

ROZDZIAŁ II.

RZUTY NA DWIE PŁASZCZYZNY

§ 10. Rzuty punktu

Rzuty cechowane mają wiele niedogodności: przy rzutach punktów wypisuje się cechy, dla wyznaczenia płaszczyzny bierze się pod uwagę tzw. warstwiec itd. Niedogodności te pochodzą z niejednolitości metody, która jest połączeniem geometrii z arytmetyką.

Metodą całkowicie geometryczną jest kreślenie rzutów na dwie płaszczyzny, tzw. *metoda Monge'a*.

Niech π_1 i π_2 będą dwiema płaszczyznami prostopadłymi do siebie, np. poziomą i pionową, a x — ich prostą wspólną.

Mając punkt P , wykreślać będziemy dwa jego rzuty (rys. 89):

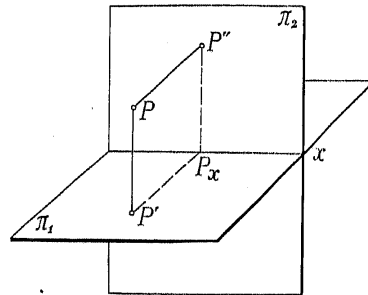
1. rzut prostokątny P' na płaszczyznę π_1 ,
2. rzut prostokątny na płaszczyznę π_2 , który dla odróżnienia od poprzedniego oznaczać będziemy przez P'' .

Rzut P' na rzutnię poziomą nazywamy *rzutem poziomym*, a P'' — *rzutem pionowym*.

Jeśli zatem dana jest pewna figura geometryczna, to będziemy kreśliли jej dwa rzuty: jeden na π_1 , a drugi na π_2 .

Weźmy pod uwagę płaszczyznę α przechodzącą przez prostą PP' prostopadłą do π_1 i przez prostą PP'' prostopadłą do π_2 . Ponieważ prosta PP' jest prostopadła do x (x leży na π_1 , a $PP' \perp \pi_1$) i PP'' jest również prostopadła do x (x leży na π_2 , a $PP'' \perp \pi_2$), więc płaszczyzna α jest prostopadła do x (rys. 89). Wynika z tego, że $P'P_x \perp x$ oraz $P''P_x \perp x$, gdzie P_x oznacza punkt przecięcia α prostą x .

Zapiszmy ten dowód używając znaku wynikania logicznego, którym odtąd będziemy się w podobnych wypadkach posługiwać. Niech mianowicie A i B oznaczają pewne dwa zdania; symbol $A \rightarrow B$ (który czytamy: z A wynika B) oznaczać będzie, że z prawdziwości zdania A wynika prawdziwość zdania B.



Rys. 89.

(§ 10]

Rzuty punktu

45

Np. jeśli A jest równością $x = 2$, a B równością $x^2 = 4$, to możemy napisać $(x = 2) \rightarrow (x^2 = 4)$.

Podany dowód można więc zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (P P' \perp \pi_1) &\rightarrow (P P' \perp x) \searrow (a \perp x) \nearrow (P' P_x \perp x) \\ (P P'' \perp \pi_2) &\rightarrow (P P'' \perp x) \nearrow (a \perp x) \searrow (P'' P_x \perp x). \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $\sphericalangle (P' P_x P'') = \sphericalangle (\pi_1, \pi_2) = 90^\circ$ i — co za tym idzie — iż czworokąt $P P'' P_x P'$ jest prostokątem; mamy więc równości:

$$PP' = P''P_x \text{ i } PP'' = P'P_x.$$

Jeżeli mówimy o rzucie poziomym, to cechą punktu P jest długość odcinka $P'P$, jeśli zaś o rzucie pionowym, to cechą jest długość odcinka $P''P$. Mamy więc

Wniosek. Cecha punktu P względem rzutni poziomej równa jest odległości rzutu pionowego P'' od prostej x .

Cecha punktu P względem rzutni pionowej równa jest odległości rzutu poziomego P' od prostej x .

Jeśli zatem będziemy kreśliли rzuty na dwie prostopadłe do siebie płaszczyzny π_1 i π_2 , to zbyteczne jest wypisywanie cech, gdyż cecha względem π_1 zanotowana jest na π_2 i równocześnie cecha względem π_2 uwidoczniiona jest na π_1 .

Wektorowi pionowemu $P'P$ przypisywać będziemy znak +, gdy jest on skierowany w górę, a znak —, gdy jest on skierowany w dół.

Dla wektorów prostopadłych do π_2 przyjmujemy pewien zwrot za dodatni, przeciwny zaś za ujemny.

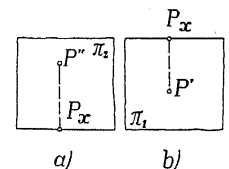
Oczywiście chcielibyśmy mieć oba rzuty, poziomy i pionowy, na jednym rysunku. Umieścimy je w sposób zupełnie dowolny, zaznaczając na obu rzutach prostą x (rys. 90 a i 90 b).

Sposób odczytywania tych rzutów jest następujący:

Przypatrując się rzutowi poziomemu (rys. 90 b), należy wyobrazić sobie punkt P na prostej prostopadłej do π_1 i przechodzącej przez P' w odległości od π_1 równej długości odcinka $P_x P''$ znajdującego się na rysunku 90 a.

Przypatrując się rzutowi pionowemu (rys. 90 a) należy wyobrazić sobie punkt P jako koniec odcinka $P''P$ o długości $P_x P'$ (z rysunku 90 b), ustawionego pod kątem prostym do π_2 .

Tak więc związane ze sobą rysunki 90 a i 90 b podają dokładne położenie punktu względem rzutni.



Rys. 90.

Ze względów praktycznych jest wskazane oba rysunki złączyć w jeden, nakładając na siebie proste x tak, by punkt P_x był wspólny (rys. 91).

Wtedy oczywiście punkty P' i P'' leżą będą na prostej prostopadłej do x .

Sposób łączenia rzutów pionowego i poziomego można jeszcze wyobrazić sobie inaczej:

Niech rzutnia pozioma będzie płaszczyzną, na której kreślimy.

Jeśli pionową rzutnię π_2 , ustawioną prostopadle do płaszczyzny rysunku, obrócimy o kąt 90° dookoła prostej x (rys. 92), to rzut pionowy punktu P padnie na π_1 , zajmując takie położenie względem rzutu poziomego jak na rys. 91.

Odczytywanie dwu rzutów znajdujących się na jednym rysunku może początkowo sprawiać trudności. Aby dojść do koniecznej wprawy, przyjrzyjmy się rzutom punktów w różnych położeniach względem π_1 i π_2 .

Dla łatwiejszego porozumienia nazwijmy wektor $P'P$ wysokością punktu P , wektor zaś $P''P$ głębokością tego punktu.

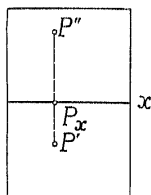
Rzutnia π_1 dzieli przestrzeń na dwie półprzestrzenie (rys. 92): dodatnią S_1 i ujemną S_2 . Rzutnia π_2 dzieli również przestrzeń na dwie półprzestrzenie: dodatnią S_3 i ujemną S_4 . Część wspólną półprzestrzeni S_1 i S_3 nazywać będziemy I ćwiartką, część wspólną S_1 i S_4 — II ćwiartką, część wspólną S_2 i S_4 — III ćwiartką i w końcu część wspólną S_2 i S_3 — IV ćwiartką.

Zatem:

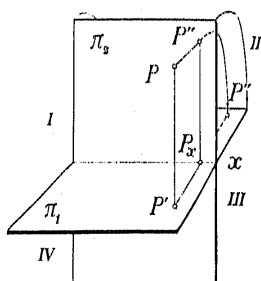
w	I	ćwiartce	wysokość	punktu	jest	dodatnia	i	głębokość	dodatnia,
»	II	»	»	»	»	»	»	»	ujemna,
»	III	»	»	»	»	ujemna	»	»	»
»	IV	»	»	»	»	»	»	»	dodatnia.

Jeśli więc rzutnię pionową obrócić dookoła osi x o 90° tak, by część dodatnia π_2 zeszyła się z częścią ujemną π_1 (a więc rozwierając I ćwiartkę), to wówczas (rys. 93):

punkt	A	ćwiartki	I	ma	rzut	A'	pod	osią	x , a rzut	A''	nad	osią	x ,
»	B	»	II	»	»	B'	nad	»	x , »	B''	»	»	x ,
»	C	»	III	»	»	C'	»	»	x , »	C''	pod	»	x ,
»	D	»	IV	»	»	D'	pod	»	x , »	D''	»	»	x .



Rys. 91.



Rys. 92.

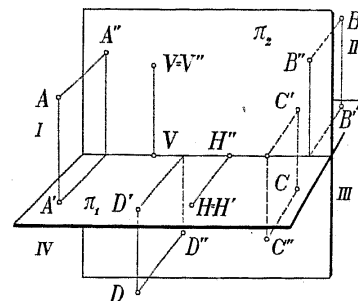
Jeśli punkt H znajduje się na rzutni π_1 , to wtedy (i tylko wtedy) jego rzut H'' jest na osi x ; oczywiście $H' = H$.

Jeśli punkt V znajduje się na π_2 , to wtedy (i tylko wtedy) jego rzut V' jest na osi x ; rzut pionowy V'' oczywiście pokrywa się z V .

ĆWICZENIA.

1. Jak położone są rzuty punktu znajdującego się w płaszczyźnie symetrii obu rzutni, przechodzącej przez ćwiartki I i III?

2. Jak położone są rzuty punktu leżącego na płaszczyźnie symetrii π_1 i π_2 przechodzącej przez ćwiartki II i IV?



Rys. 93.

§ 11. Zadania

I. Weźmy pod uwagę sześcian stojący na rzutni poziomej.

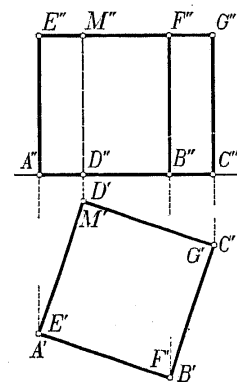
Z końcowej uwagi § 10 wynika, że rzuty pionowe wierzchołków A, B, C, D leżących na π_1 znajdują się na osi x (rys. 94). Rzuty poziome wierzchołków E, F, G i M górnej podstawy sześcianu pokrywają się z odpowiednimi wierzchołkami dolnej jego podstawy, w rzucie zaś pionowym znajdują się nad osią x na wysokości równej bokowi sześcianu.

II. Ustawmy sześcian tak, by przekątna ściany AM była pionowa.

Rzut poziomy prostokąta $ABGM$ jest odcinkiem równym bokowi sześcianu, rzut zaś pionowy — prostokątem o boku prostopadłym do x o długości ściany przekątnej (rys. 95). Drugi prostokąt przekątny $CFED$ ma położenie poziome, gdyż przekątne AM i ED kwadratu są do siebie prostopadłe; wobec tego rzut poziomy jest prostokątem przystającym, pionowy zaś odcinkiem równoległym do x na wysokości środka pierwszego prostokąta.

Po wykreśleniu obu prostokątów przekątnych w dwu rzutach otrzymujemy rzuty krawędzi, łącząc ze sobą punkty AD, BC, AE , itd.

W rzucie pionowym krawędzie wychodzące z punktu F są niewidoczne,



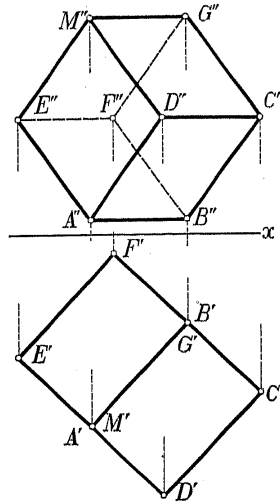
Rys. 94.

gdyż głębokość tego punktu jest mniejsza od głębokości odpowiedniego punktu ściany $ADME$ (punkt F jest zasłonięty przed widzem ścianą $ADME$).

III. Wykreślmy rzuty prostokąta $ABCD$ o bokach 2 i 2,5 cm, którego przekątna AC jest prostopadła do π_1 .

Rzuty poziome punktów A i C pokrywają się (rys. 96 b), a rzuty pionowe znajdują się od siebie w odległości naturalnej, tzn. w odległości równej przekątnej AC (którą znaleziono na rys. 90 a).

Nie trudno jest zauważyć, że jeśli przekątna AC jest pionowa, to rzut D' punktu D znajduje się w odległości DP (rys. 96 a) od rzutu przekątnej AC , rzut zaś pionowy D'' — na wysokości równej AP od x , jeśli A leży na π_1 . Rzuty punktu B znajdujemy analogicznie.



Rys. 95.

IV. Weźmy teraz sześcienn w takim położeniu, że jedna z przekątnych jest prostopadła do rzutni poziomej.

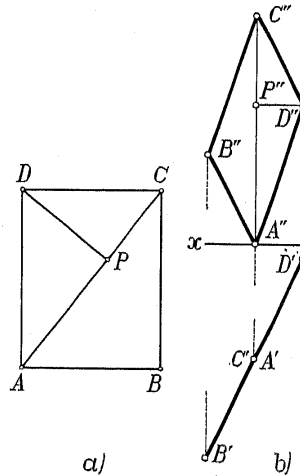
Rzuty prostokąta $AEGC$ o przekątnej pionowej znajdujemy jak w zadaniu poprzednim (rys. 97 a).

Aby wykreślić rzuty ściany $ABCD$, zauważmy, że przekątna BD przechodzi przez środek i jest prostopadła do AC ; ponieważ poza tym jest ona prostopadła do narysowanego już prostokąta, który ma położenie pionowe, więc ma ona kierunek poziomy. Z twierdzenia o rzutach prostych prostopadłych (§ 7) wynika, że rzut $B'D'$ jest prostopadły do rzutu $A'C'$; poza tym $B'D' = BD$.

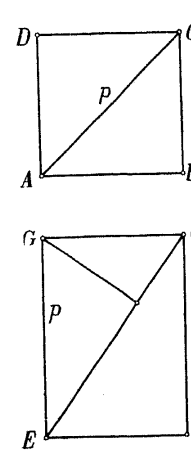
Rzut pionowy $B''D''$ jest tu oczywiście równoległy do x .

Pozostałe krawędzie (rys. 97 b) wykreślić można, opierając się jedynie na równoległości do narysowanych już boków.

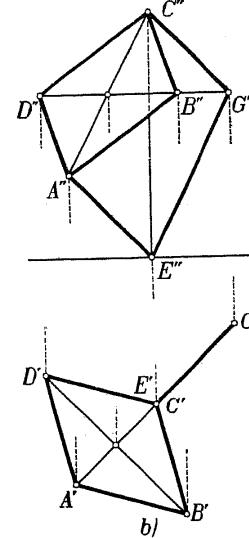
Wykazać, że sześciokąt $A'B'F'G'M'D'$ jest foremny!



Rys. 96.



a/

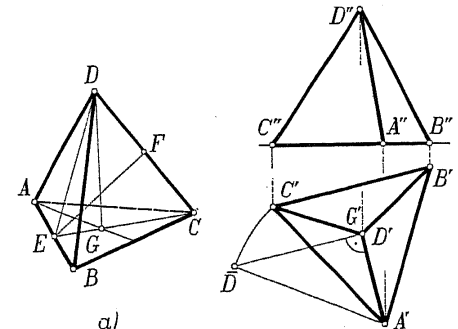


Rys. 97.

V. Czworoscianem foremnym nazywamy część przestrzeni ograniczoną czterema trójkątami równobocznymi.

Ma on 6 krawędzi i 4 wierzchołki.

Gdy ściana ABC znajduje się na rzutni poziomej, to — jak łatwo zauważyć — rzut poziomy czwartego wierzchołka D znajduje się w środku ciężkości G trójkąta ABC . Rzut pionowy D'' wierzchołka D ma wysokość równą wysokości czworoscianu. Aby ją znaleźć, obracamy o 90° trójkąt prostokątny ADG , w którym przyprostokątna AG jest równa $2/3$ wysokości ściany, przeciwprostokątna zaś AD jest bokiem czworoscianu. Punkt D otrzymujemy więc na przecięciu prostej $G'D$ prostopadłej do AG z łukiem o środku A i promieniu AB .



Rys. 98.

VI. Nakreślmy rzuty czworoscianu foremnego ustawionego tak, że dwa boki skośne AB i CD są równoległe do rzutni poziomej.

Przed wszystkim zauważmy, że bok AB jest prostopadły do boku CD (rys. 98 a). W tym celu połączmy środki E i F boków AB i CD . Mamy

$$\begin{aligned} (AB \perp EC) &\searrow \\ (AB \perp ED) &\nearrow \end{aligned} (AB \perp ECD) \rightarrow (AB \perp CD).$$

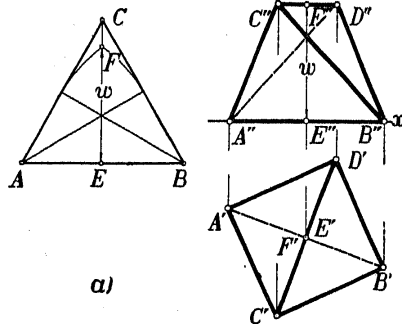
Ponieważ trójkąt CDE jest równoramienny, więc $EF \perp CD$. Podobnie $EF \perp AB$. Jeśli więc boki AB i CD są równoległe do π_1 , to odcinek EF jest prostopadły do π_1 .

W rzucie poziomym EF będzie więc punktem, a AB i CD — do siebie prostopadłe. Ponieważ $A'B' = C'D' = AB$, więc w rzucie poziomym obrys figury jest kwadratem (rys. 99).

Rzuty pionowe boków AB i CD są równoległe do osi x i znajdują się w odległości EF od siebie.

Dla wyznaczenia odcinka EF skorzystano z tego, iż jest on wysokością trójkąta równoramiennego o podstawie AB (rys. 99 a) i o ramionach równych wysokościami ścian.

W rzucie pionowym otrzymamy trapez równoramienny lub trójkąt równoramienny (jeśli odcinek AB lub CD jest prostopadły do π_2).



Rys. 99.

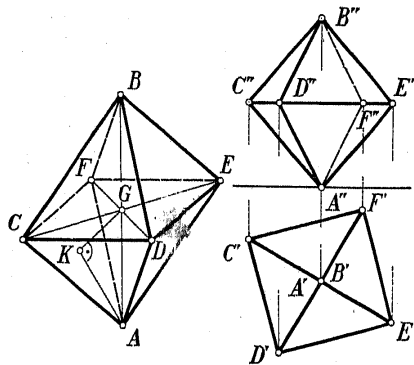
VII. Ośiem trójkątów foremnych ogranicza bryłę zwaną *ośmiościanem foremnym* (rys. 100).

Mamy tu 6 wierzchołków i 12 krawędzi. Ośmiościan ma 3 przekątne AB , CE i DF , połowiące się wzajemnie, prostopadłe i równe.

Jeśli jedna przekątna jest prostopadła do π_1 , to dwie pozostałe są do niej równoległe i na rzutni poziomej otrzymamy kwadrat. Rzut pionowy tego kwadratu jest odcinkiem równoległym do x .

VIII. Nakreślmy rzuty *ośmiościanu foremnego*, gdy ściana ACF leży na rzutni poziomej.

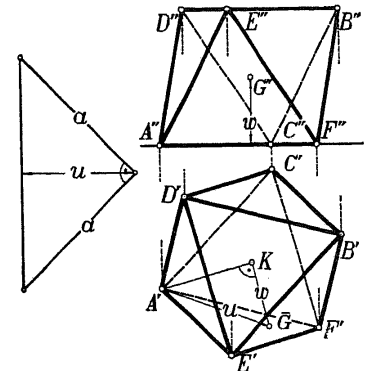
Zadanie można łatwo rozwiązać, jeśli zwrócić najpierw uwagę na ostrosłup $ACFG$ (rys. 100 a).



Rys. 100.

Oczywiście jest to ostrosłup prosty, którego wysokość KG można obliczyć z trójkąta prostokątnego AKG , gdzie bok AK jest równy $2/3$ wysokości ściany, a bok GA — połowie przekątnej ośmiościanu, czyli połowie przekątnej kwadratu o boku równym bokowi figury (obok rzutu poziomego na rysunku 101). Wykreślamy więc trójkąt AKG i otrzymujemy wysokość KG punktu G .

