

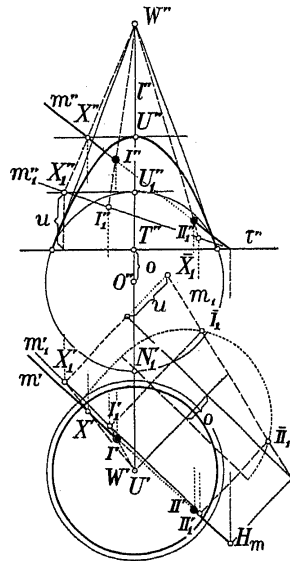
Przyjmując jeszcze płaszczyznę τ okręgu S za płaszczyznę kolineacji, a wierzchołek paraboloidy U i jeden z punktów kuli na osi l za parę odpowiadających sobie elementów, otrzymamy kolineację, która paraboloidę przeprowadza w kulę Φ_0 , gdyż jest ona jedyną kwadryką, która przechodzi przez U_1 i styka się ze stożkiem wzdłuż S (punkt niewłaściwy N^∞ paraboloidy przejdzie na drugi punkt N_1 kuli na osi l , ponieważ płaszczyzna $\pi = \tau$ jest wspólną płaszczyzną biegunową punktu W względem obu powierzchni i czwórka harmoniczna $(WTUN^\infty)$ musi przejść na czwórkę harmoniczną (WTU_1N_1)).

Przenieśmy teraz punkt X prostej m na płaszczyźnie stycznej w U do paraboloidy do punktu X_1 na płaszczyźnie stycznej w U_1 do kuli (oczywiście W , X i X_1 leżą na prostej). Łącząc X_1 z punktem H_m prostej m na płaszczyźnie kolineacji otrzymujemy prostą m_1 , którą następnie przebijamy kulę jak w zadaniu II. Uzyskane punkty A_1 i B_1 przenosimy do prostej m , osiągając w ten sposób cel zadania.

Gdyby paraboloida była eliptyczna, to podobnie jak w zadaniu poprzednim, należałoby ją najpierw zamienić na paraboloidę obrotową za pomocą powinowactwa prostokątnego o kierunku osi elipsy leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do punktu niewłaściwego powierzchni.

ĆWICZENIA.

1. Czy hiperboloidę jednopowłokową eliptyczną można przeciąć w okręgu?
2. Co tworzy zbiór wszystkich prostych równoległych do płaszczyzny α i przecinających proste skośne a i b nierównoległe do α ?
3. Narysować płaszczyzny styczne do kuli a : 1) równoległe do danej płaszczyzny, 2) przechodzące przez daną prostą.
4. Narysować płaszczyznę biegunową punktu względem kuli.
5. Znaleźć punkty przecięcia hiperboloidy dwupowłokowej prostą.
6. Znaleźć przekrój 1) paraboloidy eliptycznej, 2) hiperboloidy dwupowłokowej daną płaszczyzną.
7. Nakreślić płaszczyzny styczne do elipsoidy a przechodzące przez daną prostą.
8. Narysować płaszczyznę styczną do paraboloidy eliptycznej a prostopadłą do danej prostej.
9. Narysować prostą sprzężoną z daną prostą względem 1) kuli, 2) elipsoidy trójosiowej, 3) paraboloidy eliptycznej i 4) hiperboloidy dwupowłokowej.
10. Przyjąć trzy odcinki AB , CD i EF połowiące się i parami do siebie prostopadłe, ale tak, by tylko jeden był równoległy do π i znaleźć rzut poziomy elipsoidy, której osiami są dane odcinki.



Rys. 303.

ROZDZIAŁ V.

PRZENIKANIE POWIERZCHNI

§ 33. Powierzchnie obrotowe

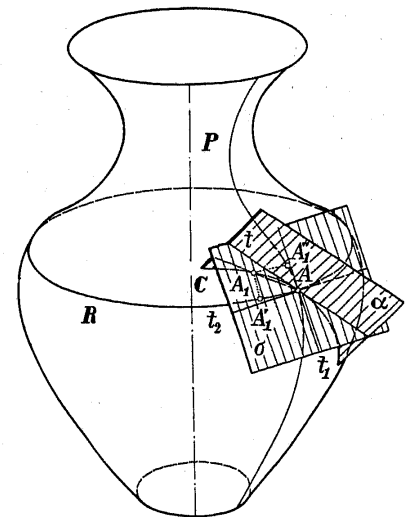
I. Weźmy pod uwagę pewną krzywą C oraz prostą l . Przez obrót C dookoła l powstaje pewna *powierzchnia obrotowa*.¹

Każdy przekrój powierzchni obrotowej (rys. 304) płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu l jest okręgiem lub składa się z wielu okręgów; nazywamy je *równoleżnikami* powierzchni. Równoleżnik o minimalnym promieniu nazywamy *okręgiem szyjnym*, równoleżnik o maksymalnym promieniu *równikiem*.

Przekrój powierzchni obrotowej płaszczyzną przechodzącą przez oś l nazywamy *południkiem* powierzchni. Każde dwa południki są równe (przystające), dają się bowiem nałożyć na siebie przez obrót.

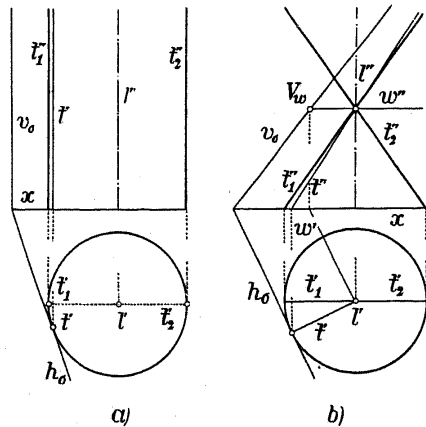
Łatwo zauważyć, że przez obrót południka dokoła osi powstaje ta sama powierzchnia.

Niech A będzie punktem powierzchni obrotowej nie leżącym na osi l , P i R południkiem i równoleżnikiem przechodzącym przez A . Założmy, że południk jest krzywą posiadającą w punkcie A styczną t_1 i weźmy pod uwagę płaszczyznę σ przechodzącą przez t_1 i styczną t_2 do równoleżnika zawierającego punkt A . Niech α będzie płaszczyzną przechodzącą przez A , ale różną od σ , C przekrojem powierzchni płaszczyzną α , a A_1 punktem na C . Łatwo udowodnić, że proste AA_1 dążą do krawędzi t płaszczyzny α i σ , gdy A_1 dąży do A . (Można by badać granice siecznych AA_1'' , wzgl. AA_1' , gdzie A''_1 , wzgl. A'_1 są punktami przecięcia P , wzgl. R i równoleżnika, wzgl. po-



Rys. 304.

¹ Oczywiście z wyjątkiem przypadku, gdy C jest okręgiem, a l prostą przechodzącą przez jego środek i prostopadłą do płaszczyzny okręgu.



Rys. 305.

łudnika przechodzącego przez A_1 .) Płaszczyzna σ jest więc zgodnie z definicją (§ 31) płaszczyzną styczną do powierzchni w punkcie A .

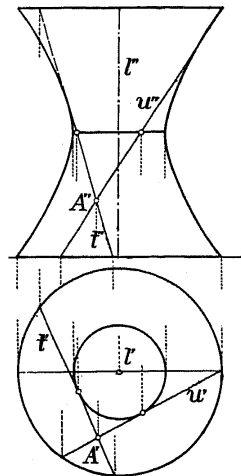
Jeśli w punkcie W przebiecia powierzchni osią l południki posiadają styczne, to oczywiście muszą one ze względu na symetrię być prostopadłe do l . Powierzchnia będzie miała wówczas w punkcie W płaszczyznę styczną prostopadłą do l . Jeśli w punkcie W południk posiada dwie styczne (symetryczne), to zbiór tych wszystkich stycznych jest stożkiem. W nazywamy wtedy *punktem stożkowym*.

Przykład I: Przez obrót prostej t dokoła osi l równoległej do t powstaje walec obrotowy (rys. 305 a). Równoleżnikami są okręgi o równych promieniach, południkami pary prostych równoległych. Jeśli oś jest prostopadła do rzutni poziomej, to płaszczyzny styczne są również prostopadłe do niej i ślady poziome są styczne do równoleżnika leżącego na π_1 .

Przykład II: Przez obrót prostej t przecinającej l w punkcie właściwym powstaje stożek obrotowy. Południkami są pary przecinających się tworzących; punkt przecięcia t i l jest wierzchołkiem. Płaszczyzna σ styczna w punkcie A przechodzi przez styczną s do równoleżnika i tworzącą t (rys. 305 b).

Przykład III: Obracając dokoła prostej l prostą t skośną, otrzymamy, jak wiadomo (§ 31), hiperboloidę jednopowłokową obrotową (rys. 306).

Południkami są hiperbole, dla których l jest osią urojoną. Przez obrót punktu prostej t najbliższego osi powstaje okrąg szyjny; na nim znajdują się wierzchołki południków. Jeśli oś jest prostopadła do π_1 , to rzuty poziome tworzących t są styczne do rzutu okręgu szyjnego. Biorąc pod uwagę ślad



Rys. 306.

poziomy hiperboloidy, tzn. równoleżnik leżący na π_1 , możemy nakreślić rzut pionowy tworzącej t przenosząc punkt śladu na x , a punkt styczności z okręgiem szyjnym na jego rzut pionowy (który jest odcinkiem łączącym wierzchołki południka znajdującego się w płaszczyźnie równoległej do π_2).

Tu dla narysowania płaszczyzny stycznej do powierzchni w punkcie A nie jest konieczne kreślenie południka zawierającego A . Jeśli rzut poziomy punktu A jest dany, to można znaleźć obie tworzące t i u zawierające A i przeprowadzić przez nie płaszczyznę styczną σ .

Przykład IV: Przez obrót okręgu K dokoła średnicy powstaje kula (rys. 307 a). Jeśli oś obrotu nie jest średnicą, ale leży w płaszczyźnie okręgu, to powierzchnia uzyskana przez obrót nazywa się *torusem* lub *powierzchnią pierścieniową*.

Zależnie od wzajemnego położenia osi l i okręgu istnieją trzy rodzaje torusów:

1) Gdy oś nie ma punktów wspólnych z okręgiem K , to wówczas torus posiada w każdym punkcie płaszczyznę styczną i ma kształt pierścienia (rys. 307 b).

2) Gdy l jest prostą styczną do K , to wówczas torus posiada jeden wierzchołek (rys. 307 c) i może być porównany do kuli o zlepionych biegunach.

3) Gdy l przecina okrąg w dwóch punktach T i W , to wtedy torus posiada dwa wierzchołki (rys. 307 d) i składa się z dwóch części: powłoki zewnętrznej kształtu jabłka i powłoki wewnętrznej postaci wrzeciona.

Jeśli oś jest prostopadła do π_1 , to rzutem powierzchni jest w przypadku 1) pierścień kołowy, w przypadku 2) i 3) koło.

Uwaga. Punkt powierzchni nazywa się punktem *regularnym*, jeśli istnieje w P płaszczyzna styczna do powierzchni, a więc jeśli wszystkie proste styczne do przekrojów płaskich powierzchni przechodzących przez P tworzą płaszczyznę.

