

ROZDZIAŁ III

KRZYWE DRUGIEGO STOPNIA

§ 22. Punkty niewłaściwe

Przedmiotem dalszych rozważań będą zbiory wszystkich punktów prostej, wszystkich punktów płaszczyzny i wszystkich punktów przestrzeni trójwymiarowej. Dla krótkości każdy z tych zbiorów nazywać będziemy też *przestrzenią*. Prócz tych przestrzeni będzie mowa również o innych zbiorach. Jednym z nich będzie zbiór wszystkich prostych pewnej płaszczyzny, przechodzących przez dany punkt W ; nazywać go będziemy *pękiem prostych* i oznaczać przez (W) , a sam punkt W — *wierzchołkiem pęku*.

Pojęciem grającym zasadniczą rolę w całej matematyce, a więc również w geometrii, jest pojęcie *funkcji*. W początkach analizy rozpatruje się prawie wyłącznie funkcje określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przybierające jako wartości też liczby rzeczywiste. Pojęcie to daje się uogólnić na dowolne zbiory jak następuje:

Niech X i Y będą wolnymi zbiorami (przestrzeniami). Jeśli każdemu elementowi X zbioru X przyporządkowany jest pewien (ale tylko jeden) element Y zbioru Y , to przyporządkowanie takie nazywa się *funkcją* (lub *przekształceniem*, lub *odwzorowaniem*) *określoną na zbiorze X i mającą wartości ze zbioru Y* .

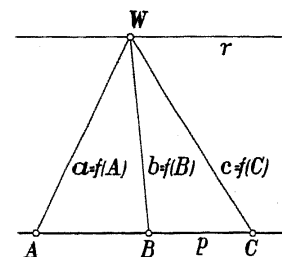
Funkcje oznacza się przez f , F , g , G itd. Element Y zbioru Y przyporządkowany przez funkcję f elementowi X zbioru X oznaczamy przez $f(X)$ i nazywamy *obrazem elementu X* . Zbiór obrazów wszystkich elementów X zbioru X oznaczamy przez $f(X)$ i nazywamy *obrazem zbioru X* . Jeśli obraz $f(X)$ wypełnia cały zbiór Y , to mówimy, że funkcja f odwzorowuje zbiór X na cały zbiór Y , w przeciwnym razie, że przekształca go tylko na część zbioru Y .

W szczególnym przypadku zbioru X i Y mogą być identyczne.

Podstawowe znaczenie dla nauki o rzutach ma pewna funkcja $x = f(X)$ określona na zbiorze X wszystkich punktów prostej p , a której zbiorem wartości jest pęk (W) , leżący w płaszczyźnie zawierającej prostą p i mający wierzchołek poza prostą p .

Funkcja ta określona jest jak następuje: obrazem (czyli wartością funkcji) każdego punktu X prostej p jest prosta x pęku (W) przechodząca przez punkt X (rys. 209).

W ten sposób każdemu punktowi prostej p przyporządkowana jest jednoznacznie jakaś prosta pęku. Zauważmy, że wszystkie proste pęku, z wyjątkiem prostej r równoległej do p , posiadają swoje odpowiedniki na prostej p (są wartościami funkcji f). Zatem funkcja f przekształca prostą p na $Y - r$, tzn. na zbiór otrzymany z Y przez odrzucenie elementu r . Na gruncie tego przekształcenia wydaje się, jak gdyby przestrzeń X (zbiór punktów prostej p) była uboższa o jeden element od zbioru (W) .



Rys. 209.

Dział geometrii, którego podstawowe pojęcia mają liczne zastosowania w dalszej części tej książki, nazywa się *geometrią rzutową*.

Geometria rzutowa zajmuje się tylko takimi własnościami zbiorów, które nie ulegają zmianie przy przekształceniu za pomocą wyżej określonej funkcji f i analogicznych funkcji. Jeśli więc np. pewna para punktów A, B ma własność Φ i tę samą własność ma para $f(A), f(B)$, to własność ta będzie należała do geometrii rzutowej jako niezmiennik przekształcenia f . Z punktu widzenia rzutowego jest więc obojętne, czy mowa o przestrzeni X , czy o przestrzeni $f(X)$; są one jedynie obiektami, do których odnoszą się pewne twierdzenia, są jak gdyby dwiema interpretacjami tej samej rzeczy. Aby jednak objąć rozważaniami rzutowymi całą przestrzeń $Y = (W)$, zachodzi potrzeba wzbogacenia przestrzeni X o jeden element, któremu byłaby przyporządkowana prosta r pęku.

Ta alternatywa została systematycznie zbadana i opracowana przez Ponceleta.¹ Stała się ona podstawą, na której zbudowano geometrię rzutową.

W geometrii rzutowej jest więc mowa o tworach nieco bogatszych w elementy (punkty) niż zwykła prosta z geometrii elementarnej. To rozszerzenie przestrzeni rozpatrywanych w geometrii elementarnej dokonuje się w następujący sposób:

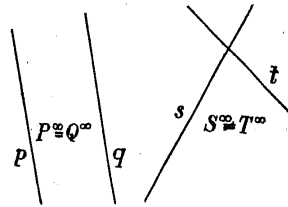
Niech E_3 oznacza zwykłą, dobrze znaną z geometrii elementarnej przestrzeń trójwymiarową, którą od tej chwili nazywać będziemy przestrzenią euklidesową. Do elementów zwykłych, punktów, dołączamy pewne nowe elementy, które nazywać będziemy *punktami niewłaściwymi* i oznaczać dużymi literami ze znaczką ∞ , np. P^∞, Q^∞ , itd. w taki sposób, aby były spełnione następujące postulaty:

¹ J. V. Poncelet, matematyk francuski, ur. 1789, † 1867. Głównym jego dziełem jest „*Traité des propriétés projectives des figures*” (1822).

(1) Na każdej prostej p znajduje się jeden i tylko jeden punkt niewłaściwy P^∞ .

(2) Jeśli proste p i q są równoległe, to $P^\infty = Q^\infty$, tzn. proste równoległe mają wspólny punkt niewłaściwy (rys. 210).

(3) Jeśli proste s i t nie są do siebie równoległe, to $S^\infty \neq T^\infty$.



Rys. 210.

Punkty przestrzeni euklidesowej, w odróżnieniu od punktów niewłaściwych, nazywać będziemy punktami właściwymi.

Przestrzeń euklidesową E_3 , powiększoną o wszystkie punkty niewłaściwe nazywać będziemy *przestrzenią rzutową* i oznaczać przez P_3 .

Podobnie, *płaszczyznę rzutową* nazywamy sumę płaszczyzny zwykłej, euklidesowej E_2 i wszystkich punktów niewłaściwych dołączonych do prostych tej płaszczyzny; oznaczać ją będziemy przez P_2 .

W końcu przez prostą rzutową P_1 rozumie się prostą zwykłą, euklidesową, E_1 powiększoną o jeden punkt niewłaściwy.¹

Łatwo zauważyć, że jeśli w postulatach (1)–(3) podstawimy zamiast terminu „punkt niewłaściwy” słowo „kierunek”, to będą one spełnione. Korzystając z tego, będziemy na rysunkach zaznaczać punkt niewłaściwy, umieszczając na prostej lub na równoległej do niej strzałkę (obojętnie z jakim zwrotem).

Przejrzymy teraz najbardziej podstawowe własności płaszczyzny rzutowej.

Jeśli proste a i b płaszczyzny P_2 nie są równoległe, to mają punkt właściwy wspólny; jeśli zaś są równoległe, to mają wspólny punkt niewłaściwy. Będziemy w tym przypadku mówili również, że proste a i b przecinają się w punkcie niewłaściwym. Widzimy więc, że każde dwie proste płaszczyzny rzutowej mają punkt wspólny (przecinają się); dla pewnych prostych ten punkt wspólny jest właściwy, dla innych niewłaściwy.

Weźmy prostą a równoległą do płaszczyzny α ; wiadomo, że istnieją proste równoległe do a i leżące na α ; niech b będzie jedną z nich.

Punkt niewłaściwy A^∞ prostej a jest też punktem prostej b , a zatem według definicji, również punktem płaszczyzny rzutowej α . Widzimy więc, że każda prosta rzutowa a ma punkt wspólny z płaszczyzną rzutową α i że w pewnym przypadku ten punkt jest właściwy, a w innym niewłaściwy. Wtedy będziemy również mówili, że prosta a przebija płaszczyznę α w punkcie

niewłaściwym. Widzimy więc, że w przestrzeni rzutowej każda prosta nie leżąca w płaszczyźnie ma z nią jeden punkt wspólny.

Oznaczmy przez z_α^∞ zbiór wszystkich punktów niewłaściwych płaszczyzny α . Zbiór ten ma z każdą prostą jeden punkt (niewłaściwy) wspólny.

Poza tym każda płaszczyzna β równoległa do α zawiera również zbiór z_α^∞ . Inaczej: dwie płaszczyzny mają albo prostą wspólną, albo zbiór z_α^∞ wspólny.

Okazuje się dogodne nazywać zbiór z_α^∞ *prostą niewłaściwą*. Zyskuje się dzięki temu ogólność w wypowiedzianiu twierdzeń i definicji. Tak np. zdanie „dwa różne punkty określają jedną prostą” pozostaje prawdziwe i wtedy, gdy oba punkty są niewłaściwe (jest nią wtedy prosta niewłaściwa z_α^∞).

Podobnie, twierdzenie, że dwie płaszczyzny mają prostą wspólną (przecinają się wzdłuż prostej), jest prawdziwe również w przypadku równoległości płaszczyzn (przecinają się wzdłuż prostej niewłaściwej).

Zauważmy, że wprowadzenie prostej niewłaściwej nie burzy prawdziwości tych twierdzeń, w których słowo „prosta” używane było w znaczeniu prostej właściwej. Tak np. zdanie „każde dwie proste płaszczyzny mają punkt wspólny” pozostaje słuszne, gdy jedna z nich jest prostą niewłaściwą.

Wprowadzimy jeszcze jedną nazwę:

Zbiór wszystkich punktów niewłaściwych przestrzeni rzutowej nazywamy *płaszczyzną niewłaściwą*.

Łatwo sprawdzić, że twierdzenia geometrii euklidesowej pozostają prawdziwe, gdy słowo „płaszczyzna” zastąpimy w nich słowami „płaszczyzna niewłaściwa”; np. twierdzenie, że dwie proste a i b płaszczyzny mają punkt wspólny, pozostaje prawdziwe i wtedy, gdy mamy na myśli płaszczyznę niewłaściwą. Wtedy bowiem prosta a^∞ należy do pewnej płaszczyzny właściwej α (i wszystkich do niej równoległych), b^∞ do płaszczyzny β (i wszystkich do niej równoległych) i widać, że punkt niewłaściwy krawędzi (właściwej) α i β jest wspólnym punktem niewłaściwym prostych a^∞ i b^∞ . Zdania „każde dwie płaszczyzny mają prostą wspólną”, „prosta ma z płaszczyzną jeden punkt wspólny lub na niej leży” itd. pozostają nadal prawdziwe, gdy przez płaszczyznę rozumie się też płaszczyznę niewłaściwą.

Od tej chwili używać będziemy terminów punkt, prosta i płaszczyzna w znaczeniu szerszym, rozumiejąc przez nie zarówno punkty, proste i płaszczyzny właściwe, jak niewłaściwe.

¹ Z podobnymi operacjami rozszerzania przestrzeni spotykamy się w analizie i teorii liczb, gdy do zbioru liczb *wymiernych* dołączamy liczby niewymierne, tworząc zbiór liczb *rzeczywistych*.

§ 23. Homologia, kolineacja i przekształcenie rzutowe

I. Zbiór wszystkich punktów prostej rzutowej nazywamy *szeregiem punktów o podstawie p* i oznaczać będziemy przez (p) .

Definicję funkcji $x = f(X)$, podaną w § 22, przekształcającej prostą euklidesową p na część zbioru prostych pęku, rozszerzymy na prostą rzutową (szereg punktów), pisząc $f(P^\infty) = r$, tzn. przypisując punktowi niewłaściwemu prostej p promień pęku równoległy do p .

Zauważmy, że dla każdej prostej x pęku istnieje jeden punkt X (punkt przecięcia p z x) taki, że $f(X) = x$. Jest więc określona funkcja, która przekształca pęk w szereg; nazywamy ją funkcją odwrotną i oznaczamy przez $X = f^{-1}(x)$.

Funkcje $x = f(X)$ oraz $X = f^{-1}(x)$ nazywamy *przekształceniem homologicznym* lub *homologią*.

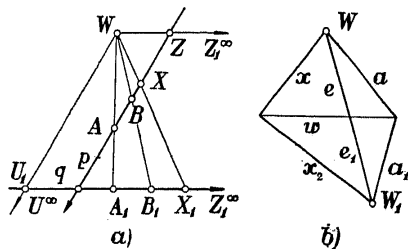
Przetnijmy proste p i q promieniami pęku o wierzchołku nie należącym do żadnej z nich i przyporządkujmy sobie wzajemnie te punkty X i X_1 , które leżą na jednej prostej pęku (rys. 211 a). Jeśli $X = f(x)$ i $x = \varphi(X_1)$ są funkcjami określającymi przekształcenie homologiczne odpowiednio pęku w szereg o podstawie p i szeregu o podstawie q w pęk, to funkcja złożona da się napisać w postaci $X = f[\varphi(X_1)]$ lub (opuszczając nawiasy) $X = f\varphi(X_1)$, a odwrotna jako $X_1 = \varphi^{-1}f^{-1}(X)$. Nazywając je będziemy również *przekształceniem homologicznym* szeregów o podstawach p i q .

Zauważmy, że punktowi Z_1^∞ szeregu (q) odpowiada punkt Z (właściwy, jeśli $p \nparallel q$), punktowi zaś U^∞ szeregu (p) — punkt U_1 (właściwy, jeśli $p \nparallel q$) w szeregu (q) .

Analogicznie określamy przekształcenie homologiczne pęków (W) i (W_1) w siebie, przyporządkowując sobie wzajemnie takie promienie x i x_1 (rys. 211 b), które przecinają się w punkcie pewnej prostej w nie zawierającej wierzchołków W i W_1 .

Tak więc zarówno w homologii pęków, jak w homologii szeregów prosta łącząca wierzchołki, a także punkt przecięcia podstaw, są przyporządkowane sobie samym.

Niech teraz dana będzie dowolna skończona ilość szeregów (p_1) , (p_3) , (p_5) , ... oraz pęków (W_2) , (W_4) , (W_6) , ... Załóżmy, że funkcja f_1 określa homo-



Rys. 211.

logię między (p_1) a (W_2) , funkcja f_2 homologię między (W_2) a (p_3) , funkcja f_3 homologię między (p_3) a (W_4) itd. (rys. 212).

Niech

$$x_n = f_{n-1} f_{n-2} \dots f_2 f_1(x_1) = \varphi(x_1);$$

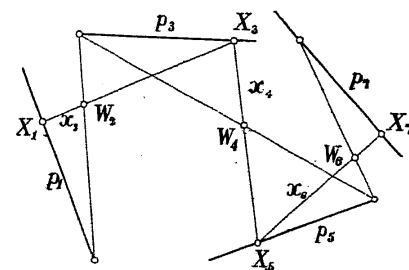
funkcja $x_n = \varphi(x_1)$ przekształca szereg (p_1) w pęk (W_n) lub w szereg (p_n) zależnie od tego, czy n jest liczbą parzystą, czy nieparzystą.

Podobnie funkcja

$$X_n = f_{n-1} f_{n-2} \dots f_3 f_2(X_2) = \psi(X_2)$$

przekształca pęk (W_2) w szereg (p_n) lub w pęk (W_n) zależnie od parzystości lub nieparzystości liczby n .

Przekształcenie określone między elementami dwu pęków lub pęku i szeregu, lub dwu szeregów, uzyskane za pomocą funkcji złożonej ze skończonej ilości funkcji homologicznych, nazywamy *przekształceniem homograficznym* lub *rzutowym*. W szczególności (gdy $n = 1$ lub 2) przekształcenie homologiczne jest przekształceniem rzutowym. Łatwo zauważyć, że złożenie dwu przekształceń rzutowych jest przekształceniem rzutowym. Widać też, że w przekształceniu rzutowym każdemu elementowi jednego zbioru (pęku lub szeregu) odpowiada jeden element drugiego i na odwrót.

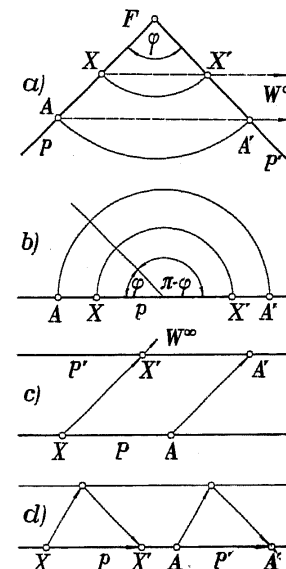


Rys. 212.

PRZYKŁADY.

1. Obróćmy prostą p dookoła jej punktu F o kąt $\varphi \neq n\pi$ i przyporządkujmy każdemu punktowi X punkt X' po dokonanych obrocie. Odpowiedniość ta jest — jak łatwo widzieć — homologią, gdyż proste łączące przyporządkowane sobie punkty (rys. 213 a) przechodzą przez punkt niewłaściwy W^∞ na prostej prostopadłej do dwusiecznej kąta obrotu.

2. Jeśli kąt obrotu równy jest π , to mamy symetrię. Uzyskać ją można jako przekształcenie złożone z dwu obrotów (rys. 213 b) o kąt φ i o kąt $\pi - \varphi$. W obu więc przypadkach przekształcenie będące wynikiem obrotu jest rzutowe.



Rys. 213.

3. Przesunięcie prostej p jest przekształceniem rzutowym (rys. 213 c). Jest to oczywiście, jeśli wektor przesunięcia nie leży w p , jeśli zaś leży, to można ruch rozłożyć na dwa przesunięcia o wektory nie leżące w p (rys. 213 d). Mamy więc twierdzenie:

Każdy ruch prostej jest przekształceniem rzutowym.

Podobnie okazuje się, że przesunięcie pęku i obrót pęku dookoła wierzchołka są przekształceniami rzutowymi. Dla obrotu dowód opiera się na poprzednim twierdzeniu o ruchu szeregu, zastosowanym do szeregu homologicznego z danym pękiem.

II. Weźmy pod uwagę trzy różne elementy A, B i C szeregu o podstawie p oraz trzy różne elementy A_1, B_1 i C_1 szeregu o podstawie q (rys. 214 a).

Udowodnimy, że istnieje przekształcenie rzutowe $X_1 = f(X)$, w którym punkty A, B i C przechodzą odpowiednio na A_1, B_1 i C_1 , tzn.:

$$A_1 = f(A), B_1 = f(B) \text{ i } C_1 = f(C).$$

Jeśli $p \neq q$ i ani A nie leży na q , ani A_1 na p , to weźmy dowolny punkt W na prostej AA_1 i przeprowadźmy dowolną prostą m przez punkt A_1 . Za pomocą rzutu szeregu (p) z punktu W na prostą m otrzymujemy (rys. 214) homologię z szeregiem (m) taką, że:

$$\bar{A} = \varphi(A), \bar{B} = \varphi(B) \text{ i } \bar{C} = \varphi(C).$$

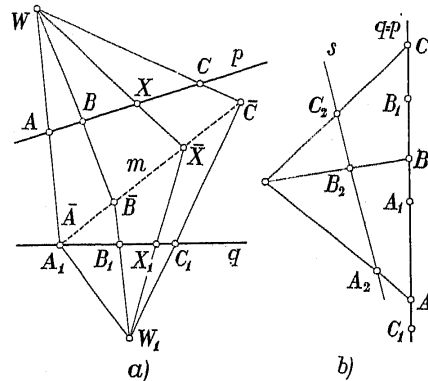
Połączmy teraz punkt $\bar{B}$ z B_1 i $\bar{C}$ z C_1 . Oznaczmy przez W_1 punkt przecięcia. Niech ψ będzie homologią szeregów (m) i (q) określoną rzutem z punktu W_1 . Mamy oczywiście:

$$A_1 = \psi(\bar{A}), B_1 = \psi(\bar{B}) \text{ i } C_1 = \psi(\bar{C}).$$

Jest widoczne, że funkcja $f = \psi\varphi$ jest przekształceniem szeregu (p) na szereg (q). Istotnie:

$$f(A) = \psi\varphi(A) = \psi(\bar{A}) = A_1, f(B) = \psi\varphi(B) = \psi(\bar{B}) = B_1, f(C) = \psi\varphi(C) = \psi(\bar{C}) = C_1.$$

Jeśli $p = q$ albo A leży na q , albo A_1 na p , to sprowadzamy zadanie do poprzedniego za pomocą nowego szeregu o podstawie s , różnej od p i q (rys. 214 b).



