ROZDZIAŁ I

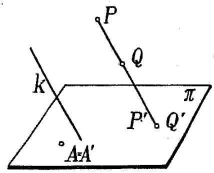
RZUTY CECHOWANE

§ 1. Definicja i własności rzutu równoległego

Weźmy pod uwagę płaszczyznę π i prostą k nierównoległą do π. Przez dowolny punkt P wykreślmy prostą równoległą do k (rys. 1).

Definicja. *Punkt P', w którym prosta równoległa do k, a przechodząca przez P, przebija płaszczyznę π, nazywa się rzutem punktu P na π w kierunku k.*

Płaszczyzna π nazywa się *płaszczyzną rzutu* lub *rzutnią*, a prosta PP' *promieniem rzutującym*.



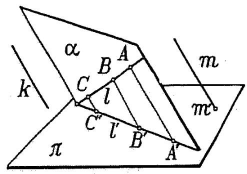
Rys. 1.

Jest widoczne, że jeśli punkt A leży na płaszczyźnie π, to jego rzut A' pokrywa się z A.

Jeśli punkt Q leży na prostej równoległej do k i przechodzącej przez P, to $Q' = P'$.

Rzutem figury geometrycznej nazywa się zbiór rzutów punktów tej figury.

Weźmy pod uwagę prostą l nierównoległą do k (rys. 2). Promienie rzutujące, przechodzące przez punkty A, B, C, ... prostej l, leżą w płaszczyźnie α równoległej do k; nazywamy ją *płaszczyzną rzutującą*. Punkty A', B', C', ..., w których one przebijają rzutnię, leżą więc na krawędzi l' płaszczyzn α i π. Krawędź l' jest więc — zgodnie z definicją rzutu figury geometrycznej — rzutem prostej l.

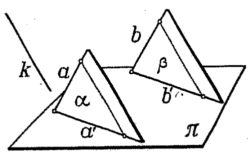


Rys. 2.

Jeśli prosta m jest równoległa do kierunku k, to wszystkie promienie rzutujące schodzą się z m i wówczas rzutem m jest punkt. Zatem:

1. *Rzutem prostej jest prosta lub punkt.*

Jeśli proste a i b są do siebie równoległe, a nierównoległe do k, to oczywiście prosta b albo jest równoległa do płaszczyzny rzutującej α, przechodzącej przez a, albo leży na niej (rys. 3). W pierwszym wypadku płaszczyzna rzutująca β jest równoległa do α, a więc rzut b' jest równoległy do a', w drugim b' pokrywa się z a'. Widzimy więc, że:



Rys. 3.

1 — 47502 *E. Otto*

2. *Rzuty prostych równoległych są do siebie równoległe, bądź pokrywają się, bądź są punktami.*

Ostatni wypadek zachodzi oczywiście wtedy, gdy proste są równoległe do k.

Z własności tej wynika np., że rzutem równoległoboku $ABCD$ jest pewien równoległobok $A'B'C'D'$, z wyjątkiem wypadku, gdy płaszczyzna $ABCD$ jest równoległa do kierunku rzutu k.

Dla trzech punktów A, B i C linii prostej (rys. 2) mamy z twierdzenia Talesa:

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}.$$

Ułamek $\frac{AC}{BC}$ nazywamy *stosunkiem podziału odcinka AB punktem C*.

Widzimy więc, że stosunek podziału nie ulega zmianie przy rzutowaniu. Każde *wyrażenie, które* po dokonaniu pewnej operacji *nie ulega zmianie*, nazywamy *niezmiennikiem* tej operacji. Udowodnioną własność można więc wypowiedzieć w następującej formie:

3. *Stosunek podziału jest niezmiennikiem rzutowania.*

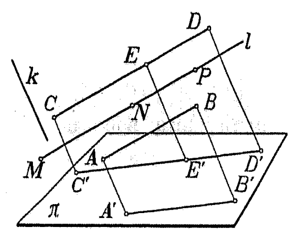
Z własności 3 wynika, że jeśli odcinki AB i CD są równoległe (a nierównoległe do k), to

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}.$$

W wypadku bowiem, gdy rzut prostej AB nie pokrywa się z rzutem prostej CD, odłóżmy na prostej CD odcinek $CE = AB$ (rys. 4).