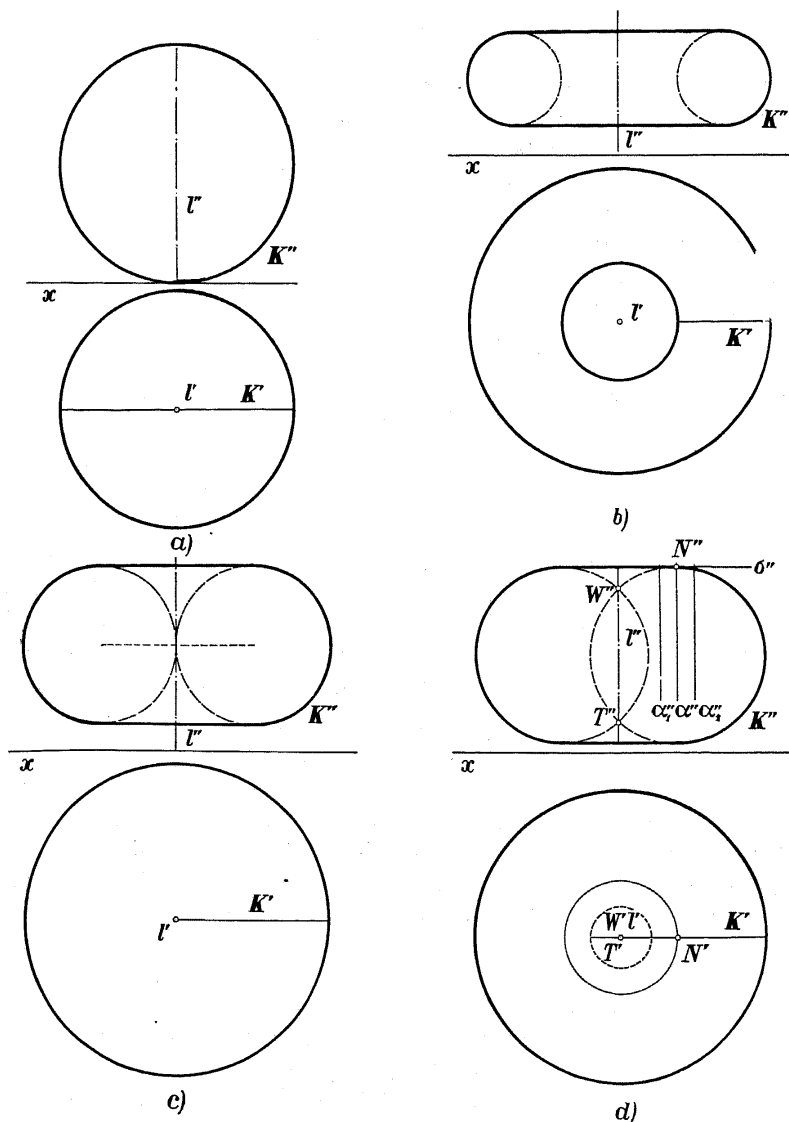
Prostą styczną do krzywej leżącej na powierzchni nazywamy *prostą styczną do powierzchni*.

Zauważmy, że w przypadku 1) każdy punkt torusa jest punktem regularnym, w przypadku 2) powierzchnia posiada jeden punkt nieregularny, w którym istnieje tylko jedna prosta styczna do powierzchni, w przypadku 3) istnieją dwa punkty, w których proste styczne tworzą stożki obrotowe.

Punkty regularne powierzchni dzielimy na trzy rodzaje.

Weźmy w tym celu pod uwagę w punkcie P prostą normalną n do powierzchni, tzn. prostopadłą do płaszczyzny stycznej w P . Krzywe przecięcia powierzchni płaszczyznami przechodzącymi przez n nazywamy *przekrojami normalnymi*.

a) Jeśli wszystkie środki krzywizn przekrojów normalnych istnieją i znaj-



Rys. 307.

dują się po jednej stronie płaszczyzny stycznej, to punkt P nazywa się *elip-tycznym* punktem powierzchni. W przypadku szczególnym, gdy środki krzywizn schodzą się w jednym punkcie, punkt P nazywamy *kołowym*.

Każdy punkt elipsoidy, paraboloidy eliptycznej i hiperboloidy dwupowłokowej jest punktem eliptycznym. Każdy punkt kuli jest punktem kołowym.

b) Jeśli wszystkie istniejące środki krzywizn przekrojów normalnych znajdują się po jednej stronie płaszczyzny stycznej, a co najmniej jeden przekrój normalny posiada środek krzywizny niewłaściwy, to punkt nazywamy *parabolicznym*.

Każdy punkt walca i każdy punkt stożka z wyjątkiem wierzchołka (który nie jest punktem regularnym) jest punktem parabolicznym.

c) W przypadku, gdy część środków krzywizn przekrojów normalnych znajduje się po jednej stronie płaszczyzny stycznej, a część po drugiej, punkt nazywa się *hiperbolicznym*.

Każdy punkt hiperboloidy jednopowłokowej jest punktem hiperbolicznym, gdyż płaszczyzna styczna przechodzi przez dwie tworzące, pozostawiając po obu stronach części powierzchni o wklęsłych, wzgl. wypukłych przekrojach normalnych.

Łatwo zauważyć, że każdy punkt części torusa powstałej przez obrót zewnętrznego półokręgu bez końców jest punktem eliptycznym, a każdy punkt części powstałej przez obrót wewnętrznego półokręgu bez końców punktem hiperbolicznym. Wynika to z tego, że w pierwszym przypadku powierzchnia znajduje się po jednej stronie płaszczyzny stycznej i każdy przekrój normalny posiada właściwy środek krzywizny, w drugim z tego, że południk posiada środek krzywizny w środku okręgu K , a równoleżnik na osi obrotu l , tzn. po drugiej stronie płaszczyzny stycznej.

Można wykazać, że punkty N (rys. 307 d) najwyższego i najniższego równoleżnika torusa są punktami parabolicznymi. Zauważmy w tym celu, że płaszczyzna styczna w takim punkcie jest prostopadła do osi obrotu powierzchni (σ na rys. 307 d). Ponieważ torus znajduje się po jednej stronie płaszczyzny, więc punkt nie jest hiperbolicznym punktem powierzchni. Udowodnimy, że płaszczyzna α przechodząca przez normalną i styczną do równoleżnika w punkcie N przecina torus w krzywej, która w N posiada niewłaściwy środek krzywizny.

Istotnie, weźmy dwie płaszczyzny α_1 i α_2 równoległe do α po obu stronach α w odległościach ε . Przekroje torusa płaszczyznami α_1 i α_2 posiadają w punktach okręgu K przechodzącego przez N środki krzywizn po różnych stronach płaszczyzny σ , jeśli odległość ε jest dość mała. Ponieważ oddalają się one nieograniczenie od σ , gdy ε dąży do zera, więc na podstawie ciągłości, która w przypadku torusa jest oczywista, środek krzywizny przekroju płaszczyzną α jest niewłaściwy.

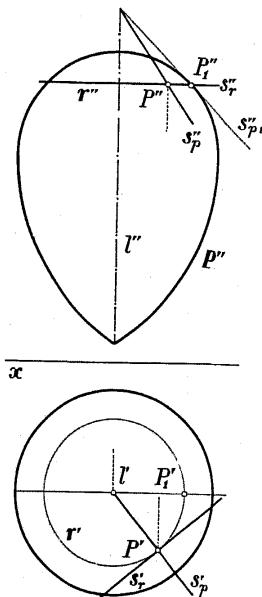
II. Przez każdy punkt powierzchni obrotowej nie leżący na osi przechodzi jeden południk i jeden równoleżnik.

Jeśli chcemy w punkcie regularnym P nie należącym do osi wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni, to wystarczy wykreślić styczną s_r do równoleżnika oraz styczną s_p do południka.

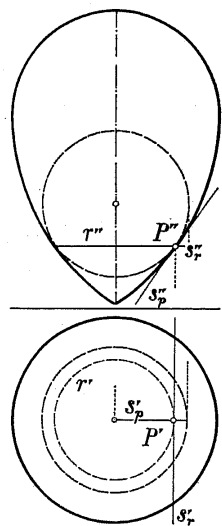
Gdy oś powierzchni jest prostopadła do rzutni poziomej, to rzutem poziomym równoleżnika r jest okrąg o tym samym promieniu, rzutem pionowym zaś odcinek równoległy do x i równy średnicy; rzut poziomy s'_r jest styczny do r' , rzut pionowy pokrywa się z r'' (rys. 308).

Styczną s_p najdogodniej jest wykreślić, gdy punkt znajduje się na południku p równoległym do rzutni pionowej. Wtedy bowiem południk ten jest konturem na π_2 , s''_p jest więc prostą styczną do P'' ; s'_p pokrywa się z P' , tzn. jest prostą równoległą do x (lub punktem). Jeśli teraz obrócimy styczną s_p dookoła l razem z południkiem p , to zauważymy, że punkt przecięcia jej z osią nie zmienia się.

Z tego wynika następujący sposób wykreślania stycznej do południka w punkcie P : obracamy punkt P dookoła l do południka konturowego w położenie P_1 , wyznaczamy styczną s_{p1} w P_1 do południka konturowego w rzucie pionowym i wracamy do pierwotnego położenia, tzn. łączymy punkt P z punktem przecięcia stycznej s_{p1} z l lub kreślimy równoległą do l , jeśli $s_{p1} \parallel l$.



Rys. 308.



Rys. 309.

Płaszczyzna przechodząca przez s_r i s_p jest płaszczyzną styczną do powierzchni w punkcie P .

Weźmy pod uwagę dwie powierzchnie obrotowe o tej samej osi obrotu i o południkach stycznych do siebie w punkcie P .¹

Ponieważ odpowiednie styczne s_r i s_p w tym punkcie są wspólne, więc obie powierzchnie mają w punkcie P wspólną płaszczyznę styczną. Wówczas mówimy, że *powierzchnie stykają się ze sobą w punkcie P* .

W naszym przypadku (rys. 309) powierzchnie są do siebie styczne w każdym punkcie równoleżnika przechodzącego przez P .

Zależnie od położenia będziemy mówili, że *jedna powierzchnia jest wpisana, wzgl. opisana na drugiej*.

Znajdźmy teraz kontur powierzchni obrotowej, gdy oś nie jest równoległa do rzutni.

Przed wszystkim należy dokładnie określić, co rozumiemy przez kontur powierzchni. Niejednokrotnie wykreślaliśmy już kontury powierzchni np. walca, stożka, kwadryk o osiach równoległych do rzutni oraz kontury powierzchni obrotowych o osiach równoległych do rzutni; były to jednak przypadki, w których precyzowanie pojęcia konturu okazało się zbyteczne.

Weźmy np. rzut poziomy kuli. Pewne proste rzutujące, tzn. prostopadłe do rzutni mają po dwa punkty wspólne z kulą, inne po jednym, tzn. są stycznymi. Punktami styczności są punkty równika, stanowi on więc kontur przy rzutowaniu w kierunku prostopadłym do π_1 . Podobnie konturem przy rzutowaniu prostopadłym do π_2 jest południk równoległy do π_2 . Przyjmujemy więc następującą definicję:

Konturem powierzchni względem kierunku k nazywamy zbiór punktów, w których proste równoległe do k są styczne do powierzchni.

Rzut konturu w kierunku k nazywa się konturem rzuconym.

Kontur jest na ogół krzywą lub składa się z kilku krzywych, może jednak zawierać punkty odosobnione, np. do konturu torusa o jednym wierzchołku (rys. 307 c) względem kierunku osi należy wierzchołek, który jest punktem odosobnionym, gdyż w jego otoczeniu nie ma na powierzchni innych punktów o stycznych równoległych do osi.

Jeśli punkt P należący do konturu jest punktem regularnym, to płaszczyzna styczna do powierzchni w P jest równoległa do kierunku rzutu.

Chcąc zatem wykreślić kontur rzucony powierzchni obrotowej o osi nachylonej pod kątem ostrym do rzutni, winniśmy znaleźć takie punkty powierzchni, w których płaszczyzny styczne są prostopadłe do rzutni.

¹ Dwie krzywe są do siebie styczne w punkcie P , jeśli mają wspólną styczną w tym punkcie.