Rys. 214.

Zauważmy, że dowód jest efektywny, gdyż konstrukcja pozwala dla każdego punktu X znaleźć odpowiadający mu punkt $X_1 = f(X)$.

Udowodnimy w § 27, że $f(X)$ jest jedynym przekształceniem rzutowym przeprowadzającym punkt A na A_1 , B na B_1 i C na C_1 (konstrukcyj jest oczywiście nieskończenie wiele, ale każda z nich przyporządkowuje punktowi X ten sam punkt X_1).

Podobnie postępujemy, gdy chcemy określić przekształcenie rzutowe między elementami dwu pęków tak, by dane trzy proste a, b i c pęku (W) przeszły odpowiednio na dane trzy proste a_1, b_1 i c_1 pęku (W_1): przez punkt przecięcia a i a_1 (rys. 215) prowadzimy dwie proste m i m_1 i bierzemy pod uwagę pęk o wierzchołku w punkcie M przecięcia prostych $\bar{b}$ i $\bar{c}$, łączących punkty przecięcia b z m i b_1 z m_1 oraz c z m i c_1 z m_1 . Oznaczając przez φ przekształcenie homologiczne pęku (W) na pęk (M) (odpowiadające sobie elementy przecinają się na m) oraz przez ψ — przekształcenie homologiczne pęku (M) na pęk (W_1) (odpowiadające sobie elementy przecinają się na m_1), mamy szukane przekształcenie rzutowe $f(x) = \psi\varphi(x)$, spełniające warunki:

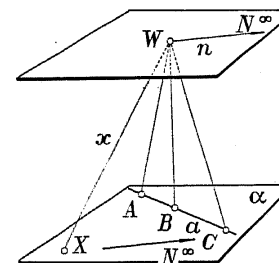
$$a_1 = f(a), b_1 = f(b), c_1 = f(c).$$

Podobnie rozwiązuje się analogiczne zadania dla pęku i szeregu.

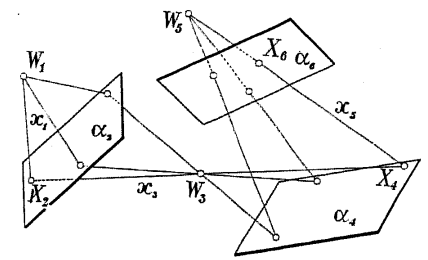
III. Zbiór wszystkich punktów i prostych płaszczyzny rzutowej α nazywamy *układem płaskim* i oznaczamy symbolem $[\alpha]$.

Zbiór wszystkich prostych i płaszczyzn przechodzących przez punkt W nazywamy *wiązką* i oznaczamy przez $[W]$.

Weźmy pod uwagę układ płaski $[\alpha]$ i wiązkę $[W]$ o wierzchołku W nie należącym do układu $[\alpha]$. Przyporządkujemy każdemu punktowi X układu $[\alpha]$ prostą x przechodzącą przez X (rys. 216).



Rys. 216.



Rys. 217.

Przekształcenie to nazywamy również *homologią*. Zauważmy, że punktom $A, B, C, \dots$ szeregu o podstawie a , leżącej na α , odpowiada na mocy tego przyporządkowania pęk homologiczny (W) zawarty w wiązce $[W]$. Gdy a jest prostą niewłaściwą (a więc taką, której wszystkie punkty są niewłaściwe), odpowiedni pęk leży w płaszczyźnie równoległej do α . Wynika stąd, że każdej prostej płaszczyzny α odpowiada płaszczyzna wiązki $[W]$.

Weźmy pod uwagę wiązki $[W_1], [W_3], \dots$ oraz układy płaskie $[\alpha_2], [\alpha_3], \dots$ (rys. 217). Niech f_1 będzie homologią między $[W_1]$ a $[\alpha_2]$, f_2 homologią między $[\alpha_2]$ a $[W_3]$ itd.

Przekształcenie

$$f(x) = f_n \circ f_{n-1} \dots \circ f_1(x),$$

złożone ze skończonej ilości przekształceń homologicznych między wiązkami a układami płaskimi, nazywamy przekształceniem *kolineacyjnym* lub *rzutowym* (wiązki na wiązkę, układ na układ, układu na wiązkę), a także *kolineacją*.

Z własności homologii między układami płaskimi a wiązkami wynika, że w przekształceniu rzutowym układów płaskich zawsze prostej odpowiada prosta.

Specjalnie ważne jest takie przekształcenie rzutowe dwu układów płaskich $[\alpha]$ i $[\alpha_1]$, w którym punkty wzajemnie sobie przyporządkowane leżą na prostych przechodzących przez punkt stały W . Takie przekształcenie nazywa się przekształceniem *środkowo-kolineacyjnym* lub *kolineacją środkową*.

Mogą zajść dwa przypadki:

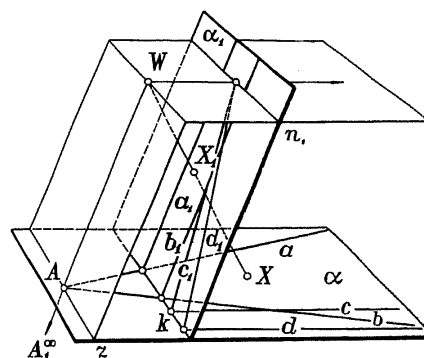
1. $\alpha \neq \alpha_1$.

Punkt W nie może wówczas należeć ani do układu $[\alpha]$, ani do układu $[\alpha_1]$, ponieważ w przeciwnym razie przekształcenie nie byłoby wzajemnie jednoznaczne (rys. 218).

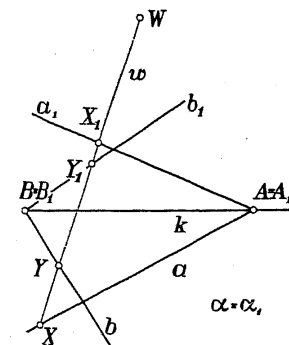
Punkt W nazywamy *środkiem kolineacji*, a krawędź k przecięcia obu płaszczyzn — *osią kolineacji*. Każdemu punktowi osi kolineacji odpowiada on sam. Z tego wynika, że proste odpowiadające sobie wzajemnie przecinają się na osi kolineacji.

Punktom układu $[\alpha]$ leżącym w płaszczyźnie równoległej do α_1 a przechodzącej przez W odpowiadają punkty niewłaściwe układu $[\alpha_1]$. Zbiór wszystkich punktów niewłaściwych płaszczyzny α_1 nazwaliśmy prostą niewłaściwą z_1^∞ . Widać, że prosta z układu $[\alpha]$, odpowiadająca prostej niewłaściwej układu $[\alpha_1]$, jest równoległa do osi kolineacji. Jeśli weźmiemy na płaszczyźnie proste równoległe a_1 i b_1 , tzn. proste mające wspólny punkt niewłaściwy A_1^∞ , to oczywiście proste a i b będą przechodziły przez punkt A odpowiadający punktowi A_1^∞ : proste a i b przecinają się wobec tego na z .

Podobnie punktom niewłaściwym układu $[\alpha]$ odpowiadają punkty układu $[\alpha_1]$, leżące na przecięciu z płaszczyzną równoległą do α , a przechodzącą przez



Rys. 218.



Rys. 219.

środek kolineacji W : prostej niewłaściwej n^∞ układu $[\alpha]$ odpowiada więc prosta n_1 równoległa do osi kolineacji. Jeśli dwie proste c_1 i d_1 układu $[\alpha_1]$ przecinają się na n_1^∞ , to odpowiadające im proste c i d są równoległe.

Proste z i n_1 nazywać będziemy *prostymi granicznymi*. Łatwo zauważyć (rys. 218), że odległość jednej prostej granicznej od osi kolineacji równa jest odległości drugiej prostej granicznej od środka kolineacji.

2. $\alpha = \alpha_1$.

Punkt W , przez który ma przechodzić każda prosta łącząca odpowiadające sobie punkty — a który i w tym przypadku nazywa się *środkiem kolineacji* — musi oczywiście leżeć na α .

Każdej prostej w przechodzącej przez punkt W odpowiadać musi ta sama prosta, ponieważ parze punktów X i Y na w przyporządkowane są punkty X_1 i Y_1 , również położone na prostej w (rys. 219). Wynika z tego, że punktowi W zaliczonemu do układu $[\alpha]$ odpowiada punkt W zaliczony do układu $[\alpha_1]$. Punkt W jest więc punktem stałym (*fikspunktem*) przekształcenia.

Zachodzi pytanie, czy istnieją jeszcze inne fikspunkty (oczywiście nie mówimy o przekształceniu przez identyczność, w którym każdemu punktowi X przyporządkowany jest punkt $X_1 = X$). Okazuje się, że istnieje cała prosta k — nazywamy ją także *osią kolineacji środkowej* lub *prostą stałą* — której każdy punkt jest punktem stałym przekształcenia. Aby tego dowiedzieć, weźmy prostą a układu $[\alpha]$ nie zawierającą punktu W . Jeśli prosta a_1 układu $[\alpha_1]$, odpowiadająca prostej a , pokrywa się z nią, to oczywiście $k = a$, gdyż każdemu punktowi X przecięcia a i w odpowiada punkt X_1 przecięcia a_1 i w_1 ; skoro zaś $a = a_1$ i $w = w_1$, to $X = X_1$.

Załóżmy więc, że $a_1 \neq a$. Wówczas punkt A przecięcia a i a_1 odpowiada samemu sobie. Weźmy jeszcze prostą b nie przechodzącą ani przez punkt W ,

ani przez punkt A . Mogą zajść dwa przypadki: albo prosta b_1 , odpowiadająca prostej b , przecina się z nią w punkcie B nie leżącym na WA , albo w punkcie B leżącym na AW .

W pierwszym przypadku oczywiście prostej AB odpowiada prosta AB i — jak już widzieliśmy — każdy jej punkt jest punktem stałym; jest więc $AB = k$.

W drugim przypadku, tj. gdy punkt przecięcia b i b_1 leży na prostej WA (rys. 220), udowodnimy, że WA jest osią kolineacji.

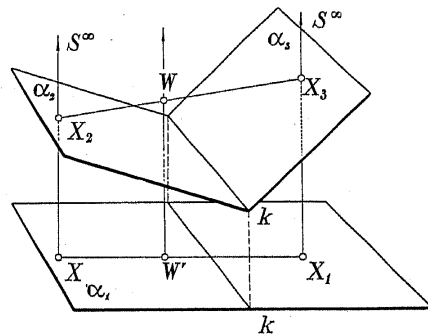
Weźmy w tym celu dowolną prostą $x \neq AB$ przechodzącą przez pewien punkt X prostej AB . Jeśliby prosta x_1 przecinała x w punkcie $\bar{X}$ różnym od X , to wówczas dwie różne proste $A\bar{X}$ i $B\bar{X}$ nie przechodzące przez W byłyby osiami kolineacji. Wtedy każdej prostej nie przechodzącej przez X odpowiadałaby ta sama prosta, gdyż jej punkty przecięcia byłyby punktami stałymi; z tego jednak wynikałoby, że każdy punkt płaszczyzny α byłby punktem stałym, co wyłączyliśmy z naszych rozważań.

Widzimy więc, że prosta x_1 odpowiadająca prostej x musi przechodzić przez punkt X ; zatem X jest fikspunktem, a wobec dowolności punktu X prosta WA jest osią kolineacji.

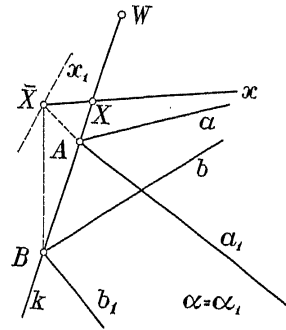
Oczywiście i w tym przypadku proste, odpowiadające sobie wzajemnie, przecinają się na osi kolineacji.

Przekształcenie płaszczyzny na siebie otrzymać można przez rzut dwu różnych układów płaskich $[\alpha_2]$ i $[\alpha_3]$, między którymi jest zdefiniowana kolineacja (rys. 221). Jest przy tym obojętne, czy będzie to rzut z punktu właściwego S , czy z niewłaściwego (tj. rzut równoległy).

Istotnie, jeśli przez $X = r(X_2)$ oznaczymy kolineację układów $[\alpha_2]$ i $[\alpha_1]$ o środku S , przez $X_2 = f(X_3)$ kolineację układów $[\alpha_2]$ i $[\alpha_1]$ o środku W i w końcu przez $X_1 = r(X_3)$ kolineację układów $[\alpha_3]$ i $[\alpha_1]$ o środku S , to przekształcenie złożone $X = r/r^{-1}(X_1)$ jest przekształceniem rzutowym układu $[\alpha_1]$ na siebie. Jest to oczywiście kolineacja środkowa, gdyż każda para odpowiadających



Rys. 221.



Rys. 220.

sobie punktów X i X_1 leży na prostej przechodzącej przez rzut punktu W . Ośią tej kolineacji jest, jak widać, rzut k' osi kolineacji k układów $[\alpha_2]$ i $[\alpha_3]$. Przykład kolineacji o środku leżącym na osi kolineacji dostaniemy, jeśli wybierzemy punkt S w płaszczyźnie Wk .

Twierdzenie I.

Każde przekształcenie między punktami dwu różnych płaszczyzn α i β , w którym prostej odpowiada prosta przecinająca się z nią na krawędzi α i β , jest kolineacją środkową.

Dowód. Weźmy proste X_1X_2 i Y_1Y_2 łączące dwie dowolne pary odpowiadających sobie punktów. Ponieważ — według założenia — prostej X_1Y_1 płaszczyzny α odpowiada przecinająca się z nią prosta X_2Y_2 płaszczyzny β , więc X_1Y_1 i X_2Y_2 leżą w jednej płaszczyźnie (rys. 222), a zatem przecinają się. Udowodniliśmy więc o zbiorze P wszystkich prostych łączących odpowiadające sobie punkty, że każde dwie proste tego zbioru przecinają się. Łatwo dowieść, że jest to możliwe tylko w dwu przypadkach:

1° gdy proste zbioru P leżą w jednej płaszczyźnie;

2° gdy są one elementami pewnej wiązki o wierzchołku W .

Ponieważ w danym razie proste nie leżą w jednej płaszczyźnie, więc przechodzą przez pewien punkt W nie leżący ani na α , ani na β , co właśnie należało udowodnić.

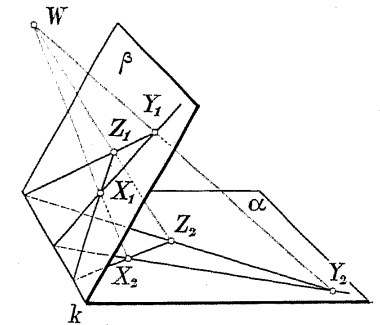
Twierdzenie II.

Każde przekształcenie złożone z dwu kolineacji środkowych o wspólnej osi jest kolineacją środkową.

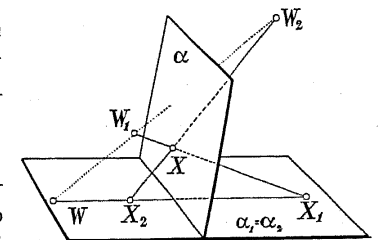
Dowód. Niech f_1 będzie kolineacją układów $[\alpha_1]$ i $[\alpha]$, f_2 — kolineacją układów $[\alpha]$ i $[\alpha_2]$, a W_1 i W_2 środkami tych kolineacji.

Niech najpierw $\alpha_1 = \alpha_2$.

Jeśli W jest punktem przecięcia płaszczyzny α prostą W_1W_2 (rys. 223), to punkty X_1 i X_2 odpowiadające punktowi X w kolineacjach $X_1 = f_1(X)$ i $X_2 = f_2(X)$



Rys. 222.



Rys. 223.

znajdują się z nim na jednej prostej, ponieważ W_1X_1 i W_2X_2 leżą w jednej płaszczyźnie; jest więc spełniony warunek na to, aby przekształcenie rzutowe było kolineacją. Ośią tej kolineacji jest krawędź α i α_1 .

Niech teraz płaszczyzny α_1, α_2 i α będą różne (rys. 224), ale mające — zgodnie z założeniem — wspólną krawędź. Wtedy przekształcenie złożone $X_1 = f_1 f_2^{-1}(X_2)$ przyporządkowuje punktom każdej prostej p_1 płaszczyzny α_1 punkty prostej p_2 płaszczyzny α_2 , przecinającej się z p_1 na krawędzi α_1 i α_2 , a więc jest ono kolineacją środkową na mocy twierdzenia I.

Zauważmy, że środek kolineacji złożonej leży na prostej łączącej środki W_1 i W_2 kolineacji danych (ponieważ punkty A_1 i A_2 przecięcia tej prostej z α_1 i α_2 muszą sobie odpowiadać).

Jeśli wreszcie $\alpha_1 = \alpha = \alpha_2$, to obróćmy płaszczyznę α dookoła wspólnej osi kolineacji f_1 i f_2 o kąt $\neq n\pi$ do położenia $\bar{\alpha}$ i przyporządkujmy punktowi X_1 płaszczyzny α_1 punkt $\bar{X} = \omega(X)$, uzyskany przez obrót punktu $X = f_1^{-1}(X_1)$ odpowiadającego punktowi X_1 . Określone przekształcenie $\bar{X} = \omega f_1^{-1}(X_1)$ między α i α_1 spełnia warunki twierdzenia I, jest więc kolineacją środkową.

Podobnie, przypisując każdemu punktowi X_2 punkt $\bar{X}$ odpowiadający punktowi X po obrocie, otrzymamy nowe przekształcenie kolineacyjne $\bar{X} = \omega f_2^{-1}(X_2)$. Jest widoczne, że przekształcenie $X_1 = f_1 \omega^{-1} \omega f_2^{-1}(X_2)$ (uzyskane za pośrednictwem płaszczyzny α) pokrywa się z przekształceniem $X_1 = f_1 f_2^{-1}(X_2)$. Sprowadziliśmy więc przypadek trzeci do pierwszego.

Twierdzenie zostało zatem udowodnione we wszystkich przypadkach.

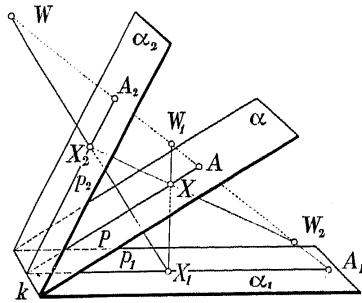
Twierdzenie III.

Jeśli na płaszczyźnie α dane są cztery punkty A, B, C i D oraz na płaszczyźnie β cztery punkty A', B', C' i D' tak, że żadna trójka tych punktów nie leży na prostej, to istnieje przekształcenie rzutowe $X' = f(X)$ przeprowadzające wzajemnie te czwórki punktów na siebie, tj. takie, że:

$$f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C', \text{ i } f(D) = D'.$$

Dowód. Przesunmy i ewentualnie obróćmy najpierw płaszczyznę α do położenia $\alpha_1 \neq \beta$ tak, by punkt P' przecięcia $A'B'$ i $C'D'$ pokrył się z punktem P na AB i CD , ale by prosta $A'B'$ nie przeszła na prostą AB (rys. 225).

Ponieważ zarówno przesunięcie równoległe jak obrót są przekształceniami



Rys. 224.

kolineacyjnymi (o środku niewłaściwym), więc mamy między α i α_1 przekształcenie rzutowe, w którym A, B, C i D przechodzą na A_1, B_1, C_1 i D_1 . Wykonajmy teraz rzut α_1 na płaszczyznę α_2 przechodzącą przez prostą $A'B'$ tak, aby A' i B' były rzutami A_1 i B_1 . Ponieważ przy tym prosta C_1D_1 przechodzi na przecinającą ją prostą C_2D_2 ($P_1 = P_2$), więc istnieje kolineacja, która ostatecznie przeprowadza $A_2B_2C_2D_2$ w $A'B'C'D'$ (środkiem jej jest punkt przecięcia prostych D_2D' i C_2C').

Mamy więc przekształcenie rzutowe układu α na β uzyskane za pomocą skończonej liczby kolineacji środkowych, w którym punkty A, B, C, D przechodzą na A', B', C', D' .

III. Szczególne przypadki kolineacji mają specjalne nazwy.

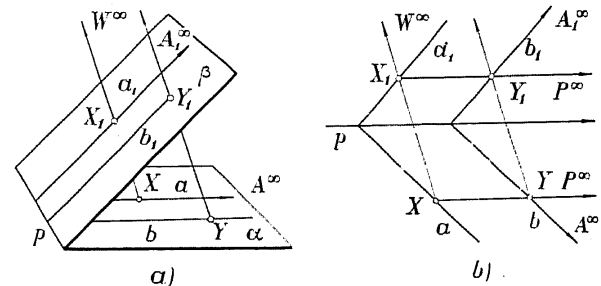
1. *Powinowactwem środkowym* nazywamy przekształcenie środkowo-kolineacyjne, w którym środek kolineacji W jest punktem niewłaściwym (rys. 226 a i b.).

