

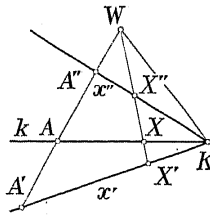
ROZDZIAŁ IV

POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA

§ 30. Kolineacja i przekształcenie rzutowe przestrzeni

I. Kolineacja układów płaskich $[\alpha']$ i $[\alpha'']$ złożonych na jednej płaszczyźnie określona była (§ 23) jako przekształcenie złożone ze skończonej ilości kolineacji pomiędzy różnymi płaszczyznami, spełniające warunek, że odpowiadające sobie punkty leżą na prostych przechodzących przez pewien punkt (środek kolineacji).

Jeśli środek kolineacji W nie leży na osi k , to można na podstawie twierdzenia Pappusa (§ 25) określić kolineację środkową na wspólnej płaszczyźnie jako przekształcenie, które przy danym punkcie W , prostej k (rys. 283) i liczbie $c' (\neq 0)$ każdemu punktowi X' przypisuje punkt $f(X') = X''$ na promieniu WX , który spełnia warunek: $(WXX'X'') = c$, gdzie X oznacza punkt na osi k . Istotnie, gdy $A'A''$ jest parą odpowiadających sobie punktów, to proste $A'X'$ i $A''X''$ przecinają się w punkcie K na osi kolineacji i



Rys. 283.

$$(WAA'A'') = (KW, k, x', x'') = (WXX'X'') = c.$$

Liczbę c nazywamy *cechą kolineacji*.

Przyjmijmy to za punkt wyjścia w definicji kolineacji środkowej w przestrzeni trójwymiarowej.

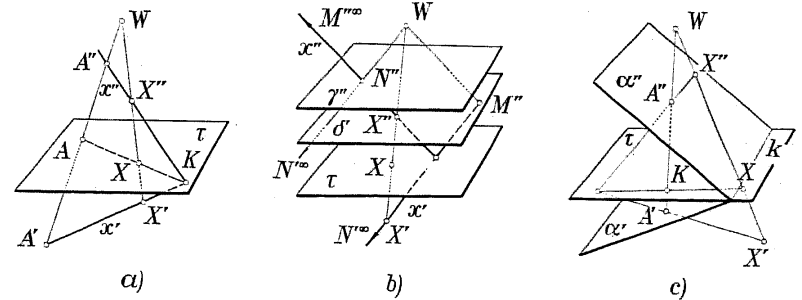
Weźmy pod uwagę punkt W , płaszczyznę τ nie zawierającą W i liczbę c różną od zera.

Przekształceniem środkowo-kolineacyjnym przestrzeni rzutowej na siebie o środku kolineacji W , płaszczyźnie kolineacji τ i cesze kolineacji c nazywamy odpowiedność, w której punktowi X' odpowiada na prostej WX' punkt $F(X') = X''$ spełniający warunek $(WXX'X'') = c$.

Łatwo zauważyć następujące własności kolineacji przestrzeni:

a) punktom prostej x' odpowiadają punkty prostej x'' przechodzącej przez punkt K , w którym x' przebija płaszczyznę kolineacji (rys. 284 a).

(W szczególności punktowi K odpowiada punkt K .)



Rys. 284.

b) prostym przecinającym się odpowiadają proste przecinające się, skośnym — skośne.

c) punktom płaszczyzny α' odpowiadają punkty płaszczyzny α'' przecinającej się z nią na płaszczyźnie τ .

d) punktom stożkowej S' odpowiadają punkty stożkowej S'' .

e) jeśli punkty X', Y', Z' i U' leżą na prostej, to $(X'Y'Z'U') = (X''Y''Z''U'')$.

f) jeśli ciąg $X'_1, X'_2, \dots$ dąży do granicy A , to ciąg $X''_1, X''_2, \dots$ jest zbieżny i ma granicę A'' .

Własność a) wynika z warunku $(WXX'X'') = c = (WAA'A'')$, który na podstawie tw. Pappusa będzie spełniony wtedy, gdy prosta $A''X''$ przechodzi przez punkt K , w którym $A'X'$ przecina płaszczyznę kolineacji τ . Własność b) wynika wprost z definicji, c) z b), zaś d) i e) z tego, że ograniczając się do punktów pewnej płaszczyzny α' otrzymujemy, jak łatwo widzieć, kolineację między α' i α'' .

Aby udowodnić ciągłość przekształcenia (własność f) wystarczy zauważyć, że gdy O' i O'' są parą odpowiadających sobie punktów, to wiązka $[O']$ przechodzi w sposób ciągły na wiązkę $[O'']$. Biorąc trzy wiązki $[O_1], [O_2]$ i $[O_3]$ o wierzchołkach nie leżących na prostej i rozpatrując promienie tych wiązek przechodzące przez punkty $X_1, X_2, \dots$ ciągu, widzimy na podstawie definicji granicy w przestrzeni rzutowej, że ciąg $X''_1, X''_2, \dots$ jest zbieżny do A'' .

Weźmy punkt niewłaściwy N'^∞ .

Odpowiada mu punkt N'' , który można otrzymać kreśląc z W prostą równoległą do $x' = X'N'^\infty$ i przecinając prostą x'' (rys. 284 b). Łatwo zauważyć, że płaszczyźnie niewłaściwej γ'^∞ (tj. zbiorowi wszystkich punktów niewłaściwych przestrzeni) odpowiada płaszczyzna γ'' równoległa do τ i przechodząca przez N'' . Nazywamy ją *płaszczyzną graniczną*. Podobnie istnieje płaszczyzna δ' równoległa do τ , której odpowiada płaszczyzna δ''^∞ . Aby znaleźć δ' ,

wystarczy na prostej x'' przyjąć punkt M'' i narysować odpowiadający mu punkt M' na x' .

Z własności d) i b) wynika, że powierzchnię stożkowej Δ' , której podstawa jest krzywą stożkową S' , odpowiada powierzchnia Δ'' , która ma za podstawę również krzywą stożkową S'' ; jest ona walcem, względnie stożkiem, zależnie od tego, czy wierzchołek powierzchni Δ' leży na płaszczyźnie granicznej δ' , czy nie. Jeśliby poza wierzchołkiem W miała jeszcze dwie tworzące wspólne z δ' , to walec Δ'' będzie miał za podstawę hiperbolę, jeśli jedną, to parabolę. Pierwszy nazywamy *walcem hiperbolicznym*, drugi *parabolicznym*.

Jeśli powierzchnia Δ' jest walcem, to Δ'' będzie stożkiem o wierzchołku na płaszczyźnie γ'' .

II. Kolineacja, dla której $(WXX'X'') = -1$, nazywa się *inwolucyjną*.

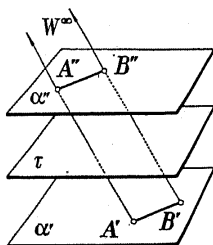
Kładąc $X'' = Y'$ otrzymamy $Y = X$ oraz $-1 = (WXX'X'') = (WYY'Y'') = (WXX''Y'') = (WXY''X'')$, a więc $Y'' = X'$; funkcja zatem $X'' = f(X')$ spełnia warunek $X' = f(X'')$, tzn. jest identyczna ze swoim odwróceniem. Wynika stąd w szczególności, że płaszczyzna graniczna γ'' pokrywa się z płaszczyzną graniczną δ' .

Zauważmy, że jeżeli weźmiemy na płaszczyźnie kolineację involucyjną przyjmując biegun i biegunową względem stożkowej S za środek i oś kolineacji (rys. 251), to każdy punkt X' krzywej przejdzie na punkt X'' należącej również do tej krzywej. Mamy więc kolineację, która krzywą S przeprowadza na siebie, przy czym na S będą istniały dwa fikspunkty, jeśli biegunowa przecina S , a nie będzie na S żadnego, jeśli biegunowa leży zewnątrz.

III. Jeśli punkt W jest niewłaściwy, to kolineację nazywać będziemy *powinowactwem*. W tym przypadku punktowi właściwemu odpowiada punkt właściwy, a niewłaściwemu — niewłaściwy. Z tego wynika, że prostym równoległym odpowiadają proste równoległe, płaszczyznom równoległym płaszczyzny równoległe, elipsom — elipsy, parabolom — parabole, a hiperbolom — hiperbole.

Jeśli odcinek $A'B'$ jest równoległy do płaszczyzny τ — która teraz nazywa się *płaszczyzną powinowactwa* — to odpowiadający mu odcinek $A''B''$ będzie równy i równoległy do niego (rys. 285). Z tego wynika, że figurą położonym na płaszczyznach równoległych do płaszczyzny powinowactwa odpowiadają figury przystające.

Powinowactwo nazywamy prostokątnym, gdy kierunek W^∞ jest prostopadły do płaszczyzny τ . Jeśli



Rys. 285.

poza tym założymy inwolucyjność, to każdemu punktowi K' odpowiadać będzie punkt X'' symetryczny względem płaszczyzny powinowactwa.

Przekształcenie złożone ze skończonej ilości kolineacji środkowych nazywamy *przekształceniem rzutowym*.

Jeśli pomiędzy płaszczyznami α' i α'' określona jest kolineacja $X'' = f(X')$, to można ją rozszerzyć na przestrzeń, tzn. można określić tak kolineację przestrzeni $X'' = F(X')$, że dla X' należącego do α' będzie $F(X') = f(X')$.

W przypadku gdy $\alpha'' = \alpha'$, przyjmujemy przez oś kolineacji k płaszczyznę τ i określamy kolineację przestrzeni zakładając $(WXX'X'') = (WAA'A'')$, gdzie A' i A'' należą do α' .

Gdy $\alpha'' \neq \alpha'$, to bierzemy τ przez oś kolineacji i zakładamy $(WXX'X'') = (WKA'A'')$, gdzie K , A' i A'' są odpowiednio punktami na τ , α' i α'' (rys. 284 c).

Udowodnimy **twierdzenie XIII**:

Jeśli pięć punktów A', B', C', D', E' i A'', B'', C'', D'', E'' nie zawierają czwórki leżących w płaszczyźnie, to istnieje przekształcenie rzutowe $X'' = r(X')$, które przeprowadza jedną piątkę w drugą, tzn. spełnia warunki:

$$A'' = r(A'), B'' = r(B'), C'' = r(C'), D'' = r(D') \text{ i } E'' = r(E').$$

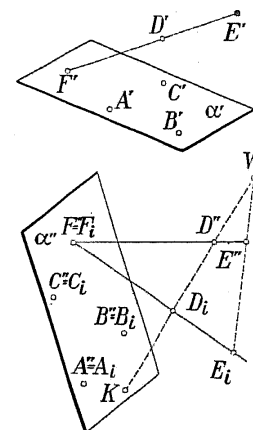
Oznaczmy przez F' punkt przebiecia płaszczyzny $A'B'C'$ prostą $E'D'$ (rys. 286) oraz przez F'' punkt na $A''B''C''$ i $E''D''$. Jak wiadomo, istnieje przekształcenie złożone ze skończonej ilości kolineacji środkowych określone dla płaszczyzn $\alpha' = A'B'C'$ i $\alpha'' = A''B''C''$, które czwórkę punktów A', B', C', F' przeprowadza w czwórkę punktów A'', B'', C'', F'' .