W tym celu ustawmy rzutnię pionową równoległą do osi powierzchni i obierzmy pewien równoleżnik r (rys. 310).

Płaszczyzny styczne do powierzchni w punktach równoleżnika r obwładają pewien stożek lub walec o osi l . Należy spośród nich wybrać taką, która jest prostopadła do rzutni poziomej. Aby wybór ułatwić, wpiszmy kulę styczną do powierzchni wzdłuż równoleżnika r .

Ponieważ płaszczyzny styczne do obu powierzchni w punktach równoleżnika r są wspólne, można więc poszukiwać pionowych płaszczyzn stycznych do kuli w punktach okręgu r . Ponieważ wszystkie punkty kuli, w których płaszczyzny styczne są pionowe, znajdują się na jej równiku R , więc szukane punkty znajdują się na przecięciu okręgu r z równikiem R .

Zatem w celu wyznaczenia punktów konturu znajdujących się na obranym z góry równoleżniku kreślimy rzuty pionowe r'' i R'' , które są odcinkami i rzut poziomy równika R . Punkt przecięcia r'' i R'' przenosimy do rzutu poziomego R' i uzyskujemy w ten sposób dwa punkty szukanego konturu. Ponieważ płaszczyzny styczne w tych punktach do danej powierzchni i kuli pokrywają się, więc prosta styczna do rzutu poziomego równika w każdym z tych punktów jest równocześnie prostą styczną do konturu (lub: kontury obu powierzchni są do siebie styczne).

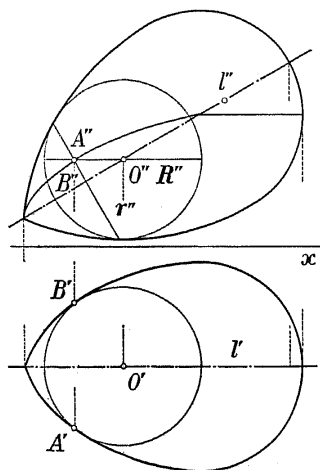
Punkty konturu leżące na l wyznaczamy kreśląc pionowe styczne do południka konturowego w rzucie pionowym.

Gdyby oś powierzchni nie była równoległa do żadnej rzutni, to kontury znalazłbyśmy jak na rysunku 310 za pomocą dwóch oddzielnych konstrukcji, przyjmując jeszcze dwie rzutnie równoległe do l .

Uwaga. Kontur rzucony nie musi pokrywać się z brzegiem rzutu powierzchni. Np. do brzegu rzutu pionowego torusa nie należą dwa niewidoczne półokręgi konturu na rysunku 307 b, c i d.

III. Znajdźmy granicę cienia własnego na powierzchni obrotowej. Na ogół granicą części oświetlonej i nieoświetlonej na powierzchni jest pewna krzywa. Nie trudno zauważyć, że punkty tej krzywej posiadają tę własność, że promienie światła przechodzące przez nie są styczne do powierzchni.

Z rozważań o konturze wynika, że mamy tu analogiczne zadanie. Wobec



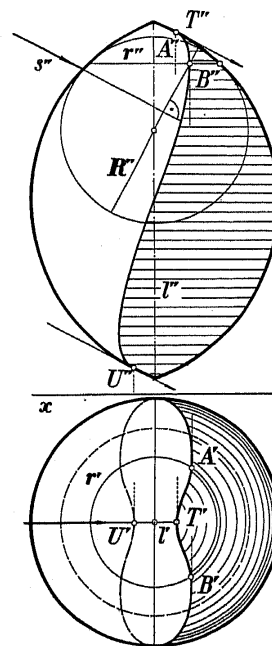
Rys. 310.

tego metoda postępowania będzie taka sama. Będziemy się starali na przyjętym z góry równoleżniku znaleźć punkty, w których promień światła będzie styczny do powierzchni. Warunek ten jest oczywiście równoważny postulatu, że płaszczyzna styczna w takim punkcie powinna być równoległa do kierunku światła.

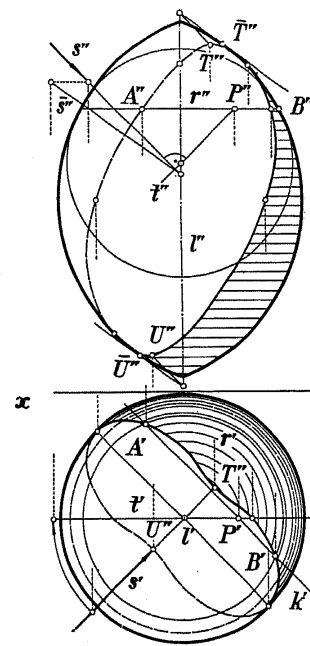
Podobnie jak na rys. 310, warunek styczności do danej powierzchni zastąpimy stycznością do kuli wpisanej, wzgl. opisanej na powierzchni wzdłuż danego równoleżnika.

Przyjmijmy najpierw kierunek światła równoległy do rzutni pionowej (rys. 311), a oś powierzchni prostopadłą do rzutni poziomej.

Obierzmy pewien równoleżnik r i wpiszmy kulę styczną do powierzchni wzdłuż r . Promienie styczne do kuli tworzą walec obrotowy, przy czym linia styczności walca z kulą jest okrąg R , leżący oczywiście w płaszczyźnie prostopadłej do osi walca, a więc w naszym położeniu — prostopadłej do rzutni pionowej; rzut pionowy R'' musi być zatem średnicą prostopadłą do pionowego rzutu s'' promienia światła. Punkty przecięcia A i B tej średnicy z rzutem pionowym równoleżnika r są szukanymi punktami cienia własnego na obranym równoleżniku. Do rzutu poziomego przenosimy je na okrąg r' .



Rys. 311.



Rys. 312

Konstrukcję należy powtórzyć wielokrotnie dla różnych równoleżników. Najwyższy punkt T i najniższy U cienia otrzymujemy kreśląc do południka znajdującego się w płaszczyźnie równoległej do promienia światła (a więc tu równoległego do rzutni pionowej) proste styczne o kierunku s .

Niech teraz promień światła ma kierunek nierównoległy do π_2 .

Zadanie rozwiązujemy zasadniczo jak poprzednie.

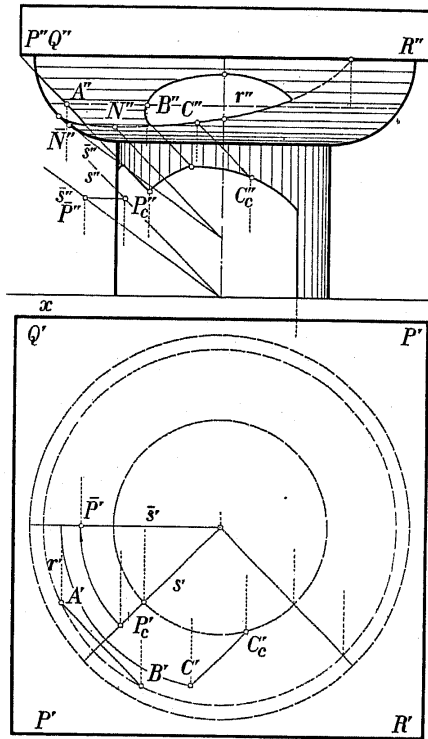
Wpisujemy kulę styczną wzdłuż wybranego równoleżnika r (rys. 312) i bierzemy pod uwagę granicę R cienia własnego kuli. Tu jednak wyznaczanie punktów przecięcia okręgów r i R nie jest tak bezpośrednie, gdyż rzut pionowy R'' nie jest odcinkiem.

Punkty A i B są to punkty wspólne r i płaszczyzny ϱ przechodzącej przez okrąg R . Ponieważ płaszczyzna ϱ jest prostopadła do s i przechodzi przez środek kuli, więc wykreślamy prostą czołową t leżącą na ϱ , a przechodzącą przez środek kuli (jak wiadomo: $t' // x$, $t'' \perp s''$). Punkt P przecięcia t z płaszczyzną równoleżnika r jest wprost widoczny w rzucie pionowym. Przenosimy go więc na t' i wykreślamy krawędź obu płaszczyzn oczywiście prostopadle do s' . Punkty przecięcia krawędzi z r' są szukanymi punktami granicy cienia własnego (na r).

Punkty na konturze w rzucie pionowym możemy wyznaczyć bezpośrednio, są to bowiem punkty styczności stycznych do południka konturowego równoległych do s'' , w nich bowiem płaszczyzn styczne są równoległe do kierunku światła i prostopadłe do rzutni pionowej.

Najniższy i najwyższy punkt cienia znajduje się na południku równoległym do kierunku światła. Aby je znaleźć, obróćmy ten południk do koła osi l o taki kąt, aby przyjął położenie równoległe do rzutni pionowej; w tym położeniu nakreślimy jak na rysunku poprzednim styczne równoległe do obróconego kierunku światła i powróćmy z punktami styczności do pierwotnego położenia.

W obu zadaniach można znaleźć



Rys. 313.

cień rzucony na inną figurę, kreśląc cienie znalezionych punktów granicy cienia własnego na tę figurę.

Na rysunku 313 przyjęto walec obrotowy, połowę torusa i płytkę o podstawie kwadratowej i nakreślono cień.

Wszystkie promienie światła przechodzące przez punkty boku PQ płytki leżą w płaszczyźnie prostopadłej do rzutni pionowej, cień więc tego boku na torus jest to przekrój torusa płaszczyzną. Przekrój ten jest pewną krzywą, której rzut pionowy jest odcinkiem.

Jeśli kierunek światła przyjmiemy tak, aby rzut poziomy zawierał kąt 45° z osią x , to jak łatwo zauważyć, istnieje będzie symetria figury i światła, a zatem i cienia względem pionowej płaszczyzny przechodzącej przez oś powierzchni i przekątną kwadratu.

Z tego wynika, że krawędź PR rzuci cień symetryczny do cienia krawędzi PQ . Korzystając z tego, znajdujemy cień drugiego boku płytki w poziomym rzucie przez symetryczne odbicie podług przekątnej; np. symetryczny do A punkt B kreślimy w rzucie poziomym i przenosimy do rzutu pionowego na równoleżnik przechodzący przez A .

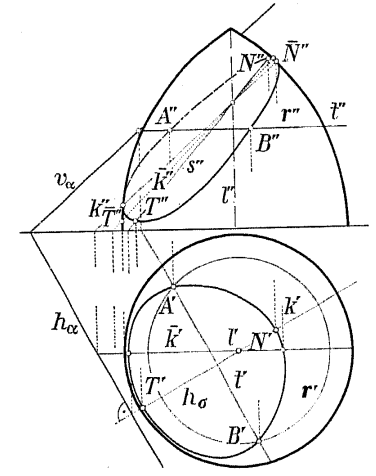
Granice cienia własnego na torusie znajdujemy jak na rys. 312. Na rys. 313 uwidoczniono jedynie konstrukcję najniższego punktu.

Cień rzucony płytki i torusa na walec został narysowany przez wyznaczenie kilku punktów przecięcia promieni światła z walcem jak na rys. 207 i 208.

IV. Przekrój powierzchni obrotowej płaszczyzną nieprostopadłą do osi obrotu znajdujemy również, przyjmując na powierzchni szereg równoleżników (rys. 314).

Płaszczyzna równoleżnika r przecina daną płaszczyznę α w prostej t , której rzut poziomy t' jest równoległy do poziomego śladu płaszczyzny α . Punkty A i B , w których t przecina rzut poziomy równoleżnika r , są szukanymi punktami przekroju; ich rzuty pionowe znajdują się oczywiście na r'' .