Wówczas oś kolineacji p nazywamy *osią powinowactwa*, a środek kolineacji W^∞ — *kierunkiem powinowactwa*.

W powinowactwie punktowi niewłaściwemu A_1^∞ odpowiada punkt niewłaściwy.

Jeśli $\alpha \neq \beta$, to wynika to z tego, że prosta $W^\infty A_1^\infty$ jako posiadająca dwa punkty niewłaściwe różna jest prostą niewłaściwą, przebija więc drugą płaszczyznę w punkcie niewłaściwym A_2^∞ .

Jeśli zaś $\alpha = \beta$, to podobnie jak w dowodzie twierdzenia II, obróćmy płaszczyznę



Rys. 226.

szczyzną α dokoła osi powinowactwa o kąt $\neq n\pi$ i zauważmy, że między układami $[\alpha]$ a $[\bar{\alpha}]$ (po obrocie) zachodzi powinowactwo (o środku w punkcie niewłaściwym prostej prostopadłej do płaszczyzny symetrii kąta obrotu). Założone powinowactwo między elementami układów $[\alpha]$ i $[\beta]$ jest więc złożeniem dwu powinowactw przestrzennych, w których punktem niewłaściwym odpowiadają punkty niewłaściwe. Wynika z tego, że również w przypadku powinowactwa układów złożonych na jednej płaszczyźnie punkty niewłaściwe przechodzą na punkty niewłaściwe.

Zatem prostym równoległym odpowiadają w powinowactwie proste równoległe: jeśli $a \parallel b$, to $a_1 \parallel b_1$.

Każde przekształcenie kolineacyjne, w którym prosta niewłaściwa przechodzi na prostą niewłaściwą, nazywamy przekształceniem afinicznym.

Widać, że każde przekształcenie złożone ze skończonej liczby powinowactw jest afiniczne.

2. *Podobieństwem nazywamy kolineację, której oś jest niewłaściwa.*

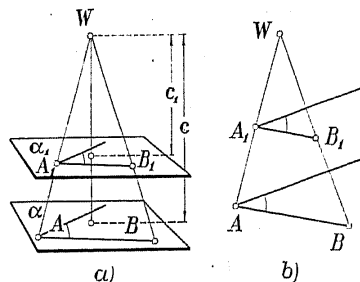
Płaszczyzny α i α_1 są więc równoległe (rys. 227). Wobec tego punkty niewłaściwe przechodzą na punkty niewłaściwe, a właściwe na właściwe; *podobieństwo jest więc przekształceniem afinicznym.*

Ponieważ każdej prostej odpowiada prosta do niej równoległa (przecina ją bowiem w niewłaściwej osi kolineacji), więc wielkości kątów przy przekształceniu przez podobieństwo nie ulegają zmianie.

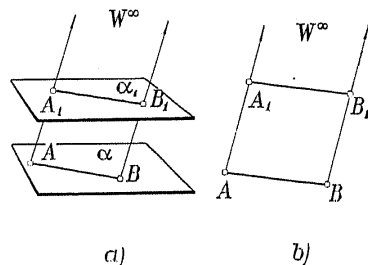
Zachodzi też równość $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{c}{c_1}$, gdzie c i c_1 są odległościami punktu W (środką podobieństwa) od płaszczyzn α i α_1 .

3. Szczególny przypadek zarówno powinowactwa jako też i podobieństwa zachodzi wtedy, gdy równocześnie środek kolineacji i oś kolineacji są niewłaściwe (rys. 228). Takie przekształcenie nazywamy *przystawianiem*.

Oczywiście dla każdego odcinka AB odpowiadający mu odcinek A_1B_1 ma wtedy tę samą długość.



Rys. 227.



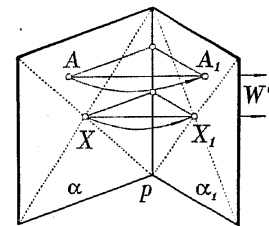
Rys. 228.

PRZYKŁADY.

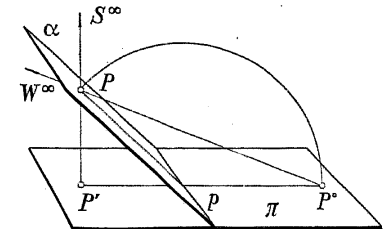
1. Obróćmy o kąt różny od $n\pi$ płaszczyznę dokoła prostej p leżącej na niej i po obrocie przyporządkujmy każdemu punktowi X punkt $\bar{X}$. Widać, że otrzymamy przekształcenie rzutowe (powinowactwo prostokątne), ponieważ proste łączące odpowiadające sobie punkty są prostopadłe do płaszczyzny symetrii (rys. 229).

To przekształcenie nazywamy *obrotem*.

2. Przesuńmy równolegle płaszczyznę α i przyporządkujmy każdemu punktowi X tej płaszczyzny nowe jego położenie. Otrzymamy przekształcenie rzutowe (przystawanie), które nazywamy *przesunięciem*.



Rys. 229.



Rys. 230.

3. Wykonajmy kład płaszczyzny α na płaszczyznę rzutów. Przyporządkowując sobie wzajemnie rzut P' i kład P'' punktu P płaszczyzny α , otrzymujemy powinowactwo prostokątne, którego osią jest ślad płaszczyzny (rys. 230).

4. Przetnijmy stożek o podstawie S płaszczyzną nie przechodzącą przez jego wierzchołek W . Przekrój S_1 jest zbiorem punktów odpowiadających punktom krzywej S w kolineacji między płaszczyzną przekroju a płaszczyzną podstawy. Środkiem kolineacji jest wierzchołek stożka.

ĆWICZENIA.

1. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele przekształceń rzutowych α na α' , w których punkty A, B, C, D przechodzą na A', B', C', D' , jeśli ABC leżą na prostej nie przechodzącej przez D i $A'B'C'$ leżą na prostej nie przechodzącej przez D' .

2. Dane są na płaszczyźnie α cztery proste a, b, c, d i na płaszczyźnie α' cztery proste a', b', c', d' tak, że żadna trójka prostych nie zawiera wspólnego punktu. Dowieść, że istnieje przekształcenie rzutowe $\alpha' = f(\alpha)$ przeprowadzające dane czwórki w takie, że:

$$f(a) = a', f(b) = b', f(c) = c' \text{ i } f(d) = d'.$$

3. Jakie położenie powinien mieć czworokąt na płaszczyźnie α , aby odpowiadający mu kolineacyjnie czworokąt na β był równoległobokiem?

Jaki warunek dodatkowy musi spełniać czworokąt, aby otrzymać w ten sposób kwadrat?

(Wsk.: Zwrócić uwagę na następujący związek: kąt między prostymi na α' jest równy kątowi między prostymi łączącymi środek kolineacji z punktami przecięcia prostych na α i prostą graniczną).

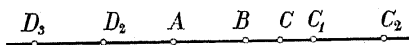
§ 24. Stosunek podziału i dwustosunek

I. Prosta rzutowa, płaszczyzna rzutowa i przestrzeń rzutowa są przestrzeniami szczególnego typu: dla pewnych par punktów określona jest odległość, dla innych nie. Jeśli mianowicie punkty A i B są właściwe, to mają one odległość; natomiast jeśli choć jeden z nich jest niewłaściwy, to nie przypisuje się im żadnej odległości.

Odległość jest funkcją (dwu zmiennych A i B), która gra zasadniczą rolę w badaniu własności przestrzeni euklidesowych; nie zmienia się ona (czyli jest niezmiennikiem) przy obrotach i przesunięciach; z jej pomocą definiuje się pojęcie granicy itd.

Określimy teraz pewną funkcję λ_C w przestrzeniach rzutowych, która gra analogiczną rolę w przekształceniach rzutowych.

Ustalmy na prostej euklidesowej dowolnie dwa punkty A i B oraz zwrot dodatni, np. od A do B . Dla każdego punktu C różnego od B weźmy liczbę $\lambda_C = AC/BC$, gdzie AC (i BC) oznacza miarę wektora, tzn. długość odcinka AC (BC) opatrzoną znakiem $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy zwrot AC (BC) jest zgodny ze zwrotem dodatnim, czy nie (rys. 231).



Rys. 231.

Otrzymaną liczbę λ_C nazywamy stosunkiem podziału dla punktu C przy danych A i B .

Łatwo zauważyć, że stosunek podziału jest niezależny od jednostki długości i nie zmienia się, gdy zamienić zwrot dodatni na ujemny.

Jeśli C jest wewnątrz odcinka AB , to AC i BC są znaków przeciwnych, więc $\lambda_C < 0$ (np. dla środka S odcinka mamy $= -1$), gdy zaś C leży zewnątrz odcinka AB , to $\lambda_C > 0$.

Weźmy ciąg punktów $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ rosnący nieograniczenie, np. gdy $BC_1 = AB$ i $C_{n-1}C_n = 1 = AB$; łatwo obliczyć, że $\lambda_{C_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$.

Podobnie dla ciągu $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$, gdzie $D_1 = A_1$ i $D_nD_{n+1} = BA$, jest $= \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$.

Ciągi liczb λ_{C_n} i λ_{D_n} mają granicę 1. Widać, że:

1° jeśli C porusza się od strony lewej do A , to λ_C maleje od 1 do 0;

2° jeśli C porusza się od A ku B , to λ_C maleje od 0, osiągając każdą liczbę ujemną tylko raz;

3° jeśli C porusza się od B w prawo, to λ_C maleje od wartości dowolnie dużych do 1.

W ten sposób każda liczba rzeczywista została osiągnięta jeden raz z wyjątkiem liczby 1. Mamy więc odpowiedniość między punktami właściwymi prostej a liczbami rzeczywistymi, w której każdemu punktowi (z wyjątkiem B) odpowiada jakaś liczba oraz każdej liczbie (z wyjątkiem 1) odpowiada jakiś punkt.

Teraz rozszerzymy definicję funkcji $g(X) = \lambda_X$ na prostą rzutową, przyjmując $g(N^\infty) = 1$.

Wiadomo, że funkcja $g(X) = \lambda_X$ jest funkcją ciągłą w każdym punkcie właściwym $X \neq B$ (jako iloraz dwu funkcji ciągłych). Aby mówić o ciągłości (czy nieciągłości) funkcji dla N^∞ , należy przede wszystkim określić pojęcie granicy na prostej rzutowej. Oczywiście idzie jedynie o przypadek, gdy ciąg punktów właściwych dąży do granicy niewłaściwej.

Przyjmujemy następującą definicję:

Jeśli dla ciągu $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ punktów właściwych jest $\lim |X_n| = \infty$, gdzie x_n jest spólrzędną punktu X_n , to $\lim X_n = N^\infty$.

Na gruncie tej definicji funkcja $g(X)$ jest ciągła w punkcie N^∞ . Istotnie, jeśli $X_n \rightarrow N^\infty$, czyli gdy $\lim |x_n| = \infty$, to $g(X_n) = \lambda_{X_n} = \frac{x_n + k}{x_n} = 1 + \frac{k}{x_n} \rightarrow 1$ (k jest odległością AB), a więc $g(\lim X_n) = \lim g(X_n)$.

Okazuje się, że homologia $x = f(X)$ (rys. 209) jest również funkcją ciągłą dla wszystkich punktów prostej rzutowej p . Aby to sprawdzić, należy określić granicę w zbiorze prostych pęku. Przyjmujemy w tym celu definicję:

Prosta x jest granicą ciągu $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ promieni pęku (W) o wierzchołku właściwym W , jeśli $\lim \sphericalangle(x_n, x) = 0$; jeśli zaś wierzchołek pęku jest niewłaściwy i $x = n^\infty$, to $\lim x_n = n^\infty$, gdy ciąg odległości prostych x_n od początku układu rośnie nieograniczenie.

Gdy x jest prostą właściwą, to $\lim x_n = x$ oznacza, że odległość x_n od x dąży do 0.

Tak samo określa się granicę w wiązce.

Jeśli więc ciąg X_n punktów na p dąży do N^∞ , to — jak wynika z definicji funkcji $f(X)$ — ciąg $f(X_n)$ dąży do prostej r . Ale $r = f(N^\infty)$, funkcja ta jest więc ciągła dla $X = N^\infty$. Ciągłość dla $X \neq N^\infty$ jest oczywista.

Z tego wynika, że przekształcenie rzutowe pęków i szeregów, jako złożone z funkcji ciągłych, jest ciągłe.

Dla układu płaskiego przyjmujemy definicję następującą:

Ciąg $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ dąży do granicy właściwej A , jeśli dla $n > n_0$ A_n są punktami właściwymi i ciągi spólrzędnych dążą do odpowiednich spólrzędnych punktu A .

Ciąg A_n dąży do G^∞ , jeśli ciąg współczynników kierunkowych prostych OA_n dąży do współczynnika kierunkowego OG^∞ oraz dla wyrazów właściwych A_n suma $|x_n| + |y_n|$ dąży do nieskończoności (x_n i y_n są współrzędnymi punktu A_n).

Opierając się na tej definicji, łatwo dowiedzieć, że przekształcenia homologiczne (rys. 216), a więc też i rzutowe, układów płaskich i wiązek są ciągłe.

II. Stosunek podziału jest niezmiennikiem przekształcenia homologicznego szeregu (p) na szereg (q), jeżeli (rys. 232) wierzchołek W pęku wyznaczającego przekształcenie jest niewłaściwy.

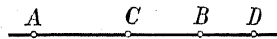
Jeśli W jest punktem właściwym, to oczywiście stosunek podziału zmienia wartość w przejściu z szeregu (p) do szeregu (q). Aby i w tym przypadku znaleźć wyrażenie niezmiennicze, weźmy pod uwagę cztery punkty A, B, C i D i podzielmy λ_C przez λ_D .

Liczbę:

$$\lambda_C : \lambda_D = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

nazywamy *stosunkiem podwójnego podziału* lub *dwustosunkiem* i oznaczamy przez $(ABCD)$.

Pary punktów AB i CD nazywamy *przedzielającymi się*, jeśli C znajduje się wewnątrz AB , a D zewnątrz lub na odwrót; jeśli tak nie jest, to pary nazywamy *nie przedzielającymi się*.



Rys. 233.

Łatwo zauważyć, że dla par przedzielających się dwustosunek ma wartość ujemną (λ_C i λ_D są znaków przeciwnych), a dla nie przedzielających się — dodatnią (znaki λ_C i λ_D są równe).

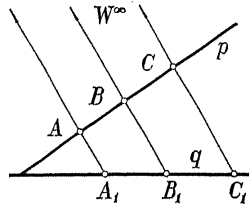
Z jednoznaczności funkcji λ_X wynika

Twierdzenie IV.

Jeśli dane są trzy różne punkty A, B i C oraz liczba $x \neq 0$, to istnieje dokładnie jeden punkt X , dla którego $(ABCX) = x$.

Istotnie, jeśli $\lambda_C : \lambda_X = x$, to $\lambda_X = \frac{\lambda_C}{x}$ i wówczas do A, B i λ_X istnieje jednoznacznie określony punkt X ; oczywiście dla tego punktu będzie:

$$(ABCX) = \lambda_C : \lambda_X = \lambda_C : \frac{\lambda_C}{x} = x.$$



Rys. 232.

Wykażemy w § 25, że wartość dwustosunku jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych.

W dalszych rozważaniach dużą rolę grać będą czwórki punktów, dla których $(ABCD) = -1$. Takie czwórki nazywają się *harmonicznymi*.

ĆWICZENIA.

1. Do punktów A i B dobrać punkt C tak, by a) $\lambda_C = \frac{2}{3}$, b) $\lambda_C = -\frac{1}{4}$.
2. Do punktów A, B i C , dla których $\lambda_C = 2$, znaleźć D tak, aby a) $(ABCD) = \frac{3}{4}$, b) $(ABCD) = -1$.
3. Dowiedzieć na podstawie definicji dwustosunku, że $(ABCD) = (CDAB)$ i $(ABCD) = (BADC)$, czyli że wartość dwustosunku nie zmienia się przez zamianę par ani przez zmianę porządku w obu parach.
4. Wykazać, że jeżeli $(ABCD) = a$, to $(ABDC) = 1/a$ i $(ACBD) = 1-a$ i $(ACDB) = 1/(1-a)$.
Wsk.: W dowodzie drugiej równości zastosować wzór Chasles'a, zakładając $AB = AC + CB$, $CD = CB + BD$, a następnie $AC + CB + BD = AD$.
5. Wykazać, że dla czwórki harmonicznej jest $(ABCD) = (ABDC)$, czyli że przez przestawienie elementów w jednej parze czwórki harmonicznej otrzymuje się czwórkę harmoniczną.
6. Sprawdzić, że czwórka punktów $ABSN^\infty$, gdzie S jest środkiem odcinka AB , jest czwórką harmoniczną.

§ 25. Twierdzenie Pappusa i zagadnienie jednoznaczności przekształceń rzutowych

I. Niech A, B, C i D będą punktami szeregu, a proste a, b, c i d — homologicznymi z nimi elementami pęku. Udowodnimy wzór:

$$(ABCD) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)},$$

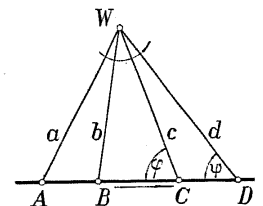
gdzie $(ac), (bc), \dots$ oznaczają miary kątów mniejszych co do wartości bezwzględnej od π , zawartych między prostymi a i c, b i $c, \dots$

Zwrot dodatni w pęku wybieramy zgodnie ze zwrotem dodatnim w szeregu, a więc znak (ac) będzie równy znakowi AC itd.

Dowód w przypadku, gdy wszystkie punkty A, B, C i D są właściwe (rys. 234), wynika z równości:

$$\frac{AC}{\sin(ac)} = \frac{AW}{\sin \varphi} \text{ czyli } AC = \sin(ac) \cdot \frac{AW}{\sin \varphi}$$

$$\frac{BC}{\sin(bc)} = \frac{BW}{\sin \varphi} \text{ czyli } BC = \sin(bc) \cdot \frac{BW}{\sin \varphi}$$



Rys. 234.

$$\frac{AD}{\sin(ad)} = \frac{AW}{\sin \psi} \text{ czyli } AD = \sin(ad) \cdot \frac{AW}{\sin \psi},$$

$$\frac{BD}{\sin(bd)} = \frac{AW}{\sin \psi} \text{ czyli } BD = \sin(bd) \cdot \frac{AW}{\sin \psi}.$$

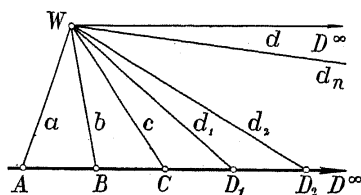
W przypadku, gdy np. D jest punktem niewłaściwym, dowód polega na ciągłości stosunku podziału i funkcji $\sin x$: jeśli bowiem $D_1, D_2, \dots, D_3, \dots$ jest ciągiem zbieżnym do D^∞ , to (rys. 235):

$$(ABCD) = \lim (ABC_n^\infty) = \lim \frac{\sin(ac) \cdot \sin(ad_n)}{\sin(bc) \cdot \sin(bd_n)} = \frac{\sin(ac) \cdot \sin(ad)}{\sin(bc) \cdot \sin(bd)}.$$

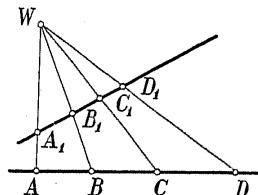
Liczba $(abcd) = \frac{\sin(ac) \cdot \sin(ad)}{\sin(bc) \cdot \sin(bd)}$ nazywa się dwustosunkiem czterech promieni pęku (W) o wierzchołku właściwym.

Wniosek I (twierdzenie Pappusa). Jeśli czwórki A, B, C, D i A_1, B_1, C_1, D_1 są przekrojami czterech prostych a, b, c, d pęku, to $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$. Istotnie, jeśli W jest punktem właściwym, to (rys. 236):

$$(ABCD) = (abcd) = (A_1B_1C_1D_1).$$



Rys. 235.



Rys. 236.

Dla wierzchołka niewłaściwego równość jest oczywista.

Opierając się na tym, definiujemy dwustosunek dla czwórki a, b, c, d prostych równoległych przez równość $(abcd) = (ABCD)$, gdzie A, B, C, D są punktami przecięcia prostych a, b, c, d pewną prostą p .

Jeżeli jeszcze określimy dwustosunek dla punktów niewłaściwych $A^\infty, B^\infty, C^\infty, D^\infty$ jako równy dwustosunkowi $(abcd)$ promieni przechodzących odpowiednio przez $A^\infty, B^\infty, C^\infty$ i D^∞ i przez właściwy punkt W , to możemy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie V.