Jeśli mamy punkt G w obu rzutach, to pozostałe wierzchołki figury znajdziemy korzystając z własności 3 (§ 1, str. 2), iż rzut środka odcinka jest środkiem rzutu odcinka.

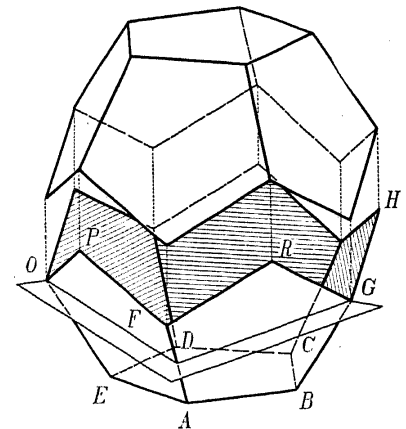


Rys. 101.

IX. *Dwunastościan foremny* jest ograniczony 12 pięciokątami foremnymi.

Mając pewien pięciokąt foremny, łatwo do jego boków dołączyć pięć równych mu pięciokątów tak, by każde dwa sąsiednie miały bok wspólny (rys. 102). Należy udowodnić, że otrzymaną figurę można tak złączyć z figurą do niej przystającą, żeby brzegi ich pokryły się. Wystarczy oczywiście wykazać, że kąt $\angle PFR$ jest równy kątowi wewnętrznemu pięciokąta foremnego. Wynika to jednak natychmiast z symetrii odcinków AB i FR oraz AE i FP względem płaszczyzny przechodzącej przez GO i przez środek boku AF .

By wykonać rzuty dwunastościanu foremnego, gdy jedna ściana znajduje się na rzutni poziomej, wyobraźmy sobie, że ściany sąsiednie obrócono dookoła boków położonych na rzutni i sprowadzono do π_1 ; tak więc np. punkt F obracając się (rys. 103) dookoła boku AB wraz ze ścianą $AFRGP$ znalazł się na rzutni w punkcie F_1 , a obracając się dookoła AE wraz ze ścianą $AFPOE$ — w F_2 . Wykonując powrotny obrót do właściwego położenia, punkt F_1 będzie się poruszał w płaszczyźnie ε_1 , prostopadłej do osi AB , a punkt F_2 — w płaszczyźnie ε_2 prostopadłej do AE . Rzut poziomy płaszczyzny ε_1 jest prostą prostopadłą



Rys. 102.

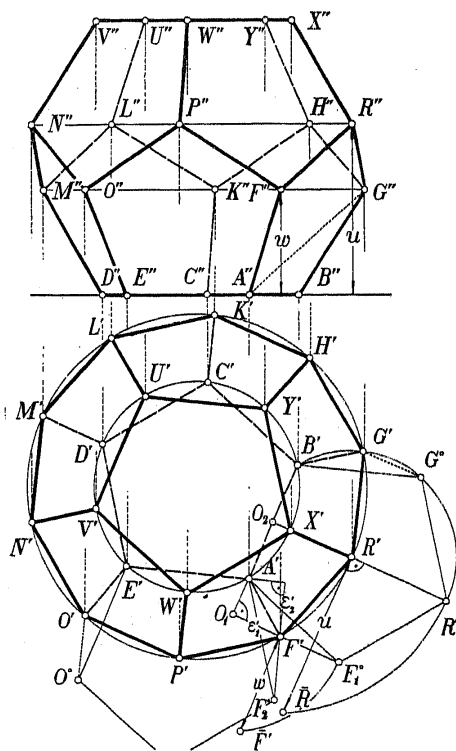
do AB , a płaszczyzny ε_2 — prostą prostopadłą do AE . Oczywiście punkty złączą się na przecięciu płaszczyzn ε_1 i ε_2 ; wówczas rzut poziomy F' znajdzie się na przecięciu ε'_1 i ε'_2 .

Wysokość punktu F znajdziemy biorąc pod uwagę trójkąt prostokątny o wierzchołkach F , F' i O_1 , gdzie O_1 jest środkiem obrotu punktu F_1 , czyli punktem przebiecia płaszczyzny ε_1 prostą AB . Trójkąt ten, obrócony o 90° dookoła boku O_1F' , nakreślono na rzutni (oczywiście $O_1F_1^\circ = O_1F'$). Jeśli na prostopadłej z punktu F' do osi rzutów odmierzymy $F'\bar{F}$ od x , to otrzymamy rzut pionowy F'' punktu F . Rzuty poziome wierzchołków G , K , M i O można wykreślić wiedząc, że tworzą one z punktem F pięciokąt foremny o boku równym przekątnej ściany i współśrodkowy z podstawą $ABCDE$. Rzuty pionowe wierzchołków G , K , M i O znajdują się oczywiście na prostej równoległej do x , a przechodzącej przez F'' .

Wierzchołki R , H , L , N i P warstwy wyższej tworzą, jak wynika z poprzednich rozważań (p. rys. 102), pięciokąt foremny równy poprzedniemu i obrócony względem niego o 36° ($\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{5}$). Wynika z tego, iż obrys na rzutni poziomej będzie dziesięciokątem foremnym.

Rzut pionowy wierzchołka R można narysować, wyznaczając jego wysokość w podobny sposób jak dla punktu F , tj. rozpatrując trójkąt prostokątny o wierzchołkach R , R' i O_2 , gdzie O_2 jest środkiem obrotu punktu R . Można również skorzystać z równoległości przekątnych do odpowiednich boków w pięciokącie foremnym i wykreślić w rzucie pionowym z punktu F'' prostą równoległą do $A''G''$.

Oczywiście ściana górna $STUVW$ jest obrócona o 36° względem dolnej i w tej samej odległości od $RHLNP$, co dolna od $FGKMO$.

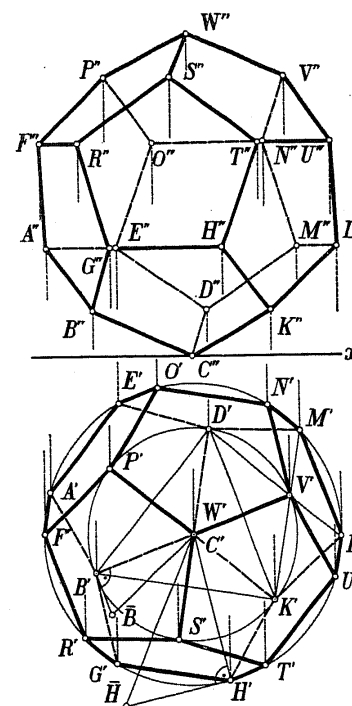


Rys. 103.

X. Ustawmy teraz dwunastościan tak, aby średnica CW kuli opisanej była pionowa (rys. 104).

Końce B , D , K trzech krawędzi wychodzących z punktu C są wierzchołkami trójkąta foremnego o boku równym przekątnej ściany. Kreślimy więc najpierw, niezależnie od rzutów, pięciokąt foremny równy ścianie dwunastościanu i w rzucie poziomym trójkąt $B'D'K'$ o bokach równych przekątnej tego pięciokąta. Punkt C będzie miał rzut w środku ciężkości trójkąta. Wysokości punktów B , D i K znajdujemy z trójkąta prostokątnego CBB' , który obracamy o 90° . Dalsze wierzchołki G i H pięciokąta otrzymujemy w rzucie poziomym, korzystając z tego, że $G'H' = GH$ oraz $B'H' \parallel C'K'$. Wysokość punktu H znaleźniono z trójkąta prostokątnego $CH'\bar{H}$, gdzie $C\bar{H} = BK$. Rzut pięciokąta $K'H'T'U'L'$ znaleźniono po nakreśleniu punktów L' , M' , E' i A' , posługując się równoległością boków do przekątnych w pięciokącie foremnym; tak samo przy rzucie pionowym.

Mając w ten sposób sześć ścian, znajdujemy sześć dalszych w rzucie poziomym przez obrót poprzednich o 60° , w pionowym zaś — z symetrii wysokości i z równoległości boków do przekątnych ścian.



Rys. 104.

XI. Dwudziestościan foremny ograniczony jest 20 trójkątami foremnymi.

Zbudować go można podobnie jak dwunastościan. W każdym wierzchołku schodzi się 5 ścian. Złączmy najpierw 5 ścian tak, by tworzyły ostrosłup (bez podstawy), a następnie do każdego wolnego boku dołączmy (rys. 105) po jednym takim samym trójkącie. Otrzymujemy figurę, której brzeg składa się z 10 odcinków. Ustawmy te trójkąty tak, by między każdymi dwoma sąsiednimi można było umieścić nową ścianę. Teraz brzegiem jest pięciokąt foremny, na który można nałożyć ostrosłup równy pierwszemu.

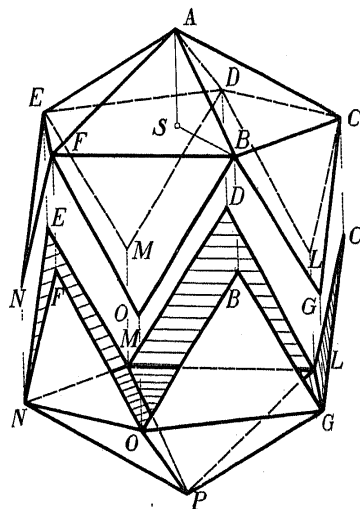
Dla wyznaczenia rzutów w takim położeniu, że podstawy ostrosłupów są poziome, wystarczy znaleźć wysokość $b = AS$ ostrosłupa oraz np. przekątną AP dwudziestościanu.

Odcinek AS znajdziemy, rozpatrując trójkąt prostokątny ABS , którego przeciwprostokątna $AB = a$ jest bokiem figury, BS zaś promieniem koła opisanego na pięciokącie $BCDEF$ o boku a .

Ponieważ kąty między sąsiednimi ścianami są równe, więc wszystkie przekątne łączące wierzchołki przeciwległe (takie jak np. A i P) są równe i połowią się wzajemnie; można więc opisać kulę, przechodzącą przez wszystkie wierzchołki. Z tego wynika, że trójkąt ABP jest prostokątny. Mając zatem już wykreślony trójkąt SBA , możemy narysować trójkąt ABP , odmierzając 90° w wierzchołku B .

Przystępując do wykreślenia rzutów (rys. 106) zauważmy, że rzuty poziome pięciokątów $BCDEF$ i $GLMNO$ są wpisane we wspólny okrąg, ale obrócone względem siebie o 36° . Obrys jest wobec tego dziesięciokątem foremnym.

Trójkąt ASB narysowano w kładzie po obrocie o 90° dokoła BS , a trójkąt ABP również po obrocie dokoła tej samej osi. Po wyznaczeniu w ten sposób wysokości b ostrosłupa i całkowitej wysokości $b+c$ bryły, wykreślono rzut pionowy.



Rys. 105.

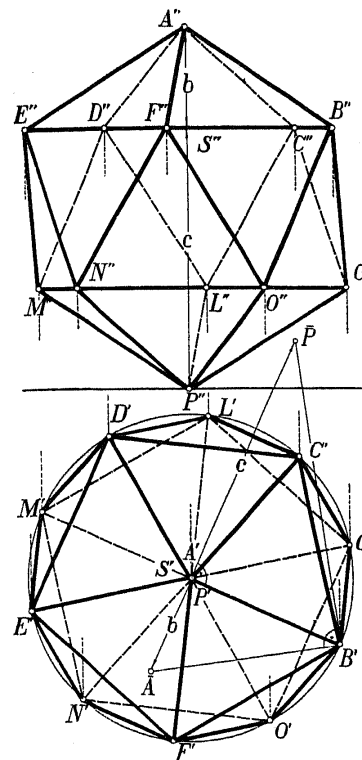
XII. Ustawmy dwudziestościan ścianą ABC na rzutni poziomej.

Ściana BCG jest nachylona do ABC pod takim kątem, że odcinek AG jest równy przekątnej pięciokąta o boku AB (patrz rys. 105).

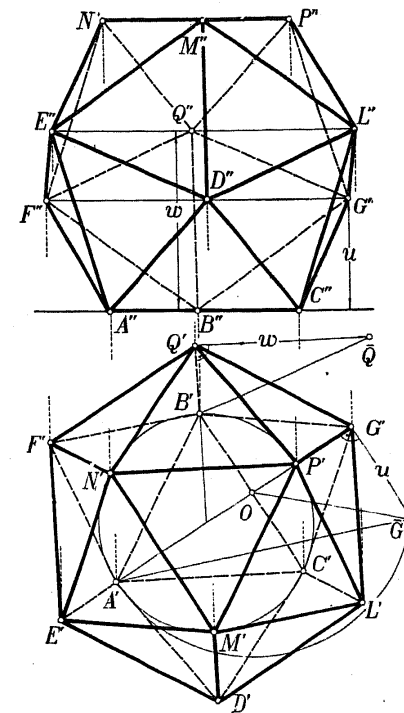
Jeśli więc (rys. 107) narysujemy kład trójkąta AOG (obracając dokoła AO o 90°), to kreśląc prostą z G prostopadłą do AO otrzymamy równocześnie rzut poziomy G' oraz wysokość $G'G$. Podobnie nakreślono D i F .

Punkt Q znajdujemy korzystając z tego, że w pięciokącie $ACGQF$ jest $GQ \parallel CF$ oraz $FQ \parallel AG$. Z konstrukcji tej wynika, że obrys na rzutni poziomej jest sześciokątem foremnym. Wysokość punktu Q dostajemy — jak zwykle — z trójkąta BQQ' .

Mając w ten sposób 10 ścian związanych z ABC w obu rzutach, wykreślamy pozostałe, opierając się na symetrii wysokości (dla rzutu pionowego) i na tym, że w rzucie poziomym część druga powstaje z części pierwszej przez obrót o 60° .



Rys. 106.



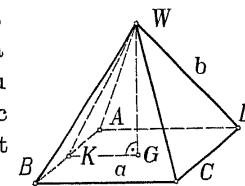
Rys. 107.

XIII. Wykreślmy rzuty ostrosłupa prostego, którego podstawą jest kwadrat o boku a i o krawędzi bocznej b (rys. 108), gdy jedna ściana boczna znajduje się na rzutni poziomej.

Rysujemy najpierw ścianę znajdującą się na π_1 (rys. 109), a następnie znajdujemy wysokość (cechę) środka podstawy G .

W tym celu bierzemy pod uwagę trójkąt prostokątny KGW , którego rzut poziomy jest odcinkiem KW . Obróćmy go dokoła przeciwprostokątnej KW o 90° . Wierzchołek kąta prostego G musi oczywiście znajdować się na okręgu o średnicy KW . Znając $KG = a/2$ możemy więc otrzymać $\bar{G}$, a wykonując obrót powrotny — rzut poziomy G' .

Rzut pionowy G'' znajduje się więc w odległości



Rys. 108.

$\bar{G}G'$ od x . Wierzchołki C i D w obu rzutach wykreślamy korzystając z tego, że przekątne kwadratu połowią się.

ĆWICZENIA.

1. Na rysunkach 94, 95 i 97 wpisać w sześcián czworoscian foremny przyjmując za wierzchołki punkty A , C , F i M i odwrotnie: opisać sześcián na czworoscianie na rysunkach 98 i 99.

2. Środki ścian sześciánu są wierzchołkami ośmiościanu foremnego. Nakreślić sześcián na ośmiościanie na rys. 101.

3. Wybrać na rys. 103 osiem wierzchołków dwunastościanu tak, by tworzyły sześcián wpisany. To samo na rys. 104.

4. Narysować rzuty dwunastościanu foremnego w położeniu, w którym dwie ściany sześciánu wpisanego są równoległe do π_1 , korzystając z następującej własności: każda ściana sześciánu wpisanego rozcina dwunastościan na dwie części, z których mniejsza ma postać daszka o czterech ścianach; dwie z tych ścian są trójkątami, a dwie pozostałe — trapezami powstałymi przez rozcięcie pięciokąta foremnego przekątną.

Nakreślić najpierw szczytową krawędź daszka, a następnie znaleźć jego wysokość, podobnie jak w zadaniach IX i X.

5. Wykreślić na rys. 103 przez środek każdego boku prostą równoległą do linii łączącej wierzchołki przeciwległe tych ścian, dla których ów bok jest wspólny i sprawdzić, że otrzymamy krawędzie dwudziestościanu foremnego. To samo na rys. 104.

Zbudować w podobny sposób dwunastościan na dwudziestościanie na rys. 106 i 107.

6. Nakreślić rzuty ostrosłupa prostego o wysokości 7 cm, którego podstawą jest sześciokąt foremny o boku 4 cm, gdy jedna ściana boczna znajduje się na π_1 .

7. Nakreślić rzuty ostrosłupa pięciosiennego, którego ściany boczne są trójkątami foremnymi, gdy jedna z nich leży na π_1 .

8. Narysować rzuty dwudziestościanu foremnego, którego jedna ściana znajduje się na π_1 , uzupełniając ostrosłup z ćwiczenia 7 dalszymi ścianami.

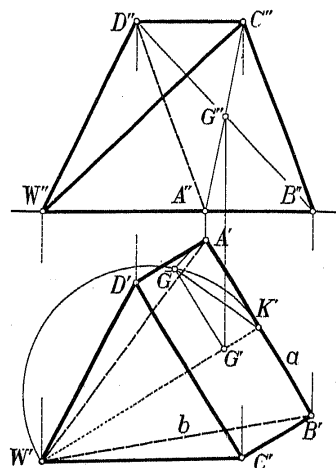
9. Zbudować dwunastościan foremny na dwudziestościanie z ćwiczenia 8, jak w ćwiczeniu 5.

§ 12. Rzuty prostej

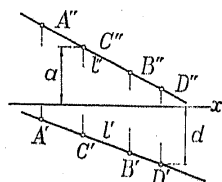
Przez punkty A i B (rys. 110) przeprowadźmy prostą l . Jej rzut poziomy l' przechodzi przez rzuty poziome A' i B' , a rzut pionowy l'' — przez rzuty pionowe A'' i B'' .

Znajdźmy na prostej l punkt C , którego wysokość (cecha) jest równa danemu odcinkowi a .

Ponieważ wysokość punktu równa jest odległości



Rys. 109.



Rys. 110.

rzutu pionowego od osi x , więc znajdujemy najpierw C'' na l'' w odległości a od x , a następnie C' , na prostopadłej z C'' do x . Oczywiście zadanie nie miałoby rozwiązania, gdyby prosta l była pozioma i znajdowała się na wysokości różnej od a .

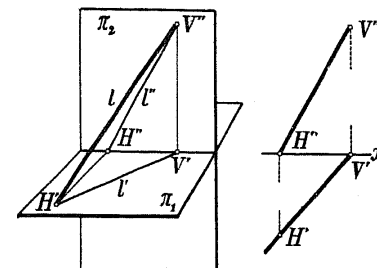
Jeślibyśmy chcieli znaleźć na l punkt D , którego głębokość (odległość od π_2) wynosi d , to najpierw należałoby narysować rzut poziomy D' na l' w odległości d od x , a następnie D'' na l'' .

Jeśli przyjmiemy $a = 0$, to otrzymamy punkt prostej l na rzutni poziomej; nazywamy go *śladem poziomym prostej l* i oznaczamy przez H_l .

Zatem ślad poziomy prostej l jest to jej punkt wspólny z π_1 . Znajdujemy go przecinając rzut pionowy l'' z x i przenosząc go prostopadłe do x na l' (rys. 111).

Przyjmując $d = 0$ otrzymujemy punkt prostej l na π_2 ; nazywamy go *śladem pionowym* i oznaczamy przez V_l .

Zatem ślad pionowy prostej l jest to jej punkt wspólny z π_2 . Znajdujemy go przecinając rzut poziomy l' z x i przenosząc prostopadłe do x na l'' (rys. 111).



Rys. 111.