Wówczas $A'B'E'C'$ jest na podstawie wniosku z własności 2 równoległobokiem, więc $A'B' = C'E'$, a zatem

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{C'E'}{C'D'} = \frac{CE}{CD} = \frac{AB}{CD}.$$



Rys. 4.

Jeśli rzut prostej AB pokrywa się z rzutem prostej CD, to na prostej l równoległej do nich, a posiadającej rzut różny od nich, weźmy punkty M, N i P tak, by $MN = AB$ oraz $MP = CD$; wówczas na podstawie poprzedniego wypadku będzie:

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{M'N'}{M'P'} = \frac{MN}{MP} = \frac{AB}{CD}, \text{ c. b. d. o.}$$

ĆWICZENIA:

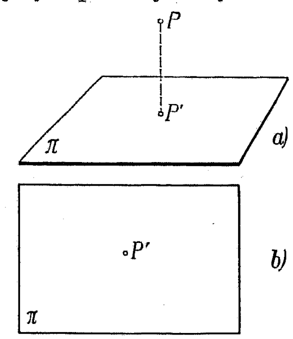
1. Udowodnić, że jeśli $l \parallel \pi$, to $l' \parallel l$.

2. Wykazać, że rzut F' figury geometrycznej F, leżącej w płaszczyźnie równoległej do π, jest figurą przystającą do F.

3. Udowodnić, że jeśli kierunek rzutu k jest prostopadły do π, to długość rzutu $A'B'$ odcinka AB równa się $AB \cdot \cos\varphi$, gdzie φ oznacza kąt zawarty między prostą AB a rzutnią π.

§ 2. Rzut prostokątny i cecha punktu

Jeśli kierunek rzutu k jest prostopadły do rzutni, to P' nazywa się *rzutem prostokątnym* punktu P (rys. 5 a). Gdy płaszczyzną π jest płaszczyzna rysunku — a więc tu karta książki — otrzymamy rzut jak na rys. 5 b. Jest tam zaznaczony jedynie punkt P'. O punkcie P wiemy tylko tyle, że znajduje się na prostej prostopadłej do karty książki.



Rys. 5.

Od tej chwili będziemy spotykali w tej książce dwojakiego rodzaju rysunki: takie jak 5 a, których celem jest wyjaśnienie operacyj geometrycznych omawianych w tekście, oraz takie jak rys. 5 b, będące właściwymi rzutami. Pierwsze są szkicami perspektywicznymi zastępującymi modele, na których należałoby uczyć się geometrii wykreślnej, drugie stanowią przedmiot tej książki.

Aby rzut (tzn. rys. 5 b) dokładnie określał punkt P, będziemy podawać jego odległość od rzutni, tzn. długość odcinka $P'P$, wyrażoną w pewnych jednostkach, obok rzutu P'.

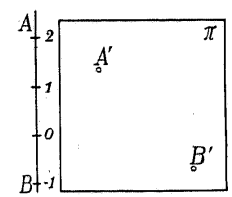
Punkty leżące po różnych stronach rzutni rozróżniać będziemy przy pomocy znaku.

Weźmy w tym celu oś (tzn. prostą, na której przyjęto punkt zerowy O, jednostkę długości i pewien zwrot za dodatni) prostopadłą do π i posiadającą punkt O na π. Jeśli P leży po stronie dodatniej półosi, to wektor $P'P$ posiada zwrot zgodny ze zwrotem osi; jeśli po stronie ujemnej, to posiada zwrot przeciwny.

Długość wektora $P'P$ opatrzona znakiem + lub — zależnie od tego, czy zwrot $P'P$ jest zgodny ze zwrotem osi czy nie, *nazywa się cechą punktu P*.

Np. punkt leżący na rzutni posiada cechę 0.

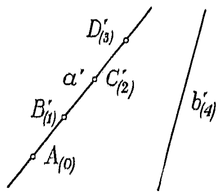
Cechę punktu będziemy notować w nawiasie obok rzutu punktu; można by również zaznaczać wysokości punktów na osi obok rzutów (rys. 6; A ma cechę 2, B cechę -1).



