ROZDZIAŁ VI

AKSONOMETRIA

§ 35. Twierdzenie Pohlkego — Aksonometria ukośna

I. Załóżmy, że mamy dane trzy rzuty figury geometrycznej.

Jeśli jest ona bardzo prostej budowy i poza tym bardzo specjalnie położona względem rzutni, to najczęściej rzuty te nie stanowią wystarczającego obrazu, z którego można by było w łatwy sposób zorientować się w całości. Jeśli np. figura jest sześcianem o krawędziach równoległych do osi układu, to rzuty są kwadratami, które wprawdzie określają jednoznacznie figurę, ale są bardzo niedogodne przez to, że w każdym rzucie widoczna jest tylko jedna ściana.

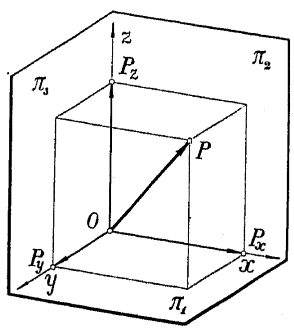
Aby okazać figurę w położeniu niespecjalnym, przyjmujemy oprócz trzech płaszczyzn układu π_1, π_2, π_3 jeszcze jedną rzutnię π nachyloną na ogół pod kątami ostrymi do osi x, y i z; następnie obieramy pewien kierunek nierównoległy do π i wykonujemy rzut równoległy danej figury na płaszczyznę π.

Mamy więc następujące zadanie:

Dane są rzuty pewnej figury na trzy płaszczyzny π_1, π_2 i π_3 parami do siebie prostopadłe; należy wykonać nowy rysunek, który byłby rzutem równoległym danej figury na czwartą płaszczyznę π.

Nowy rzut powinniśmy wykreślić opierając się na danych rzutach prostokątnych. W zadaniu idzie więc o metodę „przenoszenia figur" z jednego rysunku na drugi. Oczywiście wystarczy okazać jak przenosi się punkty.

Punkt P określony jest w odniesieniu do układu π_1, π_2, π_3 za pomocą trzech liczb x, y, z, zwanych jego współrzędnymi. Są to, jak wiadomo, miary trzech wektorów, które są składowymi wektora OP o początku w punkcie przecięcia płaszczyzn układu, a o końcu w punkcie P. Dla naszych celów dogodniej będzie za współrzędne uważać wprost te składowe. A więc współrzędne będą to trzy wektory (rys. 338) o wspólnym początku O, a o końcach w punktach P_x, P_y, i P_z, które są rzutami prostokątnymi punktu P na osie układu.



Rys. 338.

Z własności rzutu równoległego (§ 1) wynika, że mając rzuty trzech odcinków OP_x, OP_y i OP_z

możemy z łatwością narysować rzut dowolnego punktu Q, którego współrzędne są znane.

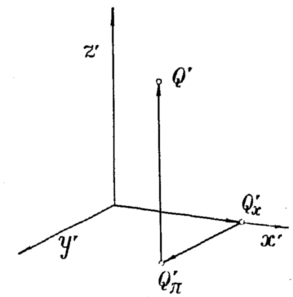
Istotnie, załóżmy:

$$OQ_x : OP_x = c_1, \quad OQ_y : OP_y = c_2, \quad OQ_z : OP_z = c_3.$$

Jak wiadomo, stosunek odcinków linii prostej jest równy stosunkowi rzutów (§ 1 własność 3), zatem:

$$O'Q'_x : O'P'_x = c_1, \quad O'Q'_y : O'P'_y = c_2, \quad O'Q'_z : O'P'_z = c_3.$$

Stąd otrzymujemy długości rzutów współrzędnych punktu Q. Posługując się w dalszym ciągu jedynie tym, że odcinki równe i równoległe mają rzuty równe i równoległe, kreślimy najpierw wektor $O'Q'_x = c_1 \cdot O'P'_x$, następnie wektor $Q'_x Q' = O'Q'_y = c_2 \cdot O'P'_y$ równy i równoległy do drugiej współrzędnej, a w końcu wektor $Q'Q = O'Q'_z = c_3 \cdot O'P'_z$, tzn równy i równoległy do trzeciej współrzędnej punktu Q.



Rys. 339.

Przypuśćmy teraz, że wszystkie trzy współrzędne punktu P wynoszą 1. Z dyskusji naszej wynika, że dowolny punkt o znanych współrzędnych będziemy mogli narysować, jeśli potrafimy nakreślić rzut równoległy trójki wektorów parami do siebie prostopadłych a równych sobie.

Okazuje się, że zmieniając położenie płaszczyzny π względem trzech płaszczyzn układu oraz kierunek rzutu otrzymać można na rzuty O', P'_x, P'_y i P'_z z pominięciem skali każdą czwórkę punktów z wyjątkiem czwórek leżących na prostej.

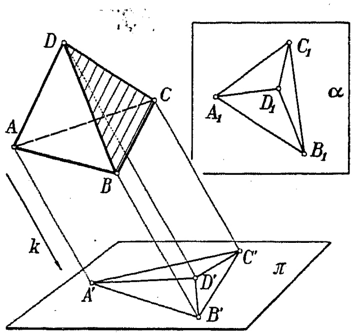
II. Weźmy dowolne cztery punkty A, B, C i D nie leżące na jednej płaszczyźnie (lub tworzące czworościan) oraz cztery punkty A_1, B_1, C_1, D_1 na płaszczyźnie α tak, by nie leżały na jednej prostej (rys. 340).