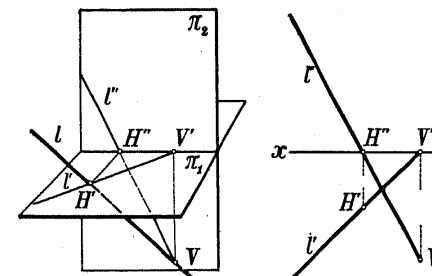
Proste równoległe do rzutni poziomej nie posiadają śladu poziomego, proste równoległe do rzutni pionowej nie posiadają śladu pionowego.

Przjrzyjmy się rzutom prostej w różnych położeniach.

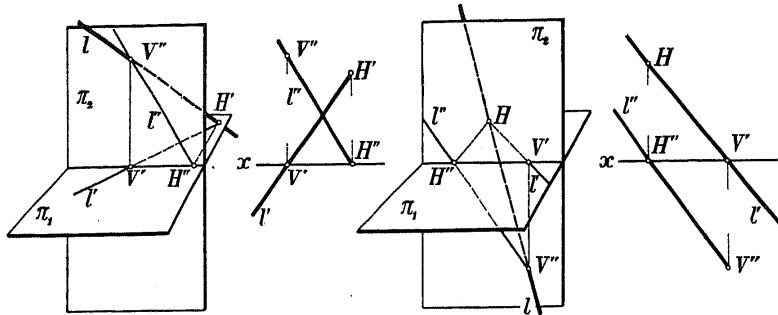
Na rys. 111 mamy prostą l , której ślad pionowy V znajduje się nad osią x , a ślad poziomy — pod osią x (mówimy „punkt rzutni π_2 leży nad (pod) osią x'' zamiast „punkt ma wysokość dodatnią (ujemną)”; podobnie, mówimy „punkt rzutni π_1 leży przed (za) osią x ” zamiast „punkt rzutni π_1 ma głębokość dodatnią (ujemną)”).

Punkty V i H dzielą prostą l na odcinek VH , półprostą (V) i półprostą (H). Odcinek HV znajduje się w I ćwiartce, półprosta (V) — w II ćwiartce, a półprosta (H) — w IV ćwiartce.

Jeśli ślad poziomy H znajduje się przed osią x , a pionowy V pod osią x (rys. 112), to odcinek HV jest w IV ćwiartce, półprosta (H) — w I ćwiartce, a półprosta (V) — w III ćwiartce.



Rys. 112.



Rys. 113.

Rys. 114.

Gdy punkt V znajduje się nad osią x , a H za osią x , to odcinek HV jest w II ćwiartce, półprosta (V) — w I ćwiartce, a półprosta (H) — w III ćwiartce (rys. 113).

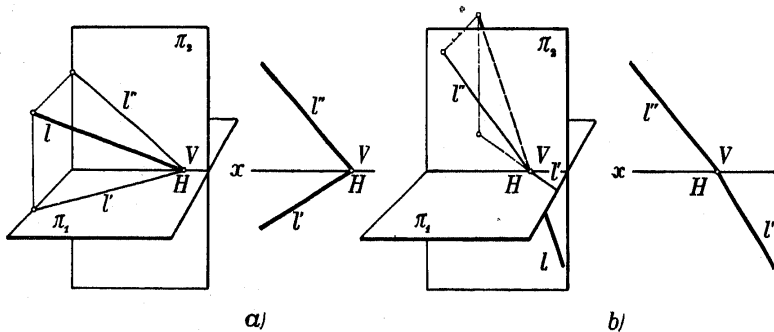
Gdy punkt H znajduje się za osią x , a punkt V pod x , to (rys. 114) odcinek HV jest w III ćwiartce, półprosta (H) — w II ćwiartce, a półprosta (V) — w IV ćwiartce.

Jeśli prosta przecina oś x , a nie leży na rzutni, to (rys. 115) może przechodzić przez ćwiartki I i III (rys. a) lub II i IV (rys. b).

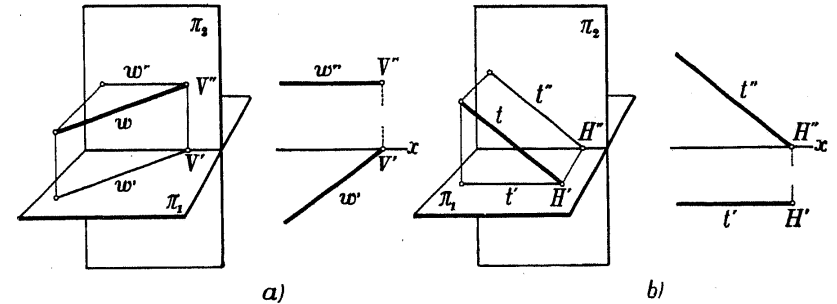
Jeśli prosta w jest równoległa do π_1 , to jej rzut pionowy jest równoległy do osi x (rys. 116 a). Ma ona tylko ślad pionowy V (jeśli $l \not\parallel \pi_2$) i może przechodzić przez ćwiartki I i II lub III i IV.

Prosta równoległa do rzutni pionowej ma rzut poziomy równoległy do osi x (rys. 116 b). Istnieje wtedy tylko ślad poziomy (oczywiście pod założeniem, że $t \not\parallel \pi_1$) i prosta może przechodzić przez ćwiartki I i IV lub II i III.

Prosta równoległa do osi x ma oczywiście rzuty równoległe do x i nie posiada śladów.



Rys. 115.



Rys. 116.

Prosta leżąca na rzutni poziomej ma rzut pionowy na osi x (rys. 117 b), a prosta leżąca na rzutni pionowej ma rzut poziomy na osi x (rys. 117 a).

Jeśli prosta a jest prostopadła do rzutni poziomej, to jej rzut poziomy jest punktem, a rzut pionowy jest prostopadły do x (rys. 117 c) ($a \perp x$ i x leży na π_2 , § 7).

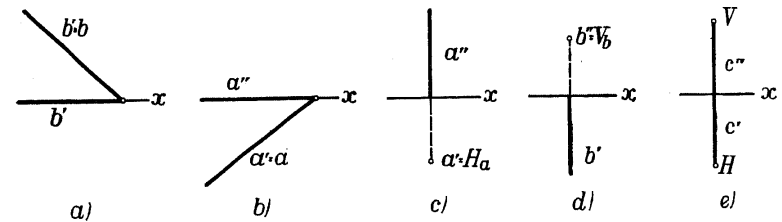
Na odwrót: rzut pionowy prostej b prostopadłej do π_2 jest punktem, poziomy zaś — prostopadły do x (rys. 117 d) ($b \perp x$ i x leży na π_1).

Jeśli prosta c jest prostopadła do osi x , a nie jest prostopadła do żadnej rzutni, to rzuty jej są prostopadłe do x (§ 7), a więc leżą na jednej prostej (rys. 117 e).

Uwaga. W związku z rzutami prostych nasuwają się pytania:

1. Czy dowolna prosta a na π_1 oraz dowolna prosta b na π_2 mogą być uważane za rzuty jednej i tej samej prostej?
2. Czy rzuty określają prostą jednoznacznie?

Aby odpowiedzieć na te pytania, zauważmy, że prosta a leżąca na π_1 jest rzutem każdej nieprostopadłej do π_1 prostej, która leży w płaszczyźnie α przechodzącej przez a i prostopadłej do π_1 (rys. 118). Podobnie prosta b na π_2 jest rzutem każdej prostej, nieprostopadłej do π_2 , która leży w płaszczyźnie β zawierającej b i prostopadłej do π_2 .



Rys. 117.

Proste a i b są więc tylko wtedy rzutami pewnej prostej l ; gdy płaszczyzny α i β przecinają się w krawędzi nieprostopadłej do żadnej rzutni.

Widzimy stąd, że a i b nie są rzutami prostej w następujących wypadkach:

1) gdy są prostopadłe do osi x i nie mają punktu wspólnego (rys. 119 a) (jest to jedyne położenie, w którym $\alpha \parallel \beta$),

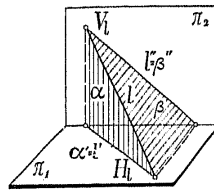
2) gdy jedna tylko prosta jest prostopadła do x .

W pozostałych wypadkach α i β przecinają się w prostej nieprostopadłej do żadnej rzutni, a wobec tego a i b są rzutami tej prostej.

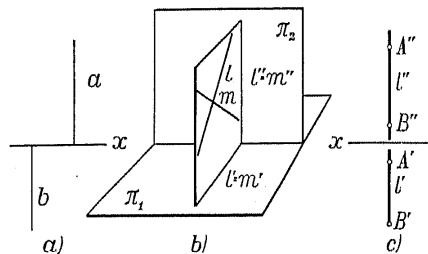
Łatwo zauważyć, że jedynie w wypadku, gdy $\alpha = \beta$, rzuty nie określają prostej jednoznacznie (rys. 119 b); wówczas dla jednoznacznego określenia prostej bierze się dwa punkty (rys. 119 c).

ĆWICZENIA.

1. Jak położona jest prosta, której rzuty: a) są symetryczne względem x , b) pokrywają się, c) tworzą z x równe kąty (ale nie przecinają się na x), d) są do siebie równoległe.
2. Znaleźć punkt wspólny dowolnej prostej z płaszczyzną symetrii a) δ_I , b) δ_{II} .
3. Znaleźć ślady prostej AB , gdy rzuty punktów A i B leżą na jednej prostopadłej do x .
4. Jak są położone ślady prostej prostopadłej do a) δ_I , b) δ_{II} ?
5. Jak są położone ślady prostej tworzącej równe kąty ($\neq 45^\circ$) z π_1 i π_2 (p. rys. 118)?



Rys. 118.



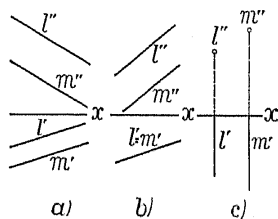
Rys. 119.

§ 13. Rzuty prostych równoległych, przecinających się i skośnych

Wiadomo, iż rzuty prostych równoległych są równoległe, pokrywają się lub są punktami.

Jeśli więc l i m są równoległe, to również l' i m' są równoległe (lub $l' = m'$ albo są punktami) oraz l'' i m'' są równoległe (lub są punktami albo $l'' = m''$) (rys. 120 a, b i c).

Twierdzenie to można odwrócić: jeśli $l'' \parallel m''$ oraz $l' \parallel m'$, to $l \parallel m$ z wyjątkiem wypadku, gdy rzuty są prostopadłe do osi x .



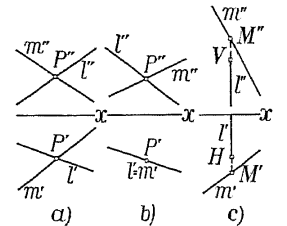
Rys. 120.

Wynika to ze znanego twierdzenia, że pary płaszczyzn równoległych przecinają się wzdłuż prostych równoległych.

Jeśli proste l i m przecinają się w punkcie P , to ich rzuty poziome przechodzą przez P' , rzuty zaś pionowe — przez P'' (rys. 121 a i b).

Nie zawsze jednak proste l i m , których rzuty przecinają się w punktach leżących na prostopadłej do x , są prostymi przecinającymi się. Jeśli np. jedną z nich jest prostopadła do osi x , to choć punkt przecięcia rzutów pionowych leży wraz z punktem przecięcia rzutów poziomych na prostopadłej do x , proste l i m mogą być skośne (rys. 121 c); prosta m ma bowiem z płaszczyzną przechodzącą przez l i prostopadłą do x jeden punkt M wspólny, przez który l może nie przechodzić.

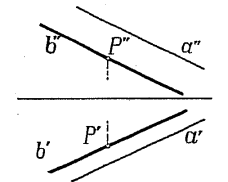
Jeśli żaden z rzutów dwu prostych skośnych nie jest prostopadły do x , to punkt przecięcia rzutów pionowych i punkt przecięcia rzutów poziomych (jeśli istnieją) nie mogą leżeć na prostych prostopadłych do x . Rzuty wobec tego przedstawiają się jak na rysunku 122 a (lub 122 b).



Rys. 121.

ZADANIE I. Dany jest punkt P i prosta a ; narysować rzuty prostej b przechodzącej przez P i równoległej do a .

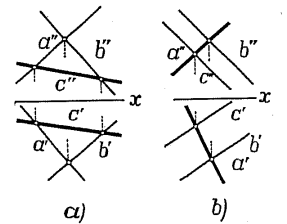
Rzut b'' przechodzi przez P'' i jest równoległy do a'' , rzut b' przechodzi przez P' i jest równoległy do a' (rys. 123).



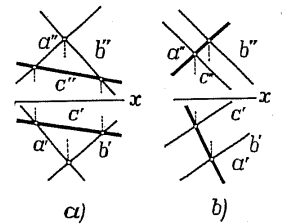
Rys. 122.

ZADANIE II. Dane są proste a i b przecinające się (lub równoległe); narysować rzuty prostej c leżącej w płaszczyźnie (ab) .

Rzut pionowy c'' bierzemy dowolnie. Ponieważ prosta c leży na płaszczyźnie (ab) , więc przecina każdą prostą tej płaszczyzny lub jest do niej równoległa. W pierwszym wypadku (rys. 124 a) przenosimy punkty przecięcia a'' i c'' oraz b'' i c'' na a' lub b' i łączymy je, a w drugim wypadku (rys. 124 b), gdy $c'' \parallel b''$, przenosimy punkt przecięcia a'' i c'' na a' i kreślimy c' równoległe do b' .



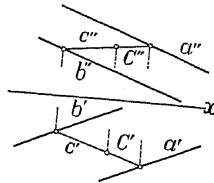
Rys. 123.



Rys. 124.

ZADANIE III. Znaleźć rzut pionowy punktu leżącego w płaszczyźnie określonej danymi prostymi równoległymi (lub przecinającymi się), gdy rzut poziomy jest dany.

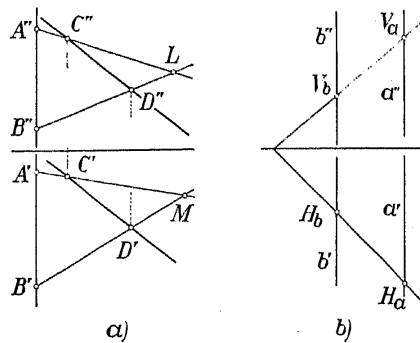
Przez C' (rys. 125) prowadzimy rzut poziomy c' prostej leżącej w danej płaszczyźnie, przenosimy prostą c do rzutu pionowego jak w zadaniu II i uzyskujemy C'' na przecięciu c'' z prostą a'' do x .



Rys. 125.

ZADANIE IV. Dana jest prosta l prostopadła do x określona punktami A i B oraz prosta m ; sprawdzić, czy proste l i m przecinają się.

Weźmy punkty C i D na prostej m (rys. 126 a). Jeśli proste l i m przecinały się, to wyznaczałyby płaszczyznę i wówczas proste AC i BD musiałyby być równoległe lub przecinać się. Zatem proste l i m przecinają się, jeśli bądź $A''C'' \parallel B''D''$ i równocześnie $A'C' \parallel B'D'$, bądź punkt L przecięcia $A''C''$ z $B''D''$ i punkt M przecięcia $A'C'$ z $B'D'$ leżą na prostopadłej do x .



Rys. 126.

ZADANIE V. Sprawdzić, czy proste a i b prostopadłe do x i określone śladami są równoległe, czy skośne.

Jeśli proste a i b były równoległe, to linia łącząca ich ślady pionowe musiałaby być równoległa lub przecinać linię łączącą ich ślady poziome (rys. 126 b).

Ponieważ pierwsza znajduje się na π_2 , a druga na π_1 , więc ewentualny ich punkt wspólny musiałby leżeć na osi x .

ĆWICZENIA.

1. Dany jest trójkąt ABC ; biorąc rzut poziomy punktu wewnętrznego trójkąta, znaleźć rzut poziomy trójkąta.
2. Biorąc dowolnie rzut poziomy czworokąta płaskiego oraz rzuty pionowe trzech wierzchołków, znaleźć rzut pionowy czwartego wierzchołka.
3. Dane są dwie proste l i m , których rzuty pionowe są równoległe, a rzuty poziome przecinają się; narysować rzuty odcinka LM równoległego do x , którego końce znajdują się na l i m .
4. Prosta prostopadła do osi x określona jest punktami A i B ; biorąc rzut pionowy C'' punktu C leżącego na AB , znaleźć rzut poziomy za pomocą następującej konstrukcji: wykreślić przez A , B i C proste a , b i c tak, by $a \parallel b \parallel x$ oraz by prosta c przecinała a i b .
5. Dana jest prosta p prostopadła do x , określona punktami A i B , dowolny punkt

C oraz rzut pionowy c'' prostej c przecinającej p . Znaleźć c' , opierając się na konstrukcji zbliżonej do podanej w zadaniu 4.

6. Znaleźć ślady prostej prostopadłej do osi x .

7. Dane są rzuty pionowe trzech punktów A , B i C prostej prostopadłej do osi x oraz rzuty poziome A' i B' . Znaleźć rzut poziomy punktu C opierając się na § 1, 3.

8. Dana jest prosta p prostopadła do x , określona dwoma punktami oraz punkt C nie leżący na p . Znaleźć drugi punkt prostej q przechodzącej przez C i równoległej do p .

§ 14. Płaszczyzna

Położenie płaszczyzny ustalać będziemy jednym ze sposobów podanych w § 3.

W wielu konstrukcjach jest dogodne znać krawędzie przecięcia danej płaszczyzny z rzutniami.

Krawędź płaszczyzny α z rzutnią poziomą (jeśli krawędź ta istnieje) nazywamy *śladem poziomym płaszczyzny α* i oznaczamy przez h_α , krawędź zaś z rzutnią pionową (jeśli istnieje) nazywamy *śladem pionowym płaszczyzny α* i oznaczamy przez v_α (rys. 127).

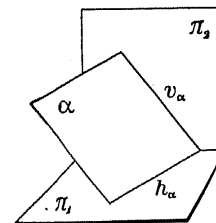
Ślady h_α i v_α , jako proste leżące w płaszczyźnie α , mogą być równoległe do x albo mogą się przecinać. Jeśli płaszczyzna jest równoległa do x , to oczywiście jej ślady są równoległe do x , jeśli płaszczyzna przecina x , to przez punkt przecięcia przechodzą jej ślady.

Oczywiście rzut poziomy prostej v_α jest na osi x , ponieważ v_α znajduje się na π_1 ; rzut pionowy prostej v_α pokrywa się z v_α .

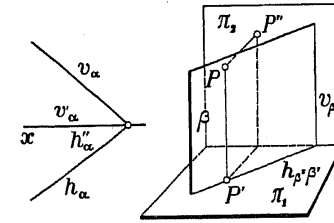
Podobnie rzut pionowy prostej h_α znajduje się na osi x , ponieważ h_α leży na π_1 , a rzut poziomy prostej h_α pokrywa się z h_α .

Jeśli płaszczyzna β jest prostopadła do rzutni poziomej, to każdy jej punkt posiada rzut poziomy na h_α (rys. 128), który jest w tym wypadku rzutem poziomym β' płaszczyzny. Ślad pionowy v_β jest wówczas prostopadły do x , mamy bowiem:

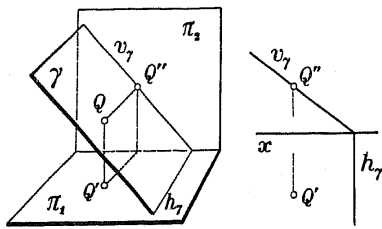
$$\begin{aligned} (\beta \perp \pi_1) &\searrow (v_\beta \perp \pi_1) \rightarrow (v_\beta \perp x). \\ (\pi_2 \perp \pi_1) &\nearrow \end{aligned}$$



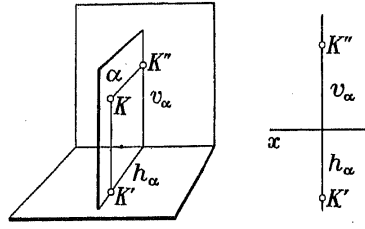
Rys. 127.



Rys. 128.



Rys. 129.



Rys. 130.