Rys. 6.

Weźmy teraz pod uwagę prostą l, nie równoległą ani prostopadłą do π. Łatwo zauważyć, że jeśli punkt B jest środkiem odcinka AC, to cecha punktu B jest średnią arytmetyczną cech punktów A i C. Jeśli więc np. A ma cechę 0, C cechę 2, to B ma cechę 1. Na podstawie własności 3, B' jest środkiem odcinka $A'C'$. Wynika stąd, że rzuty punktów posiadających cechy 0, 1, 2, 3, ... są równo od siebie oddalone (rys. 7.).

Opierając się na tej własności będziemy mogli rozwiązać następujące zadania:

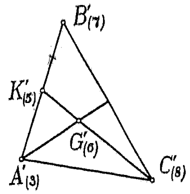


Rys. 7.

ZADANIE I. *Znaleźć cechę środka ciężkości G trójkąta, którego wierzchołki mają cechy 3, 7 i 8* (rys. 8).

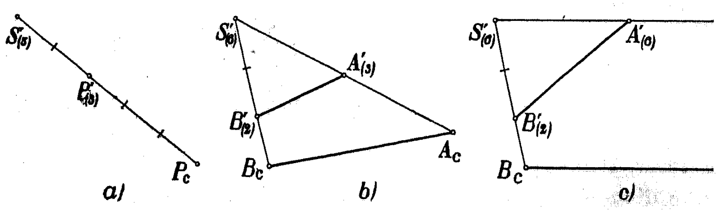
Środek K odcinka AB posiada cechę $\frac{3+7}{2}=5$. Punkt G dzieli odcinek KC w stosunku $1:2$, jeśli więc końce mają cechy 5 i 8, to cecha G wynosi 6.

ZADANIE II. *Znaleźć cień punktu P na rzutnię, jeśli źródłem światła jest punkt S* (rys. 9 a).



Rys. 8.

Cieniem będzie oczywiście punkt P_c, w którym prosta SP przebija rzutnię, tzn. punkt o cesze 0 na SP. Skoro cecha punktu S wynosi 5, a punktu P 3, więc połowę odcinka $S'P'$ odmierzamy trzy razy po stronie P', otrzymując punkt P_c o cesze 0 na SP.



Rys. 9.

ZADANIE III. *Znaleźć cień odcinka AB na rzutnię, gdy źródłem światła jest punkt S.*

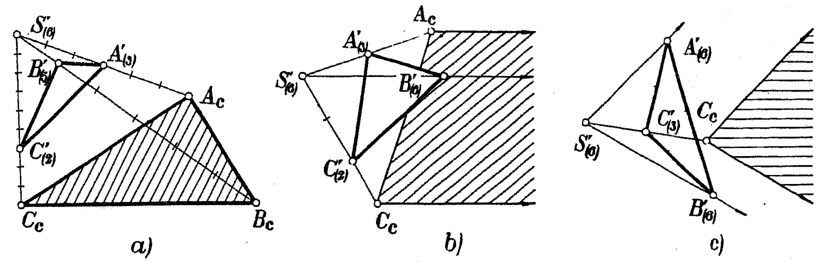
Promienie światła przechodzące przez punkty odcinka AB leżą w płaszczyźnie przechodzącej przez S i AB, więc cienie punktów odcinka znajdować się będą na krawędzi tej płaszczyzny i rzutni.

W wypadku więc, gdy cechy końców odcinka są mniejsze od cechy punktu S (rys. 9 b), znajdujemy cienie A_c i B_c i łączymy je.

W wypadku, gdy np. punkt A ma cechę równą cesze punktu S (rys. 9 c), promień światła SA nie przebija rzutni; łatwo jednak zauważyć, że wówczas płaszczyzna SAB przetnie rzutnię w krawędzi równoległej do SA. Cieniem będzie więc w tym wypadku półprosta o początku B_c, równoległa do SA.

ZADANIE IV. *Znaleźć cień trójkąta ABC na rzutnię, jeśli źródłem światła jest punkt S.*

W wypadku, gdy wszystkie wierzchołki posiadają cechy niższe od S (rys. 10 a), znajdujemy cienie boków jak na rysunku 9 b; cieniem trójkąta będzie trójkąt $A_cB_cC_c$.