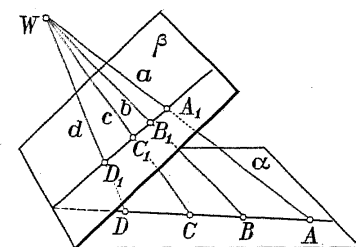
Wartość dwustosunku jest niezmiennikiem przekształceń rzutowych.

[§ 25]. Twierdzenie Pappusa i zagadn. jednoznaczności przekształceń rzut. 121

Wynika to z tego, że w homologii dwustosunek nie zmienia się oraz z tego, że przekształcenie rzutowe jest złożone ze skończonej liczby homologii.

Oczywiście mamy tu na myśli nie tylko przekształcenie rzutowe pęków i szeregów, ale również wiązek i układów płaskich (rys. 237).

Z niezmienniczości dwustosunku przy przekształceniach rzutowych wynika



Rys. 237.

Twierdzenie VI (Staudta).

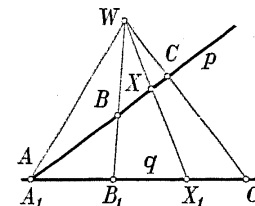
Jeśli w przekształceniu rzutowym szeregu (pęku) na siebie mamy trzy różne fikspunkty A, B i C (tj. jeśli $A_1 = A, B_1 = B$ i $C_1 = C$), to każdy punkt szeregu (każda prosta pęku) przechodzi na siebie.

Istotnie, gdyby punktowi X odpowiadał punkt $X_1 \neq X$, to czwórka A, B, C, X przechodziłaby na czwórkę A, B, C, X_1 o innej wartości dwustosunku, co nie jest możliwe.

Wniosek. Przekształcenie rzutowe między szeregami (pękami) jest jednoznacznie określone przez podanie trzech par odpowiadających sobie elementów.

Jeśli bowiem elementom A, B, C odpowiadają elementy A_1, B_1, C_1 , to warunek $(A_1B_1C_1X_1) = (ABCX)$ określa do danego punktu X punkt X_1 jednoznacznie.

W szczególności więc (rys. 238), jeśli dla szeregów (p) i (q) na różnych podstawach punkt przecięcia odpowiada samemu sobie ($A = A_1$) to proste $BB_1, CC_1, \dots, XX_1, \dots$, łączące odpowiadające sobie punkty przechodzą przez punkt stały W .



Rys. 238.

II. Przekształcenie rzutowe $X_1 = r(X)$ między układami płaskimi (wiązkami) jest jednoznacznie określone przez podanie czterech par odpowiadających sobie punktów (prostych), z których żadna trójka nie leży na prostej (płaszczyźnie).

Niech na płaszczyźnie α będą dane punkty A, B, C i D , a na płaszczyźnie β punkty A_1, B_1, C_1 i D_1 tak, by żadna trójka nie leżała na jednej prostej. Istnieje (§ 23) przekształcenie rzutowe $X_1 = f(X)$, które przeprowadza punkty A, B, C, D na punkty A_1, B_1, C_1 i D_1 . Przekształcenie rzutowe złożone $f \circ r^{-1}(X_1)$ przeprowadza punkty płaszczyzny β na punkty tejże płaszczyzny β w ten sposób, że A_1 przechodzi na A_1, B_1 na B_1, C_1 na C_1 i D_1 na D_1 .

Mamy więc cztery fikspunkty na β . Jest oczywiste, że jeślibyśmy dowiedli,

że każdy punkt płaszczyzny β jest fikspunktem, to wynikałoby z tego, że przekształcenia $f(X)$ i $r(X)$ są identyczne.

Wystarczy w tym celu udowodnić, że na płaszczyźnie β każda prosta przechodzi na siebie. Otóż dla boków czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ wynika to z tego, że wierzchołki są fikspunktami (rys. 239), dla prostych przecinających boki z tego, że szeregi na prostych A_1B , C_1D_1 , ..., składają się — na mocy twierdzenia VI — z samych fikspunktów, gdyż poza A_1 i B_1 również P_1 jest fikspunktem.

ĆWICZENIA.

1. Sprawdzić rachunkiem, że $(abs_1s_2) = -1$, gdzie s_1 i s_2 są symetralnymi kątów między a i b .

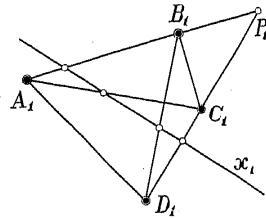
2. Do danych punktów A , B i C dobrać punkt X tak, by: (a) $(ABCX) = 3$, (b) $(ABCX) = -\frac{2}{5}$, (c) $(ABCX) = -1$.

3. Figurę (rys. 240) złożoną z czterech punktów A , B , C i D , z których żadne trzy nie leżą na prostej, oraz z sześciu prostych AB , AC , AD , BC , BD , CD nazywamy *czworokątem zupełnym*. Punkty te nazywamy *wierzchołkami*, a proste — *bokami* tego czworokąta.

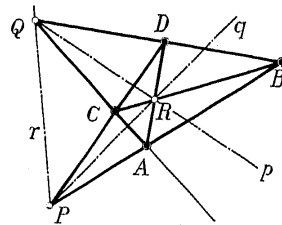
Pary boków AB i CD , AC i BD oraz BC i AD , nie posiadających wspólnych wierzchołków, nazywamy *przeciwnymi*. Punkty P , Q i R przecięcia par przeciwnych boków nazywamy punktami *przekątnymi*, a proste PQ , PR i QR — *prostymi przekątnymi*.

Dowieść, że czwórki punktów na każdym boku i na każdej przekątnej są harmoniczne (np. $(FGRQ) = 1$, $(DCFP) = 1$ itd.).

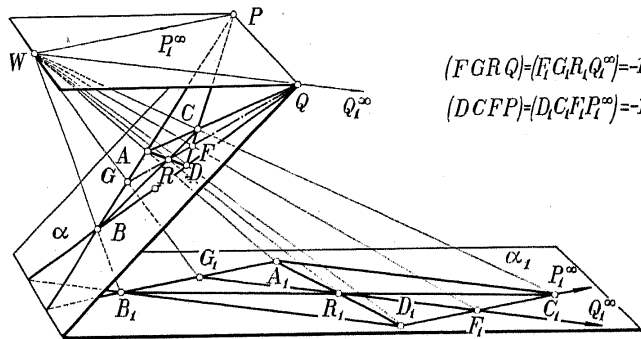
Wsk.: Określić kolineację środkową, biorąc środek W poza daną płaszczyznę α (rys. 241), a drugą płaszczyznę α_1 równoległą do płaszczyzny WPQ i stwierdzić, że rozważane



Rys. 239.



Rys. 240.



Rys. 241.

$$(FGRQ) = (F_1G_1R_1Q_1) = -1$$

$$(DCFP) = (D_1C_1F_1P_1) = -1$$

czwórki na α_1 są harmoniczne, opierając się na tym, że w kolineacji odpowiadające sobie czwórki posiadają te same wartości dwustosunków.

4. Korzystając z własności z ćwiczenia 3, znaleźć punkt G tak, aby z danymi punktami A , B i P linii prostej tworzył czwórkę harmoniczną.

Wsk.: Do A , B i P dorysować boki CD , AB , BC ... jak na rysunku 240.

5. Udowodnić, że gdy w czwórce harmonicznej $ABXY$ punkt Y dąży do B , to „harmoniczny” do niego punkt X dąży również do B .

§ 26. Definicja i ogólne własności krzywych stożkowych

I. Niech będzie dane przekształcenie rzutowe $x_2 = f(x_1)$ pomiędzy prostymi pęków (W_1) i (W_2) na jednej płaszczyźnie. Oznaczmy przez X punkt przecięcia odpowiadających sobie prostych x_1 i x_2 .

Definicja. Zbiór wszystkich punktów wspólnych X prostych x_1 i x_2 odpowiadających sobie w przekształceniu rzutowym nazywamy *stożkową* (rys. 242).

Okrąg jest stożkową, jeśli bowiem każdej prostej x_1 pęku (W_1) przypiszemy prostą x_2 należącą do pęku (W_2) a prostopadłą do x_1 , to oczywiście otrzymamy okrąg o średnicy W_1W_2 , rzutowość zaś przekształcenia wynika z równości $\sphericalangle(a_1b_1) = \sphericalangle(a_2b_2)$, ..., $\sphericalangle(b_1d_1) = \sphericalangle(b_2d_2)$ i $(a_1b_1c_1d_1) = (a_2b_2c_2d_2)$.

Gdy między pękami (W_1) i (W_2) określona jest homologia (rys. 221 a), stożkowa składa się z prostej W_1W_2 i prostej, na której przecinają się elementy sobie odpowiadające.

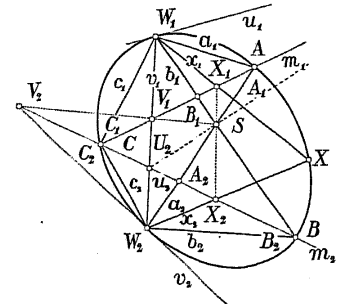
Jeśli $W_1 = W_2$ i zawsze $x_1 \neq x_2$ (co zachodzi np. w przypadku, gdy $x_2 = f(x_1)$ jest obrotem o kąt $\varphi \neq \pi$), to stożkową jest punkt W_1 .

W tych przypadkach stożkową nazywać będziemy *zdegenerowaną*. Zbiór pusty i prostą (graniczne położenie prostych przecinających się) również nazywamy *stożkową zdegenerowaną*.

Żałujemy, że przekształcenie nie jest homologiczne i że $W_1 \neq W_2$.

Dla każdej prostej x_1 można korzystając z konstrukcji podanej na rysunku 215 znaleźć odpowiadającą jej prostą x_2 , a zatem punkt X stożkowej.

W tym celu (rys. 242) przetnijmy pęk (W_1) prostą $CA = m_1$ oraz pęk (W_2) prostą $CB = m_2$. Założone przekształcenie rzutowe między (W_1) i (W_2) pociąga za sobą odpowiedniość rzutową między (m_1) i (m_2) , w której punktom A_1 , B_1 i C_1 przypisane są punkty A_2 , B_2 i C_2 . Ale $C_2 = C_1$, wobec czego (§ 25)



Rys. 242.

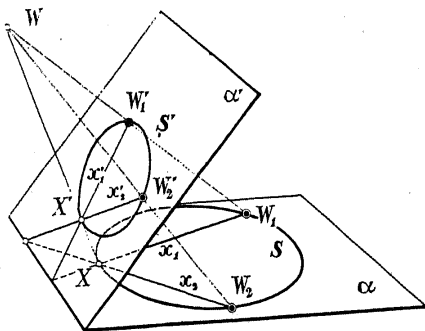
pary punktów X_1, X_2 leżą na prostej przechodzącej przez punkt S na przecięciu A_1A_2 i B_1B_2 .

Korzystając z tego możemy znaleźć dowolną ilość punktów stożkowej.

Jeśli w szczególności przyjmiemy w pęku (W_1) prostą v_1 przez W_2 , to otrzymamy na przecięciu v_1 i v_2 punkt W_2 . Prosta v_2 jest styczną w W_2 do stożkowej, gdyż na mocy ciągłości jest granicą siecznych W_2Y , gdy Y dąży do W_2 . Analogicznie, styczną w punkcie W_1 jest prosta u_1 odpowiadająca prostej $u_2 = W_2W_1$ pęku (W_2) .

Udowodnijmy **twierdzenie VII**.

W przekształceniu kolineacyjnym stożkowej odpowiada stożkowa.



Rys. 243.

Niech pękowi (W_1) odpowiada na płaszczyźnie α' pęk (W'_1) , a pękowi (W_2) pęk (W'_2) . Ponieważ mamy tu przekształcenie rzutowe (W'_1) na (W_1) , (W_1) na (W_2) (według założenia) i (W_2) na (W'_2) , więc między elementami pęków (W'_1) i (W'_2) istnieje rzutowe przekształcenie, w którym odpowiadające sobie proste x'_1 i x'_2 przecinają się w punkcie X' przypisanym w kolineacji punktowi X . Zbiór wszystkich punktów X' jest więc stożkową odpowiadającą zbiorowi wszystkich punktów X . Mamy zatem

Wniosek I. *Jeśli jeden przekrój stożka jest krzywą stożkową, to każdy przekrój tego stożka jest stożkową.*

Ponieważ przekształcenie rzutowe jest złożone ze skończonej ilości kolineacji środkowych, więc:

Wniosek II. *W przekształceniu rzutowym stożkowa przechodzi na stożkową.*

Udowodnijmy jeszcze **twierdzenie VIII**.

Jeśli dane są stożkowe niezdegenerowane S i S' , to istnieje przekształcenie rzutowe, w którym stożkowej S odpowiada stożkowa S' .

Stożkowa S będzie określona, jeśli podane będą pary a_1a_2, u_1u_2 i v_1v_2 odpowiadających sobie elementów, tzn. punkty W_1, W_2 i A oraz styczne u_1 i v_2 (rys. 244). Podobnie $W'_1, v'_1, W'_2, A', u'_1$ i v'_2 określają jednoznacznie stożkową S' .

Na podstawie § 23 istnieje przekształcenie rzutowe, w którym punkty $W_1, W_2, T = u_1v_2$ i A przechodzą na punkty $W'_1, W'_2, T' = u'_1v'_1$ i A' . Ponieważ przy tym oczywiście styczne u_1 i v_2 przechodzą na u'_1 i v'_2 , więc stożkowej S odpowiada stożkowa S' .

Biorąc za S okrąg otrzymamy

Wniosek I. *Każdą stożkową niezdegenerowaną można przekształcić na okrąg.*

Przyjmując na okręgu dowolnie dwa różne wierzchołki pęków (W_1) i (W_2) i przypisując sobie te promienie x_1 i x_2 , które przecinają się na krzywej, otrzymamy oczywiście między punktami przekształcenie rzutowe (ponieważ kąty między odpowiadającymi sobie parami elementów są równe).

Otrzymujemy więc na podstawie wniosku I

Wniosek II. *Jeśli obierzemy dowolnie punkty W_1 i W_2 na stożkowej S za wierzchołki pęków i za odpowiadające sobie proste uważać będziemy te, które przecinają się na S , to otrzymamy funkcję będącą przekształceniem rzutowym pomiędzy pękami (W_1) i (W_2) lub niedokładnie:*

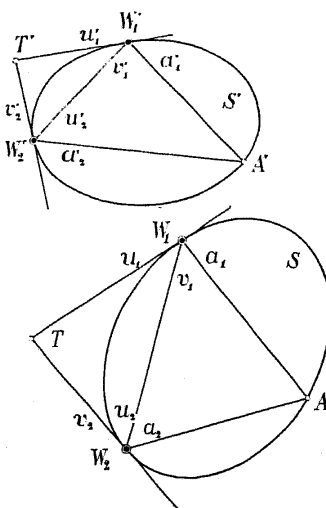
Każde dwa punkty stożkowej mogą być uważane za wierzchołki pęków tworzących tę stożkową.

Wniosek III. *Stożkowa jest jednoznacznie określona przez:*

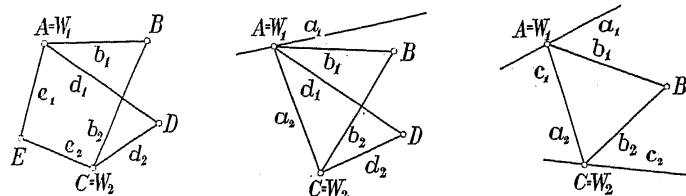
1. pięć punktów A, B, C, D i E ,
2. cztery punkty A, B, C, D i styczną a w punkcie A ,
3. trzy punkty A, B, C i dwie styczne a i b w punktach A i B .

Istotnie, przyjmując w pierwszym przypadku dowolne dwa punkty za wierzchołki, w drugim A i dowolny inny (rys. 245), a w trzecim A i B , możemy określić jednoznacznie przekształcenie rzutowe, przypisując sobie promienie przecinające się w pozostałych punktach, względnie przyporządkowując stycznej prostą łączącą wierzchołki.

Z twierdzenia o istnieniu przekształcenia rzutowego pomiędzy płaszczyzną



Rys. 244.



Rys. 245.

α , na której mamy daną stożkową niezdegenerowaną S , a płaszczyznę α , w którym S przechodzi na okrąg, wynika, że

Dowolna prosta może mieć ze stożkową niezdegenerowaną S co najwyżej dwa punkty wspólne.

Istotnie, niech l będzie prostą na płaszczyźnie α . Aby znaleźć punkty wspólne S i l , weźmy ich „obrazy rzutowe”: okrąg S' i l' , tzn. twory, które im odpowiadają na α' . Ponieważ okrąg S' i prosta l' mogą mieć co najwyżej dwa punkty wspólne, więc wracając do płaszczyzny α otrzymamy co najwyżej dwa punkty wspólne S i l .

Podobnie udowodnić można, że

Z dowolnego punktu można do stożkowej wykreślić co najwyżej dwie styczne.

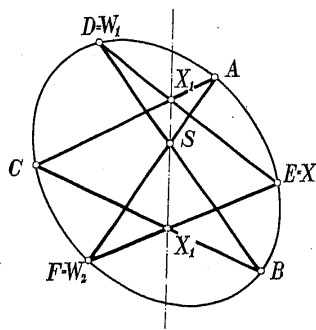
II. Niech A, B, C, D, E i F będą punktami stożkowej. Przyjmując dowolny porządek cykliczny liter np. A, B, C, D, E, F , połączmy ze sobą kolejne punkty. Otrzymamy sześciokąt wpisany w stożkową. (Jeśli stożkowa jest okręgiem i porządek jest zgodny z uporządkowaniem punktów na krzywej, to sześciokąt jest wypukły, jeśli nie — to gwiaździsty.) Proste (a nie odcinki!) $AC, CD, DE, \dots$ nazywamy *bokami*. Jeśli np. $A = C$, to przez bok rozumieć będziemy styczną w punkcie A do stożkowej. Pary boków: AC i DE , CB i EF oraz BD i FA przedzielone w kolejności liter odpowiednio punktami B, D , wzgl. E , nazywamy *parami przeciwnymi*.

Udowodnimy

Twierdzenie Pascala. *Trzy punkty przecięcia par przeciwnych boków sześciokąta wpisanego w stożkową leżą na prostej.*

Nazywać ją będziemy *prostą Pascala*.

Prawdziwość twierdzenia wynika z konstrukcji punktu X podanej na rysunku 242. Zakładając bowiem $D = W_1$, $F = W_2$ i $E = X$ widzimy (rys. 246), że punkty X_1, X_2 i S , które leżą na prostej, są punktami przecięcia par przeciwnych boków: AC i DE , CB i EF oraz BD i FA .



Rys. 246.

Dla przejrzystości zapisywać to będziemy w następujący sposób:

ACB	DEF
AC	$DE \dots X_1$
CB	$EF \dots X_2$
BD	$FA \dots S$

Oczywiście gdy np. $E = F$, to zamiast X_1 i X_2 będziemy mieli V_1 i V_2 (rys. 242), które również znajdują się na jednej prostej z punktem S . Twierdzenie jest więc prawdziwe, gdy $E = F$; podobnie, gdy jeszcze $B = D$.

Można by, korzystając z twierdzenia Pascala, znaleźć styczną w danym punkcie lub drugi punkt przecięcia prostej ze stożkową, jeśli jeden jest znany. Oczywiście krzywa musiałaby być dana jednym ze sposobów podanych we wniosku III.

PRZYKŁADY.

I. Znaleźć przecięcie stożkowej przechodzącej przez punkty A, B, C, D i E prostą l przechodzącą przez C .

Oznaczmy przez X szukany punkt i zastosujmy tw. Pascala do sześciokąta $ABCXDE$ (punkt C musi być umieszczony obok punktu X , aby prosta $l = CX$ była bokiem sześciokąta).

Dostaniemy:

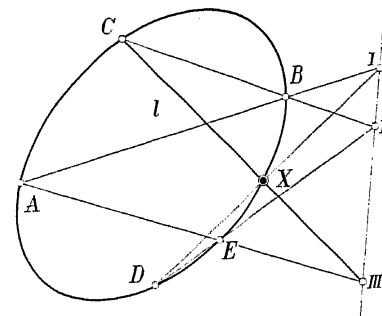
ABC	XDE
AB	$XD \dots I$
BC	$DE \dots II$
CX	$EA \dots III$

Punkty II i III prostej Pascala (rys. 247) można otrzymać bezpośrednio, punkt I będzie na przecięciu II III i AB .

Szukany punkt X jest na prostej XD łączącej D i I .

II. Narysować styczną do stożkowej w punkcie C , mając dane A, B, C, D i styczną a w punkcie A .

Konstrukcja opiera się twierdzeniu Pascala dla sześciokąta „zdegenerowanego” $AA'BCC'D$, w którym $A' = A$ i $C' = C$; oczywiście bok CC' jest szukaną styczną (rys. 248).