Udowodnimy następujące ***twierdzenie (Pohlkego):***

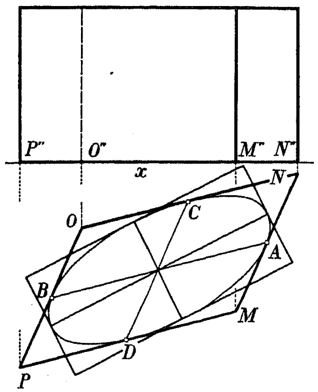
Można tak dobrać kierunek rzutu i tak ustawić płaszczyznę rzutów, że rzuty $A'B'C'D'$ czworościanu $ABCD$ tworzą figurę podobną do danej figury $A_1A_1C_1D_1$ (lub: *dany czworokąt zupełny $A_1B_1C_1D_1$ można z pominięciem skali uważać za rzut równoległy danego czworościanu $ABCD$*).

Dowód opiera się na lematach:

I. *Graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok, można przeciąć w kwadracie.*



Rys. 340.



Rys. 341.

Aby to udowodnić, wpiszmy w graniastosłup (rys. 341) walec eliptyczny tak, by środkowe równoległoboku były średnicami sprzężonymi podstawy. Na podstawie § 34 (rys. 331) można wskazać płaszczyznę α przecinającą walec w okręgu. Między elipsą podstawy a okręgiem przekroju zachodzi powinowactwo, w którym średnicom sprzężonym AB i CD odpowiadają średnice sprzężone okręgu A_1B_1 i C_1D_1, a równoległobokowi $MNOP$ opisanemu równoległobok $M_1N_1O_1P_1$ opisany na okręgu o środkowych A_1B_1 i C_1D_1. Ponieważ A_1B_1 i C_1D_1 jako średnice okręgu są sobie równe i prostopadłe, więc $M_1N_1O_1P_1$ jest kwadratem.

II. *Każdy graniastosłup trójścienny można przeciąć w trójkącie podobnym do z góry danego trójkąta.*

Niech $A_1B_1C_1$ będzie danym trójkątem, ABC podstawą danego graniastosłupa (rys. 342).

Zbudujmy na płaszczyźnie trójkąta $A_1B_1C_1$ taki kwadrat, by jednym wierzchołkiem był C_1, a jednym bokiem odcinek D_1L_1 na A_1B_1. Wyznaczmy następnie punkty D i L na podstawie graniastosłupa (na prostej AB) tak, by:

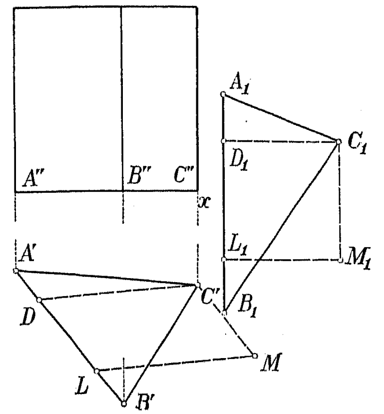
$$\frac{AD}{BD} = \frac{A_1D_1}{B_1D_1} \quad \text{oraz}$$

(x)

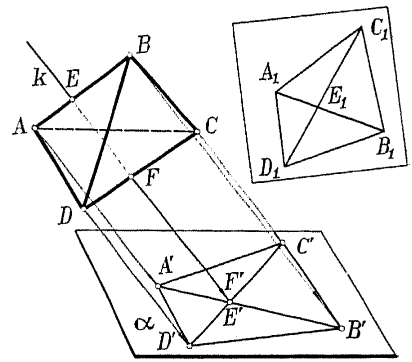
$$\frac{AL}{BL} = \frac{A_1L_1}{B_1L_1}.$$

W końcu wykreślmy $CM \parallel AB$ i $LM \parallel CD$.

Graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok $CMLD$, a krawędzie są równoległe do krawędzi graniastosłupa danego, przetnijmy płaszczyzną α



Rys. 342.



Rys. 343.

tak, by przekrój $C_2M_2L_2D_2$ był kwadratem. Równocześnie płaszczyzna α przecina graniastosłup ABC w trójkącie $A_2B_2C_2$.

Łatwo zauważyć, że figura $A_2D_2L_2B_2M_2C_2$ różni się jedynie skalą od figury $A_1D_1L_1B_1M_1C_1$. (Wynika to z proporcji (x) oraz z tego, że kąty $\sphericalangle(C_1D_1L_1)$ i $\sphericalangle(C_2D_2L_2)$ są równe). Płaszczyzna α przecina więc graniastosłup ABC w trójkącie podobnym do $A_1B_1C_1$.

Weźmy teraz czworościan $ABCD$ oraz czworokąt $A_1B_1C_1D_1$ na płaszczyźnie. Wyznaczmy na AB tak punkt E (rys. 343), aby

$$\frac{AE}{BE} = \frac{A_1E_1}{B_1E_1}$$

oraz tak punkt F na CD, aby

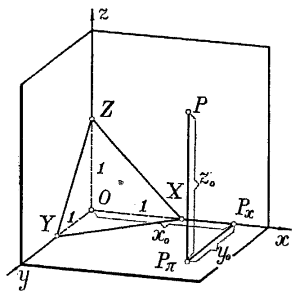
$$\frac{CF}{DF} = \frac{C_1F_1}{D_1F_1}.$$

Poprowadźmy przez wierzchołki czworościanu proste a, b, c i d równoległe do EF. Jeśli ograniczymy się jedynie do prostych a, b i c, to uważając je za krawędzie graniastosłupa trójściennego ABC, zastosujmy do niego lemat II.