Rozszerzając na przestrzeń każdą w tych kolineacjach środkowych na podstawie poprzedniego twierdzenia, dostaniemy przekształcenie rzutowe przestrzeni, przeprowadzające A', B', C', F' w A'', B'', C'', F'' i $F_i = F''$.

Jeśli przy tym prosta $D_i E_i$ jest różna od prostej $D'' E''$, to weźmy jeszcze kolineację środkową o środku w punkcie W przecięcia $E_i E''$ i $D_i D''$ i płaszczyźnie $\alpha'' = A''B''C''$ jako płaszczyźnie kolineacji.

(Oczywiście proste $E_i E''$ i $D_i D''$ przecinają się, gdyż $F_i = F''$.)

Jeśli przyjmiemy teraz dwustosunek $(WKD_i D'')$, gdzie K jest punktem przebiecia płaszczyzny kolineacji prostą $D_i D''$, za cechę kolineacji środkowej



Rys. 286.

przestrzeni, to ostatecznie przeprowadzimy punkty A_i, B_i, C_i, D_i i E_i w piętkę A'', B'', C'', D'' i E'' .

Otrzymaliśmy więc ostatecznie przekształcenie rzutowe przestrzeni, spełniające żądane warunki.

Nie trudno zauważyć, że przekształcenie to jest jedyne.

Gdyby punkty A', B', C' i D' oraz A'', B'', C'' i D'' leżały w jednej płaszczyźnie, to istniałoby nieskończenie wiele przekształceń spełniających nałożone warunki.

ĆWICZENIA.

1. Udowodnić jednoznaczność przekształcenia w ostatnim twierdzeniu.

(Wystarczy oczywiście wykazać, że przekształcenie rzutowe przestrzeni, które posiada pięć fikspunktów, między którymi nie ma czwórki leżącej w płaszczyźnie, jest przekształceniem identycznym $r(X') = X'$.)

2. Dane są dwa ostrosłupy czworościenne. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele przekształceń rzutowych przestrzeni, które wierzchołki jednego ostrosłupa przeprowadzają w wierzchołki drugiego ostrosłupa.

3. Jaka figura odpowiada sześciannowi, który z płaszczyzną graniczną posiada tylko wierzchołek wspólny?

§ 31. Definicja i ogólne własności powierzchni drugiego stopnia

I. Kwadryką albo powierzchnią drugiego stopnia nazywamy zbiór punktów, który każda płaszczyzna przecina w stożkowej (zdegenerowanej lub nie).

Np. kula jest kwadryką, gdyż płaszczyzna może ją przeciąć w kole, w punkcie lub zbiorze pustym, tzn. w stożkowej. Walce i stożki, które posiadają za podstawy krzywe stożkowe, są również kwadrykami.

Łatwo zauważyć, że a) zbiór pusty, b) punkt i c) prosta spełniają naszą definicję, są więc kwadrykami.

Wyłączmy je z naszych rozważań i starajmy się zbadać pozostałe.

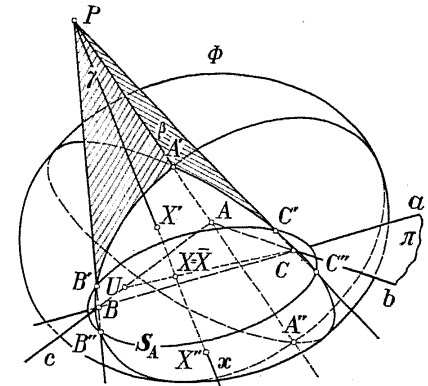
Niech więc Φ będzie kwadryką, która nie jest żadną z tych trzech osobliwych rodzajów. Przyjmijmy punkt P nie należący do Φ i połączmy go z punktem A' na Φ (rys. 287). Oczywiście prosta PA' nie leży na Φ , gdyż w przeciwnym razie punkt P musiałby należeć do Φ . Niech B' oznacza punkt kwadryki Φ nie należący do prostej PA' . Jeśli przez P, A' i B' przyjmijmy płaszczyznę γ , to część wspólna Φ i γ będzie prostą, parą prostych lub stożkową niezdegenerowaną.

Połączmy punkt B' z punktem P . Z założeń naszych wynika, że Φ posiada punkty poza płaszczyzną γ . W przeciwnym bowiem przypadku powierzch-

nia Φ składałaby się z pary prostych lub stożkowej niezdegenerowanej, co jest wyłączone, gdyż te zbiory nie są — jak widać z definicji — kwadrykami.

Niech więc C' będzie punktem kwadryki Φ nie leżącym na γ .

Weźmy na każdej prostej α przechodzącej przez P i mającej punkty X' i X'' wspólne z powierzchnią Φ punkt X harmoniczny do P względem X' i X'' , tzn. taki, że $(X'X''PX) = -1$; jeśli $X' = X''$, to — jak wiadomo — $X = X'$.



Rys. 287.

Udowodnimy, że zbiór ξ wszystkich punktów harmoniczných X leży w jednej płaszczyźnie.

Zauważmy, że jeśli płaszczyzna przechodząca przez P ma z Φ tylko prostą t wspólną, to t należy do zbioru ξ , jeśli stożkową niezdegenerowaną S , to biegunowa p punktu P należy do ξ , jeśli wreszcie wspólną część stanowią dwie proste, to jak łatwo wynika z twierdzenia Pappusa, zbiór punktów harmoniczných z P jest prostą przechodzącą przez ich punkt wspólny.¹

Weźmy teraz trzy płaszczyzny: $\alpha = PBC$, $\beta = PCA$ i $\gamma = PAB$ i oznaczmy przez a, b i c proste, na których znajdują się punkty harmoniczne z P ; oczywiście tworzą one trójkąt, gdyż np. punkt A harmoniczny z P względem A' i A'' w czwórce $(A'A''PA) = -1$ musi leżeć na b i c . Niech π będzie płaszczyzną tego trójkąta. Połączmy punkt X' powierzchni Φ z P i oznaczmy przez X'' drugi punkt wspólny z Φ , a przez $\bar{X}$ punkt przecięcia π prostą PX' .

Wystarczy oczywiście udowodnić, że $(X'X''P\bar{X}) = -1$. W tym celu przeprowadźmy przez prostą PX' taką płaszczyznę δ , aby przeszła ona przez jeden wierzchołek trójkąta ABC np. C i przecięła bok przeciwny w punkcie wewnętrznym U . Widać, że punkty harmoniczne na δ znajdują się na prostej CU , na której musi również leżeć punkt spełniający relację $(X'X''PX) = -1$; jest więc $X = \bar{X}$, c. b. d. d.

Płaszczyznę π , na której leżą wszystkie punkty harmoniczne z P względem kwadryki Φ , nazywamy płaszczyzną biegunową punktu P , a punkt P biegunem płaszczyzny π .

Oznaczmy przez S_P przekrój kwadryki Φ płaszczyzną π . Stożkowa S_P może być zbiorem pustym (jeśli np. Φ jest kulą, a P punktem wewnętrznym), punk-

¹ Rys. 250. RQ jest biegunową punktu P względem pary prostych $X'Y'$ i $X''Y''$.

tem (gdy np. Φ jest powierzchnią stożkową, a P leży wewnątrz), parą prostych (gdy Φ jest stożkiem, a P punktem zewnętrznym) lub stożkową niezdegenerowaną (np. dla kuli i punktu zewnętrznego).

Udowodnimy, że S_P nie może być prostą.

Założmy, że tak nie jest, tzn. $S_P = m$. Wynika z tego, że co najmniej jedna z par $A'A''$, $B'B''$ i $C'C''$ składa się z różnych punktów¹; niech np. będzie $C' = C''$ i weźmy pod uwagę przekrój S_A kwadryki płaszczyzną α przechodzącą przez P , B i C . Ponieważ biegunowa punktu P względem przekroju S_A płaszczyzną α ma z nią jeden tylko punkt M (na prostej m) wspólny, więc S_A jest parą prostych MC' i MC'' (zawierającą $B'B''$; oczywiście jeśli $B' = B''$, to $M = B$). Podobnie płaszczyzna $\beta = PCA$ przecięłaby Φ również w parze prostych NC' i NC'' . Wynikałoby z tego, że płaszczyzna przechodząca przez m i C miałaby z Φ trzy proste: m , MC i NC wspólne, co jest niemożliwe.

Prosta, która ma z kwadryką tylko jeden punkt wspólny, nazywa się prostą styczną.

W przypadku, gdy S_P jest stożkową niezdegenerowaną, wszystkie styczne do Φ przechodzące przez P tworzą tzw. stożek opisany na powierzchni (walec opisany, jeśli P jest punktem niewłaściwym). Widzimy więc, że stożek opisany na kwadryce jest kwadryką. Wspólną częścią obu kwadryk jest stożkowa niezdegenerowana S_P .

Jeśli S_P jest zbiorem pustym, to przekrój S_α każdą płaszczyzną α przechodzącą przez P jest stożkową niezdegenerowaną, ponieważ krawędź α i π , która jest biegunową punktu P względem S_α , nie przecina S_α . Podobnie, jeśli S_P jest punktem, to co najmniej jedna z trzech płaszczyzn: α , β lub γ przecina Φ w stożkowej niezdegenerowanej. Gdy S_P jest parą prostych t_1 i t_2 , to każdy przekrój S_α płaszczyzną α zawierającą punkt P , a nie przechodzącą przez punkt T przecięcia t_1 i t_2 , jest — jak wynika z dotychczasowych rozważań — stożkową niezdegenerowaną, dla której biegunowa punktu P przecina t_1 i t_2 . Jeśli płaszczyzna α przechodzi przez T , to przecina Φ w punkcie T , prostej t_1 , prostej t_2 lub parze prostych t' i t'' . Ponieważ t' i t'' muszą mieć po jednym punkcie wspólnym z każdą stożkową S_A , więc kwadryka Φ jest w tym przypadku stożkiem (walcem) o wierzchołku T .

Widzimy więc, że jeśli Φ nie jest powierzchnią stożkową, to płaszczyzna biegunowa π każdego punktu P nie należącego do powierzchni przecina ją w stożkowej niezdegenerowanej S_P lub część wspólna Φ i π jest zbiorem pustym.