Najwyższy punkt N i najniższy punkt T przekroju znajdują się oczywiście na płaszczyźnie symetrii σ figury złożonej z powierzchni i płaszczyzny α . Przechodzi ona przez oś obrotu l i jest prostopadła do α . Powinniśmy krawędzią k płaszczyzn α i σ przebieć powierzchnię lub przeciąć



Rys. 314.

południk leżący w płaszczyźnie σ . Najdogodniej jest przez obrót dookoła l o kąt $\angle(\sigma, \pi_2)$ sprowadzić krawędź k i południk do położenia równoległego do rzutni pionowej; wtedy południk leżący na σ przejdzie na południk konturowy, a krawędź k na prostą $\bar{k}$. Punkty $\bar{N}$ i $\bar{T}$ należy oczywiście teraz obrócić w przeciwnym kierunku o ten sam kąt; N'' i T'' będą więc na tej samej wysokości co $\bar{N}''$ i $\bar{T}''$.

Można by jeszcze bardzo łatwo znaleźć punkty przekroju na konturach. Dla poziomego konturu wystarczy tylko zamiast dowolnego równoleżnika wziąć równik, wzgl. okrąg szyjny powierzchni. Dla pionowego konturu należy, jak łatwo widać, narysować krawędź płaszczyzny α i płaszczyzny południka konturowego i przeciąć nią kontur.

ĆWICZENIA.

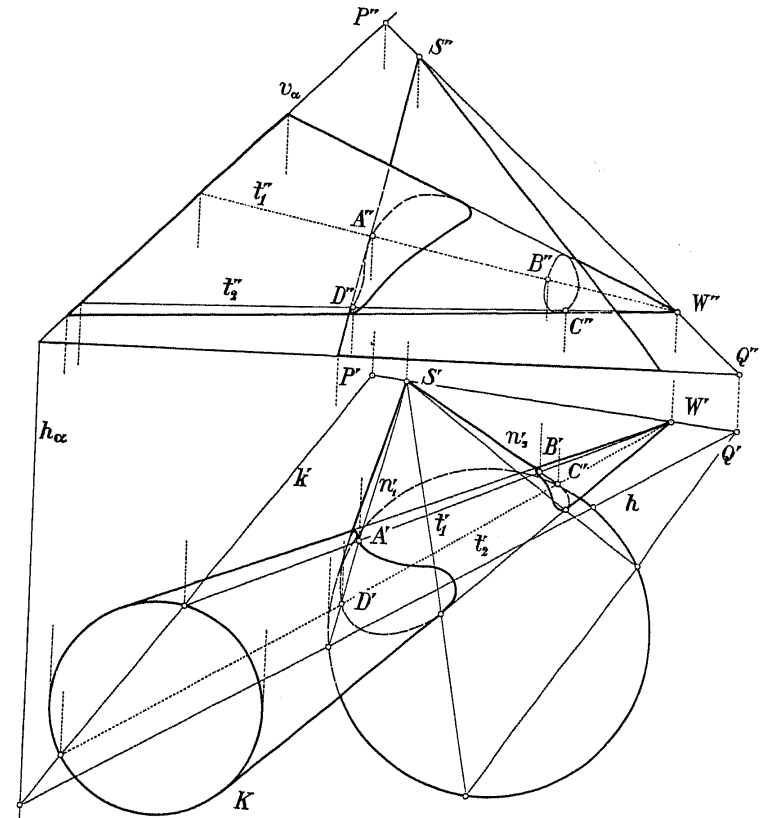
1. Czy torus posiada punkty kołowe?
2. Wykazać, że hiperboloida jednopowłokowa posiada same punkty hiperboliczne.
3. Krzywa płaska C obraca się dookoła prostej l , leżącej w tej samej płaszczyźnie. Wykazać, że przez obrót części wypukłej (ze względu na l) powstają punkty eliptyczne, części wklęsłej punkty hiperboliczne, a przez obrót punktów przegięcia punkty paraboliczne.
4. Narysować płaszczyznę styczną do: a) kuli, b) torusa, a równoległą do danej płaszczyzny.
5. Narysować płaszczyzny styczne do torusa, a przechodzące przez daną prostą m prostopadłą do l .
6. Narysować kontur na rzutni poziomej torusa o osi równoległej do rzutni pionowej i nachylonej pod kątem 45° do poziomej.
7. Znaleźć cień trójkąta na torus.
8. Narysować cień własny na elipsoidzie obrotowej.
9. Znaleźć przekrój torusa dowolną płaszczyzną.
10. Przyjąć w ćwic. 9 płaszczyznę dwukrotnie styczną do torusa (a nieprostopadłą do l) i udowodnić, że przekrój będzie się składał z dwóch okręgów.

§ 34. Przykłady przenikania powierzchni

I. Weźmy pod uwagę dwie powierzchnie Φ i Ψ .

Zbiór wszystkich punktów wspólnych w większości przypadków tworzy pewną krzywą lub zbiór krzywych. Są to najczęściej krzywe przestrzenne, tzn. takie, które nie znajdują się w jednej płaszczyźnie. Nazywają się *liniami przenikania*.

Nie będziemy zajmowali się systematycznie własnościami linii przenikania powierzchni należących do rozważanych typów (kwadryki, powierzchnie obrotowe), niektóre jednak własności będą potrzebne do wykreślenia rzutów linii przenikania. Ponieważ będą to na ogół krzywe różne od znanych nam



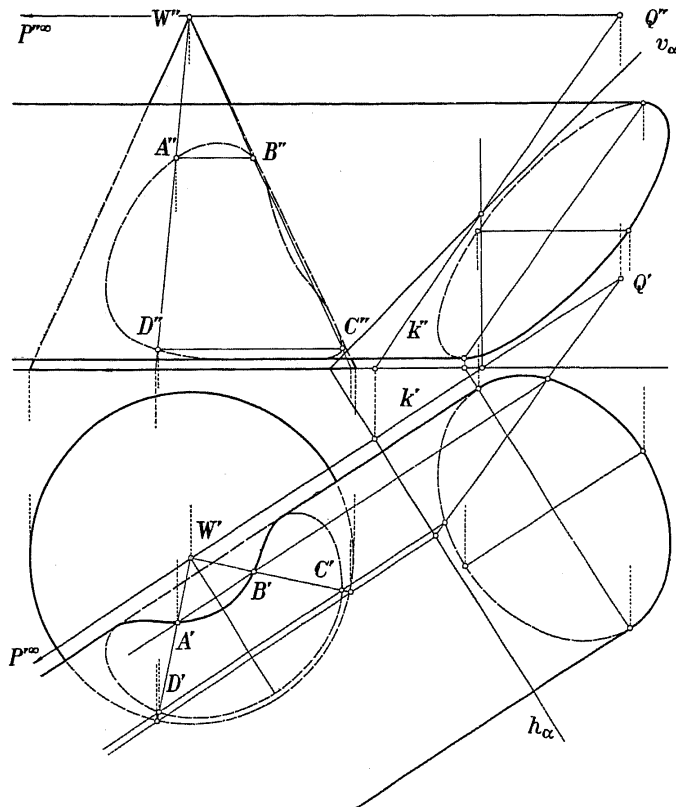
Rys. 315.

krzywych stopnia drugiego, więc rzuty ich będziemy mogli kreślić tylko w przybliżeniu wyznaczając pewną skończoną ilość punktów.

Nie istnieje ogólna metoda znajdowania punktów linii przenikania. Należy na przykładach poznać kilka z nich, a w przypadku konkretnym wziąć najłatwiejszą.

Przykład I. Aby znaleźć linię przenikania C dwóch stożków (rys. 315), dobrze będzie prowadzić płaszczyzny przez wierzchołki; takie bowiem płaszczyzny przecinają jeden stożek w tworzących t_1 i t_2 i drugi w tworzących n_1 i n_2 i oczywiście punkty $A = t_1n_1$, $B = t_1n_2$, $C = n_2t_2$ i $D = t_2n_1$ są punktami linii przenikania.

Dla uproszczenia konstrukcji prowadzimy prostą SW łączącą wierzchołki (por. przenikanie ostrosłupów, § 6) i znajdujemy punkty P i Q , w których ona przebija podstawy obu stożków. Jeśli płaszczyzna przechodzi przez prostą SW ,

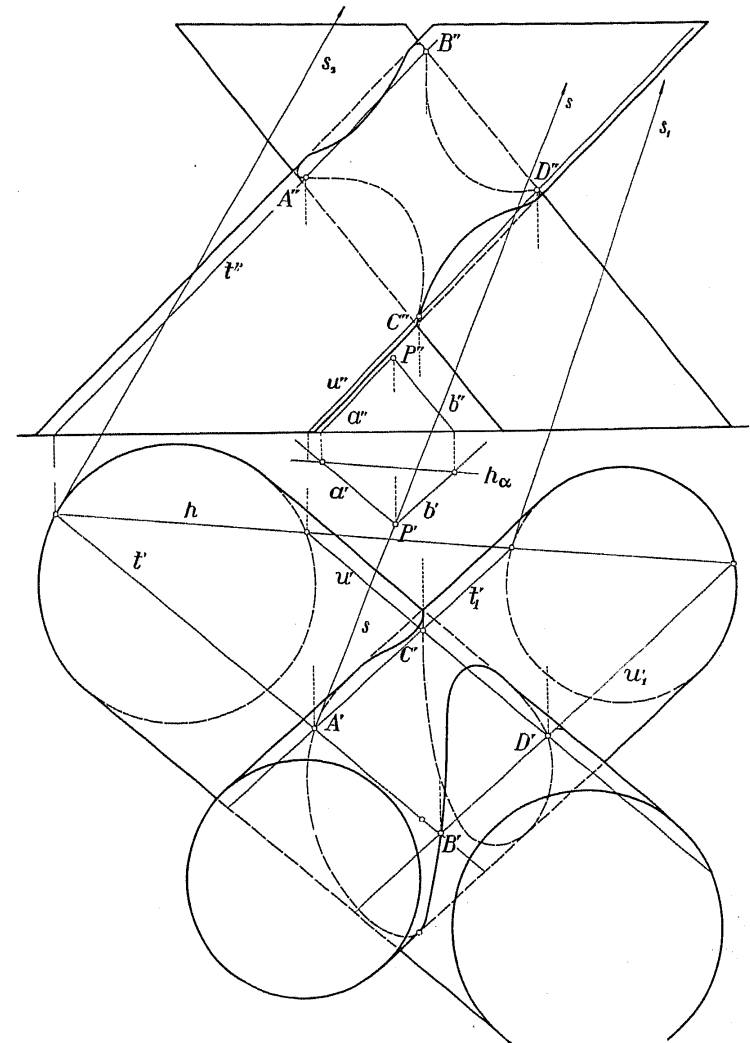


Rys. 316.

to przecina płaszczyzny podstaw w liniach k i h , przechodzących przez Q wzgl. P i mających punkt wspólny na krawędzi obu płaszczyzn. Wystarczy więc punkty przecięcia k wzgl. h z odpowiednimi podstawami połączyć z W wzgl. S , aby otrzymać tworzące t_1 i t_2 wzgl. n_1 i n_2 .

W celu dokładniejszego nakreślenia linii przenikania dobrze będzie znaleźć punkty jej na tworzących konturowych obu stożków. Wystarczy w tym celu zamiast dowolnej prostej h (k) przechodzącej przez punkt Q (P) narysować tę, która przechodzi przez punkt odpowiedniej tworzącej konturowej znajdujący się na podstawie. Na rysunku 315 wyznaczono w ten sposób punkty na tworzącej konturowej rzutu poziomego KW .

Przykład II. Dla walca i stożka konstrukcje nie ulegają istotnej zmianie, jeśli walec traktować będziemy jako stożek o wierzchołku niewłaściwym W^∞ (por. przenikanie ostrosłupa z graniastosłupem, § 6).



Rys. 317.

(Na rysunku 316 walec jest równoległy do podstawy stożka, a wobec tego jeszcze też punkt P jest niewłaściwy).