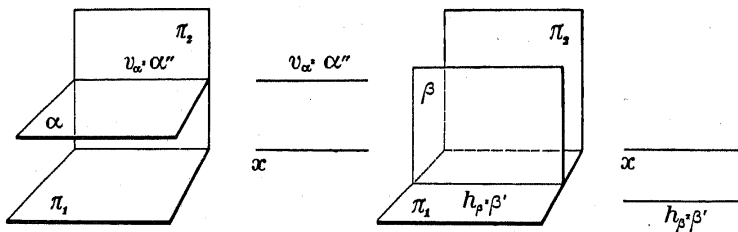
W pierwszym ogniwie rozumowania opieramy się na tym, że jeśli dwie płaszczyzny są prostopadłe do trzeciej, to ich krawędź jest również prostopadła do trzeciej płaszczyzny.

Jeśli płaszczyzna γ (rys. 129) jest prostopadła do π_2 , to rzut pionowy każdego jej punktu znajduje się na śladzie pionowym v_γ , który w tym wypadku jest rzutem pionowym płaszczyzny γ ; ślad poziomy h_γ jest prostopadły do x (dowód jak w poprzednim położeniu).

Oczywiście, jeśli płaszczyzna α jest prostopadła do π_1 i π_2 (rys. 130), to jest również prostopadła do x i wówczas zarówno v_α , jak i h_α są prostopadłe do x . Rzuty każdego punktu płaszczyzny α leżą wówczas na śladach.

Płaszczyzna równoległa do π_1 nie ma śladu poziomego; jej ślad pionowy jest równoległy do osi x (rys. 131).

Płaszczyzna równoległa do π_2 nie ma śladu pionowego; jej ślad poziomy jest równoległy do osi x .



Rys. 131.

ZADANIE I. Trzy punkty A , B i C wyznaczają płaszczyznę; znaleźć jej ślady.

Łącząc punkty A i B otrzymujemy prostą na płaszczyźnie α (rys. 132). Znajdźmy jej ślady H_1 i V_1 (rys. 114). Podobnie łącząc A z C dostajemy również prostą na α . Oznaczmy jej ślady przez H_2 i V_2 .

Punkty H_1 i H_2 leżą na α i π_1 , zatem prosta łącząca je (gdy $H_1 \neq H_2$) jest krawędzią α i π_1 , czyli śladem poziomym h_α płaszczyzny. Podobnie V_1V_2 jest śladem pionowym.

Gdy $H_1 = H_2$, to po wykreśleniu śladu v_α należy H_1 połączyć z punktem przecięcia x i v_α ; analogicznie, gdy $V_1 = V_2$.

ZADANIE II. Nakreślić ślady płaszczyzny α prostopadłej do π_1 i przechodzącej przez daną prostą a .

Ślad poziomy h_α pokrywa się z rzutem poziomym a' prostej, ślad zaś pionowy jest prostopadły do x (rys. 133).

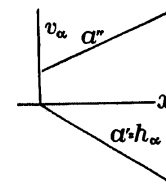
Płaszczyzna β przechodząca przez prostą a i prostopadła do π_2 ma ślad pionowy v_β pokrywający się z a'' i ślad poziomy prostopadły do x (rys. 133 b).

ZADANIE III. Dane są ślady płaszczyzny i rzut poziomy punktu P leżącego na niej; znaleźć jego rzut pionowy.

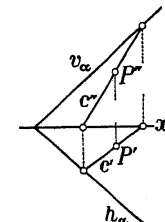
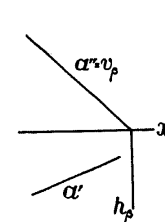
Zadanie to jest szczególnym przypadkiem zadania III z § 13. Tak jak poprzednio, bierzemy dowolną prostą leżącą w danej płaszczyźnie i przechodzącą przez punkt P . Kreślimy więc najpierw c' przez P' , a następnie znajdujemy c'' (rys. 134 a). W tym celu zauważmy, że rzut pionowy prostej h_α jest na osi x , wobec czego punkt przecięcia c' i h_α przenosimy na x . Rzut poziomy prostej v_α znajduje się na x , wobec czego punkt przecięcia x i c' przenosimy na v_α .

Łącząc uzyskane punkty otrzymujemy rzut pionowy prostej c , na który już przenosimy punkt P .

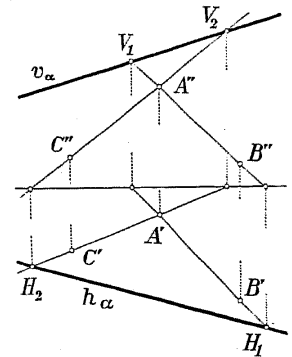
Gdyby płaszczyzna α była określona osią x i punktem C (rys. b), to wówczas połączilibyśmy C' z danym rzutem P' prostą c' i znaleźlibyśmy c'' , opierając się na tym, że prosta c przechodzi przez C i przecina oś x (lub jest do x równoległa).



Rys. 133.



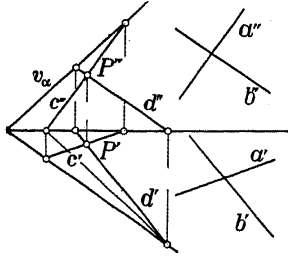
Rys. 134.



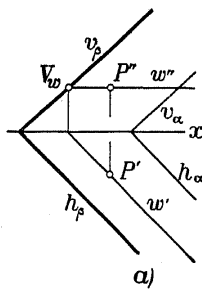
Rys. 132.

ZADANIE IV. Dane są dwie proste a i b oraz punkt P ; narysować ślady płaszczyzny przechodzącej przez P i równoległej do a i b .

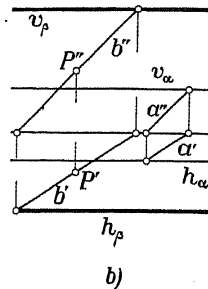
Przez punkt P kreślimy proste c i d równoległe odpowiednio do a i b (p. § 3, zadanie II) i przechodzące przez P (rys. 135). Ślady płaszczyzny α przechodzą przez ślady prostych c i d .



Rys. 135.



Rys. 136.



Jeśli proste a i b nie są równoległe, to $c \nparallel d$ i mamy jedną płaszczyznę spełniającą warunki zadania; jeśli $a \parallel b$, to $c = d$ i każda płaszczyzna przechodząca przez c jest równoległa do a i b .

ZADANIE V. Znaleźć ślady płaszczyzny przechodzącej przez punkt P i równoległej do danej płaszczyzny α , określonej śladami.

Ponieważ ślady płaszczyzn równoległych są równoległe (krawędzie płaszczyzn równoległych z trzecią ukośną są do siebie równoległe), więc w przypadku, gdy ślady v_α i h_α przecinają się, wystarczy znaleźć jeden punkt jednego śladu. Przeprowadzmy przez punkt P prostą w np. równoległą do h_α . Rzut poziomy będzie równoległy do h_α , a pionowy — równoległy do x . Przez ślad pionowy V_w prostej w kreślimy v_β (rys. 136 a).

Gdyby płaszczyzna α była równoległa do osi x , to trzeba by było wziąć na niej prostą nierównoległą do x (rys. 136 b), a następnie wykreślić do niej prostą równoległą przez P . Ślady szukanej płaszczyzny przejdą przez odpowiednie ślady tej prostej i będą równoległe do x .

ĆWICZENIA.

1. Dane są dwie proste skośne a i b ; znaleźć ślady płaszczyzny przechodzącej przez prostą a i równoległej do b , gdy: 1) $a \parallel x$, 2) $a \perp \pi_1$, 3) $a \perp x$, 4) a przecina x przy dowolnym położeniu prostej b , 5) $a \parallel x$ i $b \perp x$, 6) a przecina x i $b \perp x$.

2. Znaleźć ślady płaszczyzny przechodzącej przez punkt A i prostą l równoległą do osi x .

3. Płaszczyzna α przechodzi przez dany punkt A i oś x .

Wsk.: Nakreślić rzut l' dowolnej prostej l leżącej w płaszczyźnie α i znaleźć rzut l'' .

4. Dane są proste równoległe a i b ; nakreślić rzut c'' dowolnej prostej c leżącej w pla-

[§ 15] Krawędź dwu płaszczyzn — Punkt przecięcia płaszczyzny prostą

szczyźnie (ab) i znaleźć rzut c' . Wykonać ćwiczenie bez użycia śladów, gdy: 1) $a \nparallel x$, 2) $a \parallel x$.

5. Płaszczyzna α dana jest za pomocą prostych równoległych a i b ; przez dany punkt P nie leżący na niej przechodzi prosta c równoległa do niej. Znaleźć rzut c'' , jeśli c' jest dany.

6. Znaleźć ślady płaszczyzny określonej prostymi przecinającymi się na osi x .

§ 15. Krawędź dwu płaszczyzn — Punkt przecięcia płaszczyzny prostą

I. Weźmy pod uwagę dwie płaszczyzny α i β , dane za pomocą śladów. Oznaczmy przez k ich krawędź.

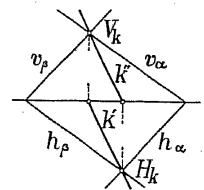
Ślad poziomy k (jeśli istnieje) musi leżeć na śladach h_α i h_β , jest więc ich punktem przecięcia, a ponieważ znajduje się na π_1 , więc jest śladem poziomym H_k krawędzi (rys. 137). Podobnie śladem pionowym V_k krawędzi jest punkt przecięcia śladów pionowych v_α i v_β płaszczyzn α i β .

Aby nakreślić rzut k' , musimy połączyć $H'_k = H_k$ z rzutem poziomym V'_k , znajdującym się — jak wiadomo — na osi x . Podobnie k'' łączy $V''_k = V_k$ z rzutem pionowym H''_k znajdującym się na osi x .

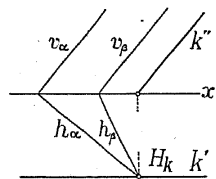
Konstrukcję wykonaliśmy pod założeniem, że ślady V_k i H_k istnieją i są różne.

ZADANIE I. Znaleźć krawędź płaszczyzn α i β , jeśli $v_\alpha \parallel v_\beta$, a $h_\alpha \nparallel h_\beta$.

Krawędź k nie ma śladu pionowego, a więc jest równoległa do rzutni pionowej. Z tego wynika, że rzut poziomy k' jest równoległy do x (i oczywiście będzie przechodził przez H_k). Ponieważ k nie może przecinać śladów v_α i v_β , więc jest do nich równoległa; rzut k'' jest zatem równoległy do v_α i przechodzi przez rzut pionowy punktu H_k (rys. 138).



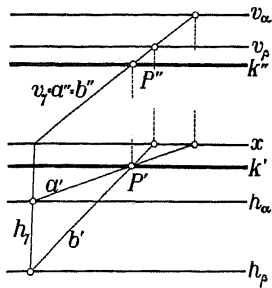
Rys. 137.



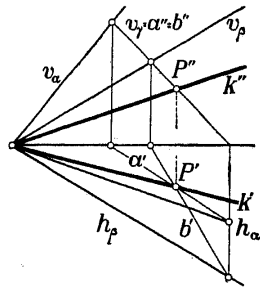
Rys. 138.

ZADANIE II. Znaleźć krawędź płaszczyzn α i β równoległych do osi x .

Wystarczy znaleźć jeden punkt krawędzi, ponieważ jest ona równoległa do x (por. § 6, I, str. 13). Punkt ten można uzyskać przecinając α i β trzecią płaszczyzną γ , np. prostopadłą do π_2 (rys. 139); znajdujemy więc krawędzie a i b płaszczyzny γ z płaszczyznami α i β i przez punkt wspólny P kreślimy k . Można to wykonać bezpośrednio w rzucie poziomym; do rzutu pionowego przenosimy k , zaznaczając najpierw P'' (oczywiście na v_γ).



Rys. 139.



Rys. 140.

ZADANIE III. Znaleźć krawędź płaszczyzn α i β , gdy ich ślady przecinają się na osi x .

Prowadzimy również trzecią płaszczyznę γ (dla uproszczenia konstrukcji też prostopadłą do π_2) i następnie punkt wspólny prostych a i b łączymy z punktem przecięcia śladów danych płaszczyzn (rys. 140).

ZADANIE IV. Znaleźć krawędź płaszczyzn α i β , gdy płaszczyzna β jest równoległa do π_2 (a więc nie posiada śladu pionowego).

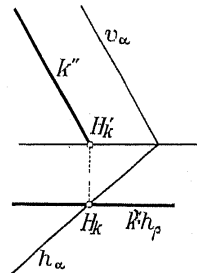
Krawędź jest wtedy równoległa do śladu pionowego v_α płaszczyzny α (linie przecięcia płaszczyzn równoległych π_2 i β są do siebie równoległe). Rzut poziomy k' pokrywa się oczywiście z h_β , a rzut k'' przechodzi przez rzut H_k'' i jest równoległy do v_α (rys. 141).

ZADANIE V. Znaleźć krawędź płaszczyzn α i β , gdy β przechodzi przez oś x i dany punkt B .

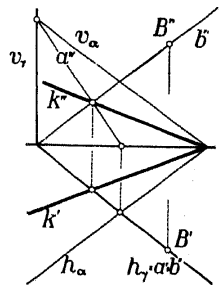
Ponieważ ślady płaszczyzny β znajdują się na osi x , więc punkt przecięcia v_α (i h_α) z x jest punktem krawędzi α i β .

Drugi punkt znajdujemy prowadząc — jak w zadaniach I—III — trzecią płaszczyznę γ prostopadłą do π_1 (lub π_2). Aby jednak wskazać bezpośrednio linię b przecięcia płaszczyzn β i γ (rys. 142), prowadzimy płaszczyznę γ przez punkt B , wobec czego prosta b łączy B z punktem wspólnym osi i płaszczyzny γ . Prosta a znajdujemy przez przecięcie śladów.

Krawędź k otrzymujemy jako prostą łączącą punkt przecięcia a i b z punktem wspólnym osi x i płaszczyzny α .



Rys. 141.



Rys. 142.

ZADANIE VI. Znaleźć przecięcie ostrosłupa płaszczyzną.

Rozwiążemy zadanie dla ostrosłupa o podstawie na π_1 .

Znajdźmy najpierw krawędź przecięcia ściany ADW płaszczyzną α (rys. 143). W tym celu zwróćmy uwagę na to, że śladem poziomym płaszczyzny $\beta = ADW$ jest prosta AD . Ślad pionowy otrzymamy kreśląc przez punkt W prostą w równoległą do h_β . Oczywiście $w' \parallel h_\beta$, a $w'' \parallel x$. Prosta v_β łączy punkt V_w z punktem przecięcia śladu h_β z osią x .

Po wykreśleniu krawędzi k płaszczyzn α i β , dalsze boki czworokąta przekroju znajdujemy sposobem podanym w rozdziale I dla rzutów na jedną płaszczyznę (§ 6, zadanie II): przedłużamy prostą CD do jej przecięcia z krawędzią płaszczyzny podstawy i płaszczyzny przekroju (a więc tu z h_α) i łączymy uzyskany punkt z D_1 . Podobnie znajdujemy bok A_1B_1 .

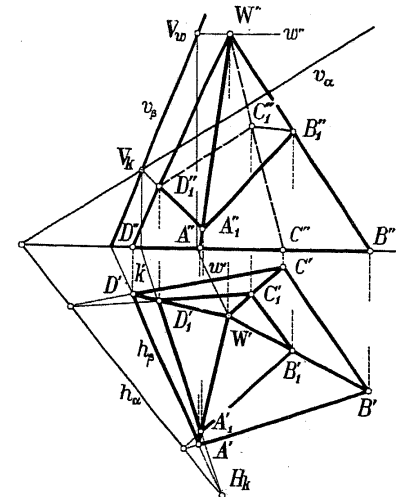
Gdyby ostrosłup stał na płaszczyźnie równoległej do rzutni, to rozwiązanie zabilibyśmy zadanie tak samo.

Dla podstaw dowolnie położonych ilość linii konstrukcyjnych jest już bardzo duża. Zadanie rozwiązuje się prościej za pomocą zmiany układu, o czym będzie mowa w § 19.

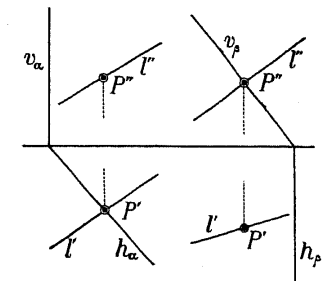
II. Punkt przebiecia płaszczyzny prostą można wskazać bezpośrednio, gdy płaszczyzna jest prostopadła do π_1 (rys. 144 a) lub do π_2 (rys. 144 b).

W pierwszym bowiem wypadku rzut poziomy punktu przebiecia P znajduje się na śladzie poziomym h_α płaszczyzny, w drugim zaś — rzut pionowy punktu P leży na v_α .

Jeśli płaszczyzna α nie jest prostopadła do żadnej rzutni, to — jak wyjaśniono w rozdziale I § 6, str. 15 — należy przez prostą a przeprowadzić płaszczyznę pomocniczą, znaleźć krawędź obu płaszczyzn i uzyskać szukany punkt na przecięciu tej krawędzi z płaszczyzną α (rys. 39).



Rys. 143.



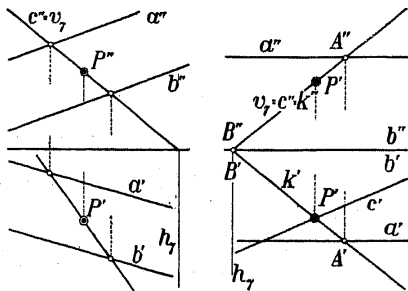
Rys. 144.

Najczęściej — choć nie zawsze — jako płaszczyznę pomocniczą bierze się płaszczyznę prostopadłą do π_1 lub π_2 (rys. 145).

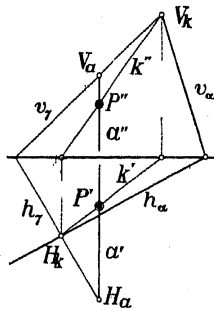
Krawędź płaszczyzn α i β znajdujemy jak poprzednio. Punkt przecięcia k' z a' jest rzutem poziomym P' szukanego punktu. P'' znajduje się na a'' i na prostej prostopadłej do x .

ZADANIE VII. Płaszczyzna α dana jest za pomocą prostych równoległych a i b . Znaleźć punkt, w którym dana prosta c przebija α .

Prowadzimy płaszczyznę γ (rys. 146) prostopadłą do π_2 a przechodzącą przez c . Krawędź przecięcia α i γ łączy punkty, w których proste a i b przebijają γ . Punkty te, znane bezpośrednio z rzutu pionowego, przenosimy do rzutu poziomego i przez połączenie otrzymujemy rzut k' .



Rys. 146.



Rys. 147.

Rozwiązanie niczym się nie różni od poprzedniego, gdy jedna z prostych znajduje się na osi x (rys. 146 b).

Gdyby płaszczyzna była określona osią x i punktem, to kreśląc przez ten punkt prostą równoległą do x , sprowadzilibyśmy zadanie do poprzedniego.

Gdyby prosta a była prostopadła do osi x , a więc określona np. swoimi śladami V_a i H_a , to musielibyśmy prowadzić płaszczyznę pomocniczą (rys. 147) nieprostopadłą do żadnej rzutni. Oczywiście jej ślady przechodzą przez ślady prostej. Krawędź obu płaszczyzn przecina prostą w szukanym punkcie.

ZADANIE VIII. Znaleźć krawędź dwu trójkątów, nie kreśląc śladów płaszczyzn, na których one leżą.

Znajdźmy punkt P , w którym bok DE (rys. 148) przebija trójkąt ABC . W tym celu prowadzimy przez DE płaszczyznę prostopadłą do π_2 . Krawędź przecięcia tej płaszczyzny z trójkątem ABC , znaną bezpośrednio z rzutu pio-

nowego, przenosimy do rzutu poziomego; punkt jej przecięcia z ED jest szukanym punktem P .

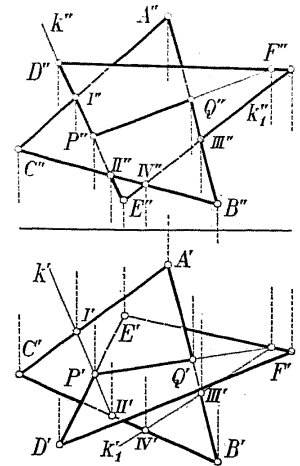
Podobnie znajdujemy punkt przecięcia płaszczyzny trójkąta ABC prostą EF . Łącząc te punkty otrzymujemy krawędź (na rysunku uwzględniono tylko część krawędzi znajdującą się na obu trójkątach).