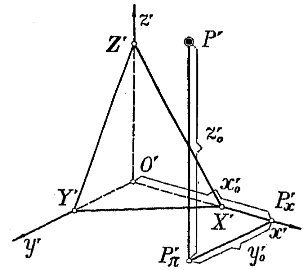
Istnieje więc taka płaszczyzna α, że punkty A', B', C' przebicia a, b i c z α są wierzchołkami trójkąta podobnego do $A_1B_1C_1$.

Łatwo zauważyć, że z powodu:

$$\frac{A'E'}{B'E'} = \frac{AE}{BE} = \frac{A_1E_1}{B_1E_1} \quad \text{i} \quad \frac{C'F'}{D'F'} = \frac{CF}{DF} = \frac{C_1E_1}{D_1E_1}$$



Rys. 344.



Rys. 345.

oraz $E' = F'$ czworokąt $A'B'C'D'$ jest podobny do czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ (D' i E' oznaczają punkty przebicia d i EF z α). EF jest więc żądanym kierunkiem rzutu, α — płaszczyzną rzutu.

Twierdzenie Pohlkego zostało więc udowodnione.

III. Weźmy na osiach układu prostokątnego x, y, z trzy punkty: X [1, 0, 0], Y [0, 1, 0], Z [0, 0, 1] oraz początek układu O (rys. 344).

Według twierdzenia Pohlkego, dowolnie przyjęte cztery punkty O', X', Y', Z' (rys. 345) można — z pominięciem skali — uważać za rzuty równoległe punktów O, X, Y i Z.

Opierając się na tym możemy uzupełniać ten rzut: prosta $O'X'$ będzie rzutem osi x układu, $O'Y'$ rzutem osi y, $O'Z'$ — osi z.

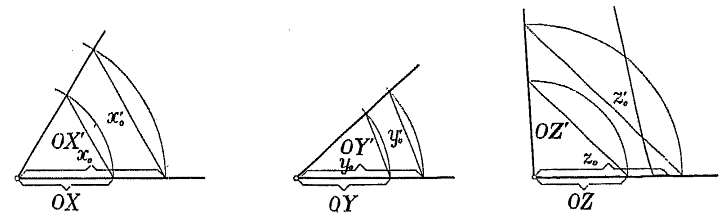
Jeśli poza tym przyjmiemy w układzie prostokątnym punkt P o współrzędnych x_0, y_0, z_0, to opierając się na własności 2. i 3. rzutu równoległego będziemy mogli ze stosunku

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{O'X'}{OX}$$

obliczyć długość rzutu x'_0 odcinka x_0. Otrzymamy rzut P'_x punktu P_x. Odkładając następnie y'_0 obliczone ze stosunku $y'_0 : y_0 = O'Y' : OY$ na prostej równoległej do y' od P'_x i w końcu z'_0 spełniające warunek $z'_0 : z_0 = O'Z' : OZ$ od końca P'_π odcinka y'_0, a równolegle do rzutu z' osi z, otrzymamy rzut P' punktu P.

Tak więc rzut równoległy punktu dostaniemy odmierzając odpowiednio skrócone jego współrzędne na osiach x', y' i z' (lub równoległych do nich).

Otrzymaliśmy zatem pewną metodę kreślenia rzutu równoległego (a dokładniej: rysunku różniącego się skalą) posługującą się współrzędnymi punktów, tzw. *metodę aksonometryczną*. Używamy jej wtedy, gdy znamy oczywiście współrzędne wierzchołków figury geometrycznej, więc np. wtedy, gdy dane są rzuty Monge'a figury.



Rys. 346.

Jedyną niedogodnością tej metody jest konieczność skracania (wzgl. wydłużania) współrzędnych np. x w takim stosunku, jak zmienił się odcinek OX.

Aby to wykonać geometrycznie, można zbudować trójkąt równoramienny o ramionach OX i podstawie $O'X'$. Jeśli na ramionach (lub na ich przedłużeniach) odmierzymy od wierzchołka odcinek x_0, to łącząc końce otrzymamy odcinek x'_0, gdyż $x'_0 : x_0 = O'X' : OX$ (rys. 346). Podobnie znajdujemy y_0 i z_0.

Wobec dowolności czworokąta $OXYZ$ możemy w następujący sposób streścić metodę aksonometryczną kreślenia rzutu równoległego:

1° Obieramy dowolnie rzuty x', y' i z' (przez O').

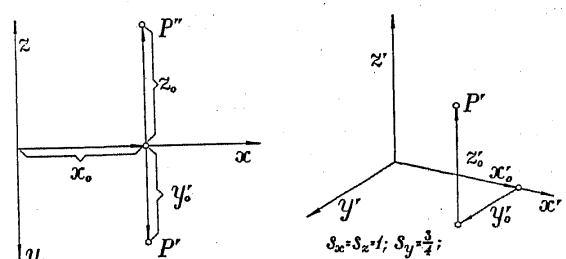
2° Przyjmujemy dowolnie stosunki skrótów

$$s_x = \frac{O'X'}{OX}, \quad s_y = \frac{O'Y'}{OY} \quad \text{i} \quad s_z = \frac{O'Z'}{OZ}.$$