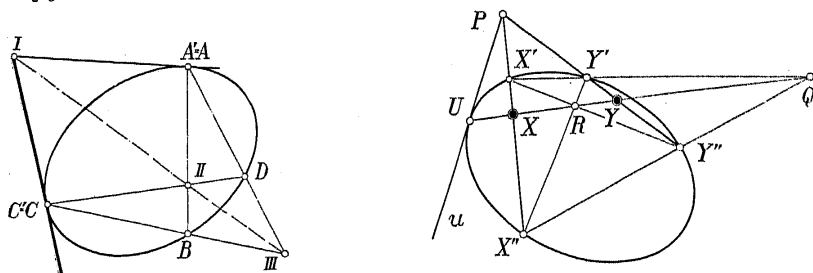


Rys. 247.

$A\dot{A}B$	$CC'D$	
AA'	CC'	 I
$A'B$	$C'D$	 II
BC	DA	 III

Zauważmy, że prosta Pascala jest tu przekątną czworokąta zupełnego $ABCD$ (§ 25, ćw. 3). Widzimy, więc, że

Styczne do stożkowej w wierzchołkach A i C wpisanego czworokąta zupełnego przecinają się na tej przekątnej, która nie przechodzi przez punkt przekątny leżący na AC .



Rys. 248.

Rys. 249.

III. Przyjmijmy na płaszczyźnie stożkową S i punkt P nie leżący na S . Jeśli prosta x (rys. 249) przecina S w punktach X' i X'' , to weźmy punkt X tak, by: $(X'X''PX) = -1$.

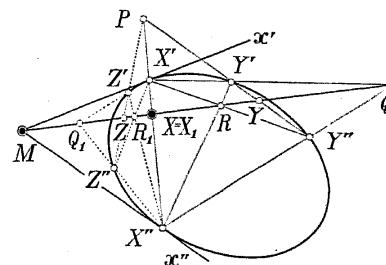
Znaleźć go można rysując drugą sieczną y z punktu P i korzystając z własności czworokąta zupełnego $X'X''Y'Y''$ (§ 25, ćw. 3). Na przecięciu prostych x i y przekątną QR otrzymujemy równocześnie punkt X harmoniczny do P względem S na x i punkt harmoniczny Y na y .

Znajdźmy jeszcze na trzeciej siecznej z harmoniczny punkt Z za pomocą czworokąta zupełnego $X'X''Z'Z''$.

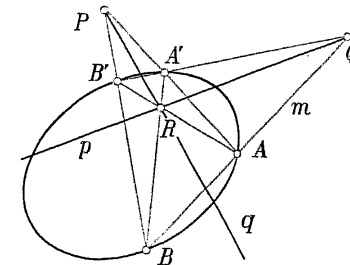
Udowodnimy, że punkty X , Y i Z leżą na prostej.

Wystarczy oczywiście wykazać, że przekątne RQ i R_1Q_1 (rys. 250) pokrywają się. Wynika to jednak bezpośrednio z tego, że punkt X leży na obu przekątnych (warunek bowiem $(X'X''PX) = 1$ określa jednoznacznie X) i z tego, że punkt M przecięcia stycznych w X i X'' musi leżeć na RQ i R_1Q_1 , jak to wynika z przykładu II.

Definicja. Prostą p , na której leżą punkty harmonicznie sprzężone z punktem P względem stożkowej S , nazywamy biegunową punktu P , a P biegunem prostej p .



Rys. 250.



Rys. 251.

Jeśli prosta x zbliża się do stycznej u (rys. 249), to oczywiście X' i X'' dążą do wspólnej granicy U . Widać, że punkt X dąży do U , gdyż dla siecznych bliskich stycznej u X jest wewnątrz odcinka $X'X''$ (P jest zewnątrz).

Jeśli więc istnieją styczne u i v przechodzące przez biegun, to punkty styczności U i V leżą na biegunowej.

Definicję biegunowej rozszerzyć można też na punkty P leżące na stożkowej.

Jeśli x jest prostą sieczną przechodzącą przez P , to oczywiście jeden z punktów przecięcia, np. X'' , schodzi się z P i wówczas równość $(X'X''PX) = (X'PPX) = -1$ daje $X = P$. Jeśli x jest styczną do stożkowej w punkcie P , to $X' = P = X''$ i warunek $(X'X''PX) = -1$ spełnia każdy punkt X na stycznej. Widzimy zatem, że

Biegunową punktu należącego do stożkowej jest styczna w tym punkcie.

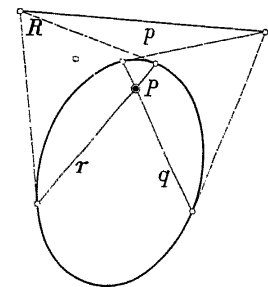
Weźmy na biegunowej p punktu P pewien punkt Q (rys. 251). Udowodnimy, że biegunowa q punktu Q przechodzi przez P .

Wykreślmy w tym celu z Q sieczną m , połączmy punkty przecięcia A i B z P i uzyskane w ten sposób punkty A' i B' ze sobą. Ponieważ P jest jednym punktem przekątnym czworokąta $ABA'B'$, więc biegunowa p musi przejść przez dwa pozostałe punkty przekątne (rys. 249); Q musi więc leżeć na $A'B'$. Z własności czworokąta zupełnego wynika, że biegunową punktu Q jest $q = PR$. Mamy więc

twierdzenie: Jeśli biegun Q leży na biegunowej p , to biegunowa q przechodzi przez biegun P .

Takie dwie biegunowe nazywamy sprzężonymi ze sobą.

Jeśli dla danej prostej p (rys. 252) chcemy narysować jej biegun P , to znajdujemy dla dwóch dowolnych punktów R i Q na p biegunowe r i q ; punkt ich przecięcia będzie biegunem prostej p .



Rys. 252.

IV. Biegunową punktu niewłaściwego nazywamy *średnicą*.

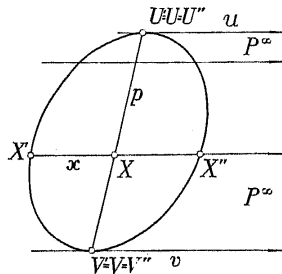
Przypuśćmy, że punkt P^∞ nie należy do stożkowej.

Ponieważ punkt X harmoniczny do P^∞ jest środkiem odcinka $X'X''$ (rys. 253), więc mamy **twierdzenie IX**:

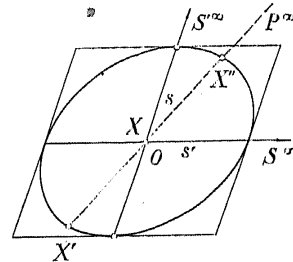
Środki cięciw równoległych stożkowej leżą na prostej (średnicy).

Zgodnie z definicją biegunowych sprzężonych, średnice s i s' nazywać się będą *sprzężonymi*, jeśli biegun S^∞ prostej s leży na s' , (a zatem też S'^∞ na s).

Punkt ich przecięcia O (rys. 254) nazywamy *środkiem stożkowej*.



Rys. 253.



Rys. 254.

Biegunową punktu O jest prosta niewłaściwa, gdyż zawiera ona S^∞ i S'^∞ . Jeśli więc O jest punktem właściwym, to dzieli na połowy każdą cięciwę $X'X''$ przechodzącą przez O , ponieważ $(X'X''P^\infty O) = -1$. Wtedy środek stożkowej jest jej środkiem symetrii.

Jeśli średnica przecina stożkową w dwóch punktach, to proste styczne w nich przejdą przez biegun S^∞ , tzn. będą równoległe do S'^∞ .

Podobnie styczne w punktach przecięcia s ze stożkową (jeśli istnieją) są równoległe do s' .

Jeśli średnica s' jest prostopadła do średnicy s sprzężonej z nią, to s nazywamy *osią*; oczywiście s' jest też osią (ponieważ jest prostopadła do s). W kole każda średnica jest osią.

Weźmy pod uwagę przekształcenie rzutowe płaszczyzny α na α_1 ; stożkowa S przejdzie przy tym na stożkową S_1 . Jeśli prosta p jest biegunową punktu P względem S , to odpowiadająca jej prosta p_1 na α_1 jest biegunową punktu P_1 (odpowiadającego biegunowi P) względem S_1 . Wynika to z tego, że czwórka harmoniczna $X'X''PX$ przechodzi na czwórkę harmoniczną $X'_1X''_1P_1X_1$.

ĆWICZENIA.

1. Dane są punkty A, B, C, D i E stożkowej; znaleźć styczną w punkcie B .
2. Dane są punkty A, B , i C oraz styczne a i b w punktach A i B do stożkowej; znaleźć:

a) punkt przecięcia stożkowej prostą l przechodzącą przez C , b) punkt przecięcia prosta m przechodzącą przez A , c) styczną w punkcie C .

3. Znaleźć biegunową punktu P względem stożkowej mając dane: a) pięć punktów, b) cztery punkty i styczną w jednym z nich, c) trzy punkty i dwie styczne w dwóch z nich.

4. Wykonać ćwiczenia 3, gdy P jest punktem niewłaściwym.

5. Znaleźć średnicę przechodzącą przez jeden z danych punktów stożkowej w przypadkach a), b) i c) ćwiczenia 3.

(Wsk.: Będzie to biegunowa punktu niewłaściwego stycznej w tym punkcie).

6. Narysować parę średnic sprzężonych stożkowej określonej jak w ćw. 3.

7. Znaleźć punkt styczności C stycznej c ze stożkową, mając dane: styczne a i b oraz punkty ich styczności A i B .

(Wsk.: Skorzystać z własności biegunowej punktu przecięcia c i AB).

§ 27. Konstrukcje krzywych stożkowych

I. Dowolna prosta l może mieć ze stożkową S dwa punkty wspólne, jeden lub może nie posiadać żadnego punktu wspólnego z S (§ 26, I).

W pierwszym przypadku l nazywamy *sieczną*; w drugim *styczną*, a w trzecim prostą *zewnątrzną*.

Jeśli l jest prostą niewłaściwą, to punkty wspólne l i S są punktami niewłaściwymi stożkowej. Otrzymamy trzy rodzaje stożkowych w zależności od ilości punktów niewłaściwych.

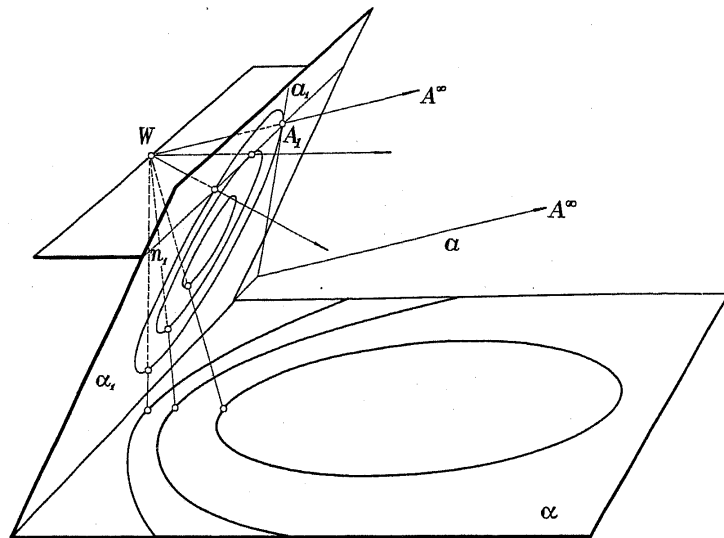
Definicja. *Stożkowa nazywa się elipsą, jeśli nie posiada punktów niewłaściwych, parabolą, gdy posiada jeden, a hiperbolą, gdy ma dwa punkty niewłaściwe¹.*

Istnienie tych trzech rodzajów stożkowych wynika z twierdzenia, iż w przekształceniu rzutowym stożkowa przechodzi na stożkową. Wystarczy wziąć kolineację pomiędzy układami płaskimi $[\alpha]$ i $[\alpha_1]$.

Jest widoczne (rys. 255), że okręgowi nie przecinającemu prostej granicznej n_1 odpowie krzywa nie posiadająca punktów niewłaściwych, tzn. elipsa; okręgowi stycznemu do n_1 stożkowa o jednym punkcie niewłaściwym, to jest parabola i wreszcie okręgowi przecinającemu n_1 w dwóch punktach — hiperbola.

Zauważmy w tym miejscu, że prostej a_1 stycznej do okręgu w punkcie A_1 na prostej granicznej odpowiada prosta a , posiadająca z S jedynie punkt niewłaściwy A^∞ wspólny, a więc styczna w punkcie niewłaściwym do stożkowej. Nazywamy ją *asymptotą* stożkowej. Hiperbola posiada dwie asymptoty. Para-

¹ Na końcu tego § znajduje się dowód, że definicja ta pokrywa się z definicją elipsy, paraboli i hiperboli wychodzącą z ognisk (z pominięciem punktów niewłaściwych).



Rys. 255.

bola ma z prostą n_1 jeden punkt wspólny, zatem *prosta niewłaściwa jest styczną do paraboli*. Widzimy więc, że parabola posiada jedną asymptotę, którą jest prosta niewłaściwa.

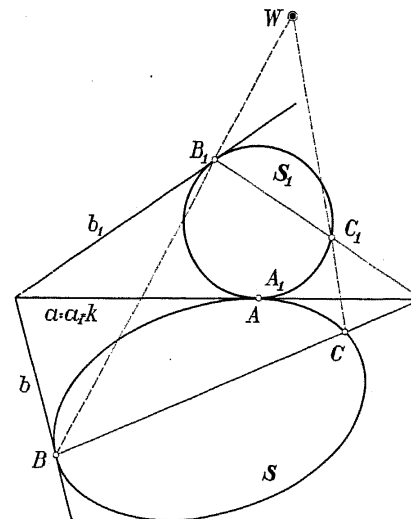
Dla celów konstrukcyjnych pożyteczne byłoby daną stożkową przekształcić na okrąg za pomocą kolineacji układów $[\alpha]$ i $[\alpha_1]$ związanych na wspólnej płaszczyźnie.

Okazuje się, że jest to zawsze możliwe.

Weźmy stożkową S określoną za pomocą punktów A, B, C oraz stycznych a i b w punktach A i B (jeśli krzywa jest inaczej podana, to należy znaleźć styczne). Nakreślmy okrąg S_1 (rys. 256) styczny do a w punkcie A i styczną b_1 do niego przechodzącą przez punkt przecięcia a i b . Połączmy następnie ze sobą punkty B i C , przecięcie z a połączmy z punktem B_1 styczności b_1 z okręgiem i oznaczmy przez C_1 drugi punkt przecięcia tej prostej z okręgiem.

Weźmy teraz pod uwagę kolineację, której środkiem W jest punkt przecięcia BB_1 i CC_1 , a osią — styczna a . Nie trudno wykazać, że w tej kolineacji stożkowa S przechodzi na okrąg S_1 . Rzeczywiście, krzywej S odpowiada stożkowa, którą przechodzi przez punkty B_1, C_1 i $A_1 = A$ oraz jest styczna do b_1 i $a_1 = a$; są to jednak warunki, które jednoznacznie określają stożkową.

Korzystając z tego przekształcenia można wykonać wiele konstrukcji, zastępując je przez analogiczne konstrukcje dla okręgu.



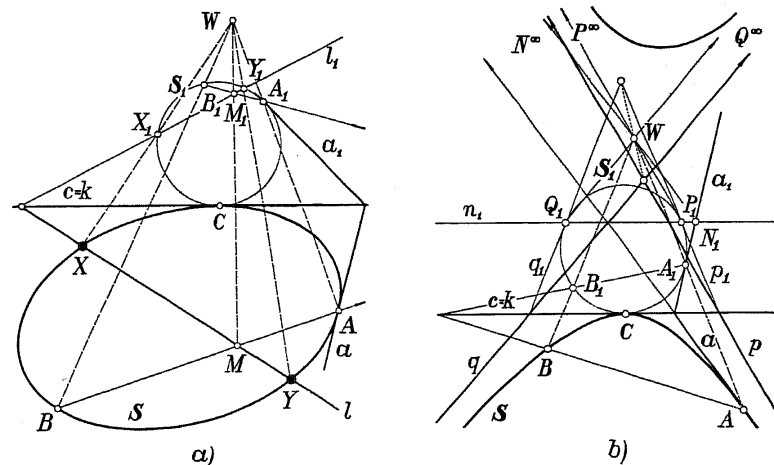
Rys. 256.

PRZYKŁADY.

I. Znaleźć punkty przecięcia stożkowej prostą l .

Niech np. stożkowa S będzie określona za pomocą elementów: A, a, C, c , i B (rys. 257 a).

Kolineację określamy jak na rysunku poprzednim.



Rys. 257.

Aby przenieść prostą l do drugiego układu, znajdujemy najpierw punkt M_1 odpowiadający punktowi M na l i AB , a następnie łączymy go z przecięciem l i osi kolineacji k . Uzyskana prosta l_1 przecina okrąg w punktach X_1 i Y_1 , którym odpowiadają szukane punkty X i Y na l i S .

II. Znaleźć asymptoty stożkowej.

Oczywiście asymptoty istnieją wtedy tylko, gdy stożkowa posiada punkty niewłaściwe (przecina prostą niewłaściwą n^∞). Gdy chodzi o punkty przecięcia prostą n^∞ , to zadanie nie różni się zasadniczo od poprzedniego.

W celu przeniesienia n^∞ do drugiego układu przyjmujemy na n^∞ punkt N^∞ wspólny z a (rys. 257); odpowiada mu oczywiście punkt N_1 przecięcia a_1 i WN^∞ . Łącząc N_1 z punktem przecięcia k i n^∞ , tzn. kreśląc z N_1 równoległą do k , otrzymujemy prostą n_1 .

Jeśli n_1 przecina okrąg S_1 w punktach P_1 i Q_1 , to S jest hiperbolą o punktach niewłaściwych P^∞ i Q^∞ . Stycznym p_1 i q_1 do okręgu w P_1 i Q_1 odpowiadają proste mające po jednym punkcie niewłaściwym P^∞ (czy Q^∞) wspólnym z S , tzn. asymptoty. Otrzymujemy je łącząc ich punkty przecięcia z osią kolineacji z punktami P^∞ (na WP_1) i Q^∞ (na WQ_1).

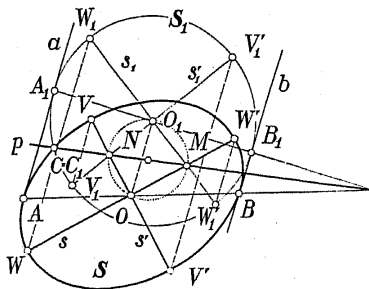
III. Znaleźć osie elipsy.

Przyjmijmy, że mamy średnicę AB , punkt C oraz styczne a i b (jeśli stożkowa jest inaczej podana, to za pomocą twierdzenia Pascala można znaleźć średnicę AB i styczne a i b (§ 26 ćw. 5).

W tym zadaniu musimy tak określić kolineację, aby środek jej był punktem niewłaściwym, tzn. *powinowactwo* między elipsą S i okręgiem S_1 .

Narysujmy w tym celu okrąg S_1 styczny do a i b , a przechodzący przez C (rys. 258). Widać, że powinowactwo o kierunku a i osi p łączącej C z punktem przecięcia AB i A_1B_1 , gdzie A_1 i B_1 są punktami styczności $a_1 = a$ i $b_1 = b$ z S_1 , jest szukany przekształceniem S na S_1 .

Ponieważ w powinowactwie punktowi niewłaściwemu odpowiada punkt niewłaściwy, więc średnicy, tzn. biegunowej punktu niewłaściwego, odpowiada też średnica; podobnie środkowi odpowiada środek. Jeśli s jest średnicą sprzężoną z s' , to i s_1 jest sprzężone z s'_1 . W zadaniu chodzi o to, by $s \perp s'$; ponieważ $s_1 \perp s'_1$ (średnice sprzężone okręgu są zawsze do siebie prostopadłe), więc kreśląc koło o środku na osi p , a przechodzące przez środki O i O_1 krzywych S i S_1 , otrzymamy na p takie



Rys. 258.

punkty M i N , że proste OM i ON odpowiadające parze O_1M i O_1N średnic sprzężonych okręgu S_1 są osiami elipsy S . Punkty W, W', V i V' przecięcia ich z S otrzymujemy przenosząc punkty przecięcia s_1 i s'_1 z okręgiem S_1 !

Będziemy je nazywali *wierzchołkami*, a odcinki WW' i VV' — jeśli nieporozumienie będzie wyłączone — również osiami.