II. Założmy, że nieosobliwa kwadryka Φ nie jest powierzchnią stożkową. Z własności biegunów i biegunowych sprzężonych krzywej stożkowej wynika,

¹ Ponieważ z warunku $X' = X''$ wynika, że X' należy do S_P .

że jeśli płaszczyzna biegunowa π punktu P przechodzi przez punkt R , to płaszczyzna biegunowa ρ punktu R przechodzi przez punkt P .

Oznaczmy przez l krawędź ρ i π (rys. 288). Jeśli obierzemy punkt U na l , to odpowiadająca mu płaszczyzna biegunowa η przejdzie przez prostą $RP = l$. Z tego wynika, że dla każdego punktu N prostej l płaszczyzna biegunowa v przechodzi przez prostą l .

Proste l i $\bar{l}$ nazywamy prostymi sprzężonymi względem kwadryki.

Jeśli oznaczymy przez O punkt przebiecia płaszczyzny η prostą l , to jego płaszczyzna biegunowa ω przejdzie przez R , P i U . Otrzymaliśmy czworościan P, R, O, U o tej własności, że biegunowa każdego wierzchołka jest ścianą przeciwległą, a prosta sprzężona do każdej krawędzi jest krawędzią przechodzącą przez dwa inne wierzchołki (tzw. krawędź przeciwległa).

Jeśli punkt P jest niewłaściwy, to π nazywamy płaszczyzną średnicową kwadryki; dzieli ona na połowy cięciwy przechodzące przez P^∞ . Krawędź dwóch płaszczyzn średnicowych π i ρ nazywa się średnicą; jest ona sprzężona z prostą niewłaściwą $P^\infty R^\infty$.

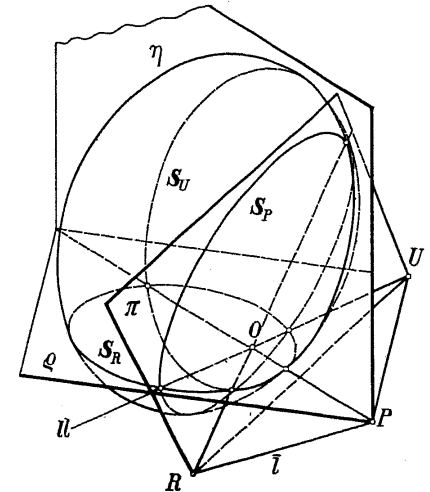
Biegun płaszczyzny niewłaściwej nazywa się środkiem kwadryki. Jeśli jest on punktem właściwym, to dzieli na połowy wszystkie cięciwy przechodzące przez niego. Każda średnica musi oczywiście zawierać środek powierzchni.

Jeśli płaszczyzna π przecina powierzchnię Φ w stożkowej niezdegenerowanej S , to istnieje punkt P , dla którego π jest płaszczyzną biegunową. Istotnie, biorąc na π trzy punkty R , U i O nie leżące ani na S , ani na wspólnej prostej, otrzymamy trzy płaszczyzny biegunowe ρ , η i ω , które przecinają się w jednym punkcie P , ponieważ z płaszczyzną π mają wspólne trzy proste nie przechodzące przez jeden punkt; oczywiście punkt P jest biegunem płaszczyzny π .

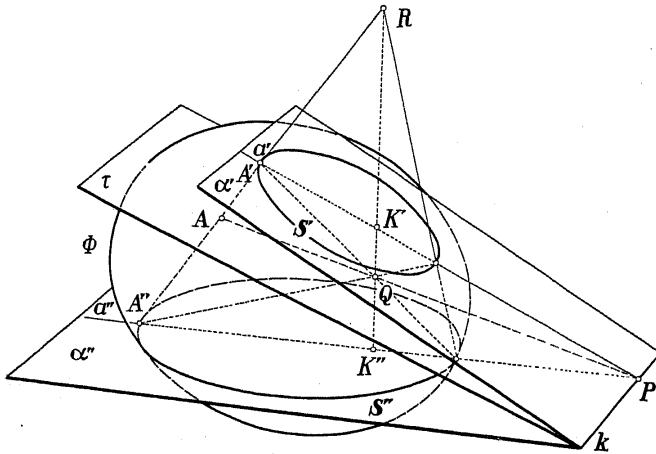
Niech S' i S'' będą krzywymi stożkowymi niezdegenerowanymi na kwadryce Φ .

Udowodnimy

Twierdzenie XIV. Istnieje kolineacja, która przeprowadza kwadrykę Φ w siebie w ten sposób, że stożkowa S' przechodzi na S'' i na odwrot.



Rys. 288.



Rys. 289.

Oznaczmy przez α' i α'' płaszczyzny stożkowych S' i S'' , a przez k ich krawędź.

Założmy, że prosta k nie ma punktów wspólnych z powierzchnią Φ . Niech K' i K'' będą biegunami prostej k względem S' i S'' (rys. 289). Przeprowadźmy przez prostą $K'K''$ płaszczyznę γ ; przecina ona Φ w stożkowej S , a płaszczyzny α' i α'' w prostych a' i a'' . Czworokąt zupełny wpisany w S , dla którego a' i a'' jest parą boków przeciwległych, posiada jeden punkt przekątny na k , a dwa inne na $K'K''$.

Wźmy pod uwagę kolineację inwolucyjną przyjmując środek w jednym z nich, np. w R , a płaszczyznę kolineacji τ przez k i drugi (Q). Ponieważ prosta $K'K''$ jest sprężona z krawędzią k , więc płaszczyzna biegunowa punktu R względem Φ przejdzie przez k ; poza tym musi ona przejść przez punkt $\bar{A}$ na przekątnej PQ czworokąta, dla którego czwórka $(A'A''R\bar{A})$ jest harmoniczna; ale prosta PQ przecina $A'A''$ w takim punkcie A , że $(A'A''RA) = -1$. Z tego wynika, że $\bar{A} = A$. Płaszczyzna biegunowa punktu R przechodzi więc przez k i k . Łatwo zauważyć, że w kolineacji inwolucyjnej o środku R i płaszczyźnie stałej Φ powierzchnia Φ przechodzi w siebie. Ponieważ przy tym płaszczyzna α' przechodzi na α'' , więc część wspólna Φ i α , tzn. S' , przechodzi na część wspólną Φ i α'' , tzn. S'' .

Gdyby prosta k miała jeden punkt wspólny z Φ , to znaczy gdyby S' i S'' były styczne do k w punkcie wspólnym, to na podstawie § 27 istniałaby kolineacja o środku W między α' i α'' , w której stożkowej S' odpowiadałaby stożkowa S'' . Biorąc za płaszczyznę kolineacji biegunową punktu W względem

Φ można ją rozszerzyć na kolineację inwolucyjną przestrzeni, w której Φ przechodzi na siebie.

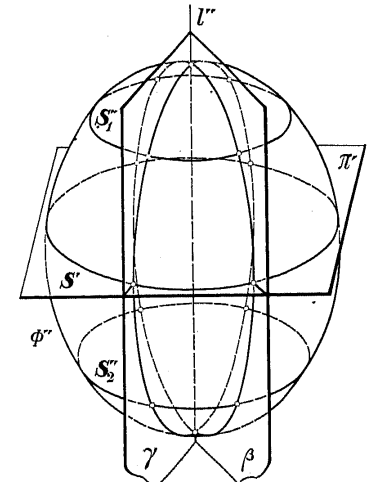
Jeśliby prosta k przebiegała kwadrykę Φ w dwóch punktach, to dowód można by przeprowadzić analogicznie jak w przypadku pierwszym: przeprowadzając przez bieguny K' i K'' prostej k względem stożkowych S' i S'' płaszczyznę γ przecinającą Φ w stożkowej niezdegenerowanej. Otrzymujemy na przecięciu z S' i S'' punkty $A', A'', B' i B''$, tworzące czworokąt o jednym punkcie przekątnym na krawędzi k . Przyjmując jeden z pozostałych punktów przekątnych za środek kolineacji, a płaszczyznę przechodzącą przez drugi i krawędź k za płaszczyznę kolineacji, określić można takie przekształcenie środkowo kolineacyjne, w którym kwadryka przechodzi na siebie tak, że stożkowe S' i S'' zamieniają się.

Udowodniliśmy więc twierdzenie we wszystkich przypadkach.

W przypadku, gdy płaszczyzny α' i α'' są równoległe, stożkowe S' i S'' są podobne (jeśli np. S' jest okręgiem, to S'' jest również okręgiem). Mamy więc

Wniosek. Jeśli przekroje kwadryki płaszczyznami równoległymi nie są zdegenerowane, to są podobne.

III. Załóżmy, że nieosobliwa kwadryka Φ nie jest powierzchnią stożkową. Niech π będzie płaszczyzną przecinającą kwadrykę Φ w stożkowej niezdegenerowanej S_P , a punkt P biegunem płaszczyzny π . Ponieważ S_P jest stożkową niezdegenerowaną, więc istnieje kolineacja $X' = f(X)$, która Φ przekształca na pewną powierzchnię Φ' w ten sposób, że S_P przechodzi na okrąg S' . Niech $X' = F(X)$ będzie rozszerzeniem funkcji $X' = f(X)$ na przestrzeń trójwymiarową.



Rys. 290.

Weźmy jeszcze płaszczyzny α'_1 i α'_2 równoległe do π' , które przecinają Φ w stożkowych S'_1 i S'_2 . Ponieważ S' jest okręgiem, więc S'_1 i S'_2 są również okręgami. Oczywiście środki wszystkich okręgów leżących w płaszczyznach równoległych do π' znajdują się na prostej l' sprzężonej z prostą niewłaściwą płaszczyzny π' .

Określmy powinowactwo, które pozostawia w miejscu punkty płaszczyzny π' , a prostą $\bar{l}'$ przeprowadza w prostą $\bar{l}''$ prostopadłą do π' .

Powierzchnia Φ przejdzie wówczas na kwadrykę obrotową Φ'' .

