. Jeśli w pewnych wypadkach to robimy, to działa tu wiele czynników ubocznych, jak doświadczenie, porównanie z sąsiednimi dobrze znanymi skądinąd figurami itp.

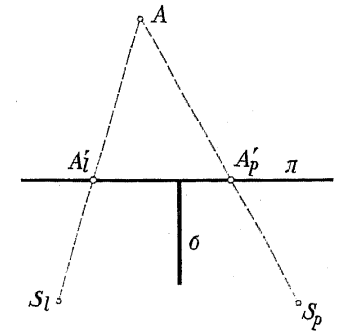
Można się jednak uniezależnić od tych czynników, patrząc na dwa odpowiednio dobrane rzuty środkowe.

Wyobraźmy sobie, że na płaszczyźnie π wykonane zostały dwa rzuty środkowe tej samej figury: rzut F_l , gdy środkiem rzutów jest punkt S_l , i rzut F_p , gdy środkiem rzutów jest punkt S_p . Każdy więc punkt posiada dwa rzuty A_l i A_p , przy czym $A_l \neq A_p$, jeśli A nie znajduje się na płaszczyźnie π ani na prostej łączącej S_l i S_p .

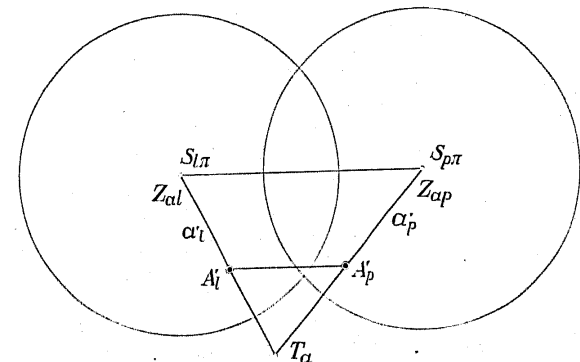
Ustawmy teraz tak płaszczyznę π , aby oko lewe znajdowało się w punkcie S_l , a prawe w punkcie S_p . Jeśli do oka lewego dochodzić będzie jedynie promień światła z punktu A_l , a do prawego tylko z A_p (co można zrobić np. przez ustawienie przegrody σ), to nie będzie można ich odróżnić od promieni światła wychodzących z punktu A i skierowanych do S_l , wzgl. S_p . Doznamy wtedy wrażenia, jak gdyby nie istniała płaszczyzna π (ani przegroda σ) z punktami A_l i A_p , lecz jeden tylko punkt A wysyłający promienie światła do S_l i S_p .

Ten sam skutek, co przez umieszczenie przegrody σ , uzyskać można przez różnobarwne rysunki. Jeśliby rzut F_l wykonany był tuszem czerwonym, a F_p niebieskim, to wówczas patrząc przez okulary o lewym szkiełku niebieskim, a prawym czerwonym, widzieć będziemy lewym okiem tylko F_l , a prawym tylko F_p (przez czerwone szkiełko przechodzą tylko czerwone promienie, przez niebieskie tylko niebieskie, zatem F_l widoczne będzie lewym okiem jako czarne, F_p prawym jako czarne).

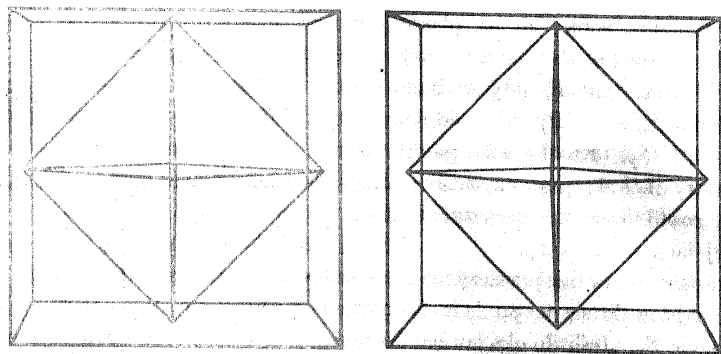
Sposób wykonania takich rysunków — nazywamy je *anaglifami* — jest, na podstawie naszych wiadomości, bardzo prosty.