Aby zaznaczyć, które odcinki są widoczne w rzucie poziomym, bierzemy pod uwagę punkty przecięcia rzutów i sprawdzamy w rzucie pionowym, który z punktów ma większą wysokość (por. § 6, zadanie I). Np. biorąc pod uwagę punkt przecięcia $A'C'$ i $E'F'$, sprawdzamy z rzutu pionowego, że punkt na AC jest wyżej położony od punktu na EF ; wobec tego rysujemy $A'C'$ linią grubą, oznaczającą odcinki widoczne. Tak samo rozstrzygamy widoczność innych odcinków.

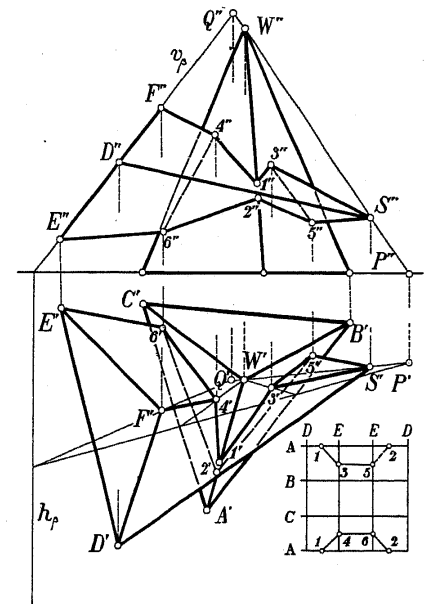
W rzucie pionowym zaznacza się jako widoczne te punkty, które mają większą głębokość. Tak więc z dwu punktów, które mają rzut pionowy na przecięciu $A''C''$ i $D''F''$, widoczny jest punkt na DE , gdyż — jak widać z rzutu poziomego — ma on większą głębokość.

ZADANIE IX. Znaleźć linię przenikania dwu ostrosłupów.

Metoda postępowania została wyjaśniona w § 6 (rys. 47). Według niej należy połączyć ze sobą wierzchołki ostrosłupów linią prostą (rys. 149) i znaleźć punkty, w których przebija ona płaszczyzny podstaw. Na rysunku 149 podstawa ostrosłupa (W) leży na rzutni poziomej, a podstawa ostrosłupa (S) — na płaszczyźnie β prostopadłej do π_2 . Punkty P i Q ,



Rys. 148.



Rys. 149.

w których prosta WS przebija te płaszczyzny, są więc w rzucie pionowym na x i na v_β . Krawędzią płaszczyzn podstaw jest ślad poziomy h_β .

Dla przejrzystości rysunku okazano tylko konstrukcje punktów przebiecia jednej krawędzi (FS) ze ścianami ostrosłupa (W). Punkt Q połączono z F w rzucie poziomym, przecięto ślad h_β i połączono otrzymany punkt z punktem P ; punkty, w których ten ślad przecina podstawę ABC , połączone z wierzchołkiem W , dają na FS szukane punkty.

Sposób wykonania i użycia schematu wyjaśniony został na trzech przykładach w § 6.

Punkty linii przenikania, znalezione w rzucie poziomym, przenosimy do rzutu pionowego na odpowiednie krawędzie.

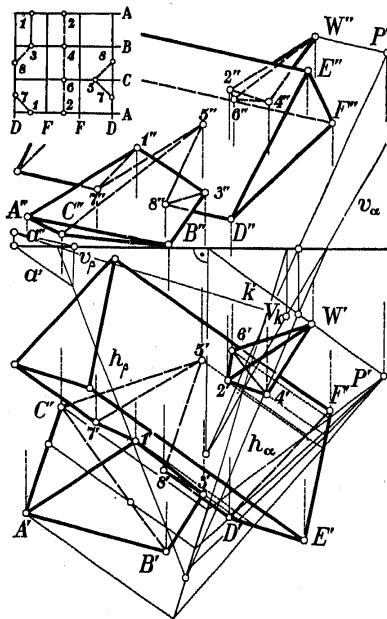
Sprawę widoczności w rzucie pionowym rozstrzygamy kierując się zupełnie oczywistą zasadą, że tylko wtedy bok wieloboku przenikania jest widoczny, gdy obie ściany, na których on się znajduje, są widoczne w rzucie pionowym.

ZADANIE X. *Nakreślić rzuty linii przenikania ostrosłupa i graniastoslupa.*

Na rys. 150 przyjęto, że podstawa ostrosłupa jest na płaszczyźnie β , a podstawa graniastoslupa — na płaszczyźnie α . Krawędź k znaleziono przez przecięcie śladów. Rzuty pionowe wierzchołków podstaw wyznaczono — jak na rys. 136 — za pomocą prostych warstwicowych. Krawędzie graniastoslupa przyjęto jako równoległe do płaszczyzny β . W tym celu wykreslono prostą a na β i narysowano krawędzie graniastoslupa równoległe do a .

Jak na rys. 150, kreślimy prostą w przez wierzchołek ostrosłupa równoległą do graniastoslupa. Przebiega ona płaszczyznę α w punkcie P .

Ponieważ każda płaszczyzna przechodząca przez prostą w przecina β wzdłuż prostej równoległej do w , więc przebieg konstrukcji jest następujący: z punktu A (lub B , lub C) wykreślamy równoległą do prostej w i punkt jej przecięcia łączymy z P . Na przecięciu z podstawą DEF otrzymujemy dwa punkty, z których rysujemy proste



Rys. 150.

równoległą do krawędzi graniastoslupa. Wyznaczają one na AW (lub na BW lub na CW) szukane punkty przebiecia.

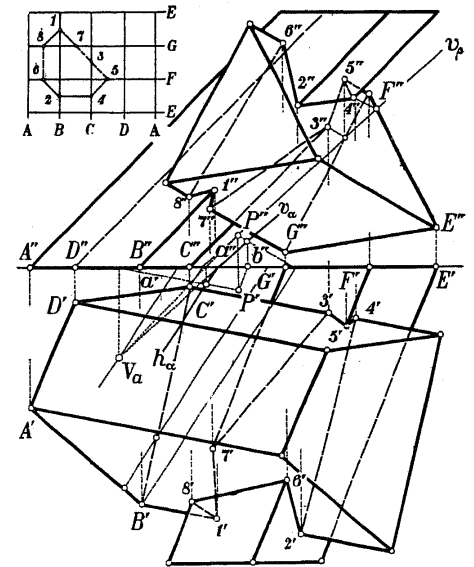
Konstrukcję można wykonać w jednym rzucie i odnieść do drugiego, bądź w obu rzutach.

Zadania X i XI w gruncie rzeczy nie różnią się od zadań VIII i IX z § 6 (str. 18—20), gdyż konstrukcje były wykonywane w jednym tylko rzucie, a w drugim korzystano jedynie z wyniku uzyskanego w pierwszym. Można dać przykład, w którym konieczne jest równoczesne użycie obu rzutów. Rozwińmy w tym celu następujące

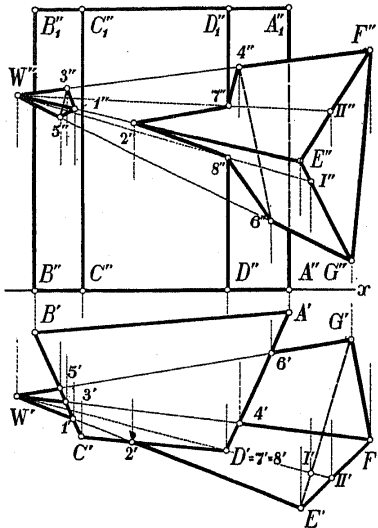
ZADANIE XI. *Znaleźć rzuty linii przenikania dwu graniastoslupów, jeśli podstawa jednego znajduje się na π_1 , a drugiego na π_2 .*

Obieramy dowolnie punkt P (rys. 151) i — jak w § 6 — kreślimy prostą a równoległą do krawędzi graniastoslupa (GEF) oraz prostą b równoległą do krawędzi graniastoslupa ($ABCD$). Określają one płaszczyznę α równoległą do wszystkich pomocniczych płaszczyzn, jakie należy przeprowadzić w celu wyznaczenia punktów przebiecia krawędzi jednego graniastoslupa ze ścianami drugiego.

Aby np. wyznaczyć punkty, w których krawędź (C) przebija ściany graniastoslupa (GEF), przesunięto przez nią płaszczyznę β ; ślad h_β przechodzi przez wierzchołek C znajdujący się na π_1 i jest równoległy do h_α . Ślad pionowy v_β przechodzi przez punkt przecięcia h_β z osią x (która gra tu rolę krawędzi k) i jest równoległy do v_α ; przecina on boki GF i EF , z których proste wykreślone równoległe do krawędzi graniastoslupa (GEF) wyznaczają na (C) szukane punkty w rzucie pionowym. Podobnie znaleziono inne. Schemat łączy oraz sprawa widoczności nie odbiega od użytych na rys. 151 dla rzutu pionowego i w zadaniu X dla rzutu pionowego.



Rys. 151.



Rys. 152.

Nie zawsze metoda, którą posługiwaliśmy się w dotychczasowych zadaniach, najszybciej prowadzi do wyniku. Weźmy np. następujące

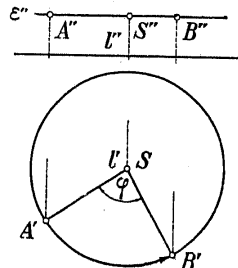
ZADANIE XII. Znaleźć linię przenikania ostrosłupa z graniastostupem o krawędziach prostopadłych do rzutni poziomej.

Tu (rys. 152) punkty 1, 2, 3, 4, 5, 6 przebiecia ścian graniastostupa krawędziami ostrosłupa można wskazać bezpośrednio w rzucie poziomym, ponieważ rzutami tych ścian są boki podstawy.

§ 16. Konstrukcje obrotów i kładów w rzutach na dwie płaszczyzny

ZADANIE I. Obrócić punkt A dookoła prostej l prostopadłej do rzutni poziomej.

Rzut poziomy (rys. 153) kreślimy jak w zadaniu I § 8; ponieważ płaszczyzna obrotu jest równoległa do π_1 , więc rzutem pionowym okręgu jest odcinek o długości średnicy, równoległy do x i przechodzący przez A'' . Punkt B , uzyskany przez obrót w rzucie poziomym, przenosimy do rzutu pionowego na rzut okręgu.



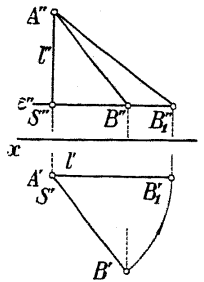
Rys. 153.

ZADANIE II. Obrócić odcinek AB dookoła osi pionowej przechodzącej przez A o taki kąt, by odcinek ten przyjął położenie równoległe do rzutni pionowej.

Rzut poziomy osi obrotu l pokrywa się z rzutem punktu A .

Płaszczyzna ε obrotu punktu B jest równoległa do π_1 . Oczywiście idzie o obrót o taki kąt, aby rzut poziomy odcinka był równoległy do osi x (rys. 154).

Ponieważ rzut odcinka równoległego do rzutni jest równy odcinkowi, więc $A''B''$ ma długość odcinka AB .



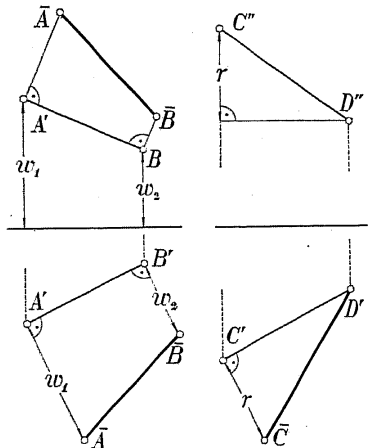
Rys. 154.

ZADANIE III. Znaleźć długość odcinka przez kład na rzutnię.

Jak w zadaniu III § 8, obracamy odcinek AB (rys. 155) dookoła jego rzutu poziomego o 90° , odkładając na prostopadłych do $A'B'$ wysokości punktów A i B (tzn. odległości rzutów pionowych od osi x).

Można również wykonać kład na rzutnię pionową obracając AB dookoła $A''B''$; wtedy na prostopadłych do rzutu $A''B''$ należy odmierzanie głębokości punktów A i B .

Uwaga. Jak w § 8, moglibyśmy obracać odcinek CD dookoła prostej równoległej do rzutu i przechodzącej np. przez punkt D ; wówczas kład punktu C znalazłby się w odległości równej różnicy wysokości C i D .

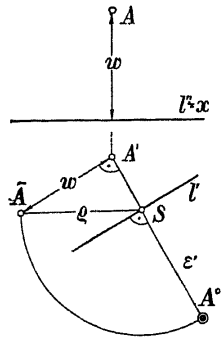


Rys. 155.

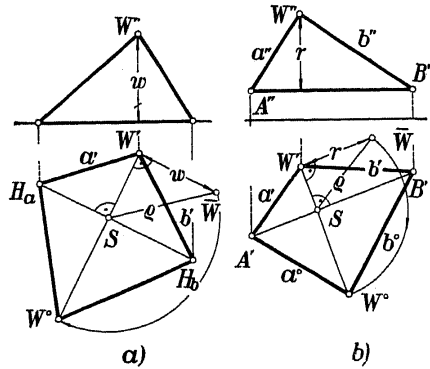
ZADANIE IV. Wykonać kład punktu A obracając go dookoła prostej l , leżącej na rzutni poziomej.

Zadanie nie różni się od zadania VII § 8 (cechę punktu A odczytuje się z rzutu pionowego). Środkiem obrotu jest punkt S , w którym dana oś l przebija płaszczyznę obrotu ε (rys. 156); promieniem ϱ obrotu jest przeciwprostokątna AS trójkąta $AA'S$.

Jeśli prosta l jest równoległa do rzutni poziomej, to kład punktu A na płaszczyznę równoległą do π_1 i przechodzącą przez l znajdujemy w ten sam sposób; zamiast odcinka w będziemy mieli wówczas różnicę cech A i l (rys. 157 b).



Rys. 156.



Rys. 157.

ZADANIE V. Znaleźć kąt między przecinającymi się prostymi a i b .

Płaszczyznę kąta obracamy dookoła jej śladu poziomego (rys. 157 a). Kłady ramion a i b kąta otrzymujemy łącząc kład punktu W ze śladami H_a i H_b .

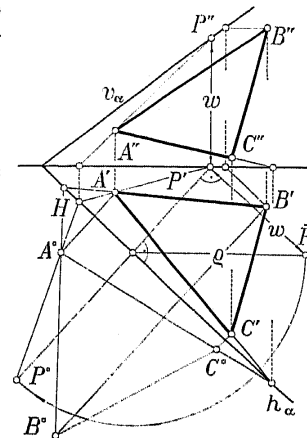
Można również obracać dookoła osi l równoległej do π_1 i przecinającej a i b na płaszczyźnie równoległej do π_1 (rys. 157 b).

ZADANIE VI. Nakreślić rzuty trójkąta foremnego, leżącego na danej płaszczyźnie określonej śladami.

Weźmy na płaszczyźnie α punkt P np. na śladzie pionowym v_α (P'' na v_α , P' na x) i obróćmy go dookoła śladu poziomego h_α aż do zejścia się z rzutnią poziomą (rys. 158).

Wyobraźmy sobie, że wraz z punktem P płaszczyzna α została wprowadzona do rzutni π_1 . Jeśli teraz w układzie obierzemy trójkąt foremny $A^\circ B^\circ C^\circ$, to rzuty będzie można znaleźć w następujący sposób:

Kład A° punktu A łączymy z kładem P° punktu P ; aby wykreślić rzut poziomy prostej AP , zauważmy, że przy obrocie dookoła h_α punkt H przecięcia AP z h_α nie zmienia położenia: łączymy więc P' z H . Rzut poziomy A' znajduje się na prostej prostopadłej do osi obrotu. Rzut pionowy A'' znajdujemy wykreślając rzut pionowy prostej PH (H'' na x).



Rys. 158.

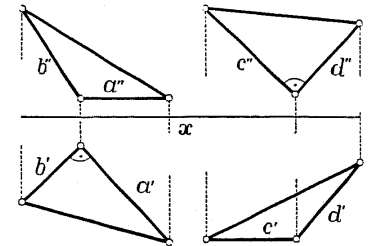
ĆWICZENIA.

1. Powtórzyć zadanie I i II biorąc $l \perp \pi_2$, zadanie IV i V dla l na π_2 oraz zadanie VI z konstrukcją na rzutni pionowej.

- Obrócić punkt dookoła osi x aż do zejścia się z rzutnią poziomą.
- Wykonać kład kąta między osią x a prostą l przecinającą x .
- Obrócić prostą a dookoła prostej skośnej l prostopadłej do π_1 o 45° .
Wsk.: Obrócić dwa punkty prostej l i połączyć je.
- Prostą nie przecinającą osi x obrócić dookoła x o 60° .
- Obrócić trójkąt dookoła osi $l \perp \pi_1$ o 90° .
- Obrócić sześciąt stojący na π_1 dookoła boku podstawy o 45° .
- Nakreślić rzuty sześciastu o dwóch ścianach prostopadłych do x i dwu przekątnych tych ścian prostopadłych do π_1 ; obrócić go dookoła jednej przekątnej pionowej o 30° .
- Daną płaszczyznę α obrócić o 45° dookoła osi pionowej i wykreślić ślady obróconej płaszczyzny, gdy 1) $\alpha \perp x$, 2) α jest skośna do x .
- Wykonać zadanie XI z § 11 kreśląc najpierw rzuty ostrosłupa o podstawie na rzutni poziomej, a następnie obracając go dookoła boku podstawy o odpowiedni kąt.
- Znaleźć rzuty środka koła opisanego na trójkącie, znając rzuty trójkąta.

§ 17. Rzuty prostych i płaszczyzn prostopadłych

Na wstępie podajemy jako ilustrację twierdzenia z § 7 (str. 23) rzuty dwu trójkątów prostokątnych (rys. 159), z których pierwszy ma przyprostokątną a równoległą do π_1 (i wobec tego $a' \perp b'$), a drugi — przyprostokątną c równoległą do π_2 (i wobec tego $c'' \perp d''$).



Rys. 159.

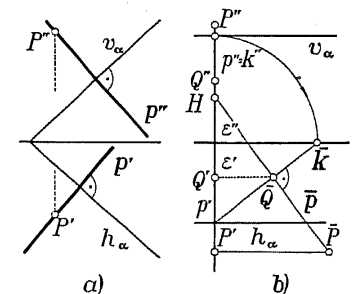
ZADANIE I. Wykreślić rzuty prostej p , przechodzącej przez punkt P i prostopadłej do danej płaszczyzny α .

Jeśli prosta p jest prostopadła do α , to jest prostopadła do każdej prostej płaszczyzny α , a więc też do h_α . Ponieważ h_α leży na rzutni π_1 , zatem (na podstawie twierdzenia z § 7) $p' \perp h_\alpha'$ (rys. 160).

Podobnie, z tego że $v_\alpha \perp p$ i że v_α leży na π_2 , wynika, że rzut pionowy p'' jest prostopadły do v_α .

Gdy płaszczyzna α nie jest równoległa do x (rys. 160 a), rzuty p' i p'' nie są prostopadłe do x i określają jednoznacznie prostą p .

Gdy $\alpha \parallel x$ (rys. 160 b), rzuty p' i p'' są prostopadłe do x i nie określają jednoznacznie prostej p .



Rys. 160.

Znajdźmy np. ślad poziomy prostej p . W tym celu obróćmy o 90° płaszczyznę ε prostopadłą do x i przechodzącą przez P . Równocześnie z płaszczyzną ε obróćmy punkt P i krawędź k płaszczyzn α i ε , co można łatwo wykonać, gdyż znane są ślady krawędzi k . Jeśli teraz z układu punktu P wykreślimy prostą p prostopadłą do k , to na przecięciu ze śladem płaszczyzny α otrzymamy ślad H prostej p .