IV. Nakreślić styczne z punktu P do elipsy, mając parę średnic sprzężonych AB i CD .

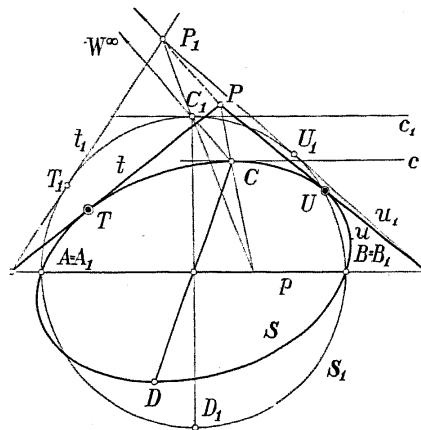
Można by to zadanie rozwiązać za pomocą powinowactwa jak na rys. 258. Nieco prościej będzie jednak wziąć okrąg S_1 na średnicy AB (rys. 259); wtedy oczywiście AB jest osią powinowactwa, a punktowi C odpowiadać musi punkt C_1 na średnicy prostopadłej do AB (aby styczne c i c_1 przecięły się na p).

Punkt P przenosimy do drugiego układu, łącząc go z C i rysując odpowiadającą jej prostą C_1P_1 (CP i C_1P_1 przecinają się na p , $CC_1 \parallel PP_1$). Styczne u_1 i t_1 z punktu P_1 do okręgu przenosimy do elipsy, łącząc ich przecięcia z osią powinowactwa z punktem P . Punkty styczności U i T leżą na prostych równoległych do kierunku powinowactwa z punktami U_1 i T_1 .

Uwaga: W obu ostatnich przykładach przyjmowaliśmy sieczną za oś kolineacji. Nie zawsze jednak otrzymamy w drugim układzie okrąg. Jeśliby bowiem stożkowa S była hiperbolą, a oś kolineacji przecinała ją w punktach X i Y (rys. 257 b) należących do różnych części, na które prosta niewłaściwa dzieli krzywą, to jest oczywiste, że w drugim układzie nie dostalibyśmy okręgu, lecz znowu hiperbolę S_1 , gdyż równoległa do XY prosta graniczna z musiałaby przeciąć S w dwóch punktach, które przeszłyby na punkty niewłaściwe.

V. Przekształcić okrąg na parabolę, mając dany środek kolineacji i oś kolineacji.

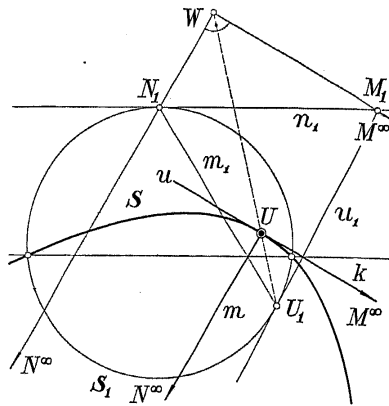
Jeśli okrąg S_1 (rys. 260) ma przejść na parabolę, to prosta graniczna n_1 musi być styczna do S_1 . Za pomocą W, k i n_1 jest oczywiście kolineacja określona. Weźmy pod uwagę punkt M_1 przecięcia n_1 i prostopadłej z W do N_1W (N_1 jest punktem styczności prostej granicznej z okręgiem). Znajdźmy biegunową m_1 tego punktu przez połączenie N_1 z punktem styczności U_1 drugiej stycznej u_1 do S_1 . Przenieśmy następnie m_1 do drugiego układu (oczy-



Rys. 259.

wiecie m przecina się z m_1 na osi kolineacji i jest równoległa do WN_1 .

Łatwo zauważyć, że m jest osią symetrii prostokątnej paraboli. Istotnie, styczna u w punkcie U odpowiada stycznej u_1 jest prostopadła do m wobec tego, że $m \parallel WN_1$ i $u \parallel WM_1$; biegunową punktu M^∞ na u jest prosta m , ponieważ odpowiada biegunowej m_1 punktu M_1 względem S_1 . Na m znajdują się zatem środki wszystkich cięciw równoległych do u , tzn. prostopadłych do m .



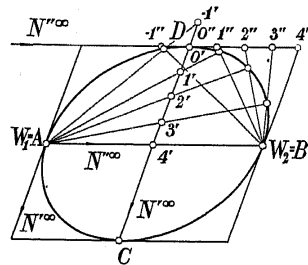
Rys. 260.

Udowodniliśmy więc istnienie osi symetrii prostokątnej paraboli. Przecina ona parabolę w dwóch punktach U i N^∞ ; U nazywamy *wierzchołkiem*.

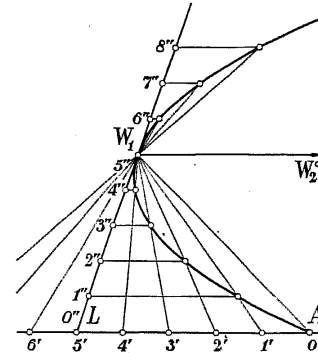
Uwaga. Zadania 1—4 posiadały po dwa rozwiązania (dwa punkty przecięcia prostej i stożkowej, dwie osie elipsy, dwie styczne z punktu do elipsy itd.). Zadania, które rozwiązaliśmy za pomocą twierdzenia Pascala — po jednym (punkt przecięcia stożkowej prostą przechodzącą przez znany punkt, styczna w znanym punkcie). Dla analogii z równaniami algebraicznymi nazywać je będziemy *zadaniami drugiego, wzgl. pierwszego stopnia*. Zadania pierwszego stopnia rozwiązywać będziemy za pomocą linii prostych, opierając się na tw. Pascala, drugiego przez kolineację z okręgiem; np. wykreślenie stycznej do stożkowej z punktu na znanej stycznej s , gdy punkt styczności s jest dany, jako zadanie stopnia pierwszego, może być dokonane za pomocą samych linii prostych.

II. Jeśli znane są średnice sprzężone elipsy i ich punkty przecięcia z elipsą, to inne punkty znaleźć można w następujący sposób:

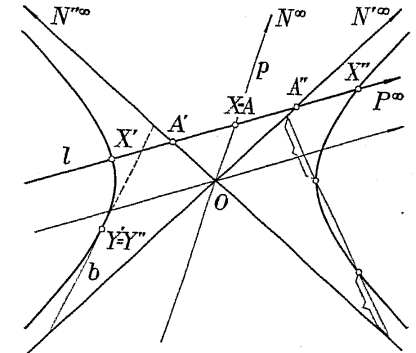
Średnicę CD dzielimy na n równych części (rys. 261) i oznaczamy liczbami $0', 1', 2', \dots, -1', -2', \dots$, kładąc $0' = D$; podobnie bok równoległoboku opisanego na elipsie dzielimy na n równych części, oznaczając punkty podziału liczbami $0'', 1'', 2'', \dots, -1'', -2'', \dots$, i biorąc również $0'' = D$. Punkty X przecięcia prostych W_1X' i W_2X'' , gdzie $W_1 = A$, $W_2 = B$, są punktami elipsy.



Rys. 261.



Rys. 262.



Rys. 263.

Wynika to na podstawie definicji stożkowych z równości dwustosunków odpowiednich czwórek promieni pęków (W_1) i (W_2), np. $(W_1 1, W_1 2, W_1 3, W_1 4) = (W_2 1'', W_2 2'', W_2 3'', W_2 4'')$. Zbiór wszystkich punktów X jest więc stożkową S . Ponieważ boki równoległe do CD są styczne do stożkowej (prostej $W_1 4'$ odpowiada $W_2 4''$ i prostej $W_1 N^\infty$ prosta $W_2 N''^\infty$) oraz punkt D należy do krzywej S ($W_1 O'$ odpowiada $W_2 O''$), więc S jest elipsą o średnicach sprzężonych AB i CD .

Dla paraboli określonej punktami W_1 , W_2^∞ i A oraz styczną w_1 mamy podobną konstrukcję:

Dzielimy na n równych części odcinek stycznej w_1 od punktu L przecięcia prostą AW_2^∞ do W_1 (rys. 262) oraz na n równych części odcinek AL . Zakładając $O' = A$ i $O'' = L$ i łącząc punkty x' z W_1 , a x'' z W_2 , otrzymujemy punkty paraboli.

Dowód opiera się na tych samych przesłankach co w przypadku elipsy.

W konstrukcji hiperboli, gdy znane są asymptoty i punkt X , korzystając będziemy z następującego **twierdzenia IX**:

Jeśli prosta l przecina hiperbolę w punktach X' i X'' , a asymptoty w A' i A'' , to $A'X' = A''X''$.

Wynika to z dotychczasowych rozważań o biegunowych. Ponieważ asymptoty są styczne do hiperboli w punktach N^∞ i N''^∞ , więc biegunowa p punktu P^∞ na l przechodzi przez ich punkt przecięcia O (rys. 263). Mamy zatem $(X'X''P^\infty A) = -1$ i $(N^\infty N''^\infty P^\infty N^\infty) = -1$. Z tw. Pappusa wynika jednak, że $(N^\infty N''^\infty P^\infty N^\infty) = (A'A''P^\infty A)$.

Ponieważ w obu czwórkach harmonicznych na l jeden z punktów (P^∞) jest niewłaściwy, więc drugi (A) jest środkiem odcinków $X'X''$ i $A'A''$; stąd równość $A'X' = A''X''$. (W szczególnym przypadku, jeśli prosta l jest

styczną do hiperboli, to punkt styczności jest środkiem odcinka między asymptotami.)

Korzystając z tego twierdzenia można znaleźć dowolną ilość punktów hiperboli, kreśląc odpowiednią ilość prostych przechodzących przez dany punkt.

Widać, że dwusieczne s i s' kątów między asymptotami tworzą parę średnic sprzężonych hiperboli, a więc są osiami. Oś s przecina krzywą w punktach W_1 i W_2 , zwanych *wierzchołkami hiperboli*; s nazywamy *osią rzeczywistą*, a s' urojoną.

ĆWICZENIA.

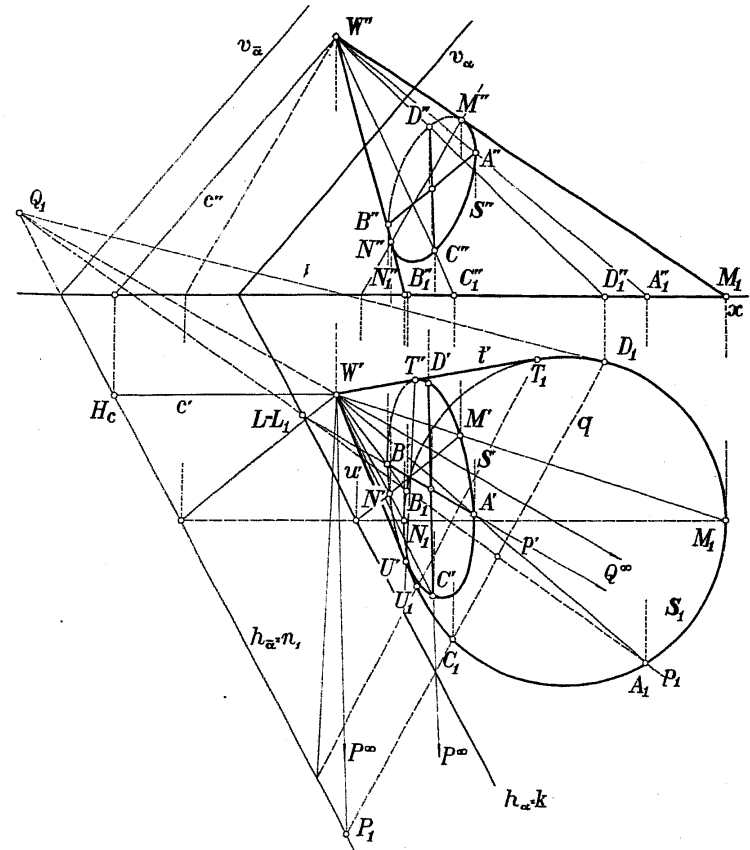
1. Znaleźć za pomocą tw. Pascala asymptoty hiperboli, mając dane cztery punkty właściwe i jeden niewłaściwy.
2. Narysować oś paraboli, mając trzy punkty właściwe i jeden niewłaściwy.
(Wsk.: Znaleźć punkt przecięcia paraboli prostą prostopadłą do kierunku osi, tzn. punktu niewłaściwego.)
3. Narysować oś paraboli znając dwie styczne wraz z punktami styczności (por. ćw. 7 poprzedniego par.).
4. Udowodnić za pomocą tw. Pascala: a) własność hiperboli o równości odcinków między krzywą a asymptotami, b) że punkt przecięcia stycznych a i b paraboli jest środkiem odcinka ograniczonego punktem styczności A prostej a i punktem C na średnicy przechodzącej przez punkt styczności B prostej b .
5. Znaleźć styczne do stożkowej przechodzące przez dany punkt P mając dane: a) punkty A, B, C i D oraz styczną a w punkcie A , b) A, B i C oraz styczne a i b w punktach A i B .
6. Narysować styczne do elipsy równoległe do danej prostej, znając średnice sprzężone AB i CD .
7. Znaleźć punkty przecięcia paraboli prostą, znając oś, wierzchołek i jedną styczną.

§ 28. Przekroje stożków i walców

Weźmy pod uwagę stożek, którego podstawą jest krzywa stożkowa S_1 . Niech dla prostoty S_1 będzie okręgiem na rzutni poziomej (rys. 264).

Znajdźmy przekrój dowolną płaszczyzną α . Jest widoczne, że gdyby płaszczyzna α przechodziła przez wierzchołek W stożka, a płaszczyznę podstawy przecinała w prostej mającej punkty A i B wspólne z krzywą S_1 , to przekrój składałby się z dwóch tworzących (WA i WB); jeśli by zaś w prostej stycznej w punkcie T do S_1 , to płaszczyzna miałaby ze stożkiem tylko tworzącą WT wspólną (taka płaszczyzna nazywa się *płaszczyzną styczną*). Gdy przecięcie z podstawą jest prostą zewnętrzną względem S_1 , to α ma ze stożkiem tylko wierzchołek wspólny.

Jeśli α nie zawiera wierzchołka stożka, to przekrój jest stożkową niezdegene-



Rys. 264.

rowaną S , odpowiadającą stożkowej S_1 w kolineacji o środku W . Osią kolineacji jest krawędź obu płaszczyzn, a więc w naszym przypadku ślad poziomy h_α .

Znajdźmy jeszcze prostą graniczną n_1 , odpowiadającą prostej niewłaściwej układu $[\alpha]$. Należy — jak to wynika z rys. 218 — przeprowadzić przez środek kolineacji W płaszczyznę $\bar{\alpha}$ równoległą do α i przeciąć nią płaszczyznę podstawy. Kreślimy więc przez punkt W prostą c równoległą do śladu pionowego ($c'' \parallel v_\alpha$, $c' \parallel x$) i przez jej ślad H_c prostą $h_{\bar{\alpha}}$.

Odróżnimy trzy przypadki:

a) $h_{\bar{\alpha}} = n_1$ nie przecina podstawy S_1 (rys. 264).

Wówczas przekrój S nie będzie posiadał punktów niewłaściwych, a więc

będzie elipsą. Aby znaleźć jej średnicę, weźmy na n_1 pewien punkt P_1 i znajdziemy jego biegunową p_1 (np. przez wykreślenie stycznych do okręgu S_1); ponieważ punktowi P_1 odpowiada w kolineacji punkt P^∞ , więc biegunowa p_1 przejdzie na średnicę p . Dla narysowania p przyjmujemy na p_1 dwa punkty: L_1 na k i Q_1 na n_1 ; pierwszemu odpowie punkt $L = L_1$, drugiemu Q^∞ na WQ_1 . Łącząc L i Q^∞ otrzymujemy średnicę p . Punkty A i B przecięcia jej ze stożkową znajdują się na prostych WA_1 i WB_1 .

Aby jeszcze znaleźć średnicę z nią sprzężoną, musimy biegunową q_1 punktu Q_1 względem S_1 przenieść — podobnie jak p — do płaszczyzny α .

Jeśli punkt W leży zewnątrz okręgu S_1 , to elipsa S musi się stykać z tworzącymi konturowymi t i u . Ponieważ punkty styczności T i U odpowiadają w kolineacji punktom T_1 i U_1 okręgu, więc znajdujemy je przenosząc do α prostą T_1U_1 (tak jak dla prostej p przyjmujemy punkt na k i na n_1 ; pierwszemu odpowiada ten sam punkt, drugiemu niewłaściwy).

Rzuty pionowe średnic AB i CD otrzymamy przenosząc na tworzące WA_1 , WB_1 , WC_1 i WD_1 punkty A , B , C i D .

Punkty M'' i N'' styczności tworzących konturowych pionowego rzutu z S'' odpowiadają punktom M_1 i N_1 na S_1 . Można je znaleźć przenosząc najpierw w rzucie poziomym prostą M_1N_1 do α , a następnie rysując prostą MN w rzucie pionowym.

Ponieważ pomiędzy układem płaskim $[\alpha]$, w przypadku gdy $\alpha \nperp \pi_1$, a układem $[\pi_1]$ zachodzi powinowactwo, w którym — jak wiadomo — średnica przechodzi na średnicę, więc $A'B'$ i $C'D'$ będą średnicami sprzężonymi rzutu poziomego S' elipsy przekroju S . Podobnie $A''B''$ i $C''D''$ tworzą średnice sprzężone rzutu pionowego S'' przekroju.

b) $h_{\bar{\alpha}} = n_1$ jest styczną do S_1 (rys. 265).

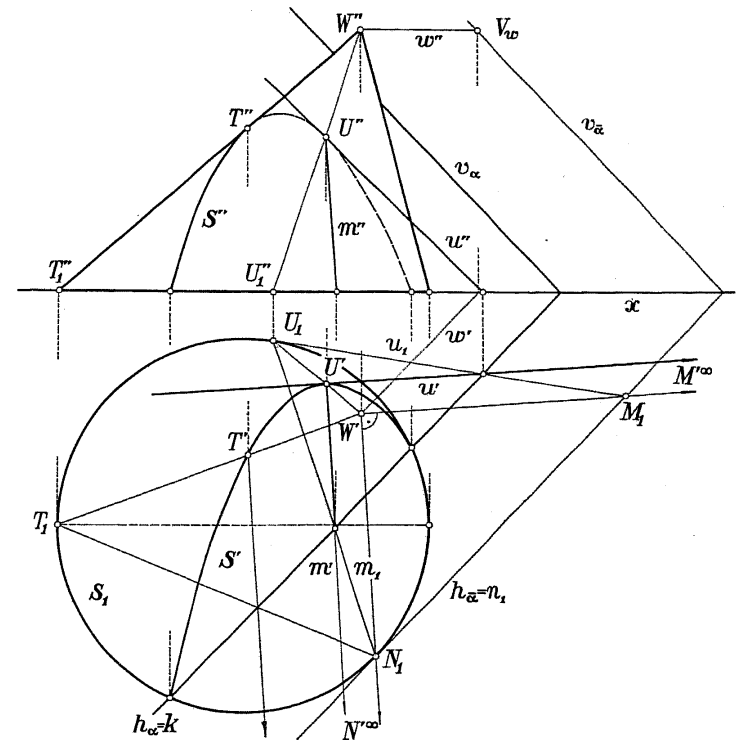
Oczywiście jeżeli chcemy to osiągnąć, to musimy najpierw przyjąć płaszczyznę $\bar{\alpha}$ kreśląc $h_{\bar{\alpha}}$ stycznie do S_1 , a następnie $h_{\alpha} // h_{\bar{\alpha}}$.

W tym przypadku przekrój S będzie parabolą. Parabolami będą również jej rzuty S' i S'' , jeśli płaszczyzna π nie jest prostopadła do π_1 , wzgl. π_2 .

Rozpatrując rzut poziomy zauważmy, że zadanie wykreślenia paraboli S nie różni się niczym od przykładu V poprzedniego paragrafu (rys. 260). Stosując więc tę samą metodę znajdujemy najpierw punkt M_1 ($WM_1 \perp WN_1$), a następnie jego biegunową m_1 i wreszcie odpowiadającą jej oś paraboli m .

Jeśli W był punktem zewnętrznym okręgu S_1 , to parabola stykałaby się z konturem; punkty styczności znaleźlibyśmy jak na rysunku poprzednim.

Rzut S'' przekroju możemy otrzymać przenosząc do rzutu pionowego prostą m , styczną u z punktem styczności U i dwa punkty paraboli znajdujące się na osi kolineacji (cztery punkty z h_{α} na oś x i U na tworzącą WU_1). Ponieważ



Rys. 265.

kąt między u'' i m'' będzie na ogół różny od prostego, więc m'' będzie jedynie średnicą paraboli S'' .