Przykład III. Gdy dane są dwa walce, to płaszczyzny przecinające je w tworzących są do siebie równoległe.

Aby znaleźć jedną z takich płaszczyzn, można by przez dowolny punkt P (rys. 317) nakreślić prostą a równoległą do jednego i prostą b równoległą do

drugiego walca (por. przenikanie dwóch graniastoslupów, § 6). Płaszczyzna $\alpha = (ab)$ i każda do niej równoległa przecina walce w tworzących.

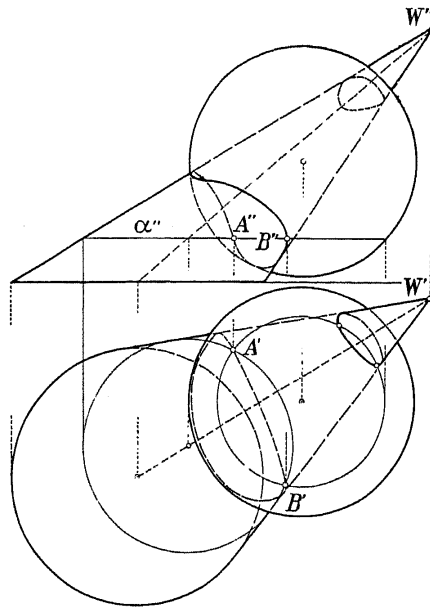
Okazuje się, że w każdym przypadku można znaleźć styczną do krzywej przenikania C . Jeśli punkt A jest punktem należącym do powierzchni Φ i do powierzchni Ψ , to weźmy pod uwagę płaszczyznę styczną w A do Φ i płaszczyznę styczną w A do powierzchni Ψ i oznaczmy przez s ich krawędź. Z definicji płaszczyzny stycznej do powierzchni wynika, że jeśli obie powierzchnie są w punkcie A regularne, to s jest prostą styczną do krzywej C w punkcie A .

Aby więc narysować styczną s do krzywej w obranym punkcie A , należy przeciąć obie płaszczyzny styczne w nim do powierzchni.

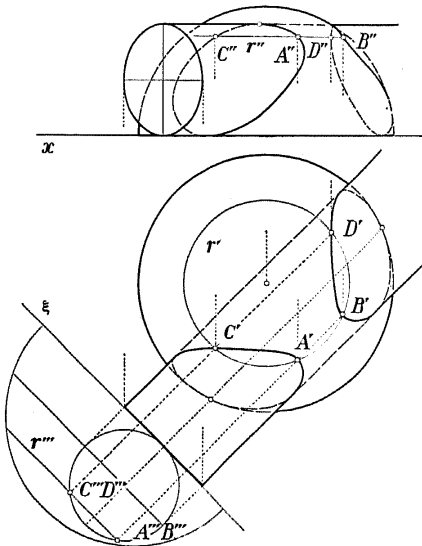
Bardzo łatwo wykonać to na rysunku 317. Wystarczy bowiem narysować ślady poziome płaszczyzn stycznych do walców wzdłuż tworzących, na których leży punkt A . Są to proste styczne do podstaw w odpowiednich punktach. Krawędź s otrzymamy łącząc punkt A z punktem przecięcia obu śladów s_1 i s_2 .

Na rysunkach 315 i 316 można było również znaleźć styczne do linii przenikania, wymagałoby to jednak wielu linii konstrukcyjnych.

Przykład IV. Znajdźmy przenikanie kuli ze stożkiem, którego podstawą jest okrąg na rzutni poziomej (rys. 318).



Rys. 318.



Rys. 319.

W tym przypadku dogodnie jest kreślić płaszczyzny równoległe do rzutni poziomej. Każda z nich przecina kulę w okręgu o środku na prostej łączącej bieguny, stożek zaś w okręgu o środku położonym na prostej łączącej wierzchołek ze środkiem podstawy.

Przykład V. Narysujmy jeszcze przenikanie kuli z walcem obrotowym o tworzących poziomych (rys. 319).

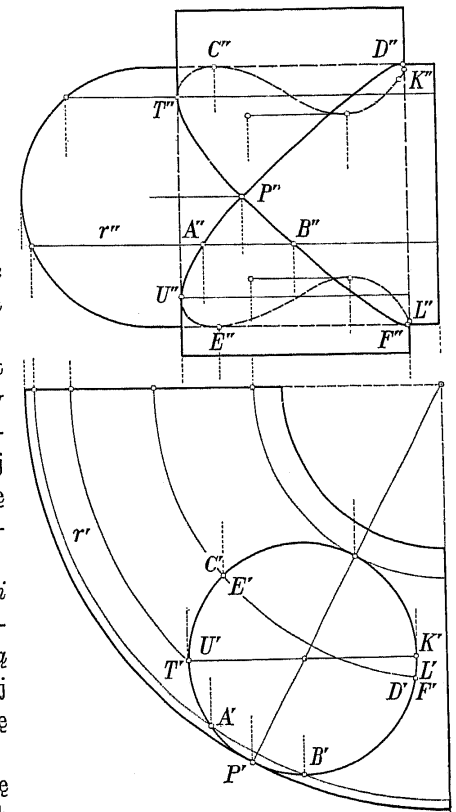
W tym zadaniu również jest wskazane przyjmować płaszczyzny poziome, przy czym należy korzystać z podstawy walca, wykreślonej w trzecim rzucie na płaszczyznę prostopadłą do walca, a nie z eliptycznego rzutu pionowego.

Przykład VI. Wykreślenie linii przenikania walca o osi prostopadłej do rzutni z dowolną powierzchnią jest ułatwione przez to, że rzut jej w kierunku osi walca znajduje się na podstawie walca.

Weźmy np. walec i powierzchnię pierścieniową o osiach pionowych (na rys. 320 wykreślono czwartą część torusa). Rzut poziomy linii przenikania jest oczywiście kołem podstawowym walca. Ponieważ każda tworząca walca przebija torus w dwóch punktach symetrycznych względem płaszczyzny równikowej powierzchni, więc szukana krzywa będzie posiadała rzut pionowy o poziomej osi symetrii. Poszczególne punkty (np. A) przenosimy do rzutu pionowego kreśląc równoleżniki (np. r) przez nie przechodzące. Na rysunku zaznaczono punkty: najwyższe C i D , najniższe E i F oraz punkty na konturze pionowym walca.

Przykład VII. Jeśli obie powierzchnie są obrotowe oraz osie ich przecinają się, to można zamiast płaszczyzn przyjmować kule o wspólnym środku w punkcie przecięcia osi.

Jeśli mamy np. znaleźć przenikanie walca obrotowego ze stożkiem obrotowym (rys. 321), określonym wierzchołkiem i kulą o środku O na osi walca,



Rys. 320.

to najprościej w tym przypadku jest przecinać obie powierzchnie kulami o środku O . Każda bowiem kula o środku na osi walca przecina walec w kołach r i r_1 prostopadłych do osi, a stożek w kołach s i s_1 również prostopadłych do osi stożka.

Jeśli osie obu powierzchni są równoległe do rzutni pionowej, to rzuty r'' i s'' są odcinkami i rzut pionowy punktu linii przenikania otrzymujemy na ich przecięciu. Jeśli tak nie jest, to należy przez jedną lub dwie zmiany układu (§ 19) doprowadzić do takiego położenia.

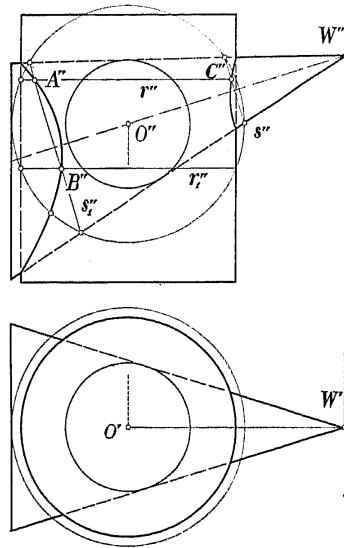
Przykład VIII. *Przenikanie walca obrotowego z powierzchnią pierścieniową, gdy osie przecinają się, znaleziono na rysunku 322 metodą podaną w poprzednim przykładzie. W celu sprowadzenia do takiego położenia, aby rzuty pionowe równoleżników r i s były odcinkami, wykonano zmianę układu przyjmując oś x_1 równoległą do rzutu poziomego walca; s''' jest odcinkiem prostopadłym do osi walca, r''' odcinkiem prostopadłym do osi powierzchni pierścieniowej. Rzut poziomy równoleżnika r wykreślamy korzystając z okręgu K równoległego do danej rzutni pionowej.*

Przykład IX. *Metodę kul można zastosować zawsze, gdy jedna powierzchnia jest obrotowa, a druga kulą. Wtedy bowiem znajdzie na pewno przypadek przecinania się obu osi, gdyż za oś kuli można obrać każdą prostą przechodzącą przez jej środek.*

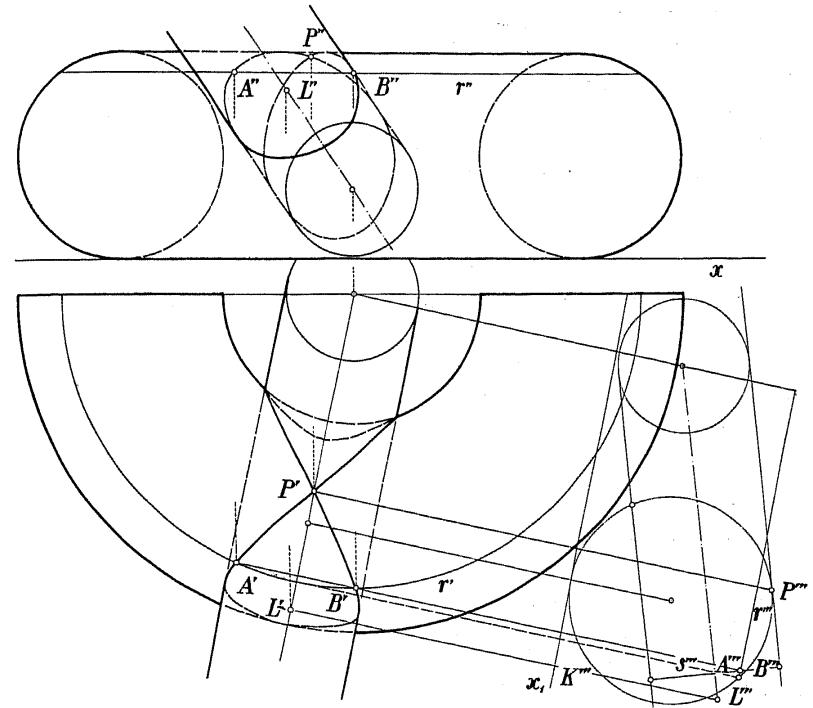
Na rysunku 323 przyjęto stożek obrotowy o osi równoległej do rzutni pionowej i kulę o środku w tej samej odległości od rzutni pionowej.

Konstrukcja będzie najprostsza, jeśli przyjmiemy za oś danej kuli prostą prostopadłą do rzutni poziomej. Wtedy istotnie osie obu powierzchni przetną się w punkcie O_1 .

Każda kula o środku O_1 przecina stożek i daną kulę w okręgach leżących w płaszczyznach prostopadłych do rzutni pionowej. Mamy więc w rzucie pionowym odcinki s'' i r'' , które przecinają się w punkcie A'' należącym do rzutu linii przenikania. Rzut pionowy punktu A przenosimy na okrąg r' , który jest rzutem poziomym równoleżnika kuli.



Rys. 321.



Rys. 322.