Rys. 425.



Rys. 426.



Rys. 427.

Założmy, że płaszczyzna rzutów π jest równoległa do prostej $S_l S_p$, tzn. że głębokości tłowe są równe. Odległość obu środków rzutów powinna być równa odległości źrenic, tzn. 6–7 cm.

Niech a będzie prostą prostopadłą do rzutni π . Ponieważ ślad tłowy T_a znajduje się na π , więc jego rzut jest zawsze w tym samym punkcie bez względu na położenie środka rzutów. Ślady zbiegu jednak będą różne, gdyż $Z_{al} = S_{l\pi}$, a $Z_{ap} = S_{p\pi}$ (rys. 426). Mając rzuty a_l i a_p prostej a oraz np. rzut A_l , znajdujemy A_p opierając się na tym, że $A_l A_p \parallel S_{l\pi} S_{p\pi}$.

Aby to udowodnić, zauważmy, że proste $A_l A_p$ oraz $S_l S_p$ leżą w płaszczyźnie przechodzącej przez S_l , S_p i punkt A . Ponieważ pierwsza znajduje się na rzutni π , a druga jest do niej równoległa, nie mogą więc mieć wspólnego punktu właściwego. Ze związku $A_l A_p \parallel S_l S_p$ wynika $A_l A_p \parallel S_{l\pi} S_{p\pi}$, gdyż $S_{l\pi}$ i $S_{p\pi}$ są rzutami prostokątnymi środków S_l i S_p .

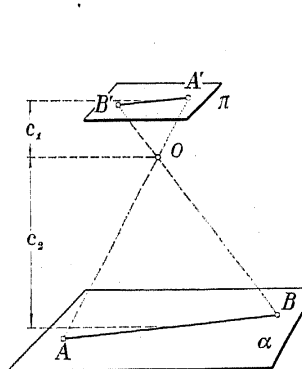
Opierając się na tych uwagach wykonano na rys. 427 rzuty sześciangu o podstawie α prostopadłej do π a równoległej do $S_l S_p$ oraz ośmiościanu, którego wierzchołkami są środki ścian sześciangu.

Ślad zbiegu płaszczyzny α będzie dla obu rzutów wspólny, ponieważ $S_l S_p \parallel \alpha$. Konstrukcje wystarczy przeprowadzić dla jednego rzutu, a drugi wykonać opierając się na poprzednim rysunku.

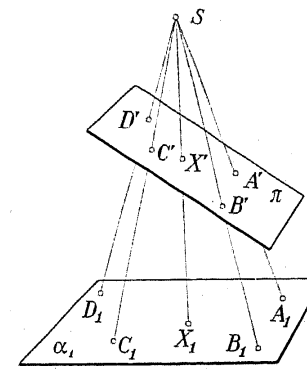
§ 43. Fotogrametria

Za pomocą rzutu perspektywicznego można w pewnych przypadkach otrzymać plan.

Założmy mianowicie, że mamy fotografię terenu płaskiego. Jeśli w chwili dokonywania zdjęcia klisza π (błona) była równoległa do płaszczyzny terenu α ,



Rys. 428.



Rys. 429.

to — jak łatwo zauważyć — fotografia różni się jedynie skalą od terenu, a więc jest planem. Istotnie, obraz $A'B'$ odcinka AB (rys. 428) spełnia równanie:

$$A'B' : AB = c_1 : c_2,$$

gdzie c_1 jest odległością środka obiektywu O od kliszy, a c_2 odległością środka obiektywu od terenu.