Można jednocześnie znaleźć punkt Q , w którym p przebija α . Wystarczy bowiem przenieść do rzutu poziomego punkt przecięcia $\bar{p}$ i $\bar{k}$; rzut pionowy otrzymamy odkładając od osi x odcinek $Q'\bar{Q}$.

ZADANIE II. Dana jest płaszczyzna α i jej punkt A ; narysować odcinek a danej długości prostopadły do α i wychodzący z A .

Przez punkt A została przeprowadzona prosta w leżąca w płaszczyźnie α i równoległa do jej śladu poziomego (rys. 161).

Wykreślamy najpierw rzuty prostej prostopadłej do α i przechodzącej przez A . Aby na niej odłożyć dany odcinek a , wykonano jej kład (kład jej śladu H znajduje się w tym samym miejscu, a kład $\bar{A}$ punktu A — w odległości $A''x$ od rzutu).

Koniec B odcinka a (odmierzonego oczywiście w układzie) przeniesiono najpierw do rzutu poziomego, a następnie pionowego.

Jeśli płaszczyzna α jest równoległa do x , to metoda postępowania jest ta sama (rysunek nie wiele różnić się będzie od rys. 160 b).

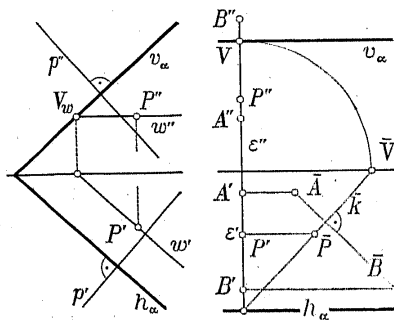
ZADANIE III. Dana jest prosta p i punkt P nie leżący na niej; znaleźć ślady płaszczyzny przechodzącej przez P i prostopadłej do p .

Wiadomo, że ślady płaszczyzny muszą być prostopadłe do rzutów prostej.

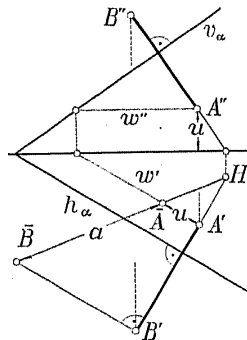
Wystarczy więc znaleźć jeden punkt jednego śladu. W tym celu wykreślamy rzuty warstwy w płaszczyzny o wysokości punktu P ; oczywiście rzut w' jest prostopadły do p' (ponieważ w' jest prostą równoległą do h_α), rzut zaś w'' jest równoległy do x (rys. 162).

Przez ślad pionowy V_w przechodzi v_α .

Jeśli prosta p jest prostopadła do α , (a więc określona dwoma punktami A i B), to ślady płaszczyzny α otrzymać



Rys. 162 i 163.



Rys. 161.

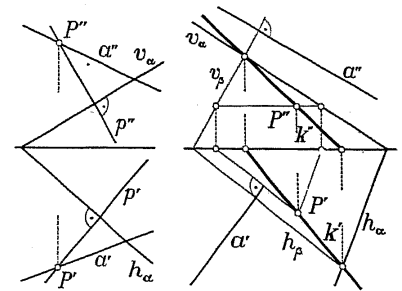
możemy wykonując — jak na rysunku 160 b — kład płaszczyzny przechodzącej przez prostą p i prostopadłej do x (rys. 163). Kreśląc w układzie $\bar{A}$, $\bar{B}$ i $\bar{P}$, będziemy mogli narysować przez $\bar{P}$ kład $k \perp AB$ krawędzi ε i α . Ślady płaszczyzny α przejdą przez ślady prostej k .

Uwaga. Na rys. 163 rzuty punktu P są na rzutach prostej p . Gdyby dane nie miały tego położenia, to można by doprowadzić do niego przez równoległe przesunięcie prostej p .

ZADANIE IV. Dana jest płaszczyzna α i prosta a nieprostopadła do niej; znaleźć płaszczyznę β przechodzącą przez a i prostopadłą do płaszczyzny α .

Opierając się na tym, że każda płaszczyzna przechodząca przez prostą prostopadłą do α jest prostopadła do α , bierzemy dowolny punkt na prostej a i wykreślamy z niego prostą p prostopadłą do płaszczyzny α (rys. 164).

Płaszczyzna β jest określona przecinającymi się prostymi a i p .



Rys. 164 i 165.

ZADANIE V. Dane są: prosta a , płaszczyzna α nieprostopadła do a oraz punkt P leżący na a ; znaleźć rzuty prostej przechodzącej przez P , leżącej na a i prostopadłej do a .

Wszystkie proste przechodzące przez P i prostopadłe do a leżą w płaszczyźnie β zawierającej P i prostopadłej do a .

Wykreślamy więc płaszczyznę β (zadanie III) i znajdujemy krawędź k płaszczyzn α i β , która wobec tego spełnia wszystkie warunki zadania (rys. 165).

ZADANIE VI. Znaleźć kąt zawarty między płaszczyznami.

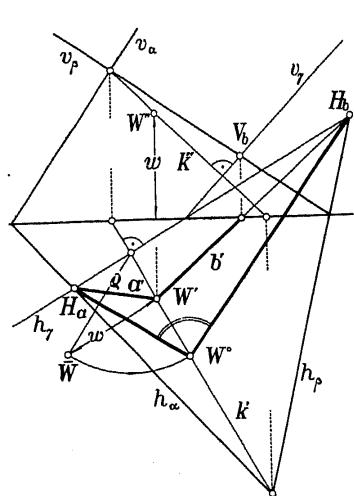
Jak w zadaniu XII z § 8, znajdujemy najpierw krawędź k płaszczyzn α i β (rys. 166), a następnie wykreślamy pewną płaszczyznę γ prostopadłą do k . Ramionami kąta będą krawędzie a i b płaszczyzn α i β z płaszczyzną γ .

Na rysunku znaleziono najpierw b w rzucie poziomym, a następnie wykreślono a' przez punkt W' przecięcia prostych k' i b' . Kąt między prostymi a i b znajdujemy w układzie jak w zadaniu V z § 16 (str. 76).

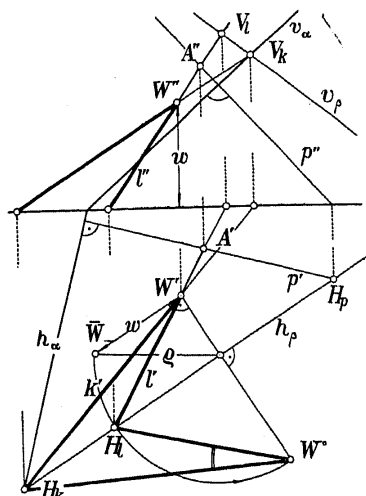
ZADANIE VII. Znaleźć kąt między prostą l i płaszczyzną α .

Należy wyznaczyć płaszczyznę β przechodzącą przez l i prostopadłą do α oraz znaleźć kąt między l a krawędzią płaszczyzn α i β .

W tym celu przez dowolny punkt A na l kreślimy prostą p prostopadłą



Rys. 166.



Rys. 167.

do α i przecinamy płaszczyznę α płaszczyzną β określoną prostymi l i p (rys. 167).

Kład kąta między l i k otrzymujemy obracając wierzchołek kąta dookoła śladu poziomego płaszczyzny kąta, tj. dookoła h_p .

Na rysunku 168 wykonano zadanie jeszcze raz, gdy prostą l jest oś x .

Jak na rysunku 167, wykreślono z punktu A na l prostą p prostopadłą do α . Ponieważ w tym położeniu nie można wyznaczyć krawędzi płaszczyzn α i $\beta = (l, p)$ przez przecięcie śladów, więc znaleziono punkt P , w którym prosta p przebija α i połączono go z punktem W , w którym l przebija α .

Kład kąta między l i k znajdujemy tu przez obrót płaszczyzny kąta dookoła osi x . Oczywiście wystarczy znaleźć kład punktu P i połączyć go z punktem W .

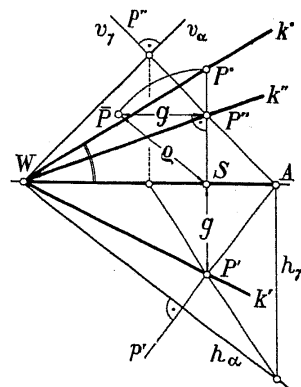
Na rysunku 168 kład wykonany jest na rzutni pionowej.

ZADANIE VIII. Obrócić punkt P dookoła prostej l o 60° .

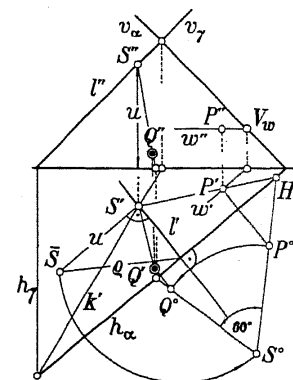
Płaszczyzną obrotu jest płaszczyzna α przechodząca przez P i prostopadła do l . Ślady jej znajdujemy jak w zadaniu III. Środkiem obrotu jest punkt S przebiecia płaszczyzny α osią l (rys. 169).

Punkt P zakreśla na α podczas obrotu okrąg o środku S ; oczywiście okręgu tego nie będziemy kreślili w rzucie, lecz w kładzie.

W tym celu wykonajmy kład płaszczyzny α na rzutni poziomej i zaznaczmy klady S° i P° . Punkt Q° , uzyskany w kładzie przez obrót P° dookoła S° o kąt 60° , przenosimy do rzutu poziomego, łącząc go z punktem S° . Ślad poziomy



Rys. 168.



Rys. 169.

prostej SQ znajduje się na śladzie h_α ; łączymy go więc z S' i wykreślamy z Q° prostopadłą do h_α .

Rzut pionowy punktu Q znajdujemy, przenosząc ślad poziomy prostej SQ na oś x .

ZADANIE IX. Dany trójkąt ABC obrócić dookoła boku BC o taki kąt, aby punkt A znalazł się na rzutni poziomej.

Jak w zadaniu VIII, znajdujemy ślady v_α i h_α płaszczyzny obrotu przechodzącej przez A i prostopadłej do BC , środek obrotu S , czyli punkt przebiecia płaszczyzny α prostą BC , oraz klady punktów S i A (rys. 170).

Po wyznaczeniu S° skorzystano z tego, że ślad poziomy prostej AS znajduje się w obszarze rysunku; połączono go z S° i wykreślono z A' prostą prostopadłą do h_α .

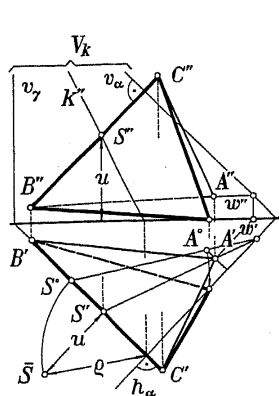
Szukany położeniem wierzchołka A po obrocie jest punkt przecięcia okręgu o środku S° i promieniu AS ze śladem poziomym płaszczyzny.

ZADANIE X. Dane są trzy proste a , b i c , przechodzące przez punkt W i nie leżące w jednej płaszczyźnie; znaleźć prostą d przechodzącą przez W i mającą równe kąty z a , b i c .

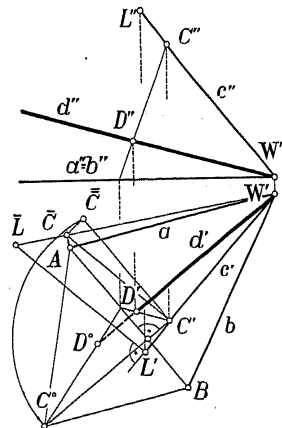
Zadanie można rozwiązać opierając się na tym, że kąty między osią stożka obrotowego a tworzącymi są równe.

Odmierzamy więc na każdej prostej od punktu W pewien odcinek $WA = WB = WC$ i znajdujemy środek koła opisanego na trójkącie ABC .

Na rysunku 171 wykonano zadanie, gdy proste a i b (a zatem i W) są na rzutni poziomej. Odcinek CW równy odcinkom AW i BW odmierzone na



Rys. 170.



Rys. 171.

kładzie $W\bar{L}$ prostej c . W celu wyznaczenia środka D koła opisanego na trójkącie ABC wykonano kład tego trójkąta, obracając go dokoła boku AB znajdującego się na rzutni poziomej. Wyznaczony w kładzie punkt D^0 przeniesiono do rzutu poziomego i następnie pionowego za pomocą punktu C .

Rozwiązaniem zadania jest prosta DW .

Uwaga: Gdyby proste a , b i c leżały w jednej płaszczyźnie, to prostą spełniającą warunki zadania byłaby prostopadła do tej płaszczyzny (a więc też do a , b i c) i przechodząca przez punkt W .

ĆWICZENIA.

1. Znaleźć odległość punktu od płaszczyzny.
2. Znaleźć odległość punktu od prostej.
3. Wykreślić rzuty: a) sześciianu, b) czworościanu foremnego o podstawie na danej płaszczyźnie.

Wsk.: Połączyć zadanie VI z § 16 (rys. 158) z zadaniem II § 17 (rys. 161).

4. Znaleźć kąt między sąsiednimi ścianami dwudziestościanu foremnego.

Wsk.: Narysować jedynie pięć ścian naroża.

5. Znaleźć kąt między prostą a i płaszczyzną równoległą do osi x .

6. Wykonać ćwiczenie 5, gdy płaszczyzna jest dowolna, a prosta prostopadła do rzutni pionowej.

7. Dane są dwie przecinające się proste a i b oraz dwa kąty φ i ψ ; znaleźć prostą przecinającą obie proste i nachyloną do a pod kątem φ , a do b pod kątem ψ .

Wsk.: Por. zadanie X oraz konstrukcję rzutu poziomego dwunastościanu foremnego.

8. Przez punkt przeprowadzić płaszczyznę nachyloną do danych płaszczyzn pod kątami 45° i 60° .

9. Dana jest płaszczyzna α , punkt A leżący na niej i punkt P nie leżący na niej; znaleźć na płaszczyźnie α prostą przechodzącą przez A i odległą od P o dany odcinek.

10. Dane są punkty P , A i B oraz odcinki a i b ; znaleźć prostą przechodzącą przez P i oddaloną od punktów A i B o odcinki równe odpowiednio a i b .

11. Dana jest prosta l oraz dwa punkty A i B ; znaleźć na l taki punkt W , żeby kąt między WA a l równy był kątowi między WB a l .

§ 18. Konstrukcje bez użycia śladów

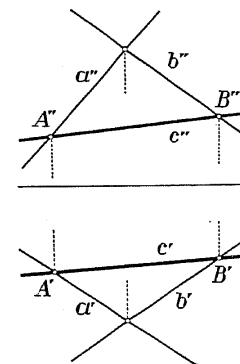
W wielu dotychczas podanych konstrukcjach używaliśmy śladów prostych i płaszczyzn. Najczęściej jednak znajdują się one poza obszarem rysunku. Okazuje się, że zawsze można uniknąć kreślenia śladów, zastępując je innymi elementami konstrukcyjnymi. Wówczas położenie płaszczyzny będziemy określać oczywiście przy pomocy dwu prostych, punktu i prostej lub trzech punktów.

Sprawdźmy, że wszystkie konstrukcje podstawowe, jakie zostały podane, dają się wykonać bez pomocy śladów.

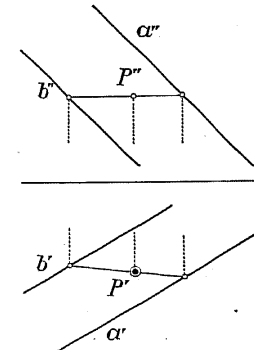
I. *Rzuty prostej c* , która leży w płaszczyźnie określonej prostymi a i b , otrzymamy łącząc ze sobą punkt A prostej a z punktem B prostej b (rys. 172) lub kreśląc z punktu leżącego na jednej prostej równoległą do drugiej.

Jeśli prosta c przechodzi przez punkt przecięcia a i b , to najpierw należy poprowadzić na płaszczyźnie (ab) prostą pomocniczą nie przechodzącą przez ten punkt.

II. *Rzut poziomy punktu P* leżącego w płaszczyźnie (ab) , gdy dany jest jego rzut pionowy, otrzymujemy kreśląc przez P prostą l leżącą w (ab) i przenosząc rzut pionowy na rzut poziomy prostej l (rys. 173).



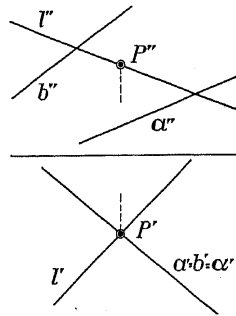
Rys. 172.



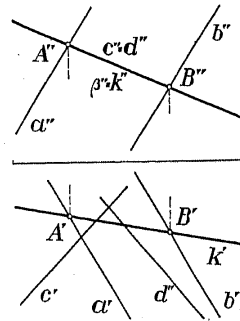
Rys. 173.

III. Punkt przebiecia płaszczyzny (ab) prostą l w przypadku szczególnym, gdy płaszczyzna jest prostopadła do rzutni (np. do π_1 , rys. 174) jest w rzucie na tę rzutnię na przecięciu rzutów prostej i płaszczyzny. Drugi rzut leży na rzucie prostej l i prostej prostopadłej do x .

IV. Krawędź przecięcia płaszczyzn w przypadku szczególnym, gdy jedna z nich jest prostopadła do rzutni (rys. 175), znajdujemy łącząc punkty, w których przebiegają ją proste drugiej płaszczyzny.



Rys. 174.



Rys. 175.

V. Punkt przebiecia płaszczyzny (ab) prostą znajdujemy ogólnie (§ 6, str. 15), przeprowadzając przez prostą c płaszczyznę γ prostopadłą do jednej z rzutni (np. do rzutni pionowej, rys. 176). Następnie kreślimy krawędź płaszczyzny (ab) i γ w obu rzutach jak na rysunku 175. Punkt przecięcia danej prostej z krawędzią jest szukanym punktem przebiecia.

VI. Krawędź przecięcia płaszczyzn (ab) i (cd) otrzymujemy w przypadku ogólnym jako prostą, łączącą punkt A , w którym prosta a przebiega płaszczyznę (cd) , z punktem B , w którym prosta b przebiega płaszczyznę (cd) .

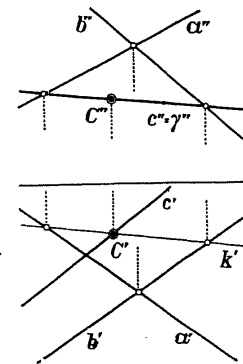
Należy więc dwukrotnie powtórzyć konstrukcję V (rys. 177).

VII. Rzuty prostej prostopadłej do płaszczyzny kreślimy dotychczas rysując proste prostopadłe do odpowiednich śladów.

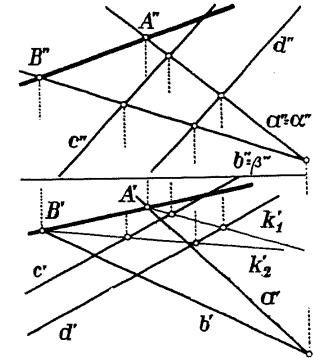
Obecnie ślady zastępujemy prostymi w i t , gdzie $w \parallel h_a$, a $t \parallel v_a$.

Jeśli więc płaszczyzna określona jest np. dwiema prostymi równoległymi a i b (rys. 178), to najpierw wyznaczamy na niej proste w i t ; oczywiście rzut pionowy w jest równoległy do osi x , a poziomy otrzymujemy, przenosząc jej punkty przecięcia z a i b .

Odwrotnie, rzut poziomy prostej t jest równoległy do x , pionowy zaś dostajemy przenosząc jej punkty na c i b do rzutu pionowego.



Rys. 176.

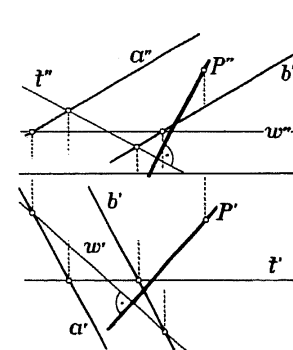


Rys. 177.