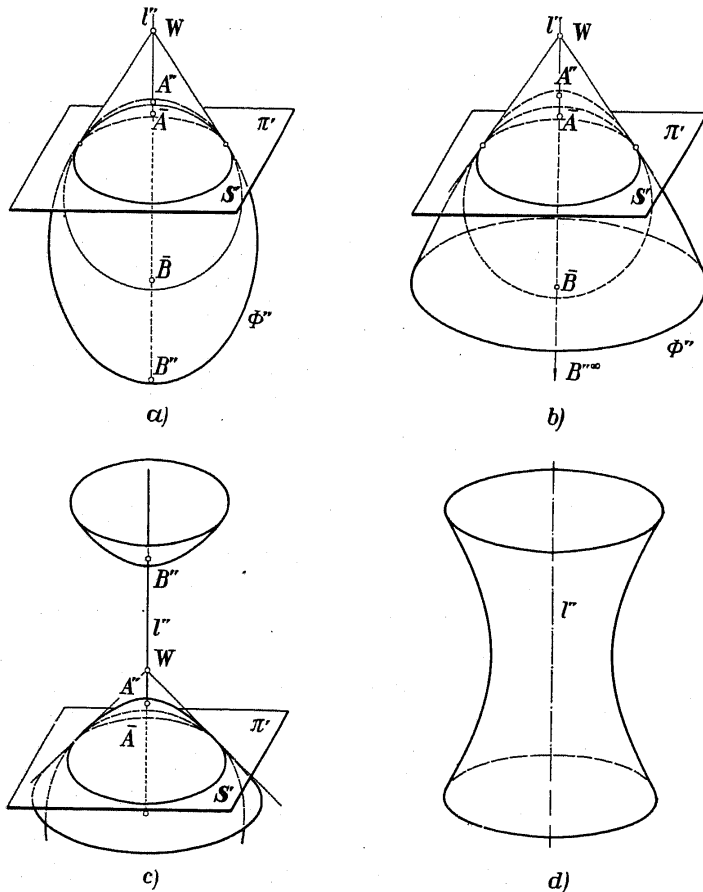
Aby to wykazać, weźmy pod uwagę

dwie płaszczyzny β i γ przez prostą l'' . Każda z nich przetnie okręgi S' , S''_1 i S''_2 (rys. 290) powierzchni w sześciu punktach, które do siebie przystają przez obrót. Z tego wynika, że również przekroje kwadryki Φ'' płaszczyznami β i γ , jako stożkowe przechodzące przez przystające szóstki punktów, do siebie przystają, tzn. że Φ'' jest powierzchnią obrotową.

Mamy więc

Twierdzenie XV. Każdą kwadrykę nieosobliwą można za pomocą przekształcenia rzutowego przestrzeni przeprowadzić na kwadrykę obrotową.

Przekroje płaszczyznami przechodzącymi przez oś obrotu powierzchni



Rys. 291.

obrotowej nazywamy *południkami powierzchni*. Mogą więc zajść co najwyżej cztery przypadki:

- a) południk powierzchni jest elipsą (lub okręgiem) (rys. 291 a),
- b) » » » parabolą (rys. 291 b),
- c) » » » hiperbolą o oś rzeczywistej l (rys. 291 c),
- d) » » » hiperbolą o oś urojonej l (rys. 291 d).

W trzech pierwszych przypadkach będzie można za pomocą kolineacji przekształcić Φ'' na kulę.

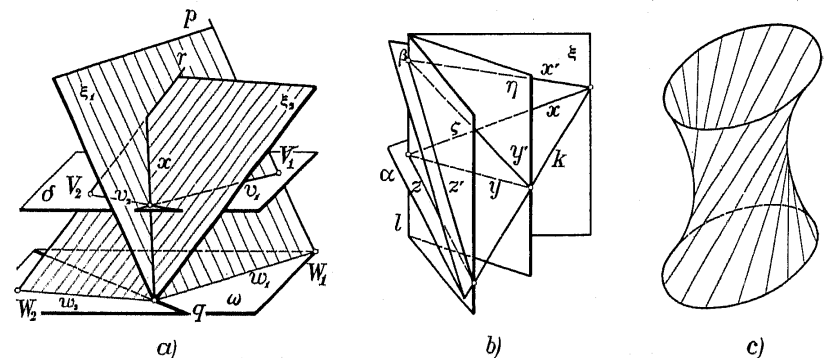
Weźmy w tym celu kulę ψ wpisaną w powierzchnię wzdłuż stożkowej S (można ją otrzymać przez obrót okręgu stycznego do południka w punktach na S'). Oznaczmy przez W biegun płaszczyzny π' względem Φ'' (oczywiście W leży na l); jest on równocześnie biegunem tej płaszczyzny względem kuli ψ .

Prosta l przebija Φ'' w punktach A'' i B'' , a kulę w punktach $\bar{A}$ i $\bar{B}$. Rozpatrzmy kolineację środkową przestrzeni, której środkiem jest punkt W , płaszczyzną stałą, π' , a A'' i $\bar{A}$ parą odpowiadających sobie punktów. Łatwo zauważyć, że kwadryka Φ'' przejdzie wówczas na kulę, gdyż na każdej płaszczyźnie zawierającej l południk kwadryki przejdzie na południk kuli (§ 27).

Jest widoczne, że w trzech pierwszych przypadkach południk może być zupełnie dowolną stożkową o osi l z wyłączeniem hiperbol, dla których l jest osią urojoną.

Pozostaje do rozstrzygnięcia pytanie, czy jest możliwe takie położenie jak na rysunku 291 d, tzn. czy przez obrót hiperboli dookoła osi urojonej powstaje powierzchnia drugiego stopnia.

IV. Weźmy dwa pęki płaszczyzn (p) i (r) o osiach skośnych (rys. 292 a) i prostą q nie przecinającą ani p , ani r . Niech $\xi_2 = f(\xi_1)$ będzie funkcją, która



Rys. 292.

każdej płaszczyźnie ξ_1 pęku (p) przypisuje w pęku (r) tę płaszczyznę ξ_2 , która przecina się z nią na prostej q .

Widać, że przekształcenie jest określone dla wszystkich elementów pęku (p) , a funkcja odwrotna $\xi_2 = f(\xi_1)$ istnieje i jest określona dla wszystkich elementów pęku (r) .

Udowodnimy, że zbiór H wszystkich prostych x , w których przecinają się odpowiadające sobie pary płaszczyzn ξ_1 i ξ_2 , tworzy kwadrykę Φ .

Zauważmy w tym celu, że *przecinając pęk płaszczyzn (l) (rys. b) płaszczyznami α i β o krawędzi k skośnej względem l i przypisując sobie te proste x i x'' , które leżą w jednej płaszczyźnie pęku (l) , otrzymamy przekształcenie homologiczne pęków prostych na α i β* . Jest to oczywiste, gdyż odpowiadające sobie proste obu pęków przecinają się na krawędzi k obu płaszczyzn α i β .

Przystępując do dowodu, że zbiór prostych x (a raczej punktów należących do prostych x) tworzy powierzchnię drugiego stopnia, weźmy pod uwagę najpierw płaszczyznę ω przechodzącą przez q . Przecina ona pęki (p) i (r) w pękach prostych (W_1) i (W_2) . Ponieważ odpowiadające sobie promienie pęków (W_1) i (W_2) (tzn. te, które znajdują się na odpowiadających sobie płaszczyznach pęków (p) i (r)) przecinają się na q , więc mamy między (W_1) i (W_2) określoną homologię i wobec tego część wspólna ω i zbioru H jest parą prostych q i W_1W_2 . Każda więc płaszczyzna przechodząca przez q przecina Φ w stożkowej zdegenerowanej, składającej się z prostej q i pewnej prostej przecinającej p i r ; oczywiście jest to prosta łącząca punkty przebiecia p i r z ω .

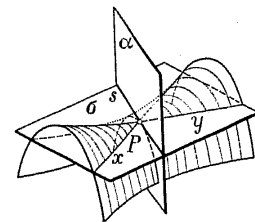
Niech teraz δ będzie płaszczyzną nie zawierającą q i oznaczmy przez (V_1) i (V_2) pęki prostych, w których δ przecina (p) i (r) . Między elementami pęku (V_1) a elementami pęku (W_1) mamy homologię, podobnie między (W_1) i (W_2) oraz między (W_2) i (V_2) . Jest więc ostatecznie między (V_1) i (V_2) przekształcenie rzutowe, w którym — jak wynika z definicji tych homologii — odpowiadające sobie proste v_1 i v_2 przecinają się na prostej należącej do H . Przekrój płaszczyzną δ jest więc stożkową i wobec tego zbiór Φ kwadryką; nazywamy ją *hiperboloideą jednopowłokową* (rys. 292 c).

Zauważmy, że każde dwie proste x i $\bar{x}$ kwadryki Φ należące do H są skośne. Istotnie, gdyby leżały w płaszczyźnie, to proste p i r jako przecinające się z nimi znajdowałyby się w tej samej płaszczyźnie, co przeczy założeniu.

Niech teraz x , $\bar{x}$ i $\bar{\bar{x}}$ będą trzema elementami rodziny prostych H . Wiadomo, że przez dowolny punkt P na x można poprowadzić prostą y przecinającą $\bar{x}$ i $\bar{\bar{x}}$. Płaszczyzna σ przechodząca przez x i y przecina Φ w stożkowej S , do której należy prosta x i te punkty prostych $\bar{x}$ i $\bar{\bar{x}}$, które leżą na y . Z tego wynika, że y należy do S , a więc też do Φ . Wszystkie proste y przecinające proste x , $\bar{x}$ i $\bar{\bar{x}}$ tworzą rodzinę prostych H_1 , o której można podobnie jak dla H udowodnić, że każde jej dwie proste są skośne. Mamy zatem

Twierdzenie XVI. *Na hiperboloidzie jednopowłokowej istnieją dwie rodziny prostych H i H_1 . Przez każdy punkt powierzchni przechodzi jedna prosta jednej rodziny i jedna prosta drugiej rodziny. Dwie proste hiperboloidy przecinają się jedynie wtedy, gdy należą do różnych rodzin.*

Weźmy pod uwagę płaszczyznę σ przechodzącą przez proste x i y przecinające się w punkcie P . Niech α będzie dowolną płaszczyzną przechodzącą przez P , a różną od σ (rys. 293). Jeśli α nie zawiera ani x , ani y , to przecina kwadrykę Φ w stożkowej, która z płaszczyzną σ ma tylko punkt P wspólny; krawędź zatem α i σ jest styczną do stożkowej w punkcie P . Jeśli α przechodzi przez x (lub y), to przekrój składa się z x (y) i prostej $\bar{y}$ ($\bar{x}$) nie zawierającej P ; w tym przypadku x (y) jest styczną. Zawsze więc proste styczne leżą w płaszczyźnie σ . Zatem σ jest *płaszczyzną styczną do hiperboloidy w punkcie P* .



Rys. 293.

Jest widoczne, że każde przekształcenie rzutowe hiperboloidy jednopowłokowej Φ jest powierzchnią, która powstaje w ten sam sposób co Φ' , a więc jest hiperboloidą jednopowłokową.

Niech Φ^0 oznacza hiperboloidę jednopowłokową obrotową, na którą można według udowodnionego twierdzenia zawsze przekształcić rzutowo kwadrykę Φ . Ponieważ Φ^0 nie jest ani stożkiem (stożek nie zawiera prostych skośnych), ani nie może być rzutowo przekształcony na kulę (na kuli nie istnieją proste), więc Φ^0 musi być powierzchnią, której południkiem jest hiperbola o osi urojonej l (rys. 291 d).