Jeśli jednak płaszczyzny α i π nie są do siebie równoległe, to odcinki w terenie równoległe do siebie doznają tym większych skrótów na zdjęciu, im dalej są umieszczone od aparatu, tzn. im obrazy ich są bliżej tzw. horyzontu (śladu zbiegu płaszczyzny).

Okazuje się, że i w tym przypadku można za pomocą zdjęcia wykonać plan.

Przypuśćmy, że jesteśmy w posiadaniu planu α_1 , tzn. rysunku różniącego się tylko skalą od terenu oraz kliszy α' . Niech $A_1 B_1 C_1 D_1$ będzie planem pewnego czworokąta $ABCD$, a $A' B' C' D'$ jego obrazem na α' .

Przypuśćmy dalej, że udało się nam uzyskać takie wzajemne położenie obu płaszczyzn α i π (rys. 429), że proste $A_1 A'$, $B_1 B'$, $C_1 C'$ i $D_1 D'$ przechodzą przez pewien punkt S .

Wykażemy, że w takim położeniu prosta łącząca perspektywę X' punktu X w terenie i jego obraz X_1 na planie α_1 przechodzi również przez punkt S .

W tym celu zauważmy, że odpowiedniość pomiędzy układami płaskimi $[\alpha_1]$ i $[\pi]$, w której przypisane są sobie te punkty, które reprezentują ten sam punkt w terenie, jest przekształceniem rzutowym. Istotnie, związek $X' = f(X)$ pomiędzy punktami terenu i ich obrazami na kliszy jest (w chwili zdjęcia) kolineacją środkową. Podobnie związek $X = \varphi(X_1)$ między punktami terenu a ich odpowiednikami na planie jest również kolineacją środkową, ponieważ

można uzyskać plan przez równoległe do terenu ustawienie płaszczyzny α_1 . Z tego wynika, że przekształcenie $X' = f_\varphi(X_1) = F(X_1)$ jest rzutowe. Ponieważ każdy ruch w przestrzeni jest przekształceniem rzutowym (§ 23), więc też i w takim położeniu jak na rysunku 429 — które nie musi być identyczne z pierwotnym — mamy między $[\alpha_1]$ a $[\pi]$ przekształcenie rzutowe $X = F_1(X_1)$.

Z założeń naszych wynika, że $A' = F_1(A_1)$, $B' = F_1(B_1)$, $C' = F_1(C_1)$ i $D' = F_1(D_1)$. Te same jednak warunki spełnia kolineacja środkowa $X' = F_2(X_1)$ między $[\alpha_1]$ i $[\pi]$, dla której S jest środkiem kolineacji. Na mocy więc twierdzenia o jednoznaczności przekształceń rzutowych (§ 25), przekształcenie złożone $F_1(X_1)$ oraz przekształcenie bezpośrednie $F_2(X_1)$ są identyczne, tzn. punkty X' i X_1 leżą na prostej przechodzącej przez S .

Zachodzi jeszcze pytanie, czy istnieje takie ustawienie jak na rysunku 429. Można udowodnić, że jest ich nieskończenie wiele. Jednym z nich jest położenie płaszczyzny π w chwili zdjęcia, jeśli równocześnie płaszczyznę α_1 wyobrazimy sobie w położeniu równoległym do terenu, a wierzchołki czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ na promieniach SA , SB , SC i SD . Środkiem kolineacji będzie punkt O obiektywu.

Korzystamy z tego przy sporządzaniu planów na podstawie zdjęć fotograficznych ze samolotu.

Zaznaczone w terenie wierzchołki A , B , C , i D czworokąta przenosimy na płaszczyznę (w obranej skali), opierając się na pomiarach w terenie. Następnie ustawiamy kliszę i źródło światła jak na rysunku 429. Jeśli teraz na płaszczyźnie α_1 umieścimy papier światłoczuły, to po wywołaniu otrzymamy cień figur znajdujących się na π , który jest już żądanym planem.

W fotogrametrii opisana czynność nazywa się *prostowaniem zdjęć lotniczych*.