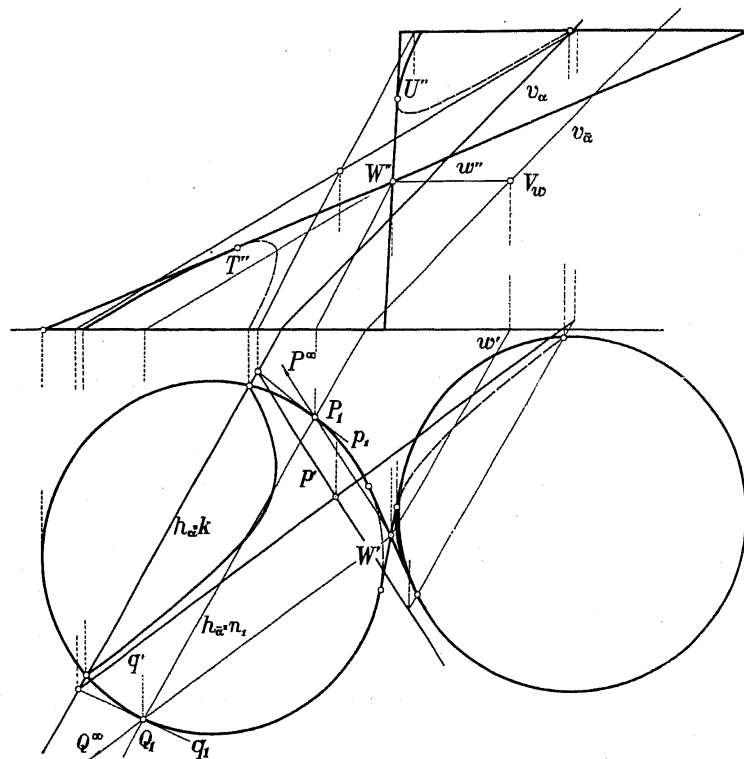
Punkt T'' styczności paraboli S'' z konturem otrzymujemy jako punkt odpowiadający punktowi T_1 na S_1 . Najpierw więc łączymy w rzucie poziomym T_1 i N_1 i znajdujemy odpowiadającą jej prostą TN , a następnie przenosimy T do rzutu pionowego.

c) $h_{\bar{\alpha}} = n_1$ przecina S_1 w dwóch punktach P_1 i Q_1 (rys. 266).

Przekrój jest wówczas hiperbolą. Asymptotami jej są proste p i q , które odpowiadają w kolineacji między podstawą z przekrojem stycznym p_1 i q_1 .

Rzut poziomy S' będzie hiperbolą, której asymptotami są p' i q' ; rzut pionowy S'' hiperbolą (o ile $\alpha \perp \pi_2$) o asymptotach p'' i q'' .

Znając asymptoty i punkt (np. na k i S_1) możemy wyznaczyć dowolną ilość innych punktów hiperboli.

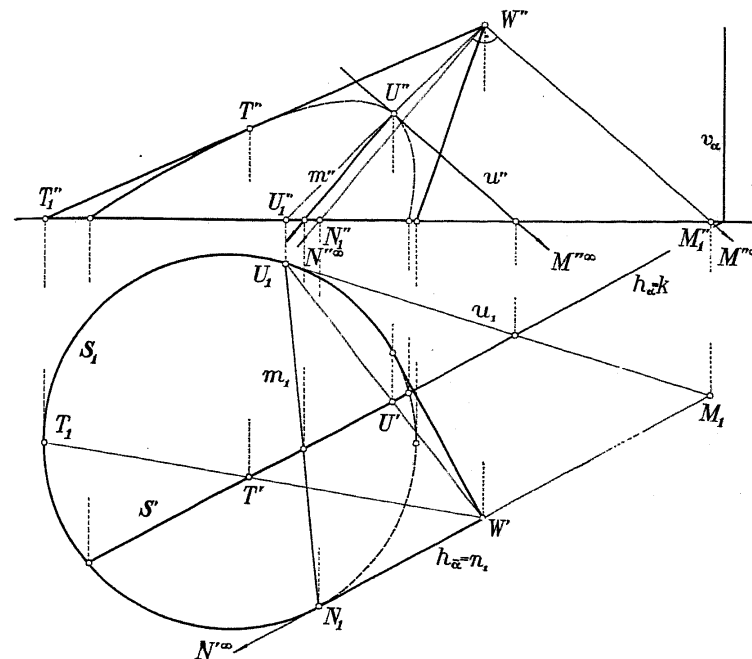


Rys. 266.

Punkty styczności z konturem w obu rzutach znajdujemy, opierając się na twierdzeniu, że są one środkami odcinków ograniczonych asymptotami.

Uwaga: Łącząc wierzchołek stożka ze wszystkimi punktami elipsy z rys. 264, otrzymamy tę samą powierzchnię stożkową; można więc uważać ją za podstawę stożka. Gdybyśmy do parabol i hiperboli nie zaliczali punktów niewłaściwych, to przyjmując je jako podstawy stożków (rys. 265 i 266), dostalibyśmy powierzchnię bez tworzącej WN_1 w przypadku podstawy parabolicznej, a bez dwóch tworzących WP_1 i WQ_1 w przypadku podstawy hiperbolicznej.

Na rysunkach 264, 265 i 266 konstrukcje były wykonane w jednym rzucie, a wyniki przeniesione do drugiego. W gruncie rzeczy korzystaliśmy nie z kolineacji zachodzącej między układami $[\alpha]$ i $[\alpha_1]$, lecz z kolineacji istniejącej między rzutami poziomymi figur płaszczyzny α a rzutami odpowiednich figur



Rys. 267.

płaszczyzny α_1 . A więc odpowiadającymi punktami nie były A i A_1 , lecz A' i A'_1 .

Jest to oczywiście możliwe tylko wtedy, gdy ani płaszczyzna α , ani płaszczyzna α_1 nie jest prostopadła do rzutni.

Jeśli np. podstawa S_1 znajduje się na rzutni poziomej, a płaszczyzna przekroju α jest prostopadła do rzutni poziomej, to zadania nie można rozwiązać posługując się jednym tylko rzutem.

Niech dla przykładu α będzie płaszczyzną równoległą do tworzącej konturowej WN_1 (rys. 267).

Przekrój będzie parabolą S , której rzut poziomy jest półprostą, a rzut pionowy parabolą S'' .

Oś kolineacji jest ślad h_α , prostą graniczną n_1 ślad h_α płaszczyzny przechodzącej przez W , a równoległej do α ; oczywiście h_α pokrywa się z rzutem tworzącej konturowej WN_1 .

Aby nakreślić parabolę S'' , wystarczyłoby znaleźć pewną średnicę, styczną w punkcie na średnicy i jeden punkt. Okazuje się, że podobnie jak na rys.

265 można było uzyskać oś rzutu poziomego przekroju (nie jest to rzut osi paraboli), tak i tu da się skonstruować oś rzutu S'' (nie będzie to rzut pionowy osi paraboli S).

W tym celu narysujemy w rzucie pionowym tworzącą WN_1 i oznaczmy przez M_1 taki punkt na n_1 , żeby rzut pionowy $W''M_1''$ był prostopadły do $W''N_1''$. Przenieśmy M_1 do rzutu poziomego i znajdziemy jego biegunową U_1N_1 . Będzie jej odpowiadać w kolineacji między S_1 i S taka średnica UN^∞ , której rzut pionowy $U''N''^\infty$ będzie osią paraboli S'' . Jest to oczywiste, gdyż stycznej $u_1 = U_1M_1$ w punkcie U_1 odpowiadać musi styczna UM^∞ , której rzut pionowy jest równoległy do $W''M''$, tzn. prostopadły do UN^∞ .

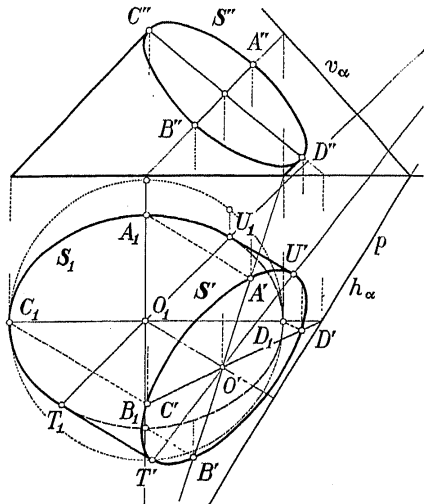
Przenosimy więc do rzutu pionowego punkt przecięcia U_1N_1 z osią kolineacji oraz punkt U tworzącej U_1W .

Parabola styka się z tworzącą konturową rzutu pionowego T_1W . Punkt styczności T'' znajdujemy przenosząc do rzutu pionowego punkt T przecięcia WT_1 i α .

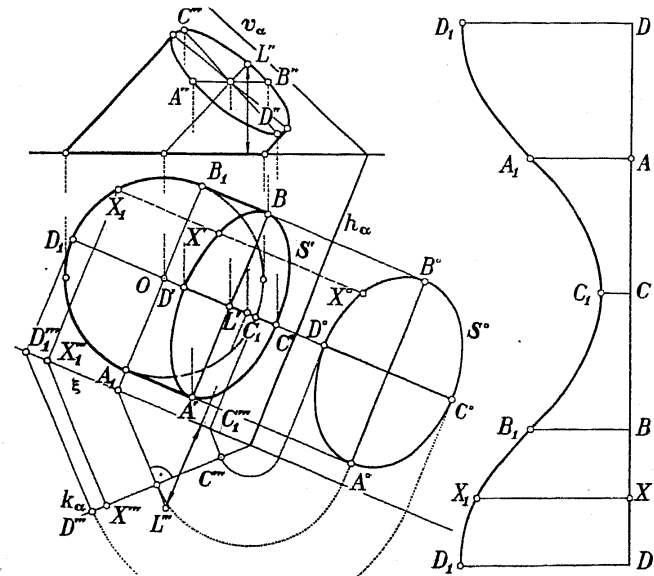
Podobnie, opierając się na kolineacji między stożkową S_1 a stożkową S (a nie na kolineacji między S_1 a S'), rozwiązać by można zadanie, gdyby przekrój był elipsą lub hiperbolą. W pierwszym przypadku należałoby znaleźć średnice sprzężone rzutu poziomego, w drugim asymptoty i jeden punkt krzywej.

Przyjmijmy teraz walec o podstawie na rzutni poziomej i dowolnym kierunku osi (rys. 268). Przekrój możemy znaleźć również za pomocą analogicznej konstrukcji; ponieważ jednak walec jest to stożek o wierzchołku niewłaściwym, więc będziemy tu mieli powinowactwo. Kierunkiem powinowactwa będzie punkt niewłaściwy osi walca, osią — krawędź przecięcia płaszczyzn podstawy i przekroju.

Ponieważ w powinowactwie średnicom sprzężonym odpowiadają średnice sprzężone, więc przyjmujemy na podstawie walca parę średnic sprzężonych A_1B_1 i C_1D_1 . Następnie znajdujemy punkt O , w którym oś walca (przechodząca przez środek O_1 podstawy) przebija płaszczyznę przekroju α . Znając parę O_1, O odpowiadających sobie punktów i wiedząc, że proste AB i A_1B_1 oraz



Rys. 268.



Rys. 269.

CD i C_1D_1 przecinają się na osi powinowactwa, łatwo znajdujemy rzuty poziome średnic AB i CD . Punkty styczności T i U przekroju z konturem uzyskujemy przenosząc prostą T_1U_1 do α . Rzuty pionowe średnic uzyskujemy łącząc punkt O'' z pionowymi rzutami śladów prostych AB i CD .

Znajdźmy jeszcze rozwinięcie walca.

W tym celu przetnijmy walec płaszczyzną prostopadłą do tworzących. Przekrój S jest elipsą prostopadłą do wszystkich tworzących.

Ponieważ na rozwinięciu tworzące pozostaną równoległe do siebie, więc rozwinięcie elipsy jako prostopadłe do wszystkich tworzących będzie prostą.

Jeśli — jak na rys. 268 — podstawą jest okrąg, to można znaleźć osie przekroju, biorąc na podstawie średnicę A_1B_1 prostopadłą do osi walca i $C_1D_1 \perp A_1B_1$.

Ponieważ dla rozwinięcia potrzebne będą rzeczywiste długości tworzących (od podstawy do przekroju), więc narysujemy trzeci rzut walca na płaszczyznę prostopadłą do α . W tym celu najpierw przenosimy oś walca OL do nowego rzutu, a następnie kreślimy ślad $h_\alpha \perp O''L''$.

Widać, że rzut trzeci jest odcinkiem $C'''D'''$ równym rzeczywistej długości osi małej; oś duża elipsy jest równa średnicy okręgu.

Jeśli wykonamy kład elipsy S' obracając ją dookoła h_α , to będziemy mogli

przez podział na małe łuki rozwinąć ją w przybliżeniu na odcinek DD , zastępując łuki odpowiednimi cięgiwami.

Jeśli X jest pewnym punktem podziału, to na prostopadłej do rozwinięcia DD elipsy kreślimy odcinek $XX_1 = X'''X''_1$. Łącząc uzyskane punkty $D_1, A_1, C_1, D_1, \dots$, krzywą, otrzymamy przybliżone rozwinięcie podstawy.

ĆWICZENIA.

1. Narysować rzuty okręgu położonego na danej płaszczyźnie $\alpha \perp \pi_2$, b) $\pi_1 \perp \alpha \perp \pi_2$.
Wsk.: Nakreślić kład okręgu i skorzystać z powinowactwa zachodzącego pomiędzy rzutem i kładem.
2. Narysować rzuty stożka obrotowego, którego podstawą jest okrąg leżący na danej płaszczyźnie α nieprostopadłej do żadnej rzutni i przeciąć go płaszczyzną β w następujących przypadkach: a) $\beta \parallel \alpha$, b) $\beta \perp \pi_1$, c) $\beta \parallel \pi_1$, d) płaszczyzna β ma położenie różne od a), b) i c).
Uwaga. Do konstrukcji potrzebna jest oś graniczna u_1 , która jest krawędzią α i płaszczyzny przechodzącej przez W a równoległej do β . (Biegunowe względem okręgu S_1 należy wyznaczać na kładzie S_1° , a nie na rzucie S_1' czy S_1'' .)
3. Przeciąć stożek, którego podstawa leży na rzutni poziomej, płaszczyzną nierównoległą do żadnej tworzącej.
4. Przeciąć stożek o podstawie na rzutni pionowej płaszczyzną prostopadłą do rzutni pionowej a równoległą do dwóch tworzących.
5. Narysować okrąg leżący na płaszczyźnie równoległej do rzutni pionowej i obrać tak punkt świecący, aby cień na rzutnię poziomą był a) elipsą, b) parabolą, c) hiperbolą, oraz narysować cień.
6. Na danej kuli opisać walec o osi równoległej do rzutni pionowej i przeciąć go rzutnią poziomą.
7. Wykonać ćwiczenie 6, gdy oś walca nie jest równoległa ani prostopadła do żadnej rzutni.
8. Wykonać ćwiczenie 5 przyjmując równoległe promienie światła.

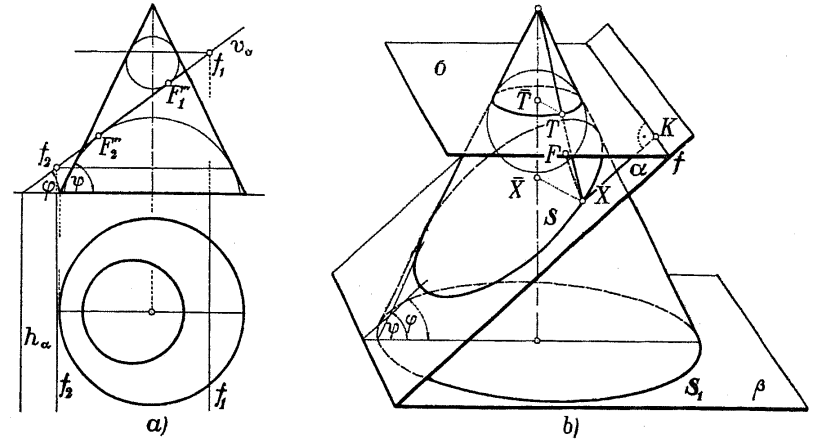
§ 29. Własności miarowe stożkowych

I. Obracając prostą t dookoła przecinającej ją prostej l otrzymamy tzw. *powierzchnię stożkową*. Prostą t nazywamy *tworzącą*, l *osią*, a punkt wspólny W — *wierzchołkiem powierzchni*.

Łatwo zauważyć, że płaszczyzna przechodząca przez W a prostopadła do osi l oraz każda przechodząca oś jest płaszczyzną symetrii prostokątnej powierzchni. Każda płaszczyzna prostopadła do l , a nie przechodząca przez W , przecina powierzchnię w okręgu.

Weźmy płaszczyznę α nieprostopadłą do osi i nie zawierającą wierzchołka (rys. 270 a i b).

Wiadomo, że przekrój S będzie stożkową (jako przekształcenie kolineacyjne okręgu S_1 znajdującego się na płaszczyźnie $\beta \perp l$).



Rys. 270.

Wpiszmy w stożek kulę, która byłaby równocześnie styczna do płaszczyzny α ; jest to oczywiście możliwe, gdyż w stożek można wpisać kulę o każdym promieniu. Oznaczmy przez F punkt styczności, a przez f krawędź α i płaszczyzny σ , w której leży okrąg styczności kuli ze stożkiem.

Udowodnimy, że stosunek

$$\frac{XF}{\overline{XK}}$$

odległości punktu X przekroju od punktu F i od prostej f posiada stałą wartość dla wszystkich punktów X stożkowej S .

Oznaczmy w tym celu przez φ i ψ kąty, jakie płaszczyzna β tworzy z płaszczyzną α , wzgl. z tworzącą stożka i weźmy tworzącą stożka przechodzącą przez X . Jest ona styczna do kuli w punkcie T na okręgu styczności. Łatwo zauważyć, że prosta XF jest w punkcie F styczna do kuli i wobec tego $XF = XT$; opieramy się tu na prostej uwadze, że odcinki na dwóch stycznych do kuli, ograniczone punktami styczności, są równe.

Obliczmy teraz długości rzutów odcinków XT i XK na oś stożka. Jak łatwo widać, rzuty prostokątne punktów T i K znajdują się w jednym punkcie T , gdyż leżą na płaszczyźnie σ , prostopadłej do osi stożka. Będziemy zatem mieli:

$$XT = \frac{\overline{XT}}{\sin \psi} \text{ i } XK = \frac{\overline{XT}}{\sin \varphi},$$

ponieważ kąt między XT i osią stożka wynosi $90 - \psi$, kąt zaś między osią stożka a XK $90 - \varphi$. Stąd:

$$\frac{XF}{KK} = \frac{XT}{KK} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = c, \quad (1)$$

tn. omawiany stosunek nie zależy od punktu X na stożkowej.

Jeśli $\varphi < \psi$, to przekrój jest elipsą (rys. 270 a, $c < 1$), gdy $\varphi = \psi$ parabolą (rys. 271 a, $c = 1$) gdy $\varphi > \psi$ — hiperbolą (rys. 271 b, $c > 1$).

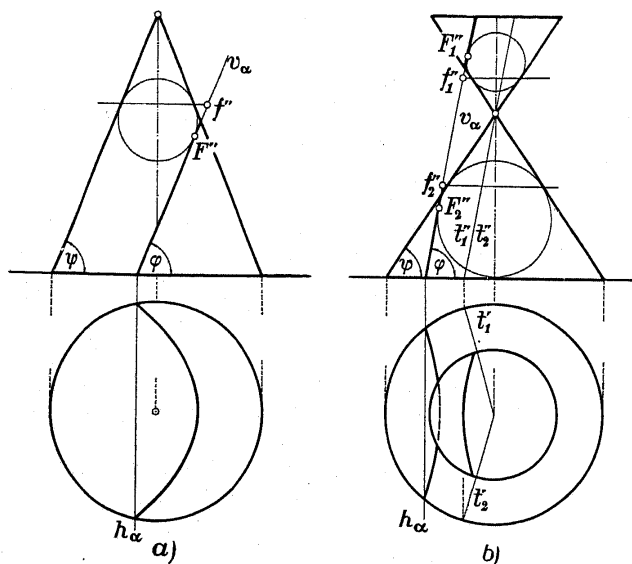
W ostatnim przypadku tworzące t_1 i t_2 równoległe do α przebijają stożek w punktach niewłaściwych hiperboli, a więc są równoległe do asymptot. (Łatwo zauważyć, że biorąc $\varphi = 90^\circ$ otrzymamy — z powodu symetrii — punkt przecięcia asymptot na prostej prostopadłej z W do α).

Punkt F i prostą f o tej własności nazywamy *ogniskiem* i *kierownicą stożkowej*.

Zachodzi pytanie, czy każda stożkowa posiada własność wyrażoną równaniem (1). Wystarczy oczywiście udowodnić, że każdą stożkową S można otrzymać za pomocą przecięcia stożka obrotowego (lub: na stożku obrotowym można narysować krzywą przystającą do danej z góry stożkowej).

Istotnie, jeśli S jest elipsą, to dobierając kąt φ można otrzymać przekrój o żądanym stosunku długości osi małej i dużej; przesuwając zaś α równoległe — elipsę przystającą do S .