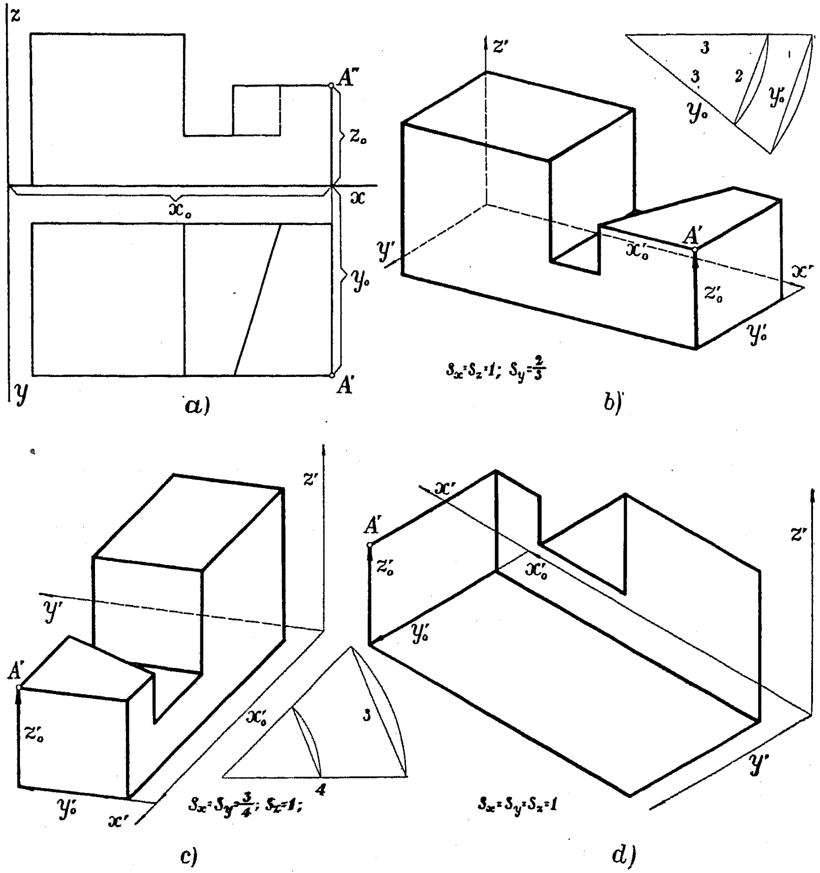
Najczęściej w praktyce przyjmujemy na osiach y i z stosunek 1 (tzn. $O'Y' = OY$, $O'Z' = OZ$), a na osi x ułamek właściwy, np. 3/4 lub 1/2, albo również 1.

Przejście z rzutów Monge'a do rzutu ukośnego wyjaśnia rysunek 347.

Ponieważ rzuty x', y' i z' osi układu prostokątnego i skrócenia s_x, s_y i s_z można na podstawie twierdzenia Pohlkego przyjąć dowolnie, więc zmieniając



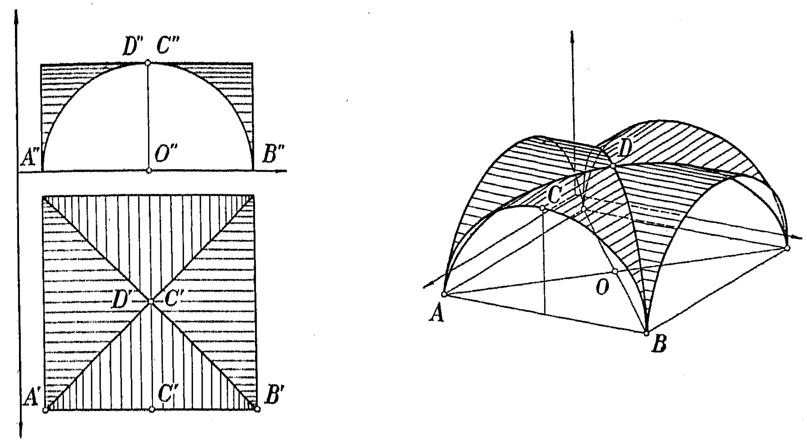
Rys. 347.



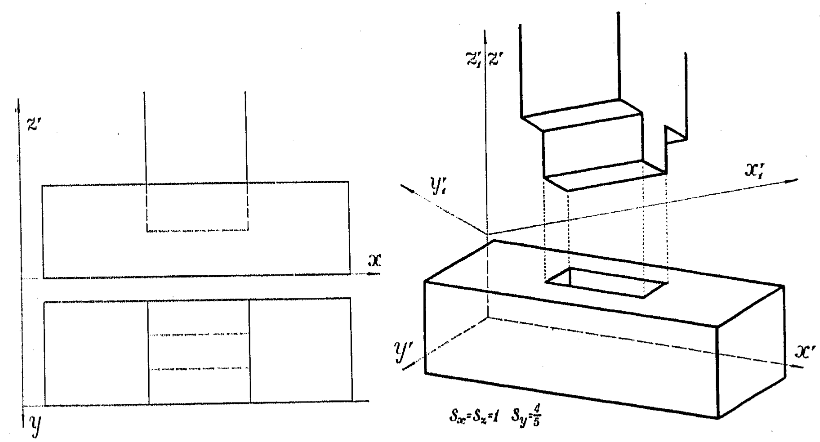
Rys. 348.

je można otrzymać różne rzuty tej samej figury. Rysunki 348 b, c i d przedstawiają rzuty równoległe figury, przyjętej w rzutach Monge'a (rys. 348 a), przy trzech układach x, y i z (widoki z trzech stanowisk). Na każdym rysunku podano sposób wyznaczenia rzutu jednego wierzchołka.