Nie trudno zauważyć, że za pomocą powinowactwa prostokątnego o kierunku l można Φ^0 przeprowadzić w hiperboloidę, której południkiem jest zadana z góry hiperbola.

V. Ponieważ wartość dwustosunku jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych, więc własność „być biegunem i biegunową“ jest własnością rzutową. Istotnie, jeśli płaszczyzna π jest biegunową punktu P względem kwadryki Φ , to uzyskane po przekształceniu elementy $\bar{P}'$ i $\bar{\pi}'$ są biegunem i biegunową względem przekształconej kwadryki Φ , z równości bowiem $(X'X''PX) = -1$, gdzie X' i X'' są punktami na Φ , a X na π , wynika równość $(\bar{X}'\bar{X}''\bar{P}\bar{X}) = -1$ dla odpowiadających im punktów na $\bar{\Phi}$ i $\bar{\pi}$.

Dotychczas nie rozpatrywaliśmy przypadku, gdy punkt P leży na kwadryce Φ , ponieważ nie znając bliżej własności kwadryk nie potrafilibyśmy odpowiedzieć na pytanie, co tworzą punkty X harmonicznie związane z danym punktem P i punktami X' i X'' na Φ .

Zakres rozważań nie ulegnie zwężeniu, jeśli założymy, że Φ jest kwadryką obrotową. Jest natychmiast widoczne bez żadnych trudności, że powierzchnia obrotowa, której południk jest krzywą posiadającą w punkcie P prostą styczną, posiada w punkcie P płaszczyznę styczną. Ponieważ południk kwadryki Φ jest stożkową, więc istnieje płaszczyzna styczna π w punkcie P do Φ .

Niech teraz x będzie prostą przechodzącą przez P i nie leżącą w płaszczyźnie π . Ponieważ $X' = P$, więc z uwagi na to, że $X'' \neq P$, jedynym punktem X spełniającym równanie $(X'X''PX) = -1$ jest $X = P$. Jeśli prosta x leży na π , ale nie znajduje się całkowicie na Φ (tzn. nie jest tworzącą kwadryki), to $X'' = P = X'$ i równanie $(X'X''PX) = -1$ spełnia każdy punkt X prostej x . Jeśli wreszcie x jest wspólną częścią π i Φ , to również X może być dowolnym punktem prostej x . Z tego wynika, że wszystkie punkty harmonicznie sprzężone z punktem P leżą na płaszczyźnie stycznej π .

Jeśli Φ jest powierzchnią stożkową, a P jej punktem różnym od wierzchołka, to podobnie jak w przypadku poprzednim dowodzi się, że zbiór punktów harmonicznych z P jest płaszczyzną styczną π .

Zatem:

Jeśli punkt P leży na kwadryce, to jego płaszczyzna biegunowa jest styczną dla powierzchni w punkcie P .

VI. W § 27, I wykazaliśmy, że każdą stożkową niezdegenerowaną można przekształcić na okrąg. Z tego wynika, że jeśli S_1 i S_2 oznaczają dwie dane stożkowe niezdegenerowane, to istnieje przekształcenie rzutowe, które S_1 przeprowadza na S_2 . Ze stanowiska więc przekształceń rzutowych S_1 nie różni się od S_2 .

Mamy więc pięć typów stożkowych, które zachowują się niezmiennie przy przekształcaniach rzutowych: 1) *zbiór pusty*, 2) *punkt*, 3) *prosta*, 4) *dwie proste* (na płaszczyźnie) i 5) *stożkowa niezdegenerowana*.

Jak wynika z dotychczasowych rozważań o kwadrykach, mamy sześć typów powierzchni drugiego rzędu: 1) *zbiór pusty*, 2) *punkt*, 3) *prosta*, 4) *stożek* (o wierzchołku właściwym lub niewłaściwym, tzn. walec), 5) *kwadryka dająca się przekształcić rzutowo na kulę* i 6) *hiperboloidea jednopowłokowa*.

Dwie kwadryki dają się jedynie wtedy przekształcić rzutowo na siebie, gdy należą do tego samego typu.

ĆWICZENIA.

1. Udowodnić, że powierzchnia Φ posiadająca w punkcie P płaszczyznę styczną α przechodzi w przekształceniu kolineacyjnym na powierzchnię Φ' , która w punkcie P' posiada płaszczyznę styczną α' . Czy w każdym punkcie kwadryki nieosobliwej istnieje płaszczyzna styczna?

2. Udowodnić, że w przypadku gdy prosta l nie ma punktów wspólnych z kwadryką Φ

nieosobliwą i nie będącą stożkiem, to prosta z nią sprzężona $\bar{l}$ przebija Φ w dwóch punktach P i Q i płaszczyzny styczne w punktach P i Q przechodzą przez l . Na odwrót, jeśli l przebija Φ w dwóch punktach różnych P i Q , to płaszczyzny styczne do Φ w P i Q zawierają $\bar{l}$.

(Wsk.: Przyjąć dwie płaszczyzny przez l , które Φ przecinają w stożkowych niezdegenerowanych.)

3. Wykazać, że jeśli stożkowa niezdegenerowana S należy do kwadryki Φ i stożka Δ , który nie jest stożkiem opisanym na Φ , to istnieje stożkowa S_1 należąca do Φ i Δ , która wraz z S stanowi zbiór wszystkich punktów wspólnych obu kwadryk.

(Wsk.: Należy rozpatrzyć kolineację $X'' = F(X')$, której środkiem jest wierzchołek stożka, a płaszczyzną stałą biegunowa wierzchołka względem kwadryki.)

4. Załóżmy o kwadryce nieosobliwej Φ , że nie jest stożkiem i weźmy płaszczyznę π , przecinającą Φ w krzywej niezdegenerowanej S oraz biegun P płaszczyzny π . Niech płaszczyzna α (rys. 294) przecina Φ i stożek Δ opisany na Φ o wierzchołku P w krzywych niezdegenerowanych S_1 i S_2 . Udowodnić, że 1) dla prostej l leżącej na π proste sprzężone względem Φ i Δ pokrywają się, 2) istnieje kolineacja, której osią jest krawędź k α i π , a środkiem punkt przebiecia α prostą sprzężoną z k , a która przekształca S_1 w S_2 .

(Wsk.: W 2) oprzeć się na kolineacji między S_1 i S .)

5. Jeśli płaszczyzna niewłaściwa α^∞ przecina kwadrykę w stożkowej niezdegenerowanej (rys. 291 c i d), to stożek opisany o wierzchołku w biegunie płaszczyzny α^∞ , a więc w środku kwadryki, nazywa się *stożkiem asymptotycznym*. Udowodnić, że nieosobliwe przekroje kwadryki i stożka asymptotycznego są podobne.

(Wsk.: Założyć w ćwiczeniu 4. $\pi^\infty = \alpha^\infty$.)

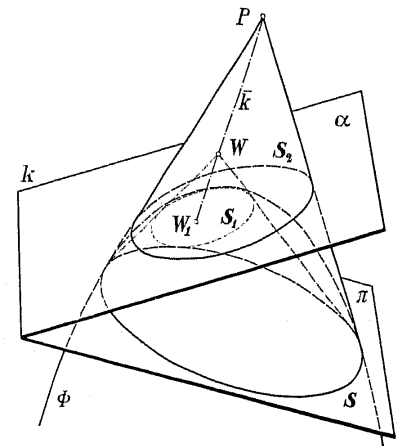
6. Udowodnić, że odcinki zawarte między punktami przebiecia hiperboloidy i jej stożka asymptotycznego dowolną prostą są sobie równe.

7. Niech S będzie stożkową niezdegenerowaną na stożku Δ . Wykazać, że istnieje jedna tylko kwadryka, która przechodzi przez dany punkt X nie leżący na Δ ani na płaszczyźnie α krzywej S , a dla której Δ jest stożkiem opisanym wzdłuż S .

8. Udowodnić, że przez dwa niezdegenerowane przekroje S_1 i S_2 stożka Δ płaszczyznami α_1 i α_2 , których krawędź k nie ma punktów wspólnych z Δ i przez punkt X nie należący do Δ , α_1 ani α_2 , przechodzi jedna tylko kwadryka.

(Wsk.: Przekształcić w ćwicz. 7 i 8 Δ na stożek obrotowy, tak by S wzgl. S_1 i S_2 przeszły na okręgi.)

9. Oznaczmy przez S_1 i S_2 dwie stożkowe niezdegenerowane leżące w różnych płaszczyznach α_1 i α_2 , przechodzące przez dwa różne punkty A i B i załóżmy, że S_1 i S_2 znajdują się w kącie dwuściennym między płaszczyznami α_A i α_B zawierającymi styczne a_1 i a_2 , wzgl. b_1 i b_2 , w punktach wspólnych A , wzgl. B do S_1 i S_2 .



Rys. 294.

Udowodnić, że:

- a) istnieją dwa stożki przechodzące przez S_1 i S_2 .
 b) istnieje jedna powierzchnia stopnia drugiego Φ , która przechodzi przez S_1 , S_2 i punkt X znajdujący się wewnątrz tego samego kąta dwuściennego co S_1 i S_2 , ale nie w płaszczyźnie α_1 ani α_2 .

(Wsk.: a) Wierzchołki stożków leżą w krawędzi k płaszczyzn σ_A i σ_B .

b) Wziąć pod uwagę stożkową S przecinającą każdą z danych krzywych S_1 i S_2 w dwóch punktach, zawierającą X i położoną w płaszczyźnie $\beta = (X, k)$. Biorąc przekształcenie rzutowe przestrzeni przeprowadzające S w okrąg S' i prostą $k = AB$ w prostą k' , przechodzącą przez środek S' i prostopadłą do płaszczyzny zawierającej S' , otrzymuje się zamiast S_1 i S_2 stożkowe S'_1 i S'_2 , o których można wykazać, opierając się na ćwiczeniu a), że są przystające; będą one południkami powierzchni obrotowej Φ' spełniającej żądane warunki w odniesieniu do S'_1 , S'_2 i X' .

10. Udowodnić, że istnieje jeden stożek przechodzący przez dwie stożkowe niezdegenerowane S_1 i S_2 styczne do siebie w punkcie wspólnym T , a nie leżące w jednej płaszczyźnie.

(Wsk.: Należy najpierw ustalić, które pary punktów S_1 i S_2 będą leżały na wspólnych tworzących stożka. Jest oczywiste, że muszą to być pary X_1 i X_2 , w których styczne α_1 i α_2 przecinają się na wspólnej stycznej w punkcie T (por. początek § 27). Teraz nie trudno będzie udowodnić, że wszystkie proste $x = X_1X_2$ przechodzą przez jeden punkt, który jest wobec tego wierzchołkiem stożka.)