Jeśli S jest hiperbolą, to weźmy stożek obrotowy Δ o kącie ψ równym połowie kąta między asymptotami. Ponieważ hiperbola jest jednoznacznie określona



Rys. 271.

asymptotami i jednym punktem np. wierzchołkiem, więc dobierając odpowiednio odległość wierzchołka stożka od płaszczyzny równoległej do jego osi, otrzymamy przekrój przystający do S .

Niech wreszcie S będzie parabolą, a Δ danym stożkiem. Przyjmując płaszczyznę α i α_1 pod kątem $\varphi = \psi$, otrzymamy parabole podobne do siebie. Wykażemy zatem, że pewna płaszczyzna równoległa do α przetnie Δ w krzywej przystającej do S , jeśli udowodnimy, że każde dwie parabole są do siebie podobne.

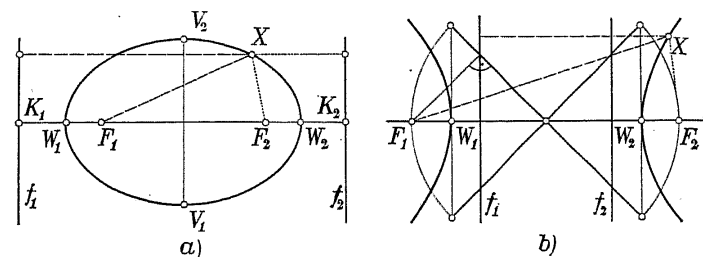
Weźmy w tym celu oś s paraboli S , wierzchołek W i punkt A np. na prostej p nachylonej pod kątem 45° do osi (rys. 272) oraz analogiczne elementy paraboli S_1 . Ponieważ określają one krzywe S wzgl. S_1 jednoznacznie, więc S i S_1 są podobne: każdej konstrukcji, która w zależności od W , s i A daje punkt X paraboli S odpowiada na S_1 konstrukcja powstała przez podobieństwo o stosunku $WA : W_1A_1$.

Możemy więc, pomijając ewentualne punkty niewłaściwe stożkowej, wypowiedzieć **twierdzenie X**:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby krzywa była stożkową, jest to, żeby istniała para: ognisko F i kierownica f , dla których stosunek odległości każdego punktu krzywej od punktu P i prostej f jest stały.

Jeśli $\varphi < \psi$, to istnieją dwie kule wpisane w stożek a styczne do płaszczyzny α (rys. 270 a). Mamy więc dwa ogniska F_1 i F_2 i dwie równoległe do siebie kierownice f_1 i f_2 . Ponieważ prosta przechodząca przez ognisko i prostopadła do kierownicy jest osią symetrii prostokątnej, więc $F_1F_2 \perp f$, w przeciwnym bowiem przypadku elipsa miałaby dwie równoległe osie symetrii prostokątnej.

Ponieważ dla każdego punktu X elipsy mamy (rys. 273 a):



Rys. 273.

$$(1_1) \quad \frac{XF_1}{Xf_1} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = c \quad \text{oraz} \quad \frac{XF_2}{Xf_2} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = c, \quad (1_2)$$

więc:

$$XF_1 + XF_2 = c \cdot Xf_1 + c \cdot Xf_2 = c \cdot (Xf_1 + Xf_2) = c \cdot f_1 f_2 = k. \quad (2)$$

Oznaczmy przez W_1, W_2 oraz K_1, K_2 punkty przecięcia elipsy, wzgl. ogniskowych osi $F_1 F_2$.

Przyjmując w równaniach (1_1) i (1_2) $X = W_1$, wzgl. $X = W_2$, otrzymamy:

$$\frac{W_1 F_1}{W_1 K_1} = c \quad \text{oraz} \quad \frac{W_2 F_2}{W_2 K_2} = c. \quad (3)$$

Zatem stosunek podziału trójki punktów $F_1 W_1 K_1$ jest równy stosunkowi podziału trójki $F_2 W_2 K_2$.

Załóżmy jeszcze w równaniu (2) $X = W_1$, a następnie $X = W_2$. Otrzymamy:

$$W_1 F_1 + W_1 F_2 = W_1 F_1 + W_1 F_1 + F_1 F_2 = 2 \cdot W_1 F_1 + F_1 F_2 = k$$

oraz

$$W_2 F_1 + W_2 F_2 = W_2 F_2 + F_2 F_1 + W_2 F_2 = 2 \cdot W_2 F_2 + F_1 F_2 = k,$$

z czego wynika że:

$$W_1 F_1 = W_2 F_2.$$

Środek odcinka $F_1 F_2$ jest więc równocześnie środkiem $W_1 W_2$, a na podstawie (3) też środkiem $K_1 K_2$.

Zauważmy jeszcze, że:

$$k = 2 W_1 F_1 + F_1 F_2 = W_1 F_2 + W_2 F_2 + F_1 F_2 = W_1 W_2.$$

Wykazaliśmy więc, że każda elipsa posiada dwa ogniska F_1 i F_2 , znajdujące się wewnątrz odcinka $W_1 W_2$ (rys. 270 a), dla których $XF_1 + XF_2 = W_1 W_2$, gdzie X oznacza dowolny punkt elipsy.

Położmy $W_1 W_2 = 2a$ oraz $F_1 F_2 = 2e$ i weźmy miejsce geometryczne C punktów, dla których suma odległości od danych punktów F_1 i F_2 równa się odcinkowi $2a$ (oczywiście $2 \cdot a > 2 \cdot e$).

Udowodnimy, że C jest elipsą. Zauważmy w tym celu, że C jest krzywą posiadającą dwie osie symetrii prostokątnej: $F_1 F_2$ i symetralną odcinka $F_1 F_2$. Oznaczmy przez W_1 i W_2 oraz V_1 i V_2 punkty przecięcia tych osi z C i weźmy elipsę S o osiach (odcinkach) $W_1 W_2$ i $V_1 V_2$. Posiada ona ogniska w punktach F_1 i F_2 , gdyż $F_2 V_1 = F_1 V_1 = \frac{1}{2} \cdot W_1 W_2 = a$ jak dla C .

Z tego wynika, że $C = S$. Mamy więc **twierdzenie XI**:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby krzywa była elipsą, jest istnienie dwóch punktów F_1 i F_2 , dla których suma $XF_1 + XF_2$ posiada wartość stałą większą od odległości $F_1 F_2$.

Dla $\varphi > \psi$ (rys. 271 b) istnieją również dwa ogniska F_1 i F_2 i dwie kierownice f_1 i f_2 .

Podobnie jak w przypadku elipsy, udowodnić można, że ogniska i wierzchołki są położone na osi rzeczywistej symetrycznie względem punktu przecięcia asymptot (który jest środkiem hiperboli), a następnie równość $|XF_1 - XF_2| = W_1 W_2$ dla każdego punktu X krzywej. Poza tym biorąc ciąg X_n punktów hiperboli zdążający do punktu niewłaściwego, można wykazać, że styczne w wierzchołkach W_1 i W_2 przecinają się z asymptotami na okręgu o średnicy $F_1 F_2$.

Opierając się na tym można udowodnić **twierdzenie XII**:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby krzywa była hiperbolą (po odrzuceniu punktów niewłaściwych), jest istnienie dwóch punktów F_1 i F_2 , dla których bezwzględna wartość różnicy $XF_1 - XF_2$ jest liczbą stałą mniejszą od długości $F_1 F_2$.

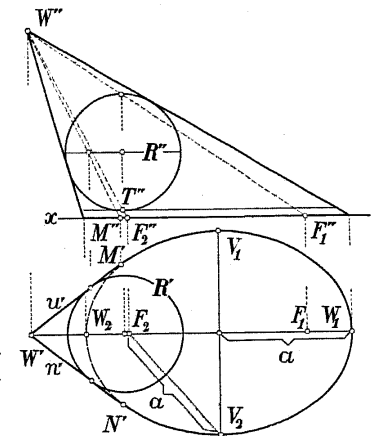
II. Jako zastosowanie tych twierdzeń znajdziemy przekrój stożka opisanego na kuli.

Weźmy najpierw oś równoległą do π_2 , a π_1 za płaszczyzną przekroju.

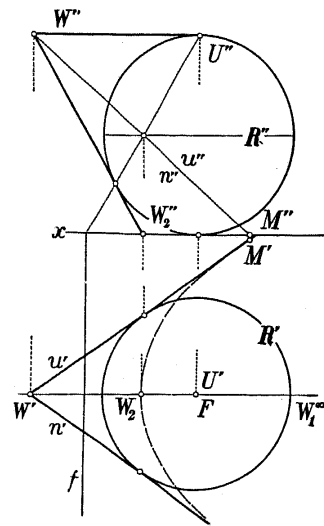
Jeśli wierzchołek W stożka ma wysokość większą niż najwyższy punkt kuli, to każda tworząca przebieje π_1 w punkcie właściwym; przekrój będzie elipsą (rys. 274). Gdyby kula była styczna do π_2 , to punkt styczności byłby ogniskiem, gdyby nie, to opierając się na podobieństwie z elipsą na płaszczyźnie stycznej a równoległej do niej, otrzymujemy ognisko jako punkt przebiecia rzutni prostą WT łączącą wierzchołek z najniższym (najwyższym) punktem kuli. Wierzchołki W_1 i W_2 elipsy są to punkty przebiecia π_1 tymi tworzącymi, które leżą w jednej płaszczyźnie z ogniskami. Końce V_1 i V_2 małej osi otrzymamy korzystając z równości $FV_1 = OW_1$.

Gdy wierzchołek stożka jest na wysokości najwyższego punktu kuli, to przekrój będzie parabolą (rys. 275), ponieważ jedna tworząca WU przebiega rzutnię w punkcie niewłaściwym. W tym przypadku znajdujemy jak poprzednio ognisko i wierzchołek, a kierownicę z relacji $fW_2 = W_2 F$. Inne punkty paraboli otrzymujemy z równania $XF = Xf$.

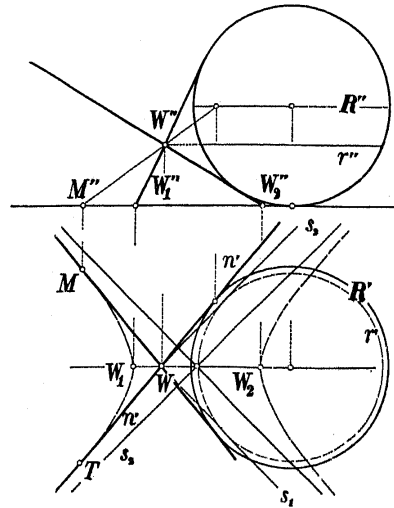
Biorąc wierzchołek na wysokości pewnego równoleżnika kuli (rys. 276), otrzy-



Rys. 274.



Rys. 275.



Rys. 276.

mamy na przekrój stożka hiperbolę, gdyż tworzące s_1 i s_2 styczne do tego równoleżnika będą równoległe do π_1 ; oczywiście asymptoty będą równoległe do s_1 i s_2 .

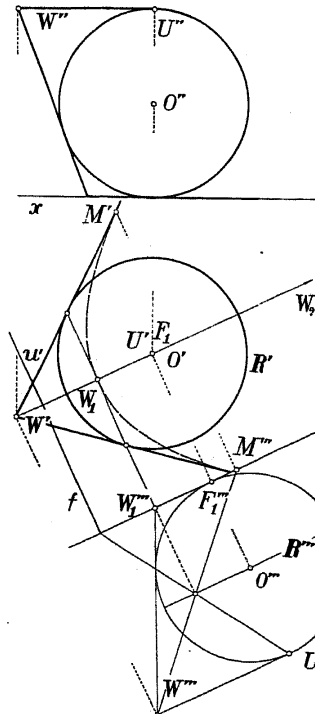
W tym przypadku nie jest konieczne znajdowanie ognisk. Wystarczy narysować wierzchołki W_1 i W_2 i następnie przez środek poprowadzić asymptoty równoległe do s_1 i s_2 .

We wszystkich przypadkach można znaleźć punkty styczności tworzących konturowych u i n z krzywą. Wystarczy narysować tworzącą u w rzucie pionowym i przeciąć nią rzutnię poziomą. W tym celu zauważmy, że punkt styczności u z kulą znajduje się na „równiku” R kuli. Rzut pionowy okręgu R jest oczywiście średnicą równoległą do x . Przenosząc punkt M na tę średnicę otrzymujemy M'' i tworzącą $u = WM$.

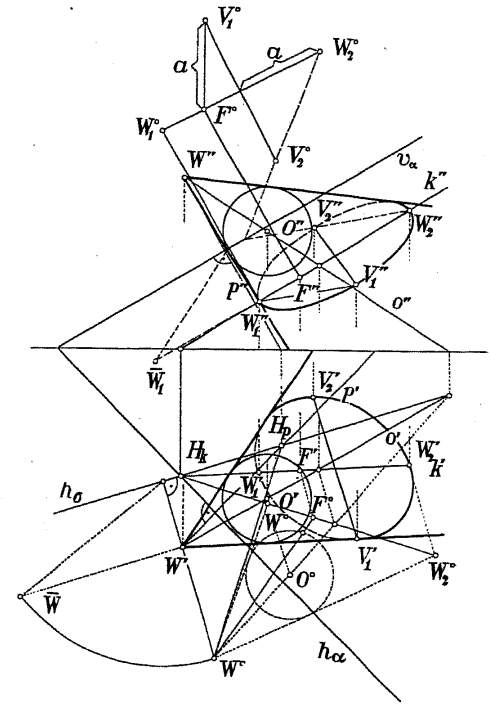
Gdyby oś stożka nie była równoległa do rzutni pionowej, to zadanie można by było rozwiązać za pomocą trzeciego rzutu na płaszczyznę równoległą do osi stożka (rys. 277).

W przypadku, gdy zarówno oś stożka Δ jak i płaszczyzna przekroju mają dowolne położenie, przecinamy stożek i płaszczyznę α płaszczyzną σ przechodzącą przez oś stożka i prostą prostopadłą do α .

Jest to, jak łatwo zauważyć, płaszczyzna symetrii figury złożonej z Δ i α . Na krawędzi k α i σ znajdują się ogniska i wierzchołki przekroju. Jeśli więc (rys. 278) znajdziemy kład płaszczyzny σ i nakreślimy klady W° , O° , k° i kład



Rys. 277.



Rys. 278.

przekroju kuli, to będziemy mogli na krawędzi k narysować ogniska i wierzchołki.

Teraz już dla wykreślenia rzutów przekroju wystarczy narysować kład płaszczyzny α wraz z wierzchołkami i ogniskami na k i po znalezieniu kladu krzywej powrócić do właściwego położenia.

III. Niech C będzie krzywą, a K okręgiem stycznym do niej w punkcie P . Oznaczmy przez Q punkt przecięcia C i K różny od P . Załóżmy, że okrąg K dąży do pewnego okręgu K_0 , gdy Q dąży do P . Okrąg K_0 nazywamy *okręgiem krzywiznowym* krzywej C w punkcie P , a jego środek *środkiem krzywizny* krzywej C ; posiada on z krzywą C ściślejszą styczność niż inne okręgi styczne do C .

Jeśli C jest elipsą, parabолą lub hiperbolą, a P wierzchołkiem krzywej, to jak łatwo zauważyć, okrąg krzywiznowy zdefiniować można jako największy okrąg zawarty wewnątrz krzywej i styczny do niej w punkcie wierzchołkowym (rys. 279).

Równocześnie okrąg K przejdzie na elipsę, której osią dużą będzie średnica $2r_0$, osią zaś małą odcinek $2\bar{b} = W_1\bar{U}$ spełniający relację:

$$2b : 2r_0 = 2b : 2a.$$

Osiami elipsy K są więc: odcinek $2\bar{a} = 2r_0 = 2\frac{b^2}{a}$ oraz $2\bar{b} = 2r_0 \cdot \frac{b}{a} = 2 \cdot \frac{b^3}{a^2}$.

Krzywa $\bar{E}$, która jest okręgiem krzywiznowym dla elipsy K w punkcie W_1 na osi małej, będzie miała promień:

$$\bar{r}_0 = \bar{b} = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2 : \frac{b^3}{a^2} = \frac{\bar{a}^2}{\bar{b}}.$$

Promień krzywizny jest więc równy ilorazowi kwadratu półosi dużej i półosi małej.

Można równocześnie znaleźć oba środki krzywizn kreśląc z wierzchołka prostokąta opisanego na elipsie (rys. 279) prostą prostopadłą do przekątnej nie przechodzącej przez ten punkt; przetnie ona osie elipsy w punktach S_1 i S_2 , które są środkami krzywizn. Istotnie, z podobieństwa trójkątów W_1S_1A i CDB wynika, że:

$$W_1S_1 : b = 2b : 2a, \text{ tzn. } W_1S_1 = \frac{b^2}{a} = r_0;$$

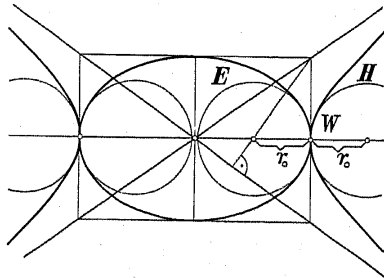
z podobieństwa zaś trójkątów V_1S_2A i CBD równość:

$$V_1S_2 : a = 2a : 2b, \text{ tzn. } V_1S_2 = \frac{a^2}{b} = r_1.$$

Promień krzywizny hiperboli w wierzchołku znajdujemy za pomocą tej samej konstrukcji (rys. 280 b). Przyjmujemy również kulę o promieniu $e-a$, gdzie $2e = F_1F_2$, a $2a = W_1W_2$, styczną do płaszczyzny hiperboli w ognisku; podobnie jak w przypadku elipsy znajdujemy wierzchołek stożka obrotowego przechodzącego przez hiperbolę i rachunkiem nie różniącym się od poprzedniego otrzymujemy na promień krzywizny wartość:

$$r_0 = \frac{e^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Wynika z tego, że promienie krzywizn elipsy i hiperboli o tych samych osiach a i b w punktach wspólnych są równe (rys. 282). Inaczej można to wypowiedzieć, iż krzywe E i H są w punkcie W lokalnie symetryczne względem wspólnej stycznej.



Rys. 282.

Dla paraboli (rys. 280 c) otrzymujemy bez trudu wartość:

$$r_0 = 2F_1W_1 = Ff.$$

Promień krzywizny paraboli w wierzchołku jest więc równy odległości ogniska od ogniskowej.

ĆWICZENIA.

1. Znaleźć przekrój stożka obrotowego opisanego na kuli płaszczyzną nieprostopadłą do żadnej rzutni za pomocą dwukrotnej zmiany układu.
2. Udowodnić analogiczne jak dla stożka twierdzenie o ogniskach przekroju walca obrotowego.
3. Znaleźć cień kuli na π_1 przy oświetleniu równoległym a nieprostopadłym do rzutni poziomej.
4. Obrac tak położenie źródła światła, aby cień kuli na rzutnię poziomą był parabolą, a cień na rzutnię pionową elipsą i narysować je; punkty przecięcia cieni z osią rzutów znaleźć za pomocą powinowactwa elipsy z okręgiem.
5. Udowodnić, że ogniskowa f jest biegunową ogniska F względem krzywej drugiego stopnia.

(Wsk.: Wykazać, że czwórka (W_1W_2FK) , gdzie K oznacza punkt przecięcia f i osi W_1W_2 , jest harmoniczną).

6. Dana jest elipsa E o wierzchołkach W_1 i W_2 oraz ogniskach F_1 i F_2 . Udowodnić, że miejscem geometrycznym wierzchołków W stożków obrotowych o podstawie E jest hiperbola H , której wierzchołkami są punkty F_1 i F_2 , a ogniskami punkty W_1 i W_2 .

(Wsk.: Należy wziąć pod uwagę zbiór wszystkich kul stycznych do płaszczyzny elipsy w punkcie F_1 . Niech K będzie jedną z nich (wykonać rysunek); weźmy płaszczyznę α przechodzącą przez W_1 , W_2 i środek kuli. Ponieważ wierzchołki i ognisko określają jednoznacznie E , więc szukany stożek będzie opisany na kuli z punktu W na przecięciu stycznych z W_1 i W_2 do okręgu, który jest częścią wspólną α i K . Wykazać, że $WW_2 - WW_1 = W_2F_1 - W_1F_1$.)

7. Dana jest hiperbola H o wierzchołkach W_1W_2 i ogniskach F_1F_2 . Udowodnić, że miejscem geometrycznym wierzchołków W stożków obrotowych o podstawie H jest elipsa E , której wierzchołkami są punkty F_1 i F_2 , a ogniskami punkty W_1 i W_2 .

(Wsk.: Dowód jest podobny jak w ćwiczeniu poprzednim.)

8. Sformułować i udowodnić dla paraboli twierdzenia analogiczne do twierdzeń zawartych w dwóch poprzednich ćwiczeniach.