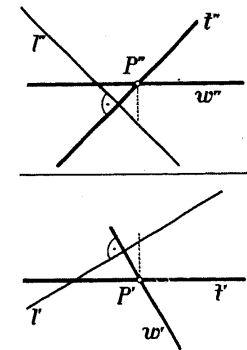
Ostatecznie więc rysujemy rzut poziomy prostej prostopadłej do (ab) pod kątem prostym do w' , pionowy zaś pod kątem prostym do t'' .

VII'. Aby przez dany punkt P wykreślić płaszczyznę prostopadłą do danej prostej l , wyznaczamy tę płaszczyznę za pomocą prostych w i t , przy czym $w' \perp l'$, $w'' \parallel x$ oraz $t' \parallel x$ i $t'' \perp l''$ (rys. 179).

VIII. Kład płaszczyzny możemy wykonać obracając ją dookoła pewnej warstwy w (zamiast śladu h_a) na płaszczyznę równoległą do rzutni poziomej i przechodzącą przez prostą w . Wówczas przy wyznaczaniu promienia obrotu dla punktu P (rys. 180) należy zamiast wysokości punktu P wziąć różnicę wysokości punktu P i prostej w . Można również wykonać kład danej płaszczyzny.



Rys. 178.



Rys. 179.

szczyzny na płaszczyznę β równoległą do rzutni pionowej, obracając daną płaszczyznę dokoła krawędzi t płaszczyzn α i β .

Uwaga. W konstrukcjach pominięto położenia szczególne, np. $\alpha \parallel x$ lub $p \perp x$, w tych bowiem wypadkach najdogodniej jest operować biorąc do pomocy trzeci rzut na płaszczyznę prostopadłą do x , o czym będzie mowa w § 19 i § 20.

Dla przykładu znajdziemy kąt między trójkątami ACD i BCD o wspólnym boku (rys. 181).

Przez dowolny punkt W na wspólnym boku CD prowadzimy płaszczyznę γ do niego prostopadłą; jest ona określona prostymi w i t równoległymi odpowiednio do rzutni poziomej i pionowej.

Następnie znajdujemy punkt A_1 przebiecia płaszczyzny γ prostą AC i punkt B_1 przebiecia płaszczyzny γ prostą CB .

Proste WA_1 i WB_1 są ramionami szukanego kąta. Aby wykreślić kład, obracamy wierzchołek W dokoła warstwy płaszczyzny γ przechodzącej przez punkt B_2 . Do konstrukcji kładu bierzemy oczywiście zamiast cechy punktu W różnicę cech W i osi obrotu, tj. W i B_2 .

ĆWICZENIA.

1. Znaleźć krawędź płaszczyzny $\alpha = (ab)$ i $\beta = (cd)$, gdy wszystkie cztery proste mają punkt wspólny.

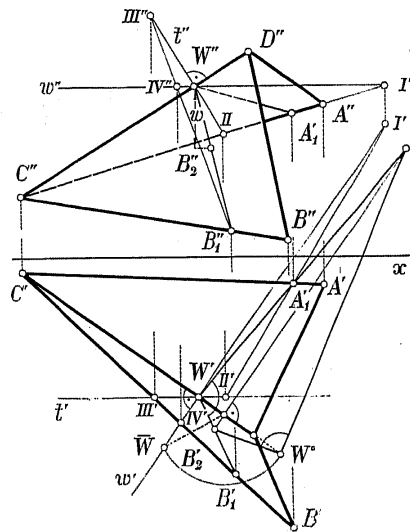
2. Znaleźć punkt przebiecia płaszczyzny (ab) prostą m w następujących wypadkach: 1) $\alpha = x$, $b \parallel x$, 2) $\alpha \parallel b$ i $m \perp \pi_1$, 3) $\alpha \parallel b$ i $m' \parallel a'$, 4) m' przechodzi przez rzut poziomy punktu przecięcia prostych a i b .

3. Znaleźć rzut pionowy prostej c leżącej w płaszczyźnie (ab) , jeśli $a' \parallel b' \parallel c'$.

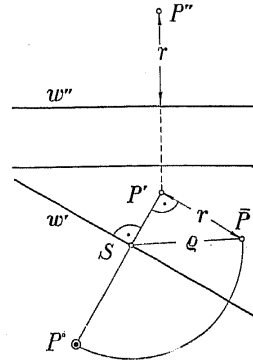
4. Znaleźć kąt zawarty między dowolnym trójkątem ACD i trójkątem BCD prostopadłym do π_1 .

5. Znaleźć kąt zawarty między płaszczyzną trójkąta ABC a prostą l .

6. Znaleźć kąt między płaszczyznami $\alpha = (ab)$ i $\beta = (cd)$, jeśli wszystkie cztery proste są do siebie równoległe.



Rys. 181.



Rys. 180.

§ 19. Zmiana układu

Niektóre konstrukcje znacznie się upraszczają po odpowiednim ustawieniu elementów (prostych, płaszczyzn) względem rzutni.

Np. przecięcie dowolnego wielościanu płaszczyzną prostopadłą do rzutni pionowej (rys. 182) jest bardzo łatwo wykonać dzięki temu, że rzut pionowy przekroju znajduje się na śladzie (rzucie) pionowym płaszczyzny. Wystarczy więc przenieść punkty przebiecia krawędzi figury na odpowiednie proste w rzucie poziomym i połączyć wierzchołki znajdujące się na tych samych ścianach.

Gdy płaszczyzna α nie jest prostopadła do żadnej rzutni, to konstrukcja jest znacznie dłuższa.

Jako drugi przykład znajdziemy odległość między prostymi skośnymi a i b , gdy prosta a jest prostopadła do rzutni poziomej.

Odległością prostych skośnych a i b jest długość odcinka AB o końcach odpowiednio na a i b i prostopadłego do tych prostych. Skoro odcinek AB jest prostopadły do prostej pionowej a , to jest równoległy do rzutni poziomej; na podstawie § 7 rzut poziomy $A'B'$ będzie więc prostopadły do b' (rys. 183). Kreślimy zatem z punktu $a' = A'$ prostopadłą do b' i zaznaczamy punkt B' ; następnie przenosimy punkt B na b'' i rysujemy odcinek $A''B''$ równoległy do x (ponieważ $AB \parallel \pi_1$).

Oczywiście długość rzutu poziomego $A'B'$ jest równa długości AB .

Zadanie byłoby bardziej skomplikowane, gdyby żadna prosta nie była prostopadła do żadnej z obu rzutni.

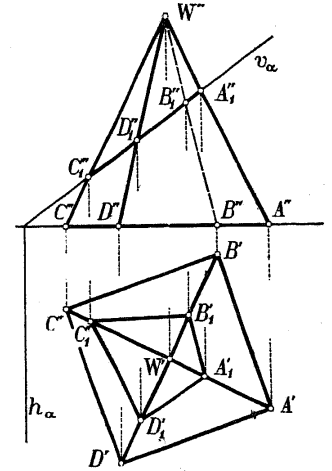
W takich wypadkach stosujemy zmianę rzutni.

Niech π będzie płaszczyzną prostopadłą do π_1 (rys. 184); oznaczmy przez ξ krawędź płaszczyzn π i π_1 (ślad poziomy π).

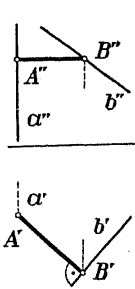
Wykonajmy rzut prostokątny dowolnego punktu P na płaszczyznę π i oznaczmy go przez P''' .

Odległość punktu P''' od prostej ξ równa jest wysokości punktu P (odległości rzutu pionowego P'' od osi x). Zastąpmy parę płaszczyzn $\pi_1\pi_2$ parą $\pi_1\pi$. Będziemy mieli nowy układ prostopadłych do siebie rzutni.

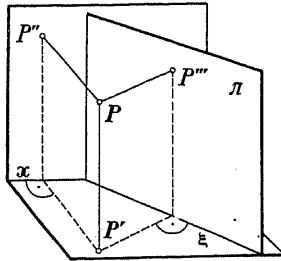
Oczywiście nową rzutnię pionową π obracamy dokoła osi ξ o 90° i otrzy-



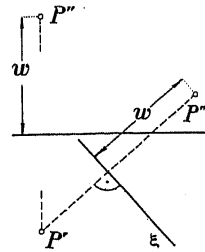
Rys. 182.



Rys. 183.



Rys. 184.



Rys. 185.

mujemy znowu dwa rzuty, do których stosują się dotychczasowe uwagi: rzut poziomy P' i pionowy P''' punktu P leżą na prostej prostopadłej do osi ξ i odległość rzutu pionowego P''' od osi ξ jest równa wysokości punktu (rys. 185).

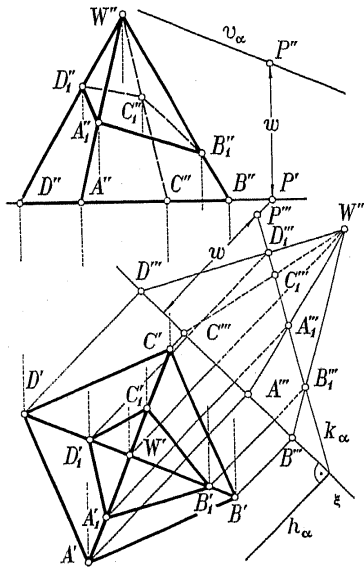
ZADANIE I. Znaleźć przekrój ostrosłupa płaszczyzną nieprostą do zadanej rzutni.

Weźmy za oś ξ prostopadłą do śladu poziomego h_α danej płaszczyzny (rys. 186). Oczywiście płaszczyzna α będzie wobec tego prostopadłą do nowej rzutni pionowej π (ponieważ przechodzi przez prostą h_α prostopadłą do π).

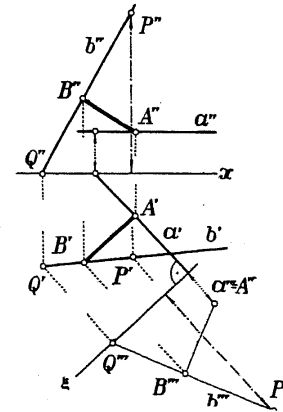
Oznaczmy przez k_α ślad płaszczyzny α na nowej rzutni; w danym razie jest to równocześnie rzut α na π . Aby go wykreślić, można wobec tego wziąć dowolny punkt na α i znaleźć jego rzut. Weźmy np. punkt P na śladzie pionowym v_α (P'' na v_α , P' na x). Jeśli punkt P''' , wyznaczony jak na rysunku 184 przez odmierzenie wysokości od osi ξ , połączymy z punktem przecięcia śladu poziomego h_α z ξ , to otrzymamy ślad k_α , tj. rzut α''' płaszczyzny α .

Przypatrując się rzutowi pierwszemu i trzeciemu zauważymy, że mamy położenie takie jak na rysunku 182.

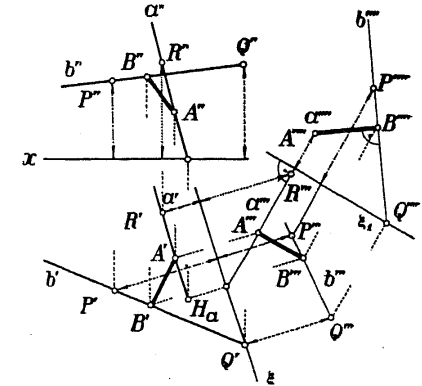
Rozwiązujemy więc zadanie w rzutach na π_1 i π , a wynik przenosimy z rzutu poziomego na pierwotny rzut pionowy.



Rys. 186.



Rys. 187.



Rys. 188.

ZADANIE II. Znaleźć odległość prostych skośnych a i b , gdy $a \parallel \pi_1$.

Bierzemy za rzutnię π płaszczyznę prostopadłą do prostej a , tj. taką, aby oś ξ była prostopadła do a' . Wówczas rzut α''' prostej a jest oczywiście punktem (rys. 187). Rzut b''' prostej b otrzymujemy, przenosząc do rzutu trzeciego dwa punkty, np. ślad poziomy i punkt P jak na rysunku 185.

W ten sposób zadanie zostało sprowadzone do położenia już rozpatrzonego; odcinek AB znaleziony w układzie $\pi_1\pi$ przenosimy do pierwotnego rzutu pionowego.

ZADANIE III. Znaleźć odległość dwu prostych skośnych.

W celu sprowadzenia do położenia z rys. 183 wykonamy dwukrotnie zmianę układu.

Biorąc za π płaszczyznę równoległą do prostej a (tj. tak, że $\xi \parallel a'$), sprowadzamy zadanie do zadania II (rys. 188). Porównując bowiem obecny rzut poziomy z rzutem pionowym na rys. 187, a obecny trzeci rzut z poprzednim pionowym widzimy, że istotnie mamy to samo.

Jak poprzednio więc przyjmujemy za rzutnię $\bar{\pi}$ płaszczyznę prostopadłą do a (a więc $\xi_1 \perp a'''$) i znajdujemy rzuty α''' i b''' .

Odcinek AB , znaleziony w czwartym i trzecim rzucie, przenosimy najpierw do rzutu poziomego, a następnie do rzutu pionowego. Oczywiście $AB = A''B''$.

ZADANIE IV. Znaleźć linię przenikania ostrosłupa z graniastostupem poziomym.

Bierzemy za oś ξ prostą prostopadłą do rzutu poziomego krawędzi bocznych

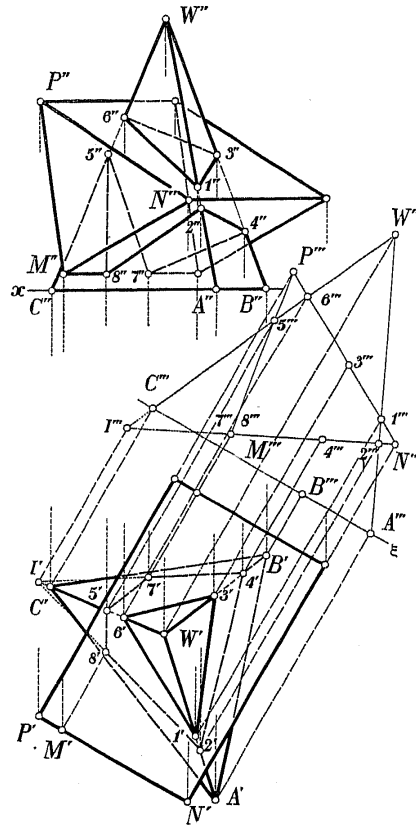
graniastosłupa (rys. 189). Wierzchołki 1, 2, ..., 6 linii przenikania, widoczne bezpośrednio na nowym rzucie pionowym, przenosimy do rzutów poziomego i pionowego.

Aby wyznaczyć punkty 7 i 8, w których krawędź MM_1 przebija ściany ostrosłupa, bierzemy pod uwagę punkt I przebiecia CW z przedłużeniem ściany MM_1NN_1 ; łącząc go z wierzchołkami 4 i 2, otrzymujemy na przecięciu z MM_1 punkty 7 i 8.

Posługując się rzutem pomocniczym, można łatwo rozstrzygnąć bez pomocy schematu, które punkty należy łączyć.

ĆWICZENIA.

1. Znaleźć za pomocą zmiany układu kąt między trójkątami ACD i BCD , gdy CD jest odcinkiem równoległym do rzutni poziomej.
2. Znaleźć za pomocą (dwukrotnej) zmiany układu kąt między trójkątami ACD i BCD w dowolnym położeniu.
3. Nakreślić rzuty sześciannu stojącego na rzutni pionowej, a następnie wykonać rzut na płaszczyznę π_3 prostą do π_1 .
4. Powtórzyć ćwiczenie 3, gdy przekątna kwadratu znajdującego się na π_2 jest równoległa do x oraz biorąc za π płaszczyznę prostą do przekątnej sześciannu; wykonać jeszcze rzut na płaszczyznę $\pi \perp \pi$ i porównać z rys. 97.
5. Narysować dwunastościan foremny o jednej ścianie na π_2 i wykonać rzut na płaszczyznę $\pi \perp \pi_1$.
6. Narysować rzuty ośmiościanu foremnego o przekątnej prostej do rzutni poziomej i znaleźć przekrój dowolną płaszczyzną za pomocą zmiany układu.

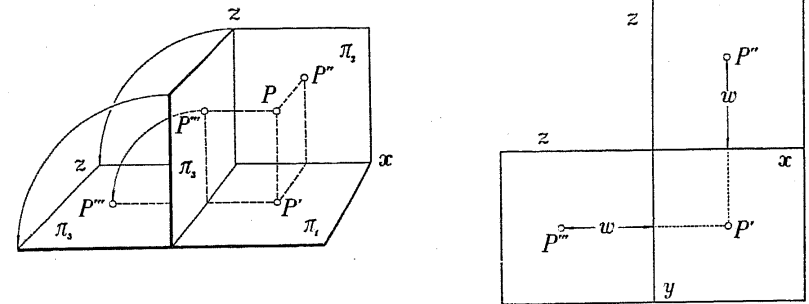


Rys. 189.

§ 20. Rzut boczny

Jeśli w szczególności płaszczyzna π jest prosta do osi x , to nazywamy ją *rzutnią boczną* i oznaczamy przez π_3 .

Krawędź ξ oznaczamy wtedy przez y , krawędź zaś płaszczyzn π_2 i π_3 przez z .



Rys. 190.

Rzutnię π_3 możemy przez obrót dookoła osi y sprowadzić do rzutni poziomej (rys. 190) lub przez obrót dookoła osi z do rzutni pionowej (rys. 191).

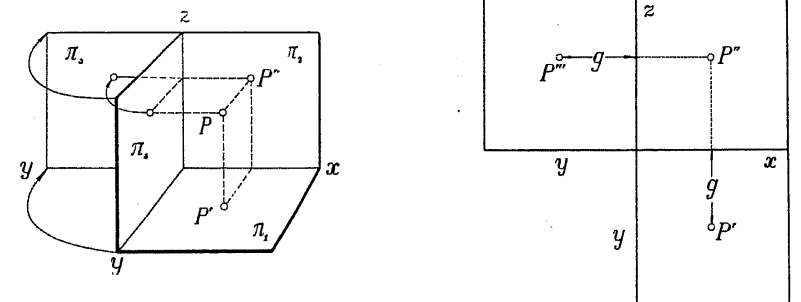
W pierwszym wypadku rzut boczny P''' punktu P leży na prostopadłej do osi y , wykreślonej z rzutu poziomego, przy czym odległość P''' od y równa jest odległości P'' od x ; w drugim wypadku rzut boczny P''' leży na prostej prostopadłej do osi z , wykreślonej z rzutu pionowego, przy czym odległość rzutu bocznego P''' od osi z równa jest odległości P' od x .

W pierwszym wypadku trójscian $\pi_1\pi_2\pi_3$ rozcinamy wzdłuż osi z i rozkładamy na rzutnię poziomą, w drugim wypadku rozcinamy wzdłuż osi y i rozkładamy na rzutnię pionową.

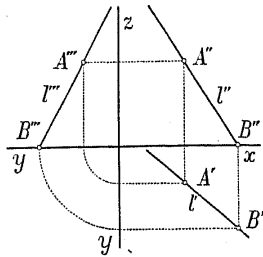
Najczęściej używamy drugiego sposobu.

Prostą przenosimy do rzutu bocznego kreśląc rzuty boczne dwu jej punktów (na rys. 192 punkt B jest wzięty na rzutni poziomej).

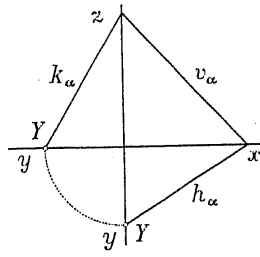
Śladem bocznym płaszczyzny nazywamy krawędź przecięcia jej z rzutnią



Rys. 191.



Rys. 192.



Rys. 193.