W ten sposób wykonano rzut równoległy sklepienia krzyżowego (rys. 349) (rzuty okręgów i elips uzyskano przez wykreślenie rzutów osi) oraz połączenia drzewnego (rys. 350), przy czym w drugim przypadku dla lepszego okazania względnego ustawienia części wykreślono właściwie dwa rysunki: dla części dolnej przyjęto układ osi x', y', z', dla górnej układ x'_1, y'_1 i z'_1, gdzie $z_1 = z'$, a x'_1 i y'_1 są symetryczne do x' i y' względem poziomej prostej. Skróty na x'_1, y'_1 i z'_1 są takie jak na x', y' i z'.



Rys. 349.



Rys. 350.

ĆWICZENIA.

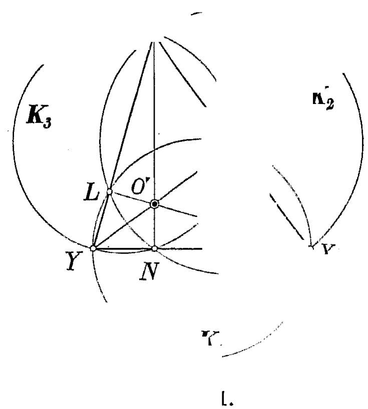
1. Nakreślić rzut ukośny a) walca obrotowego, b) stożka obrotowego, przeciętych płaszczyzną ukośną.
2. Nakreślić rzut sklepienia klasztornego podanego w przykładzie XV § 34.

§ 36. Aksonometria prost…

I. Weźmy punkty X, Y i Z na płaszcz… by tworzyły trójkąt ostrokątny (rys. 351).

Udowodnimy, że *istnieje punkt* O (poza p… *który połączony z punktami* X, Y *i* Z *wyznacza trzy proste* x, … *prostopadłe.*

Aby znaleźć O, zauważmy, że musi on leżeć na powie… XY, … prosta OX ma być prosto-



jes… …cy XY.

Z wa… OZ wynika, że O leży na k… …cy XZ.

Śla… …cinają się w punkcie L na … $XL \perp YZ$ i z uwagi na to, … …na prosta prostopadła z X …

Ponieważ środki kul $\boldsymbol{K}_1$ i $\boldsymbol{K}_2$ … rzutni, więc linia przenikania kul jest okręgiem $\boldsymbol{K}$ o średnicy XL położonym w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rysunku.

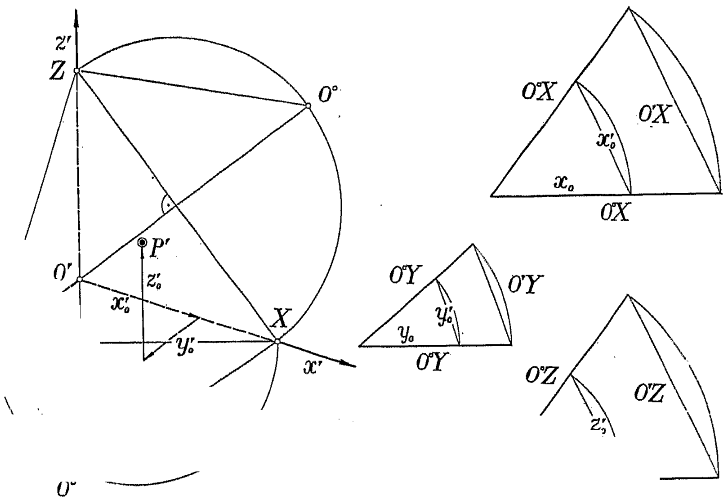
Jeśli uwzględnimy jeszcze trzeci warunek, że ∢ …) $= 90°$, to zabaczymy, że punkt O powinien znajdować się na trzeciej k… …rednicy YZ. …nie … więc punktu O będzie wykazane, jeśli udowodni… …ile … punkt wspólny; jest to jednak oczywiste, gdyż ok… …s wnątrz $\boldsymbol{K}_3$ (kąt ∢ (YXZ) jest bowiem $< 90°$), a …

Ponieważ rzutem prostokątnym okręgu $\boldsymbol{K}$ jest śre… na XL; analogicznie O' leży na YM oraz ZN, przy czym … (Mamy więc „przestrzenny" dowód na to, że wysokości w… się w jednym punkcie).

Niech proste OX, OY i OZ będą osiami układu … $O'X$, $O'Y$ i $O'Z$ są rzutami prostokątnymi osi x, y … analogi… ogólny rzut równoległy można by wykreślać rzut prostokątny, gdyby z… były skrócenia na osiach układu x, y i z.

W tym celu znajdźmy istotne długości odcinków OX, OY i OZ.

Wykonajmy kład trójkąta XOY obracając go dokoła jego przeciwprostokątnej XY. Wierzchołek kąta prostego O obracać się będzie w płaszczyźnie prostopadłej do XY. Ponieważ kąt ∢ $(XO°Y)$ jest prosty, więc $O°$ leży na



Rys. 35…

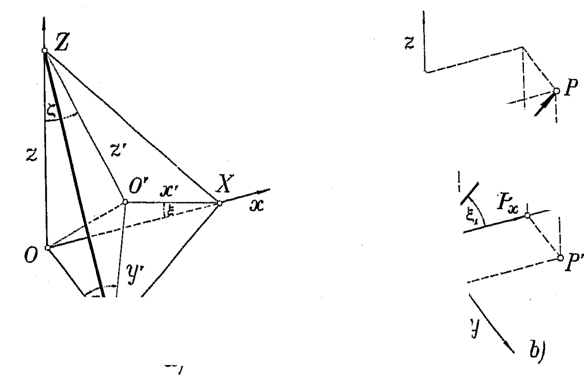
…cięciu okręgu o średnicy XY … 52). Istotną długością OX …ęc $O°X$.