II. Założmy teraz, że obie powierzchnie Φ i Ψ są kwadrykami i oznaczmy przez C krzywą przenikania.

Istnieją takie szczególne położenia powierzchni Φ i Ψ i płaszczyzny rzutów π , że rzut C' jest krzywą stożkową. W bardzo specjalnych przypadkach jest to oczywiste; jeśli np. Φ jest walcem o tworzących prostopadłych do rzutni π , to jak widać natychmiast, rzut C' musi się znajdować na podstawie S walca, przy czym $C' = S$ lub C' jest częścią krzywej S (zależnie od tego czy wszystkie tworzące walca przebijają powierzchnię Ψ , czy nie).

Okazuje się, że istnieją jeszcze inne przypadki, w których C' jest stożkową lub częścią stożkowej, choć sama krzywa C nie jest krzywą drugiego stopnia ani częścią krzywej drugiego stopnia.

Zauważmy, że w przypadku walca prostopadłego do rzutni na tworzących jego znajdują się po dwa punkty krzywej C ; są to dwa punkty przecięcia tworzącej z powierzchnią Ψ . Jest to istotny warunek, można bowiem udowodnić

Twierdzenie XVII. Jeśli każdy punkt krzywej C' , z wyjątkiem skończonej ilości, jest rzutem dwóch punktów krzywej przenikania C dwóch powierzchni stopnia drugiego, to C' jest krzywą stożkową lub częścią krzywej stożkowej.

Aby to wykazać, oprzemy się na następującym **twierdzeniu XVIII**:

Przez każdy punkt P przestrzeni przechodzi jedna powierzchnia stopnia drugiego ζ , płaszczyzna lub para płaszczyzn, zawierająca krzywą przenikania C dwóch powierzchni stopnia drugiego Φ i Ψ .

Najkrótszy dowód tego twierdzenia opiera się na metodach geometrii analitycznej.¹

Niech $g(x, y, z) = 0$ będzie równaniem powierzchni Φ , a $f(x, y, z) = 0$ równaniem powierzchni Ψ ; wiadomo, że $g(x, y, z)$ i $f(x, y, z)$ są wielomianami stopnia drugiego. Oczywiście zakładamy, że powierzchnie są różne i że punkt P nie należy do Φ ani Ψ . Wynika z tego, że nie istnieje liczba c o tej własności, że równanie $g(x, y, z) + c f(x, y, z) = 0$ zachodzi dla wszystkich liczb x, y, z ; poza tym, jeśli x_0, y_0, z_0 oznacza współrzędne punktu P , to:

$$g(x_0, y_0, z_0) = a \neq 0 \quad \text{ i } \quad f(x_0, y_0, z_0) = b \neq 0.$$

Weźmy równanie:

$$a f(x, y, z) - b g(x, y, z) = 0;$$

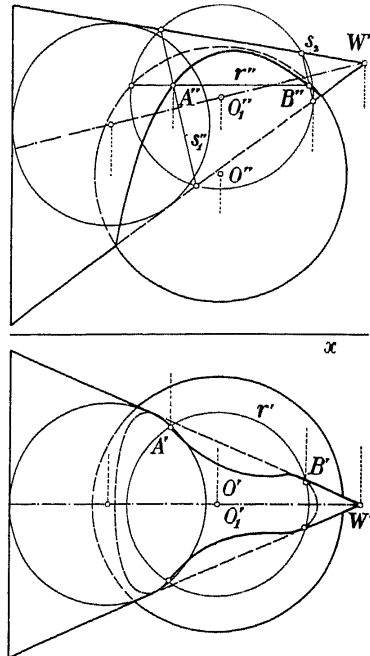
ponieważ lewa strona jest wielomianem drugiego stopnia, względnie w szczególnych przypadkach pierwszego², więc równanie przedstawia kwadrykę, parę płaszczyzn lub płaszczyznę. Punkt P spełnia to równanie, gdyż:

$$a f(x_0, y_0, z_0) - b g(x_0, y_0, z_0) = ab - ba = 0.$$

Twierdzenie XVIII zostało więc udowodnione.

¹ Geometryczny dowód tego twierdzenia przeprowadzić można posługując się pojęciem tzw. *inwencji* na prostej, tzn. przekształcenia rzutowego szeregu punktów w siebie, w którym pary odpowiadających sobie punktów zamieniają się, oraz twierdzeniem o inwencji par punktów przebicia dowolną prostą wszystkich stożkowych posiadających cztery punkty wspólne.

² Nie może to być liczba stała różna od zera, gdyż dla punktów krzywej C lewa strona jest zerem.



Rys. 323.

Niech teraz ζ oznacza kwadrykę, parę płaszczyzn lub płaszczyznę zawierającą krzywą C i przechodzącą przez punkt W^∞ na prostych prostopadłych do rzutni π_1 . Ponieważ według założenia prosta l łącząca punkt W^∞ z punktem A na krzywej C przecina ją poza tym w drugim punkcie B , więc jako prosta zawierająca trzy punkty: W^∞ , A i B na ζ , leży na ζ , tzn. jest jej tworzącą. Mamy więc nieograniczoną ilość prostych przechodzących przez W^∞ i leżących na kwadryce ζ ; zatem ζ jest walcem. Przecięcie jego rzutnią π_1 jest więc krzywą S zawierającą rzuty par punktów krzywej C , tzn. krzywą C' .

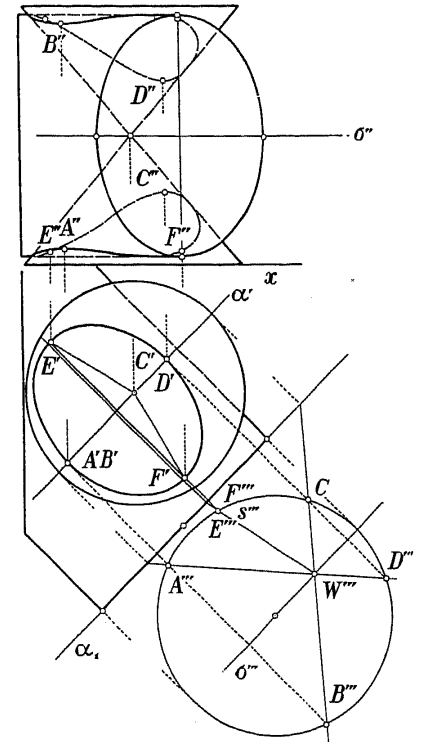
Przykład X. Znajdźmy rzuty linii przenikania stożka o osi pionowej z walcem obrotowym o osi poziomej, gdy wierzchołek stożka i oś walca znajdują się w tej samej poziomej płaszczyźnie σ .

Łatwo zauważyć (rys. 324), że płaszczyzna σ jest płaszczyzną symetrii figury złożonej z obu powierzchni. Z tego wynika, że jest ona płaszczyzną symetrii krzywej przenikania C . Ponieważ symetryczne punkty np. A i B posiadają wspólny rzut poziomy, więc z twierdzenia naszego wynika, że rzut C' będzie krzywą stożkową lub częścią krzywej stożkowej.

Tu łatwo jest sprawdzić, że krzywa C' jest elipsą, gdyż musi być zawarta wewnątrz okręgu podstawowego stożka.

Osie elipsy C' znajdujemy opierając się na symetrii krzywej C względem płaszczyzny α przechodzącej przez wierzchołek stożka i prostopadłej do osi walca. W tym celu wykonujemy trzeci rzut na płaszczyznę równoległą do α . Ponieważ kontur na trzecią rzutnię pokrywa się z przekrojem płaszczyzną α , więc punkty A i C przecięcia konturów przenosimy na α' uzyskując jedną oś $A'C'$.

Druga oś będzie przechodzić przez środek pierwszej i będzie do niej prostopadła. Jest ona rzutem s' pewnej tworzącej s walca; rzut s''' jest oczywiście punktem. Punkty przebicia E i F ze stożkiem znajdujemy bądź przez prze-



Rys. 324.

cięcie płaszczyzną przechodzącą przez s i W , bądź przez przekrój płaszczyzną poziomą.

Rzut pionowy C'' krzywej C wykonamy za pomocą trzeciej rzutni przez odmierzenie wysokości.

Uwaga. Podobnie za pomocą rozważań o symetrii można by udowodnić, że rzut pionowy C'' krzywej przenikania walca obrotowego ze stożkiem obrotowym na rysunku 321 jest częścią hiperboli oraz rzut pionowy krzywej przenikania stożka z kulą na rysunku 323 jest częścią elipsy.

Przykład XI. Znajdźmy rzuty linii przenikania stożka obrotowego z kulą o środku na płaszczyźnie σ przechodzącej przez wierzchołek i prostopadłej do osi (rys. 325).

Mamy tu symetrię obu powierzchni względem płaszczyzny σ ; rzut poziomy C' krzywej przenikania C jest więc stożkową.

Okazuje się, że C' jest okręgiem.

Aby to udowodnić, zauważmy, że równania:

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{i} \quad g(x, y, z) = 0$$

obu powierzchni przedstawiają dla każdego $z = c$ okręgi:

$$f(x, y, c) = 0 \quad \text{i} \quad g(x, y, c) = 0.$$

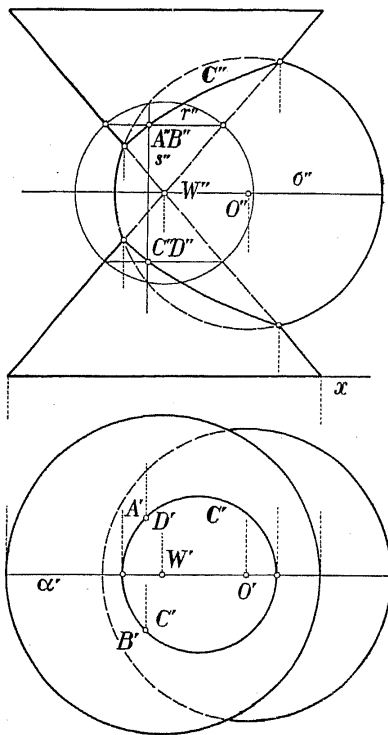
Ponieważ równanie walca rzutującego krzywą C jest postaci:

$$a f(x, y, z) - b g(x, y, z) = 0,$$

więc kładąc $z = c$ otrzymamy:

$$a f(x, y, c) - b g(x, y, c) = 0,$$

co jak wiadomo, również przedstawia okrąg (spółczynniki przy x^2 i y^2 są równe, gdyż w wielomianach $f(x, y, c)$ i $g(x, y, c)$ były sobie równe).



Rys. 325.

Oczywiście średnicę okręgu C' otrzymamy przenosząc do rzutu poziomego punkty przecięcia konturów pionowych obu powierzchni, ponieważ na rysunku 325 środek kuli i oś stożka leżą w płaszczyźnie α równoległej do π_2 .

Ponieważ płaszczyzna α jest płaszczyzną symetrii obu powierzchni, więc też i rzut pionowy C'' jest stożkową.

Można wykazać, że jest to hiperbola.

W tym celu obierzmy punkt W za początek układu o osiach równoległych do x, y, z . Równanie stożka będzie postaci:

$$x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0,$$

a kuli:

$$(x - q)^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Oczywiście równanie walca równoległego do osi y nie może zawierać współrzędnej y , będzie więc postaci:

$$\begin{aligned} 1 \cdot f(x, y, z) - 1 \cdot g(x, y, z) &= (x^2 + y^2 - a^2 z^2) - [(x - q)^2 + y^2 + z^2 - r^2] = \\ &= x^2 - (x - q)^2 - z^2 - a^2 z^2 + r^2 = 2x^2 + 2qx - (1 + a^2)z^2 - q^2 + r^2 = \\ &= 2 \left(x + \frac{q}{2} \right)^2 - (1 + a^2)z^2 - \frac{3}{2}q^2 + r^2 = 0. \end{aligned}$$

Równanie to przedstawia w przestrzeni walec o osi równoległej do y , a na płaszczyźnie xz hiperbolę o osiach równoległych do osi x i z .