11. Udowodnić, że przez dwie stożkowe niezdegenerowane S_1 i S_2 styczne do siebie w punkcie T , a leżące w różnych płaszczyznach α_1 i α_2 oraz punkt X znajdujący się zewnątrz α_1 i α_2 przechodzi jedna powierzchnia drugiego stopnia.

(Wsk.: Weźmy pod uwagę stożkową S leżącą w płaszczyźnie γ przechodzącej przez X , a przecinającą S_1 i S_2 w czterech różnych punktach. Na podstawie twierdzenia udowodnionego w ćwic. 9 b) istnieje kwadryka Φ przechodząca przez przecinające się stożkowe S_1 i S_2 oraz pewien punkt Y należący do S_2 (a różny od punktów wspólnych z S_1 czy S). Wystarczy więc wykazać, że S_2 należy do Φ .)

12. S jest elipsą, A jej punktem wewnętrznym. Na prostej przechodzącej przez A mamy dwa punkty X i Y elipsy S . Odcinek XA odkładamy od Y do wnętrza elipsy i koniec oznaczamy przez Z . Udowodnić, że zbiór wszystkich punktów Z jest elipsą podobną o osiach pokrywających się z osiami elipsy S . Udowodnić to samo dla paraboli i hiperboli.

(Wsk.: Oprzeć się na ćwiczeniach 7 i 8).

§ 32. Rzuty powierzchni drugiego stopnia

I. Mając na myśli własności niezmiennicze przy przekształceniach rzutowych, podzieliśmy kwadryki na sześć typów. Jeśli będziemy brali pod uwagę tylko przekształcenia afiniczne, to otrzymamy podział dokładniejszy.

Ponieważ w przekształceniu afinicznym punkty niewłaściwe przechodzą na niewłaściwe, a właściwe na właściwe, należy więc odróżnić te powierzchnie, które mają różne przekroje płaszczyzną niewłaściwą.

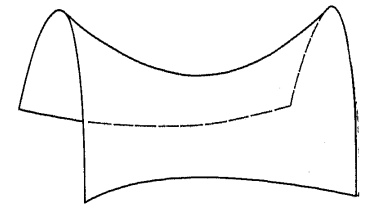
Będziemy więc mieli w typie 4) następujące rodzaje: 4_1) stożki, 4_2) walce eliptyczne, 4_3) walce prapaboliczne i 4_4) walce hiperboliczne.

W przypadku 4_1 powierzchnia posiada z płaszczyzną niewłaściwą stożkową niezdegenerowaną wspólną, w 4_2 jeden punkt, w 4_3 jedną tworzącą wspólną, tzn. płaszczyzna niewłaściwa będzie styczna do Φ i w przypadku 4_4 dwie tworzące powierzchni znajdują się na płaszczyźnie niewłaściwej.

W typie 5) odróżnimy: 5_1) kwadryki nie posiadające punktów niewłaściwych, 5_2) kwadryki posiadające jeden punkt niewłaściwy i 5_3) kwadryki posiadające stożkową niezdegenerowaną na płaszczyźnie niewłaściwej. Powierzchnie rodzaju 5_1 nazywamy *elipsoidami* (rys. 291 a); 5_2) — *paraboloidami eliptycznymi* (rys. 291 b) i 5_3) — *hiperboloidami dwupowłokowymi* (rys. 291 c). Płaszczyzna niewłaściwa jest styczna do paraboloidy eliptycznej.

W typie 6) będziemy mieli tylko dwa rodzaje. Ponieważ każda prosta leżąca na powierzchni przebija płaszczyznę niewłaściwą, więc możliwe są tylko dwa przypadki: 6_1) Φ posiada stożkową niewłaściwą niezdegenerowaną, 6_2) Φ posiada dwie proste niewłaściwe. W pierwszym przypadku mamy *hiperboloidę jednopowłokową eliptyczną*, w drugim tzw. *paraboloidę hiperboliczną* (rys. 295). W drugim przypadku np. nie istnieje płaszczyzna przecinająca powierzchnię w elipsie, gdyż przekrój musi mieć punkty wspólne z prostymi niewłaściwymi powierzchni.

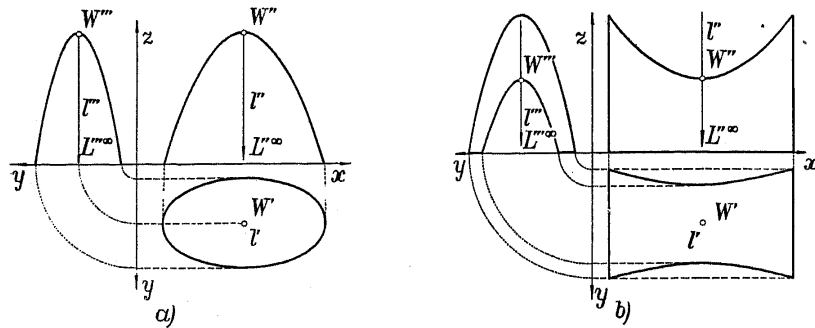
Z rozważań § 31, IV wynika, że płaszczyzna niewłaściwa jest styczna do paraboloidy hiperbolicznej.



Rys. 295.

II. Średnicą kwadryki nazwaliśmy krawędź dwóch płaszczyzn średnicowych, tzn. prostą l sprzężoną z prostą niewłaściwą l^∞ . Jeśli proste l i l^∞ są prostopadłe, tzn. jeśli prosta l ma kierunek prostopadły do płaszczyzn przechodzących przez l^∞ , to nazywamy ją *osią*. Jeśli l przebija powierzchnię w dwóch punktach, w których istnieją płaszczyzny styczne, to będą one prostopadłe do l , gdyż muszą przejść przez l^∞ (§ 31, ów. 2).

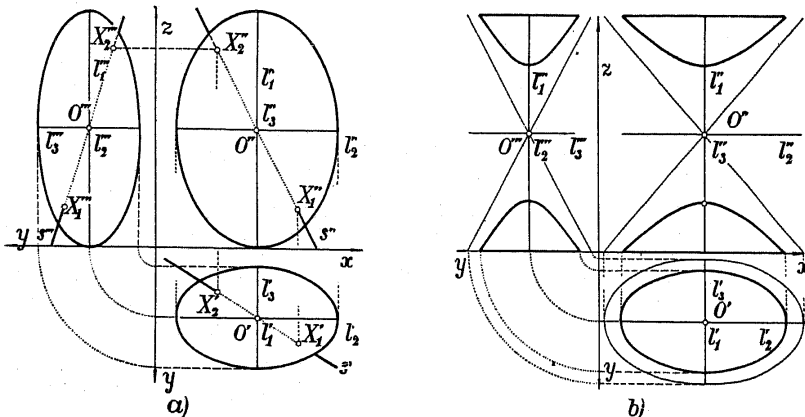
Znajdźmy oś paraboloidy eliptycznej (5_2). Zauważmy w tym celu, że płaszczyzna niewłaściwa ma z parabolą eliptyczną jeden punkt wspólny L^∞ , jest więc płaszczyzną styczną do niej. Weźmy prostą l^∞ prostopadłą do L^∞ , tzn. prostą niewłaściwą leżącą w płaszczyznach prostopadłych do kierunku L^∞ . Prosta l sprzężona z nią przechodzi przez L^∞ , a więc jest osią, ponieważ $l \perp l^\infty$. Drugi punkt W przebicia paraboloidy prostą l nazywamy *wierzchołkiem*. Jeśli przekroje płaszczyznami prostopadłymi do osi są elipsami, to paraboloidę nazywamy eliptyczną w ścisłym sensie (rys. 296 a), jeśli okręgami — to obrotową.



Rys. 296.

Podobnie znaleźć można oś paraboloidy hiperbolicznej (6₂). Płaszczyzna niewłaściwa jest styczna do powierzchni w punkcie L^∞ przecięcia tworzących niewłaściwych x^∞ i y^∞ . Prosta l sprzężona z prostą l^∞ prostopadłą do L^∞ jest osią; drugi punkt W przecięcia osią nazywa się *wierzchołkiem* (rys. 296 b). Każdy przekrój płaszczyzną równoległą do osi jest parabola, zawiera bowiem jeden tylko punkt niewłaściwy L^∞ powierzchni, mianowicie punkt przecięcia x^∞ i y^∞ , natomiast każdy przekrój płaszczyzną nierównoległą do osi jest hiperbola, gdyż przecina tworzące niewłaściwe x^∞ i y^∞ w dwóch różnych punktach.

Elipsoida (5₁, rys. 297 a), hiperboloida dwupowłokowa (5₃, rys. 297 b) i hiperboloida jednopowłokowa (6₁, rys. 298) posiadają *środki, które są punktami właściwymi*. Istotnie, płaszczyzna niewłaściwa ω^∞ nie posiada punktów wspólnych z elipsoidą, a hiperboloidy przecina w stożkowych niezdegenerowanych,



Rys. 297.

istnieje więc w obu wypadkach biegun O właściwy płaszczyzny ω^∞ , który nazywamy *środkiem powierzchni*. Zauważmy, że oś powierzchni musi przechodzić przez jej środek, ponieważ według definicji jest prostą sprzężoną z prostą niewłaściwą, która leży na ω^∞ .

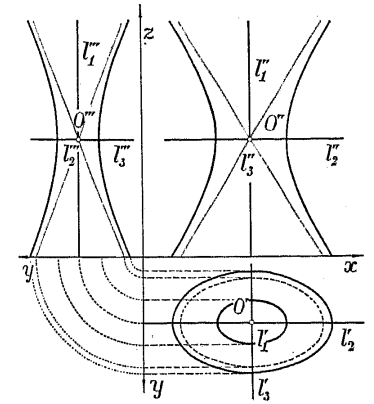
Niech $\varrho(s)$ oznacza odległość środka O od punktu przebiecia powierzchni prostą s przechodzącą przez środek (tzn. połowę cięciwy przechodzącej przez O). Jest to funkcja ciągła, która w przypadku elipsoidy określona jest dla wszystkich promieni wiązki $[O]$, w przypadku hiperboloid dla promieni znajdujących się wewnątrz, względnie zewnątrz stożka asymptotycznego (§ 31, ćw. 5). Oznaczmy przez l_1 promień, dla którego $\varrho(s)$ osiąga minimum. Oczywiście $\varrho(l_1) > 0$, ponieważ O nie należy do powierzchni. Zauważmy, że każdy przekrój powierzchni płaszczyzną przechodzącą przez l_1 posiada w punktach A i B na l_1 styczne prostopadłe do l_1 , a więc płaszczyzny styczne α i β do powierzchni w A i B są prostopadłe do l_1 . Ponieważ krawędź l_1^∞ płaszczyzn α i β jest sprzężona z l_1 (§ 31, ćw. 2), więc l_1 jest osią.