…ójkąta XOZ obracając go dokoła boku XZ.

…ia $s_x = \dfrac{O'X}{O°X}$, $s_y = \dfrac{O'Y}{O°Y}$ i $s_z = \dfrac{O'Z}{O°Z}$ możemy jak w § poprze-

…nim kres… …legły.

II. Oznacz… … ζ kąty, jakie płaszczyzna π tworzy z osiami x, y i z układu prost… 353 a).



Z definicji skróceń s_x, s_y i s_z wynika, że:

$$s_x = \cos\xi, \quad s_y - \cos\eta, \quad s_z = \cos\zeta.$$

Okazuje się, że istnieje związek pomiędzy skróceniami s_x, s_y i s_z. Aby go wyprowadzić, weźmy pod uwagę dowolnie skierowany wektor OP długości 1 (rys. 353 b). Jeśli ξ_1, η_1 i ζ_1 są kątami zawartymi między odcinkiem OP a osiami układu, to rzuty OP na x, y i z są odpowiednio równe $OP_x = \cos\xi_1$, $OP_y = \cos\eta_1$ i $OP_z = \cos\zeta_1$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika jednak, że:

$$OP^2_x + OP^2_y + OP^2_z = OP'^2 + P'P^2 = OP^2 = 1,$$

wobec czego:

$$\cos^2\xi_1 + \cos^2\eta_1 + \cos^2\zeta_1 = 1. \tag{1}$$

Biorąc za OP kierunek OO' prostopadły do płaszczyzny π (rys. 353 a) mamy $\xi_1 = 90° - \xi$, $\eta_1 = 90° - \eta$, $\zeta_1 = 90 - \zeta$, a więc:

$$\sin^2\xi + \sin^2\eta + \sin^2\zeta = 1 \tag{1'}$$

lub kładąc $\sin^2\xi = 1 - \cos^2\xi$, $\sin^2\eta = 1 - \cos^2\eta$, $\sin^2\zeta = 1 - \cos^2\zeta$,

$$\cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta = 2 \tag{2}$$

tzn.

$$s^2_x + s^2_y + s^2_z = 2. \tag{2'}$$

Ponieważ poza tym $|s_x| < 1$, $|s_y| < 1$ i $|s_z| < 1$, więc z równania (2) wynika, że *suma kwadratów dwóch skróceń musi być większa lub równa jedności.*

Dwie z liczb s_x, s_y, s_z można więc przyjąć dowolnie, ale tak, by żadna nie była bezwzględnie większa od jedności, a natomiast suma ich kwadratów była większa od jedności. Najczęściej jednak nie podaje się z góry dwóch skróceń, lecz trzy liczby l, m i n do nich proporcjonalne, tzn. takie, że:

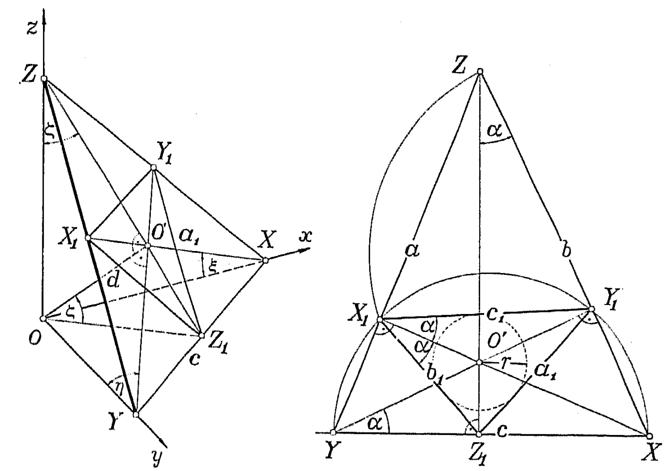
$$l = k\cdot s_x, \quad m = k\cdot s_y, \quad n = k\cdot s_z;$$

oczywiście musi być wówczas:

$$l^2 + m^2 + n^2 = k^2(s^2_x + s^2_y + s^2_z) = 2k^2.$$

Ponieważ poza tym:

$$\left\{\begin{aligned} l &= k\cdot s_x < k \\ m &= k\cdot s_y < k \\ n &= k\cdot s_z < k \end{aligned}\right\} \text{ więc } \left\{\begin{aligned} m^2 + n^2 &> k^2 \\ l^2 + n^2 &> k^2 \\ l^2 + m^2 &> k^2 \end{aligned}\right\} \text{ i } \left\{\begin{aligned} m^2 + n^2 &> l^2 \\ l^2 + n^2 &> m^2 \\ l^2 + m^2 &> n^2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$



Rys. 354.

Okażemy, że mając liczby l, m i n spełniające ostatnie nierówności, będziemy mogli narysować tak rzuty x', y' i z' osi układu, że skrócenia będą proporcjonalne do l, m i n.

Weźmy w tym celu pod uwagę trójkąt $X_1Y_1Z_1$, którego wierzchołkami są spodki wysokości trójkąta XYZ (rys. 354 a i b).

Jest widoczne, że:

$$\sphericalangle(Z_1ZX) = \sphericalangle(XYY_1) = \alpha$$

(ramiona są odpowiednio do siebie prostopadłe). Ponieważ istnieje okrąg przechodzący przez punkty X, Z_1, X_1 i Z, więc:

$$\sphericalangle(XX_1Z_1) = \sphericalangle(XZZ_1) = \alpha.$$

Podobnie:

$$\sphericalangle(XX_1Y_1) = \sphericalangle(XYY_1) = \alpha;$$

widzimy więc, że:

$$\sphericalangle(XX_1Z_1) = \sphericalangle(XX_1Y_1),$$

tzn. że wysokość XX_1 trójkąta XYZ jest symetralną kąta w trójkącie $X_1Y_1Z_1$. Analogicznie pozostałe wysokości trójkąta XYZ są symetralnymi kątów trójkąta $X_1Y_1Z_1$; punkt ich przecięcia O' jest więc środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $X_1Y_1Z_1$.