Jeden punkt krzywej C'' znaleziony został za pomocą kuli o środku w wierzchołku stożka, cztery inne przez przecięcie konturów.

Widzimy więc, że oba rzuty C' i C'' są stożkowymi, choć krzywa C nie jest stożkową.

III. Krzywe przestrzenne dzielimy na klasy w zależności od ilości punktów przecięcia dowolną płaszczyzną. Liczbę tę nazywamy *stopniem krzywej*. Np. prosta jest pierwszego stopnia, bo płaszczyzna przecina ją na ogół w jednym punkcie, koło — drugiego stopnia itd.

Okazuje się, że *linie przenikania dwóch powierzchni stopnia drugiego są krzywymi czwartego stopnia*.

Aby to wykazać, przetnijmy obie powierzchnie drugiego stopnia Φ i Ψ płaszczyzną α . Otrzymamy krzywe drugiego stopnia ϕ i ψ . Ponieważ mogą one — jak wiadomo — mieć co najwyżej cztery punkty wspólne, więc α ma z linią przenikania cztery punkty wspólne, c. b. d. d.

Weźmy teraz pewien ważny w zastosowaniach przypadek szczególny.

Na wstępie przypominamy (§ 31), że płaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie regularnym P jest to miejsce geometryczne wszystkich prostych

stycznych do krzywych C przeprowadzonych na powierzchni przez punkt P (rys. 326).

Mówimy, jak wiadomo, że dwie powierzchnie Φ i Ψ są do siebie styczne w punkcie P , jeśli: 1° P leży na Φ i Ψ , 2° płaszczyzny styczne w P do obu powierzchni pokrywają się.

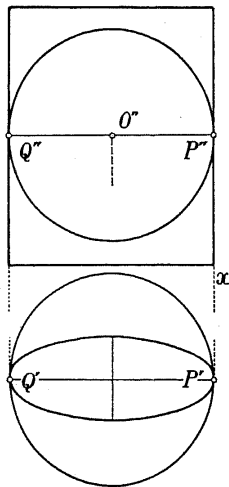
Otóż weźmy dwie powierzchnie drugiego stopnia tak, aby były do siebie styczne w dwóch punktach P i Q .

Przykładami takich położeń jest walec i kula z rysunku 327, kula i stożek z rys. 328 i dwa walce z rys. 329.

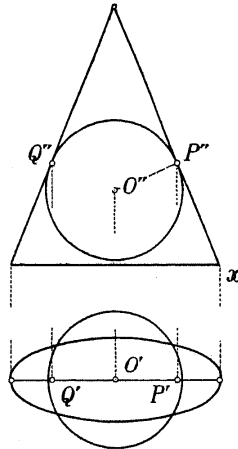
Udowodnimy **twierdzenie XIX**.

Jeśli powierzchnie drugiego stopnia Φ i Ψ są do siebie styczne w dwóch punktach P i Q , to linia przenikania składa się z dwóch krzywych drugiego stopnia przechodzących przez P i Q .

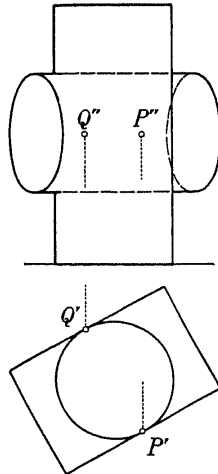
Dowód. Przez P , Q i pewien punkt A należący do Φ i Ψ poprowadźmy płaszczyznę α (rys. 330); przekrój powierzchni Φ oznaczmy przez φ , powierzchni Ψ przez ψ . Obie krzywe przechodzą przez punkty A , P i Q , przy czym prosta styczna p w punkcie P do φ leży w płaszczyźnie stycznej σ w P do powierzchni Φ . Ponieważ σ jest według założenia równocześnie płaszczyzną styczną do Ψ , więc p jest prostą styczną w P do Ψ . Podobnie w punkcie Q obie krzywe φ i ψ mają wspólną prostą styczną q . Skoro jednak obie krzywe drugiego



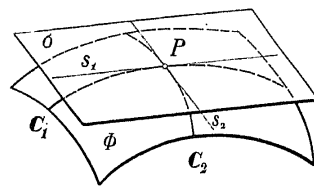
Rys. 327.



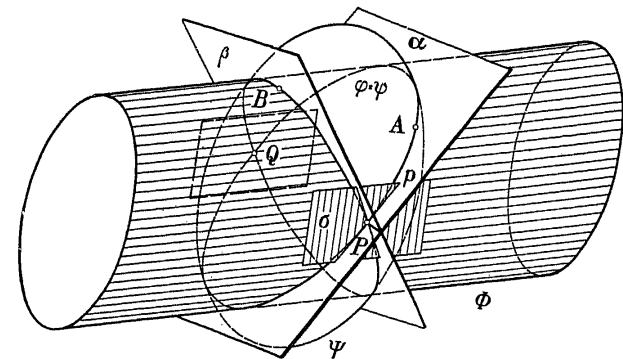
Rys. 328.



Rys. 329.



Rys. 326.



Rys. 330.

stopnia mają trzy punkty A , P i Q oraz styczne w P i Q wspólne, to się pokrywają (twierdzenie Pascala). Zatem $\varphi = \psi$ leży na obu powierzchniach, tzn. φ należy do linii przenikania.

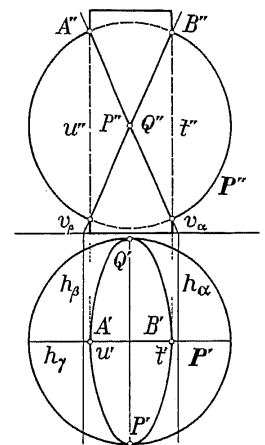
Jeśli poza tym istnieje punkt B obu powierzchni Φ i Ψ , to przez P , Q i B przeprowadźmy drugą płaszczyznę β i przetnijmy nią Φ i Ψ . Powtarzając rozumowanie, otrzymujemy, że przekroje φ_1 i ψ_1 pokrywają się, mamy więc drugą część linii przenikania.

Oczywiście powierzchnie Φ i Ψ nie mają poza φ i φ_1 punktów wspólnych, gdyż w przeciwnym razie linia przenikania byłaby rzędu wyższego niż cztery.

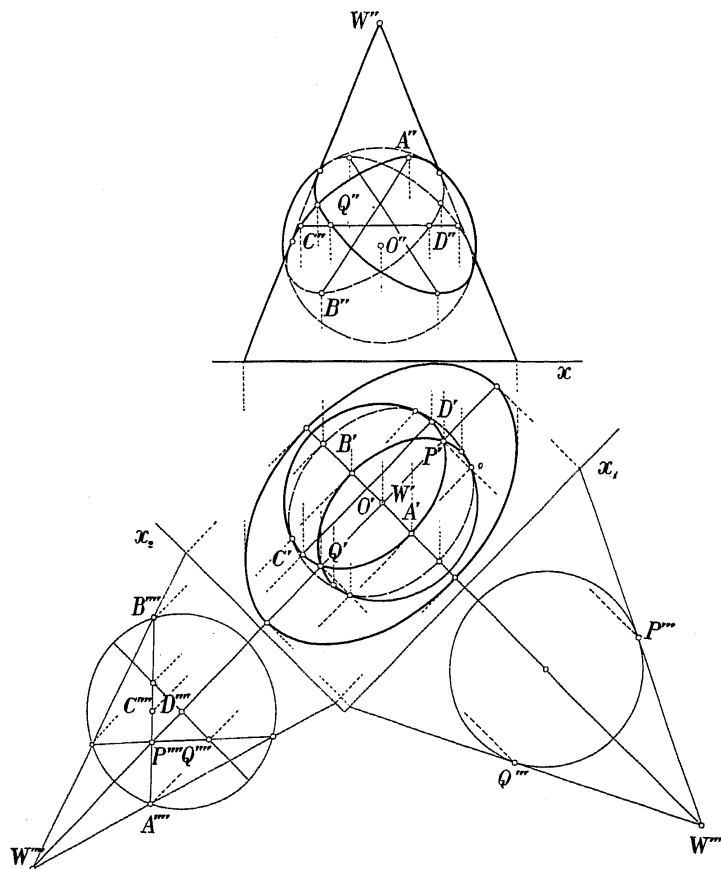
Przykład XII. Weźmy walec eliptyczny i kulę o środku na osi walca, a o promieniu równym dużej półosi (rys. 331).

Jeśli oś dużej podstawy ustawimy prostopadłe do osi x , to rzuty pionowe punktów styczności P i Q pokryją się oraz tworzące konturowe u i t walca leżąc będą w jednej płaszczyźnie z konturem pionowym kuli (okrąg południkowy P). W tym więc położeniu na przecięciu t i u z południkiem P są punkty linii przenikania. Jeśli A jest jednym z tych punktów, to krzywa leżąca w płaszczyźnie $\alpha = (A, P, Q)$ jest częścią linii przenikania. Druga część leży w płaszczyźnie $\beta = (B, P, Q)$. Ponieważ krzywe te leżą na kuli, więc są okręgami.

Rzuty poziome pokrywają się oczywiście z podstawą, rzuty zaś pionowe są odcinkami, ponieważ płaszczyzny α i β , jako przechodzące przez prostą PQ prostopadłą do rzutni pionowej, są prostopadłe do rzutni pionowej.



Rys. 331.



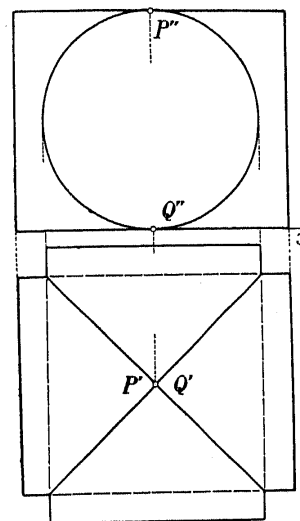
Rys. 332.

Gdyby oś duża podstawy walca nie była prostopadła do rzutni pionowej, to należałoby wykonać zmianę układu doprowadzając do takiego położenia, aby prosta PQ była prostopadła do nowej rzutni. Po wykreśleniu linii przenikania na nowej rzutni należy powrócić do pierwszego rzutu pionowego wyznaczając pary średnic sprzężonych.

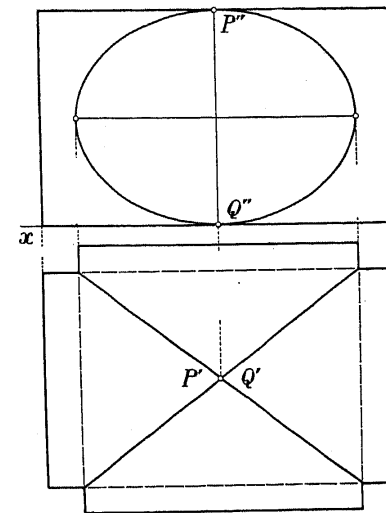
Z przykładu XII wynika **wniosek**:

Każdy walec eliptyczny można przeciąć w okręgu.

Przykład XIII. Korzystając z uwag podanych w poprzednim przykładzie, wykreślono linię przenikania kuli ze stożkiem (rys. 332), gdy powierzchnie są do siebie styczne w dwóch punktach.



Rys. 333.



Rys. 334.

Układ o osi x_1 posłużył do przyjęcia kuli spełniającej żądane warunki, układ o osi x_2 do wyznaczenia średnic sprzężonych okręgów, z których składa się linia przenikania.

Przykład XIV. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, znajdujemy linię przenikania dwóch walców obrotowych o równych promieniach i osiach przecinających się (rys. 333). Otrzymamy dwie elipsy leżące w płaszczyznach α i β prostopadłych do płaszczyzny poprowadzonej przez osie walców.