Okazuje się, że rozpatrywane powierzchnie mają jeszcze po dwie osie. Weźmy przekrój powierzchni płaszczyzną λ_1 biegunową punktu niewłaściwego L_1^∞ prostej l_1 . Niech l_2 i l_3 będą parą osi przekroju S_1 powierzchni płaszczyzną λ_1 , a L_2^∞ i L_3^∞ ich punktami niewłaściwymi. Łatwo zauważyć, że płaszczyzny λ_2 i λ_3 biegunowe punktów L_2^∞ i L_3^∞ przechodzą przez l_1 ; ponieważ S_1 leży na powierzchni, więc też λ_2 przechodzi przez l_3 , a λ_3 przez l_2 . Widzimy zatem, że l_2 jest prostą sprzężoną z $l_2^\infty = L_1^\infty L_3^\infty$, a l_3 prostą sprzężoną z $l_3^\infty = L_1^\infty L_2^\infty$. Ponieważ $l_2 \perp l_1 \perp l_3$, więc l_2 i l_3 są osiami powierzchni.

Mamy więc w przypadku elipsoidy, hiperboloidy jednopowłokowej i hiperboloidy dwupowłokowej trójki osi l_1 , l_2 i l_3 parami do siebie prostopadłych.

Jeśli oś przebija powierzchnię, to nazywa się *rzeczywistą*, jeśli nie ma z nią punktów wspólnych — *urojoną*. Elipsoida posiada trzy osie rzeczywiste, hiperboloida dwupowłokowa jedną rzeczywistą, a dwie urojone, hiperboloida jednopowłokowa dwie rzeczywiste i jedną urojoną.

Jeśli jeden z przekrojów płaszczyznami λ_1 , λ_2 lub λ_3 jest okręgiem, to każdy przekrój płaszczyzną równoległą jest okręgiem i wówczas powierzchnia jest obrotowa; jeśli tak nie jest, to powierzchnię nazywamy *trójosiową* w przypadku elipsoidy, a *eliptyczną* w przypadku hiperboloid.



Rys. 298.

Niech Δ będzie powierzchnią stożkową drugiego stopnia. Zauważmy, że przez każdy punkt nie leżący na Δ przechodzi jedna hiperboloida, dla której Δ jest stożkiem asymptotycznym (§ 31, ćw. 7); jest ona hiperboloidą dwupowłokową, jeśli punkt jest wewnątrz, jednopowłokową jeśli zewnątrz stożka. Niech Φ będzie jedną z nich. Oznaczmy przez l_i oś hiperboloidy Φ . Jest ona prostą sprzężoną z prostą l_i^∞ względem Φ ; ponieważ jednak Δ jest stożkiem opisanym na Φ wzdłuż stożkowej na płaszczyźnie ω^∞ , więc (§ 31, ćw. 4) prostej l_i^∞ odpowiada jako prosta sprzężona względem Δ ta sama prosta l_i . Widzimy więc, że osie hiperboloidy są osiami stożka. Z trzech płaszczyzn λ_1, λ_2 i λ_3 przechodzących przez pary osi dwie przecinają stożek w parach tworzących, a trzecia zawiera tylko wierzchołek stożka. Oś prostopadła do niej nazywa się *osią rzeczywistą*, dwie inne *urojone*. Jeśli płaszczyzny prostopadłe do osi rzeczywistej przecinają stożek w okręgach, to stożek jest *obrotowy*, jeśli w elipsach, to stożek nazywamy *trójosiowym*.

Jedna z osi walca eliptycznego jest — jak łatwo widzieć — prostą łączącą środki wszystkich przekrojów płaskich walca. Przez każdy jej punkt przechodzą jeszcze dwie osie. Są to osie przekroju walca płaszczyzną prostopadłą do pierwszej.

Podobnie jedną z osi walca hiperbolicznego jest zbiór wszystkich środków przecięcia płaskich walca. Przez każdy jej punkt przechodzą jeszcze dwie osie; są to osie hiperboli leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do pierwszej osi.

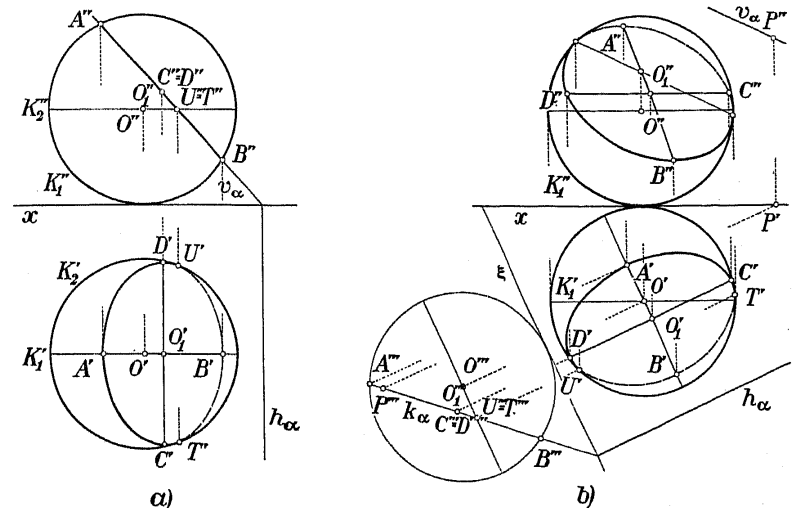
Dla walca parabolicznego weźmy przekrój płaszczyzną prostopadłą do tworzących. Łatwo zauważyć, że oś tego przekroju jest osią powierzchni.

III. Korzystając z tego, że każdą elipsoidę, paraboloidę eliptyczną i hiperboloidę dwupowłokową można za pomocą przekształcenia rzutowego zamienić na kulę, będziemy się starali zadania o charakterze niezmienniczym ze względu na te przekształcenia zastąpić odpowiednimi zadaniami dla kuli.

ZADANIE I. Przeciąć kulę płaszczyzną.

Jeśli płaszczyzna α jest prostopadła do rzutni pionowej, to rzut pionowy okręgu przecięcia kuli jest odcinkiem $A''B''$ śladu pionowego (rys. 299 a), ponieważ każdy punkt, który leży na α , posiada rzut pionowy na v_α . Punkty A i B znajdują się na okręgu K_2 kuli, który leży w płaszczyźnie równoległej do rzutni pionowej, a przechodzącej przez środek kuli. Rzut poziomy tego okręgu jest odcinkiem równoległym do x , a równym średnicy kuli. Na ten odcinek należy przenieść rzuty punktów A i B .

Weźmy średnicę CD przekroju prostopadłą do AB . Rzut pionowy będzie środkiem odcinka $A''B''$, poziomy odcinkiem $C'D'$ prostopadłym do x i równym rzeczywistej wielkości średnicy przekroju, tzn. $A''B''$. Ponieważ AB i CD



Rys. 299.

są średnicami sprzężonymi okręgu, więc $A'B'$ i $C'D'$ będą średnicami sprzężonymi elipsy, która jest rzutem poziomym tego okręgu; ale $A'B' \perp C'D'$, zatem są one osiami.

Jeśli jak na rys. 299 a punkt A leży na górnej półkuli, a B na dolnej, to istnieją punkty T i U , w których przekrój przecina granicę obu półkul, tj. okrąg K_2 . Przenosząc T'' i U'' do rzutu poziomego K_2 otrzymamy punkty styczności przekroju z zarysem kuli.

W przypadku, gdy płaszczyzna α nie jest prostopadła do π_2 ani do π_1 , przyjmujemy trzecią rzutnię π prostopadłą do h_α (rys. 299 b). Po rozwiązaniu zadania na rzutni π_1 i π przenosimy osie przekroju do rzutu pionowego. Oczywiście rzuty pionowe osi nie będą prostopadłe do siebie, będą więc tylko parą średnic sprzężonych. Gdybyśmy chcieli znaleźć osie rzutu pionowego przekroju i punkty styczności z zarysem, to należałoby przyjąć rzutnię π' prostopadłą do v_α i wykonać konstrukcję analogiczną jak na π_1 .

ZADANIE II. Znaleźć punkty przebicia kuli prostą l .

Przez prostą l przesuwamy płaszczyznę α prostopadłą do rzutni poziomej. Przecina ona kulę w okręgu K o średnicy AB (rys. 300); środek O_1 znajduje się na prostej prostopadłej do α , a przechodzącej przez środek kuli O . Ponieważ $\alpha \perp \pi_1$, więc $OO_1 \parallel \pi_1$, tzn. że wysokość punktu O_1 równa jest wysokości

środku kuli. Możemy zatem wykonać kład płaszczyzny na rzutnię poziomą, narysować w kładzie okrąg K i prostą l i punkty przecięcia z kładu przenieść do rzutu.

Dla prostej l_1 równoległej do rzutni poziomej przyjmujemy płaszczyznę $\alpha_1 // \pi_1$ i przecięcie kuli (tzn. równoleżnik) rysujemy w rzucie poziomym. Punkty wspólne l'_1 z rzutem poziomym równoleżnika są szukanymi punktami.

Podobnie rozwiązać można zadanie, gdy $l_2 // \pi_2$.

ZADANIE III. Znaleźć przekrój elipsoidy płaszczyzną.

Niech α będzie płaszczyzną prostopadłą do rzutni pionowej, a Φ elipsoidą obrotową o osi prostopadłej do rzutni poziomej (rys. 301).

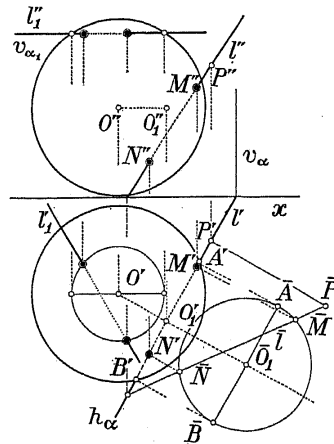
Weźmy powinowactwo o płaszczyźnie stałej τ przechodzącej przez środek O elipsoidy, a prostopadłej do osi obrotu l , w którym punktowi P na l odpowiada taki punkt P_1 , że OP_1 równa się promieniowi okręgu elipsoidy (tzn. na τ).

Wówczas elipsoidzie Φ odpowiadać będzie kula Φ_1 wpisana w nią wzdłuż największego okręgu. Płaszczyźnie α odpowie płaszczyzna α_1 , również prostopadła do rzutni pionowej, gdyż musi przechodzić przez krawędź k płaszczyzn α i τ . Wystarczy już obrać jeden tylko punkt na α i znaleźć jemu odpowiadający; niech to będzie punkt X na prostej równoległej do x , a przechodzącej przez P . Punkt X_1 musi się znajdować na prostej równoległej do niej i wychodzącej z P_1 oraz na $XX_1 // l$. Ślad pionowy zatem płaszczyzny α_1 przechodzi przez k'' i X''_1 , poziomy jest prostopadły do x .