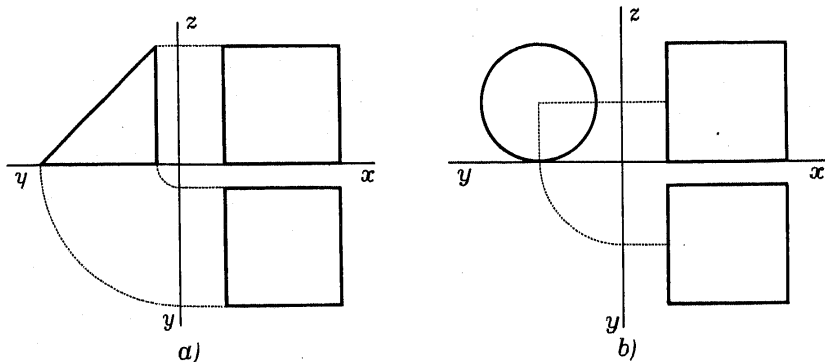
boczną. Oczywiście ślad boczny przecina się z pionowym na osi z (lub jest do niej równoległy), a z poziomym na osi y (lub jest do niej równoległy).

Jeśli oś y przebija płaszczyznę, to punkt ten przenosimy do rzutu bocznego i łączymy z punktem przecięcia śladu pionowego z osią z , otrzymując ślad boczny (rys. 193); jeśli ślad pionowy jest równoległy do z , to ślad boczny jest również równoległy do z .

Przy ustawieniu szczególnym może się zdarzyć, że rzuty poziomy i pionowy dwu różnych figur geometrycznych są identyczne. Tak np. rzuty pionowy i poziomy sześcianu o ścianach równoległych do π_2 i π_1 nie różnią się od rzutów jego połowy (rys. 194 a), znajdującej się po jednej stronie płaszczyzny przekątnej, ani od rzutów walca obrotowego (rys. 194 b) o osi równoległej do x i równej średnicy podstawy.

W takich właśnie wypadkach, gdy dwa rzuty nie określają figury jednoznacznie, rysujemy jeszcze rzut boczny.

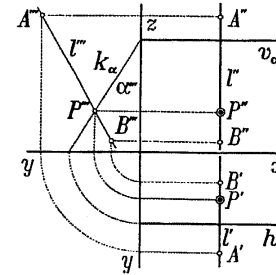
Poza tym używamy rzutu bocznego do rozwiązywania zadań, gdy proste są prostopadłe do osi x , a płaszczyzny równoległe do x (lub przechodzące przez x).



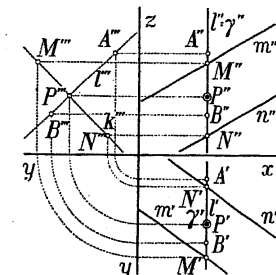
Rys. 194.

ZADANIE I. Znaleźć punkt przecięcia płaszczyzny α równoległej do x prostą l prostopadłą do x .

Rzut boczny prostej l znajdujemy kreśląc rzuty boczne punktów A i B , którymi prosta została określona (rys. 195); ślad boczny k_α łączy punkt przecięcia v_α i z z rzutem bocznym punktu, w którym płaszczyzna α przecina oś y . Ponieważ $\alpha \parallel x$, więc k_α jest rzutem bocznym α''' płaszczyzny α .



Rys. 195.



Rys. 196.

Z tego wynika, że rzut boczny punktu przecięcia znajduje się na przecięciu l''' z k_α . Do rzutu pionowego przenosimy punkt P bezpośrednio; rzut poziomy otrzymujemy z równości $P'''z = P'x$.

ZADANIE II. Znaleźć punkt przecięcia płaszczyzny prostą prostopadłą do osi x .

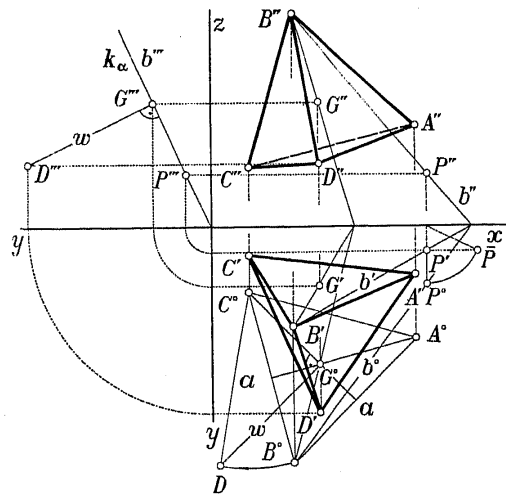
Na rys. 196 płaszczyzna określona została za pomocą prostych równoległych m i n .

Aby rozwiązać zadanie II, można przesunąć płaszczyznę pomocniczą γ przez prostą l prostopadłą do osi x . Krawędź przecięcia jej z płaszczyzną daną łączy punkty M i N , w których dane proste przebijają γ . Wykreślając w rzucie bocznym prostą l (AB) i prostą k (MN), otrzymujemy punkt przecięcia w rzucie bocznym, który następnie przenosimy do rzutu pionowego i poziomego.

ZADANIE III. Nakreślić rzuty czworoboku foremnego, stojącego na płaszczyźnie określonej osią x i punktem P .

Rzuty podstawy kreślimy jak w § 8, obracając płaszczyznę $\alpha = (Px)$ dookoła osi x do pokrycia się z rzutnią poziomą. Najpierw więc (rys. 197) znajdujemy kład P° , a następnie przenosimy wzięty w kładzie trójkąt foremny $A^\circ B^\circ C^\circ$ do rzutu poziomego i pionowego za pomocą prostych AP , BP i CP .

Wysokość DG , skonstruowaną przy kładzie $A^\circ B^\circ C^\circ$ podstawy, odmierzymy od środka ciężkości G za pomocą rzutu bocznego. W tym celu wyznaczamy kolejno rzuty P''' , $k_\alpha = \alpha'''$, G''' oraz D''' w odległości $G^\circ D$ od G''' na

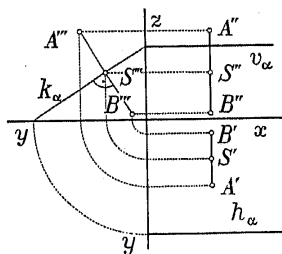


Rys. 197.

prostej prostopadłej do k_α . Rzuty D'' i D' znajdujemy jak w poprzednich zadaniach.

ZADANIE IV. Znaleźć płaszczyznę symetrii odcinka AB prostopadłego do osi x .

Ponieważ $AB \perp x$, więc jego płaszczyzna symetrii jest równoległa do x , a prostopadła do rzutni bocznej. Kreślimy więc przez środek $A''B''$ prostą prostopadłą do $A''B''$, która jest rzutem bocznym płaszczyzny symetrii (rys. 198). Ślady v_α i h_α są równoległe do x i przechodzą przez punkty, w których k_α przecina osie z i y .



Rys. 198.

ĆWICZENIA:

1. Nakreślić rzuty dwudziestościanu foremnego i znaleźć przekrój płaszczyzną równoległą do osi x .
2. Znaleźć przenikanie ostrosłupa z graniastosem równoległym do osi x za pomocą rzutu bocznego.
- Wsk.: Skorzystać z tego, że rzut boczny linii przenikania pokrywa się z podstawą graniastosem.
3. Znaleźć przenikanie dwudziestościanu foremnego z graniastosem trójsięciennym równoległym do osi x za pomocą rzutu bocznego.
4. Znaleźć rzuty punktu P , dla którego $OP = a$ (O oznacza początek układu czyli punkt wspólny płaszczyzn π_1 , π_2 i π_3), $\angle(OP, x) = \varphi$ oraz $\angle(OP, z) = \psi$, gdy $\varphi + \psi > 90^\circ$.

5. Przez dany punkt Q nakreślić prostą nachyloną do rzutni π_1 i π_2 pod danymi kątami α i β , gdy $\alpha + \beta < 90^\circ$.

6. Znaleźć ślady płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt i nachylonej pod danymi kątami a) do osi x i z , b) do płaszczyzn π_1 i π_2 .

§ 21. Cienie

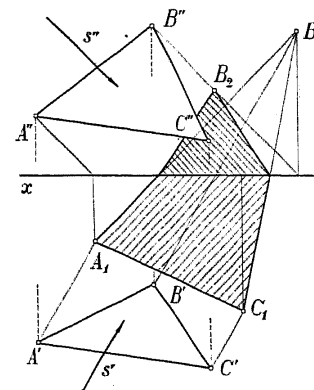
Dla nadania plastyki rzutom figur kreślimy często cienie. Odróżniać będziemy cień rzucony na inną figurę, np. na rzutnię, od *cienia własnego*, przez który rozumiemy zbiór tych punktów rozpatrywanej figury, które są odwrócone od światła (dokładnie: w których normalne skierowane na zewnątrz powierzchni tworzą z kierunkiem światła kąty ostre).

Sposoby wyznaczania cieni rozpatrzemy na kilku przykładach.

ZADANIE I. Znaleźć cień trójkąta na rzutnię, gdy promienie są równoległe do danej prostej s .

Kreślimy cienie wierzchołków (rys. 199) na rzutnię poziomą, tzn. ślady poziome promieni przechodzących przez wierzchołki. Łącząc je otrzymujemy cień trójkąta na rzutnię poziomą, z którego uwzględniamy część znajdującą się przed osią x .

Podobnie znajdujemy cień na rzutnię pionową, wyznaczając ślady pionowe promieni przechodzących przez wierzchołki i odrzucając część położoną pod osią x .

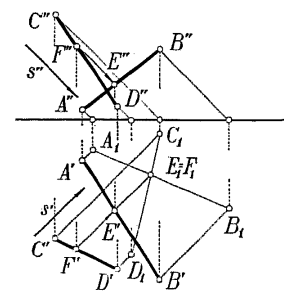


Rys. 199.

ZADANIA II. Znaleźć cień odcinka na odcinek.

Znajdujemy cienie A_1B_1 i C_1D_1 obu odcinków na rzutnię np. poziomą (rys. 200).

Punkt przecięcia A_1B_1 i C_1D_1 jest cieniem pewnego punktu E odcinka AB i pewnego punktu F odcinka CD , które możemy wyznaczyć, kreśląc promień światła przez punkt przecięcia cieni. Oczywiście wcześniejszy F rzuca cień na późniejszy E .



Rys. 200.

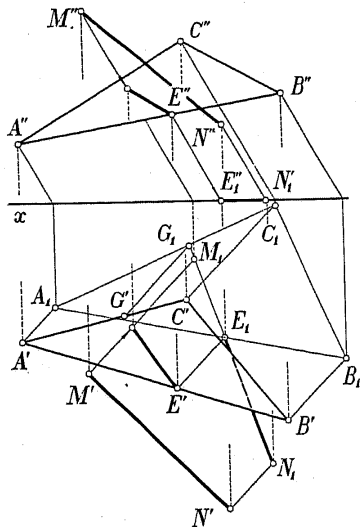
W ten sam sposób znajdujemy cień krzywej na krzywą, np. cień okręgu na okrąg (rys. 201).

ZADANIE III. Znaleźć cień odcinka na trójkąt.

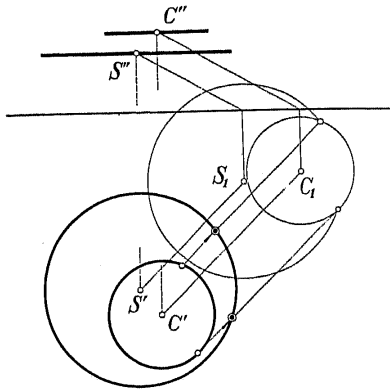
Kreślimy jak w zadaniu II cień odcinka MN (rys. 202) lub jego przedłużenia na boki trójkąta. Łącząc otrzymane w ten sposób punkty E i G , otrzymujemy cień prostej MN na trójkąt. Cień odcinka MN jest oczywiście odcinkiem ograniczonym promieniami przechodzącymi przez jego końce.

ZADANIE IV. Znaleźć cień trójkąta na trójkąt (rys. 203).

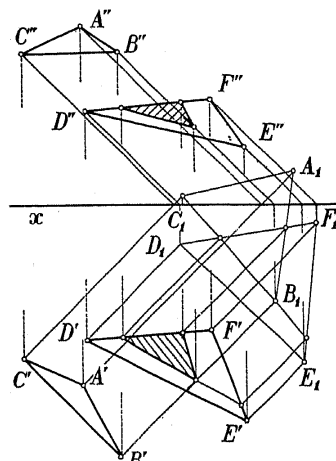
Znajdujemy cienie obu trójkątów na rzutnię poziomą. Z punktów przecięcia cienia D_1F_1 z cieniami A_1B_1 i B_1C_1 wykreślamy zwrotne promienie światła i otrzymujemy cień trójkąta ABC na odcinek DF . Cień punktu B na trójkąt znajdujemy jak w zadaniu III przez przedłużenie odcinka C_1B_1 do przecięcia z E_1F_1 .



Rys. 202.



Rys. 201.



Rys. 203.

ZADANIE V. Znaleźć cień trójkąta na ostrosłup.

Podobnie jak w zadaniu poprzednim, znajdujemy cień trójkąta i cień wszystkich krawędzi ostrosłupa na rzutnię poziomą (rys. 204).

Z przecięcia cieni wnioskujemy o cieniach boków trójkąta na krawędzie ostrosłupa. Cień punktu M na ścianę ACD znajdujemy przez przedłużenie odcinka P_1M_1 do przecięcia z CD , a cień N_c — przez przedłużenie M_1N_1 do AB .

ZADANIE VI. Znaleźć cień punktu na stożek.

Wykreślimy cień wierzchołka stożka na rzutnię poziomą (rys. 205). Cień tworzącej otrzymamy oczywiście, łącząc cień wierzchołka ze śladem poziomym tworzącej.

Zadanie można więc rozwiązać w następujący sposób:

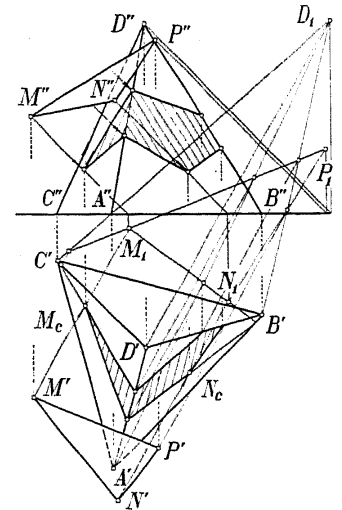
Wyznaczamy cień P_1 punktu P na rzutnię i łączymy go z W_1 . Otrzymujemy zatem cień tej tworzącej, którą przecina promień światła wychodzący z P . Jeśli więc punkt przecięcia W_1P_1 z podstawą połączymy z wierzchołkiem, to otrzymamy tworzącą stożka, na którą pada cień P_c punktu P .

ZADANIE VII. Znaleźć cień trójkąta na stożek.

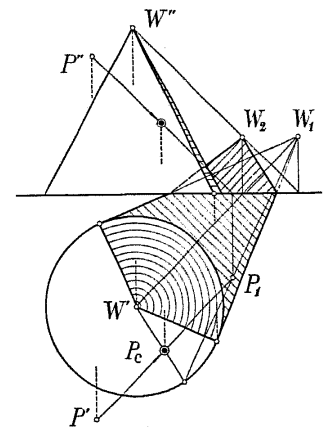
Rozwiązanie dostajemy, powtarzając kilkakrotnie poprzednią konstrukcję. Cieniami boków (rys. 206) są łuki, o których wykazemy rozdziale III, że są odcinkami elips, parabol lub hiperbol. Tu znajdujemy je wyznaczając po kilka punktów. Np. punkty cienia na tworzącej konturowej dla rzutu pionowego (która w rzucie poziomym jest równoległa do x) wyznaczone zostały z przecięcia jej cienia na rzutnię z bokami C_1A_1 i C_1B_1 .

Można też znaleźć nie tylko punkty cienia, ale styczne do krzywej.

Weźmy pod uwagę krzywą A_cC_c , która



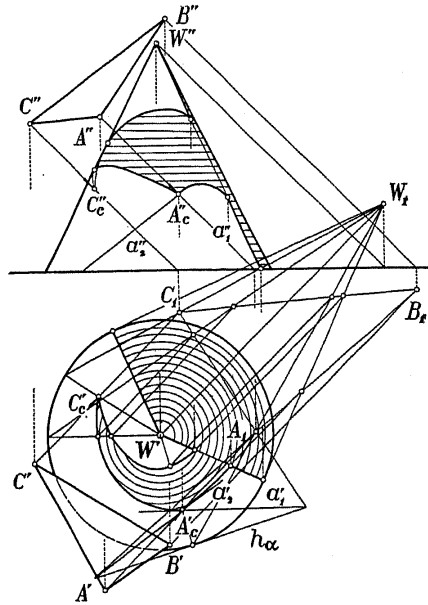
Rys. 204.



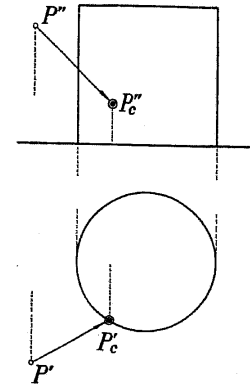
Rys. 205.

jest cieniem odcinka AC na stożek. Aby wykreślić styczną a_1 do krzywej A_cC_c w punkcie A_c , wyobraźmy sobie płaszczyznę α styczną do stożka w punkcie A_c ; ślad poziomy h_α jest oczywiście styczną do podstawy w punkcie na tworzącej przechodzącej przez A_c . Wszystkie promienie światła przechodzące przez odcinek AC tworzą płaszczyznę β , której ślad poziomy przechodzi przez A_1 i C_1 . Jest oczywiste, że płaszczyzna β przecina stożek wzdłuż krzywej A_cC_c , a płaszczyznę α wzdłuż prostej a_1 stycznej do niej w A_c . Aby więc wykreślić styczną a_1 , wystarczy punkt A_c połączyć z punktem przecięcia h_α i prostą A_1C_1 .

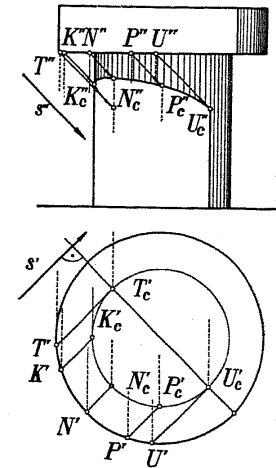
Podobnie styczną a_2 do cienia boku AB otrzymujemy, łącząc A_c z punktem przecięcia h_α i A_1B_1 .



Rys. 206.



Rys. 207.



Rys. 208.

ZADANIE VIII. Znaleźć cień punktu na walec o osi pionowej.

Ponieważ tu (rys. 207) rzuty tworzących są punktami, więc cień znajdujemy bezpośrednio, przebijając walec promieniem światła, przechodzącym przez dany punkt.

ZADANIE IX. Znaleźć cień krzywej na walec.

Znajdujemy cienie kilku punktów krzywej na walec i łączymy je linią krzywą, która jest przybliżeniem cienia danej krzywej. Np. na rys. 208 nakreślono w ten sposób cień podstawy większego walca na mniejszy.

Dla dokładniejszego wyznaczenia krzywej znaleziono cień N_c punktu N na płaszczyźnie symetrii figury i kierunku światła, który będzie wobec tego najwyższym punktem krzywej, cień K_c na obrysie walca oraz punkty T_c i U_c przecięcia cienia rzuconego z cieniem własnym walca. Wszystkie konstrukcje wykonujemy najpierw w rzucie poziomym, z którego jednoznacznie wynika, gdzie znajdują się punkty N , T , K i U , rzucające cienie na tworzące walca.

ĆWICZENIA:

1. Narysować cień trójkąta na sześcian o podstawie na rzutni poziomej.
2. Rozwiązać zadanie IV, biorąc trójkąty tak, aby się przecinały.

3. Nakreślić rzuty ostrosłupa prostego, którego podstawa jest sześciokątem foremnym na płaszczyźnie poziomej, a wierzchołek leży na π_1 i znaleźć cień do wnętrza (po odrzuceniu podstawy).
4. Znaleźć cień odcinka: a) na walec, b) na kulę.
5. Znaleźć cień trójkąta na obie rzutnie ze źródła światła w punkcie S .
6. Znaleźć cień trójkąta na ostrosłup ze źródła światła w punkcie S .
7. Znaleźć punkt przebiecia równoległoboku prostą, wyznaczając cień tej prostej na równoległobok.
8. Znaleźć cień odcinka na walec, gdy źródłem światła jest punkt.