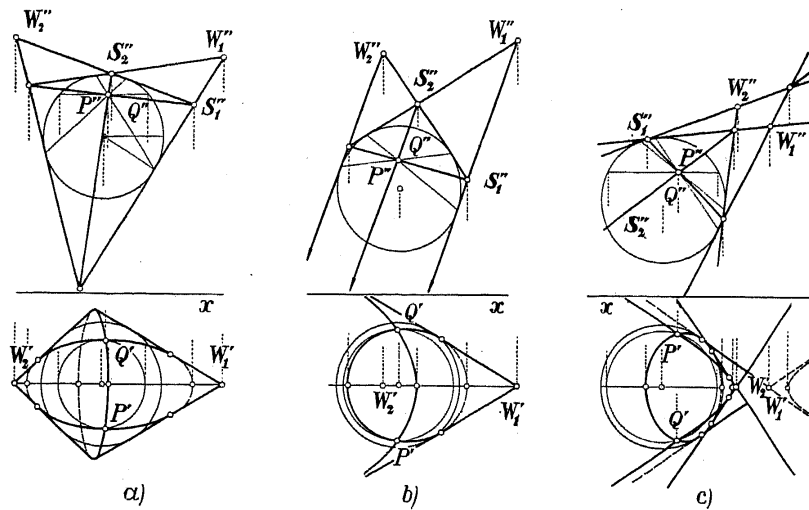
Przykład XV. Jeśli jeden walec jest obrotowy, a drugi eliptyczny (ale tak dobrany, żeby były styczne do siebie w dwóch punktach), to linię przenikania znajdujemy jak w przykładzie poprzednim (rys. 334).

Uwaga. Wspólną część obu walców w położeniu jak na rys. 333 i 334 nazywamy *sklepieniem klasztornym*, sumę — *sklepieniem krzyżowym*.

Przykład XVI. Znajdźmy jeszcze linię przenikania dwóch stożków obrotowych opisanych na wspólnej kuli.

Rozwiążemy zadanie w najprostszym położeniu, gdy osie obu stożków są równoległe do rzutni pionowej (rys. 335 a, b i c).

Weźmy pod uwagę okręgi, wzdłuż których stożki stykają się z kulą. Oznaczmy przez P i Q ich punkty wspólne. Łatwo zauważyć, że płaszczyzny styczne w tych punktach są równocześnie styczne do obu stożków; linia przenikania będzie się więc składała z dwóch stożkowych S_1 i S_2 . Ponieważ rzuty pionowe punktów P i Q pokrywają się, więc rzuty pionowe obu krzywych leżąc będą



Rys. 335.

na prostych przechodzących przez $P'' = Q''$. Oczywiście rzuty zawierać muszą punkty przecięcia tworzących konturowych obu stożków, gdyż z powodu symetrii względem płaszczyzny σ równoległej do π_2 tworzące te leżą w jednej płaszczyźnie.

Widać, że na rys. 335 a obie stożkowe są elipsami, na rys. 335 b jedna elipsą, a druga parabolą, na rysunku zaś 335 c jedna elipsą, druga hiperbolą.

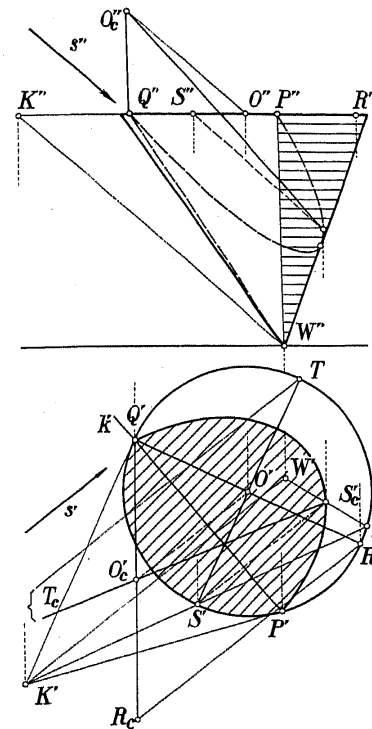
Uwaga. Łatwo zauważyć, że z rozważań naszych o przenikaniu stożków opisanych na wspólnej kuli wynika następujące twierdzenie z geometrii płaskiej:

Przekątne czworokąta opisanego na okręgu przecinają się w punkcie na prostych łączących punkty styczności przeciwległych boków.

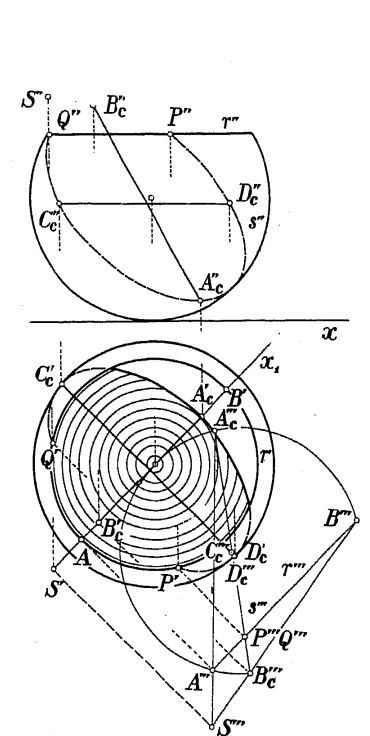
Przykład XVII. Znajdźmy cień rzucony podstawy do wnętrza stożka przy oświetleniu równoległym.

Wyobraźmy sobie wszystkie promienie światła przechodzące przez podstawę stożka (rys. 336). Tworzą one walec, którego podstawą jest ta sama krzywa. Cienie punktów podstawy są to punkty przebicia z powierzchnią stożka. Widać więc, że cieniem do wnętrza będzie część linii przenikania walca i stożka; ponieważ jedną częścią jest dany okrąg, więc druga część musi być również stożkową.

Niech bowiem K będzie punktem przebicia płaszczyzny podstawy promieniem światła przechodzącym przez wierzchołek stożka. Oznaczmy przez k



Rys. 336.



Rys. 337.

biegunową punktu K względem podstawy, a przez P i Q punkty przecięcia k z okręgiem. Łatwo widać, że płaszczyzna KWP jest styczna do stożka i walca w punkcie P ; podobnie KWQ jest płaszczyzną styczną do obu powierzchni w punkcie Q . Obie więc powierzchnie mają dwie stożkowe wspólne, z których jedną jest okrąg dany, a drugą szukany cień. Cień musi być oczywiście elipsą, gdyż leży na walcu eliptycznym.

Aby znaleźć średnice sprzężone cienia, można wziąć albo kolineację środkową między okręgiem a cieniem o środku kolineacji w wierzchołku stożka, albo powinowactwo, którego środkiem jest źródło światła. W pierwszym przypadku odpowiadać będą sobie te punkty obu stożkowych, które leżą na wspólnych tworzących stożka, w drugim te, które znajdują się na wspólnych tworzących walca. Dla obu przekształceń k jest prostą stałą (osią).

Oczywiście dla celów konstrukcyjnych dogodniejsze będzie powinowactwo. Aby ono było określone, należy dla pewnego punktu S znaleźć odpowiadający mu punkt S_c , tzn. cień do stożka.

Kreślmy więc promień światła przez S oraz płaszczyznę przez ten promień i wierzchołek W . Przecina ona podstawę stożka w prostej KS , a stożek w tworzących SW i S_1W_1 , gdzie S_1 jest drugim punktem wspólnym podstawy i prostej KS . Oczywiście cień S_c znajdować się będzie na prostej WS_1 .

Mając już oś powinowactwa k oraz parę punktów odpowiadających sobie S i S_c , możemy dla każdego punktu X znaleźć cień X_c .

Aby otrzymać średnice sprzężone cienia, obrano na rysunku 336 średnice sprzężone okręgu QP i ST i znaleziono średnice sprzężone Q_cR_c oraz S_cT_c cienia. Oczywiście w grę wchodzi tylko część elipsy znajdująca się poniżej podstawy stożka.

Przykład XVIII. *Znaleźć cień równoleżnika r do wnętrza kuli, gdy źródłem światła jest punkt właściwy S .*

Podobnie jak w przykładzie poprzednim, należy znaleźć linię przenikania kuli ze stożkiem, którego wierzchołkiem jest źródło światła S , a podstawą dany równoleżnik r . Linią tą jest suma równoleżnika r i pewnego okręgu s , który jest szukanym cieniem (rys. 337).

Najdogodniej cień s narysować w rzucie na płaszczyznę symetrii figury złożonej z równoleżnika i źródła światła. Mamy tu okrąg przedstawiony odcinkiem $A_c'''B_c'''$.

Do rzutu poziomego przenosimy A_cB_c na płaszczyznę symetrii, a końce drugiej osi C_c i D_c na prostą prostopadłą. Oczywiście $C_c'D_c' = A_c'''B_c'''$, ponieważ s jest okręgiem.

ĆWICZENIA.

1. Przyjąć tak dwa stożki obrotowe, aby posiadały cztery tworzące wspólne.
(Wsk.: Suma kątów φ i ψ zawartych między osiami a tworzącymi stożków winna być większa od kąta między osiami; najlepiej wziąć podstawy stożków na kuli o środku we wspólnym wierzchołku.)
2. Wykreślić linię przenikania dwóch stożków, gdy podstawa jednego znajduje się na rzutni poziomej, a drugiego na pionowej.
3. Wykreślić linię przenikania dwóch walców obrotowych stycznych do rzutni poziomej, gdy promienie podstaw są różne.
4. Znaleźć linię przenikania powierzchni podanych na rysunkach 327—329.
5. Czy na elipsoidach, paraboloidach i hiperboloidach nieobrotowych istnieją okręgi?
6. Znaleźć linię przenikania elipsoidy obrotowej z kulą.
7. Znaleźć linię przenikania elipsoidy trójosiowej z walcem opisanym na kuli, której środek znajduje się w środku elipsoidy, a średnicą jest najmniejsza oś.
8. Znaleźć przenikanie torusa o osi nachylonej do rzutni poziomej pod kątem ostrym z kulą, gdy środek kuli i oś torusa leżą w płaszczyźnie równoległej do rzutni pionowej.
9. Udowodnić, że linia przenikania stożków na rysunku 335 składa się z dwóch stożkowych, wykazując, że przekroje obu stożków płaszczyzną przechodzącą przez przekątne czworokąta, którego bokami są konturowe tworzące, a prostopadłą do rzutni poziomej są identyczne.

(Wsk.: Wykazać, że przekroje obu stożków mają wspólne wierzchołki i ogniska; pierwsze jest oczywiste, drugie wynika z tego, że sumy przeciwległych boków czworokąta opisanego na okręgu są równe).

10. Znaleźć przenikanie stożków opisanych na wspólnej kuli, gdy prosta łącząca wierzchołki jest: a) styczna do kuli, b) przebija kulę w dwóch punktach.

(Wsk.: Oprzeć się na ćwiczeniu 9.)

11. Znaleźć cień do wnętrza stożka, gdy źródłem światła jest punkt właściwy.

(Wsk.: Oprzeć się na kolineacji o środku w wierzchołku jednego lub drugiego stożka.)

12. Znaleźć cień do wnętrza walca, gdy źródłem światła jest a) punkt właściwy, b) punkt niewłaściwy.

13. Znaleźć przenikanie dwóch stożków, które są do siebie styczne wzdłuż jednej tworzącej, ale posiadają wierzchołki różne. Podstawy przyjąć na rzutni poziomej.

14. Znaleźć cień równoleżnika do wnętrza paraboloidy obrotowej.

15. Znaleźć przenikanie dwóch hiperboloid jednopowłokowych obrotowych, których okręgi szyjne są wielkimi okręgami tej samej kuli.

16. Znaleźć przenikanie dwóch równych torusów o osiach przecinających się.

17. Narysować linię przenikania torusa z kulą styczną w dwóch punktach do torusa.