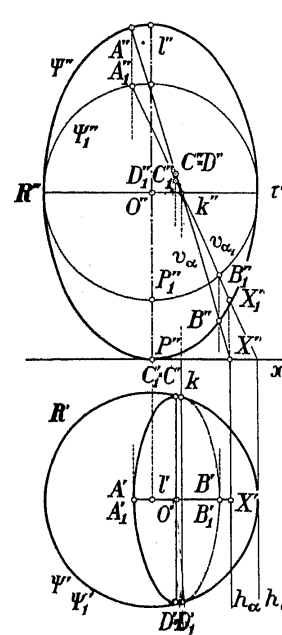
Przekrój kuli płaszczyzną α_1 znajdujemy jak w zadaniu I. Przenosząc osie A_1B_1 i C_1D_1 przekroju kuli do elipsoidy znajdziemy szukane osie AB i CD .

Ponieważ kierunek powinowactwa jest pionowy, więc oczywiście przekrój kuli i elipsoidy mają wspólny rzut poziomy.

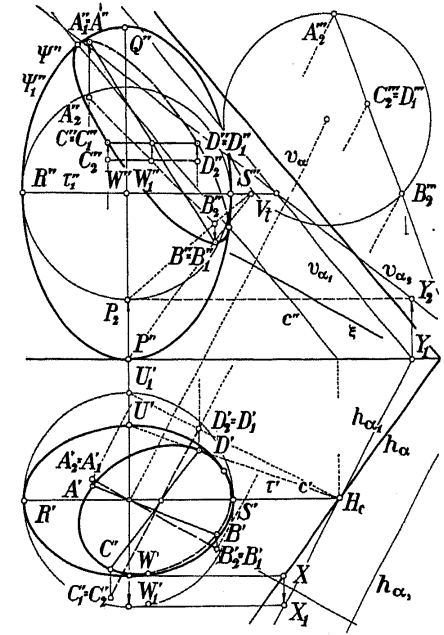
Niech teraz elipsoida Φ będzie nieobrotowa, a płaszczyzna α dowolna (rys. 302). W tym przypadku będzie można powierzchnię Φ przekształcić na kulę za pomocą dwóch powinowactw: jedno o płaszczyźnie stałej τ_1 przechodzącej przez osie PQ i RS i parze odpowiadających sobie punktów W i W_1 , które przeprowadzi Φ w elipsoidę obrotową Φ_1 o osiach PQ , RS i U_1W_1 i drugie o płaszczyźnie stałej τ_2 przechodzącej przez RS i U_1W_1 , które podobnie jak na rysunku poprzednim zamieni Φ_1 na kulę Φ_2 .



Rys. 300.



Rys. 301.



Rys. 302.

Pozostaje nakreślenie śladów płaszczyzny α_1 odpowiadającej płaszczyźnie α w pierwszym powinowactwie i płaszczyzny α_2 , która na podstawie drugiego powinowactwa odpowiada płaszczyźnie α_1 . Oczywiście α_1 przechodzi przez krawędź c płaszczyzn α i τ oraz przez punkt X_1 odpowiadający punktowi X przyjętemu na śladzie poziomym h_{α} ; ponieważ X_1 znajduje się na π_1 , więc otrzymujemy h_{α_1} łącząc X_1 z H_c . Ślad pionowy h_{α_1} będzie oczywiście równoległy do c'' . Dla wykreślenia śladów płaszczyzny α_2 przenosimy punkt Y_1 śladu pionowego h_{α_1} i korzystamy z tego, że krawędź t płaszczyzn α_1 i τ musi leżeć na α_2 .

Po wyznaczeniu osi A_2B_2 i C_2D_2 przekroju kuli przenosimy je do elipsoidy, obrotowej i w końcu tak znalezione osie A_1B_1 i C_1D_1 do elipsoidy trójosiowej uzyskując dla szukanego przekroju również osie AB i CD .

ZADANIE IV. Znaleźć punkty przebiecia paraboloidy obrotowej prostą m .

Przekształćmy paraboloidę na kulę. Najłatwiej będzie to można zrobić wpisując kulę Φ_0 w powierzchnię wzdłuż danego okręgu S (na rys. 303 przyjęto okrąg na rzutni poziomej). Za środek kolineacji weźmy wierzchołek W stożka opisanego na obu powierzchniach wzdłuż okręgu S .

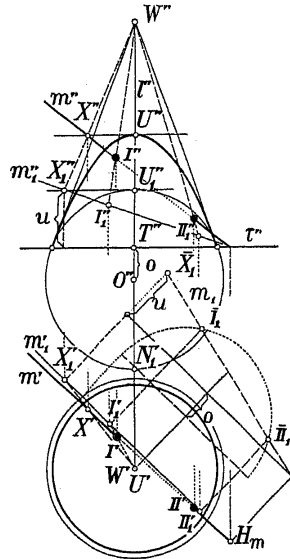
Przyjmując jeszcze płaszczyznę τ okręgu S za płaszczyznę kolineacji, a wierzchołek paraboloidy U i jeden z punktów kuli na osi l za parę odpowiadających sobie elementów, otrzymamy kolineację, która paraboloidę przeprowadza w kulę Φ_0 , gdyż jest ona jedyną kwadryką, która przechodzi przez U_1 i styka się ze stożkiem wzdłuż S (punkt niewłaściwy N^∞ paraboloidy przejdzie na drugi punkt N_1 kuli na osi l , ponieważ płaszczyzna $\pi = \tau$ jest wspólną płaszczyzną biegunową punktu W względem obu powierzchni i czwórka harmoniczna $(WTUN^\infty)$ musi przejść na czwórkę harmoniczną (WTU_1N_1)).

Przenieśmy teraz punkt X prostej m na płaszczyźnie stycznej w U do paraboloidy do punktu X_1 na płaszczyźnie stycznej w U_1 do kuli (oczywiście W , X i X_1 leżą na prostej). Łącząc X_1 z punktem H_m prostej m na płaszczyźnie kolineacji otrzymujemy prostą m_1 , którą następnie przebijamy kulę jak w zadaniu II. Uzyskane punkty A_1 i B_1 przenosimy do prostej m , osiągając w ten sposób cel zadania.

Gdyby paraboloida była eliptyczna, to podobnie jak w zadaniu poprzednim, należałoby ją najpierw zamienić na paraboloidę obrotową za pomocą powinowactwa prostokątnego o kierunku osi elipsy leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do punktu niewłaściwego powierzchni.

ĆWICZENIA.

1. Czy hiperboloidę jednopowłokową eliptyczną można przeciąć w okręgu?
2. Co tworzy zbiór wszystkich prostych równoległych do płaszczyzny α i przecinających proste skośne a i b nierównoległe do α ?
3. Narysować płaszczyzny styczne do kuli a : 1) równoległe do danej płaszczyzny, 2) przechodzące przez daną prostą.
4. Narysować płaszczyznę biegunową punktu względem kuli.
5. Znaleźć punkty przecięcia hiperboloidy dwupowłokowej prostą.
6. Znaleźć przekrój 1) paraboloidy eliptycznej, 2) hiperboloidy dwupowłokowej daną płaszczyzną.
7. Nakreślić płaszczyzny styczne do elipsoidy a przechodzące przez daną prostą.
8. Narysować płaszczyznę styczną do paraboloidy eliptycznej a prostopadłą do danej prostej.
9. Narysować prostą sprzężoną z daną prostą względem 1) kuli, 2) elipsoidy trójosiowej, 3) paraboloidy eliptycznej i 4) hiperboloidy dwupowłokowej.
10. Przyjąć trzy odcinki AB , CD i EF połowiące się i parami do siebie prostopadłe, ale tak, by tylko jeden był równoległy do π i znaleźć rzut poziomy elipsoidy, której osiami są dane odcinki.



Rys. 303.

ROZDZIAŁ V.

PRZENIKANIE POWIERZCHNI

§ 33. Powierzchnie obrotowe

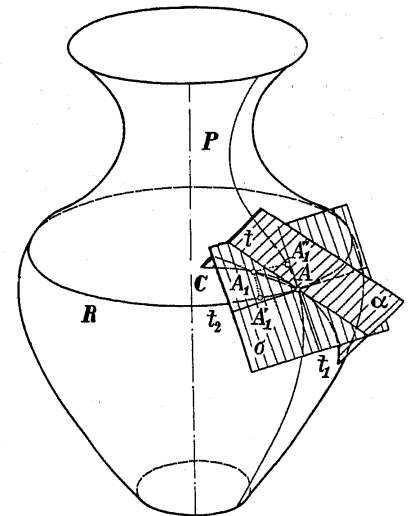
I. Weźmy pod uwagę pewną krzywą C oraz prostą l . Przez obrót C dookoła l powstaje pewna *powierzchnia obrotowa*.¹

Każdy przekrój powierzchni obrotowej (rys. 304) płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu l jest okręgiem lub składa się z wielu okręgów; nazywamy je *równoleżnikami* powierzchni. Równoleżnik o minimalnym promieniu nazywamy *okręgiem szyjnym*, równoleżnik o maksymalnym promieniu *równikiem*.

Przekrój powierzchni obrotowej płaszczyzną przechodzącą przez oś l nazywamy *południkiem* powierzchni. Każde dwa południki są równe (przystające), dają się bowiem nałożyć na siebie przez obrót.

Łatwo zauważyć, że przez obrót południka dokoła osi powstaje ta sama powierzchnia.

Niech A będzie punktem powierzchni obrotowej nie leżącym na osi l , P i R południkiem i równoleżnikiem przechodzącym przez A . Założmy, że południk jest krzywą posiadającą w punkcie A styczną t_1 i weźmy pod uwagę płaszczyznę σ przechodzącą przez t_1 i styczną t_2 do równoleżnika zawierającego punkt A . Niech α będzie płaszczyzną przechodzącą przez A , ale różną od σ , C przekrojem powierzchni płaszczyzną α , a A_1 punktem na C . Łatwo udowodnić, że proste AA_1 dążą do krawędzi t płaszczyzny α i σ , gdy A_1 dąży do A . (Można by badać granice siecznych AA_1'' , wzgl. AA_1' , gdzie A''_1 , wzgl. A'_1 są punktami przecięcia P , wzgl. R i równoleżnika, wzgl. po-



Rys. 304.

¹ Oczywiście z wyjątkiem przypadku, gdy C jest okręgiem, a l prostą przechodzącą przez jego środek i prostopadłą do płaszczyzny okręgu.