Zauważmy, że trójkąty $O'X_1Y_1$ i $O'XY$ są podobne. Oznaczając boki trójkąta XYZ przez a, b i c, a boki trójkąta $X_1Y_1Z_1$ przez a_1, b_1, c_1 oraz promień okręgu wpisanego przez r, otrzymujemy proporcję:

$$c_1 : c = r : O'Z_1;$$

ale z rysunku a) widzimy, że $O'Z_1 = d \cdot \operatorname{tg} \zeta$, (gdzie $d = OO'$) i

$$c^2 = OX^2 + OY^2 = \frac{d^2}{\sin^2 \xi} + \frac{d^2}{\sin^2 \eta} = d^2 \cdot \frac{\sin^2 \eta + \sin^2 \xi}{\sin^2 \xi \cdot \sin^2 \eta},$$

co ze względu na równanie (1') daje:

$$c^2 = d^2 \cdot \frac{1 - \sin^2 \zeta}{\sin^2 \xi \cdot \sin^2 \eta} = d^2 \cdot \frac{\cos^2 \zeta}{\sin^2 \xi \cdot \sin^2 \eta}.$$

Mamy więc:

$$c_1 = r \cdot \frac{c}{O'Z_1} = r \cdot \frac{d \cdot \cos \zeta}{\sin \zeta \cdot \sin \eta \cdot d \cdot \operatorname{tg} \zeta} = \frac{r}{\sin \xi \cdot \sin \eta \cdot \sin \zeta} \cdot \cos^2 \zeta.$$

Podobnie:

$$a_1 = \frac{r}{\sin \xi \cdot \sin \eta \cdot \sin \zeta} \cdot \cos^2 \xi \quad \text{i} \quad b_1 = \frac{r}{\sin \xi \cdot \sin \eta \cdot \sin \zeta} \cdot \cos^2 \eta;$$

a więc:

$$a_1 : b_1 : c_1 = \cos^2 \xi \cdot \cos^2 \eta \cdot \cos^2 \zeta.$$

Ponieważ $l = k \cos \xi$, $m = k \cos \eta$ i $n = k.\ \cos \zeta$, więc:

$$a : b : c = l^2 : m^2 : n^2.$$

Jeśli zatem dane są liczby l, m i n spełniające trzy nierówności (3), to kreślimy najpierw trójkąt $X_1Y_1Z_1$, którego boki są proporcjonalne do liczb l^2, m^2 i n^2, a następnie symetralne jego kątów; *są one rzutami prostokątnymi* x', y', z' *osi* x, y *i* z *układu ortogonalnego*.

Wiadomo, że mając rzuty osi, można znaleźć skrócenia s_x, s_y i s_z. W naszym przypadku będą one proporcjonalne do l, m i n. Korzystając z tego otrzymujemy z łatwością czynnik proporcjonalności k spełniający równość:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2\,k^2$$

za pomocą konstrukcji opierającej się jedynie na twierdzeniu Pitagorasa (rys. 355).

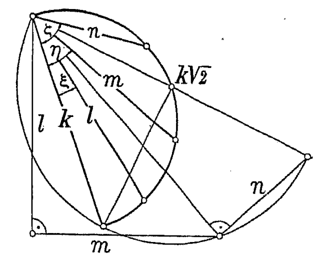
Zauważmy jeszcze, że z równań:

$$\frac{l}{k} = s_x = \cos \xi, \quad \frac{m}{k} = s_y = \cos \eta, \quad \frac{n}{k} = s_z = \cos \zeta$$

wynika, że kąty ξ, η i ζ, jakie osie x, y i z zawierają z płaszczyzną π, narysować można nie korzystając ze znajomości rzutów x', y' i z'.

Z tego wynika inny sposób konstruowania rzutów x', y' i z', gdy dane są liczby l, m i n.

Można bowiem znaleźć jak na rysunku 355 kąty ξ i η i obrać dowolnie punkty X i Y, w których osie x i y przebijają płaszczyznę rysunku (tzn. płaszczyznę π).



Rys. 355.

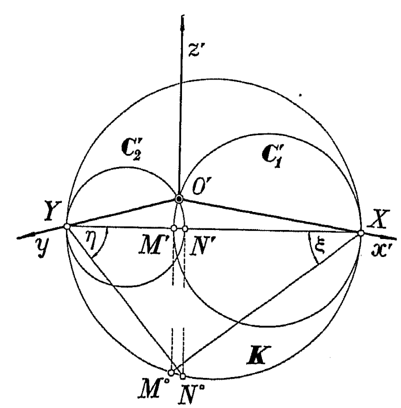
Aby znaleźć punkt O', zauważmy, że wszystkie proste przechodzące przez punkt X i nachylone do płaszczyzny rysunku pod kątem ξ są tworzącymi stożka obrotowego $\triangle_x$ o osi prostopadłej do π; podobnie wszystkie proste nachylone do π pod kątem η tworzą stożek obrotowy $\triangle_y$ o osi prostopadłej do π.

Punkt O będzie się znajdował oczywiście na stożku $\triangle_x$, $\triangle_y$ i kuli $\boldsymbol{K}$ o średnicy XY, ponieważ $x \perp y$. Znajdźmy linię przenikania $\boldsymbol{C}_1$ stożka $\triangle$ i kuli. Na podstawie § 34 (rys. 325) rzut $\boldsymbol{C}'_1$ krzywej $\boldsymbol{C}_1$ na płaszczyznę π jest okręgiem o środku na XY. Aby znaleźć średnicę tego okręgu, wykonajmy kład przecięcia stożka i kuli płaszczyzną symetrii figury złożonej ze stożka i kuli. Otrzymamy na przekrój stożka tworzącą XM nachyloną do XY pod kątem ξ i na przecięcie kuli okrąg $\boldsymbol{K}$. Za pomocą kładu tej tworzącej i okręgu otrzymujemy punkt wspólny M najpierw w kładzie M°, a następnie w rzucie M'. Oczywiście XM' będzie średnicą rzutu $\boldsymbol{C}_1$.

Podobnie znajdujemy rzut $\boldsymbol{C}'_2$ linii przecięcia $\boldsymbol{C}_2$ stożka $\triangle_y$ i kuli.

Punkt przecięcia obu rzutów jest rzutem O' początku układu.

Z założeń naszych wynika, że okręgi $\boldsymbol{C}_1$ i $\boldsymbol{C}_2$ przetną się. Istotnie z rysunku 356 wynika, że:



Rys. 356.

$$XM' + YN' = XM^\circ \cdot \cos\xi + YN^\circ \cdot \cos\eta = XY \cdot \cos^2\xi + XY \cdot \cos^2\eta =$$
$$= XY \cdot (\cos^2\xi + \cos^2\eta),$$

co na podstawie nierówności:

$$1 < \cos^2\xi + \cos^2\eta < 2,$$

daje:

$$1 \cdot XY < XM' + YN' < 2 \cdot XY,$$

z czego oczywiście wynika, że C_1 i C_2 mają dwa punkty wspólne.

ĆWICZENIA.

1. Nakreślić rzut prostokątny sześcianu, przyjmując a) $l:m:n = 4:5:6$, b) $l:m:n = 1:1:1$.
2. Nakreślić rzut prostokątny kuli z równikiem, jednym równoleżnikiem i jednym południkiem, przyjmując $\xi = 45°$, a $\eta = 30°$.
3. Nakreślić rzut prostokątny części półkuli znajdującej się nad kwadratem wpisanym w równik, przyjmując $\xi = 45°$ i $\eta = 15°$.
4. Narysować zupełnie dowolnie rzut równoległy prostopadłościanu i znaleźć długości jego boków pod założeniem, że jest to rzut prostokątny.

(Przyjąć, że prosta na której leżą rzuty trzech krawędzi figury posiadające wspólny wierzchołek są rzutami prostokątnymi x, y i z osi układu).

ROZDZIAŁ VII.

PERSPEKTYWA

§ 37. Definicja rzutu środkowego

Weźmy pod uwagę płaszczyznę π i punkt S nie leżący na niej.

Niech P będzie dowolnym punktem różnym od S. Połączmy punkt P z punktem S i oznaczmy przez P' punkt przebicia płaszczyzny π (rys. 357).

Jeśli S był punktem niewłaściwym, to P' nazywaliśmy rzutem równoległym punktu P na płaszczyznę π. W szczególnym przypadku, gdy S był punktem niewłaściwym prostopadłym do π, tzn. niewłaściwym punktem na prostych prostopadłych do π, P' nazywaliśmy rzutem prostokątnym.

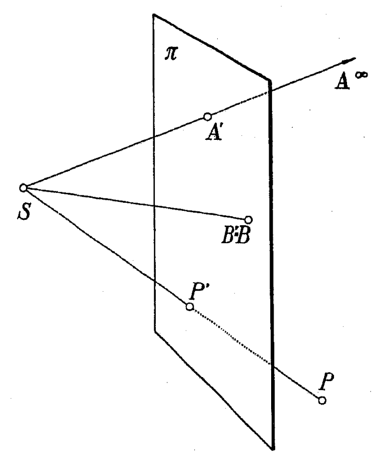
Obecnie zakładać będziemy, że S jest punktem właściwym.

Definicja. Punkt P', w którym prosta SP przebija płaszczyznę π nazywamy rzutem środkowym, centralnym lub perspektywą punktu P, albo jeszcze obrazem punktu P.

Płaszczyznę π, na której znajduje się obraz punktu P, nazywać będziemy *rzutnią, tłem* lub *płaszczyzną obrazu*, punkt S środkiem *rzutów* lub *okiem*. Wiadomo, że patrząc jednym okiem umieszczonym w punkcie S nie potrafilibyśmy odróżnić punktu P od punktu P' na płaszczyźnie π.

W dotychczasowych metodach rzutów, tzn. w rzutach prostokątnych i ukośnych, rzutami punktów niewłaściwych były punkty niewłaściwe. Istotnie, łącząc punkty niewłaściwe S^∞ i P^∞ otrzymujemy prostą niewłaściwą, która oczywiście płaszczyznę π przebija w punkcie niewłaściwym P'^∞.

W rzutach środkowych na ogół punkt niewłaściwy posiada rzut właściwy, jeśli bowiem prosta SA^∞ łącząca punkt A^∞ ze środkiem rzutów S nie jest równoległa do π, to rzut A' będzie punktem właściwym (rys. 357). Jedynie w przypadku, gdy prosta łącząca środek rzutów z punktem P będzie równoległa do π, perspektywa P'



Rys. 357.