Rys. 10.

Jeśli jeden wierzchołek, np. B, jest na wysokości źródła światła (rys. 10 b), to cienie boków AB i CB znajdujemy jak na rysunku 9 c; cieniem trójkąta ABC będzie więc w tym wypadku pół pasa płaszczyzny o podstawie A_cC_c.

Jeśli dwa wierzchołki, np. A i B, są na wysokości S, to znowu cienie boków CA i CB znajdujemy jak na rysunku 9 c; cieniem trójkąta ABC będzie więc kąt o wierzchołku C_c i ramionach równoległych do $S'A'$ i $S'B'$.

Uwaga 1. W zadaniach I—IV korzystaliśmy z uwagi, że jeśli końce odcinków na prostej posiadają cechy różniące się o jednostkę, to ich rzuty są równe (np. $A'(0)B'(1) = B'(1)C'(2) = C'(2)D'(3)$ na rysunku 7).

Wspólną ich długość nazywamy *modułem prostej*. A więc:

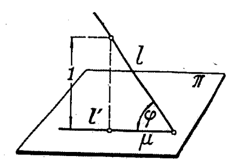
Definicja. *Moduł prostej jest to długość rzutu odcinka prostej, którego końce posiadają cechy różniące się o jednostkę.*

W szczególności więc, jeśli prosta jest prostopadła do rzutni, to jej moduł jest zerem.

Prosta równoległa do rzutni nie posiada modułu, gdyż nie posiada punktów o cechach różniących się o jednostkę.

Oznaczamy przez φ kąt między prostą l a rzutnią (tzn. kąt między l a l'), a przez μ moduł prostej (rys. 11). Z określenia modułu wynika związek:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\mu}.$$



Rys. 11.

Widzimy więc, że: *proste l i m zawierają z rzutnią równe kąty wtedy i tylko wtedy, gdy moduły ich są równe.*

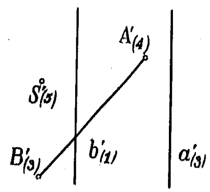
Uwaga 2. Jeśli prosta jest równoległa do rzutni, to wszystkie jej punkty mają wspólną cechę; wypisujemy ją w nawiasie przy rzucie prostej (np. proste a i b na rys. 12).

Najczęściej będziemy oznaczać punkty na prostej liczbami określającym ich cechy, a więc np. zamiast $C'(1)$ będziemy pisali wprost $1'$, zamiast $C'(2)$ $2'$ itp.

ĆWICZENIA:

1. Znaleźć cień odcinka AB na poziomą półpłaszczyznę na wysokości 1 (rys. 12), rozciągającą się na lewo od prostej b, pas ograniczony prostymi a i b oraz półpłaszczyznę poziomą na wysokości 3, rozciągającą się na prawo od prostej a; źródłem światła jest punkt S na wysokości 5.

Wsk.: wykonać najpierw cień na (całą) płaszczyznę na wysokości 1, następnie na (całą) płaszczyznę na wysokości 3; cień pierwszy uwzględnić do przecięcia z b, cień drugi od przecięcia z a; oczywiście cień na pas (ab) otrzymamy łącząc koniec pierwszego cienia z początkiem drugiego.



Rys. 12.

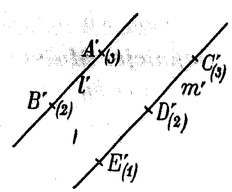
2. Wykreślić cień trójkąta na półpłaszczyzny i pas płaszczyzny, jak w ćwiczeniu poprzednim.

3. Dany jest rzut odcinka, którego końce mają cechy 2,25 i —1,5; znaleźć punkt o cesze 0.

§ 3. Proste równoległe

Jak wiadomo z § 1, rzuty l' i m' prostych równoległych l i m są do siebie równoległe (rys. 13) lub pokrywają się, albo wreszcie są punktami.

Jeśli proste l i m nie są równoległe do rzutni, to weźmy na nich np. punkty A, B i C, D o cechach 2 i 3. Z własności 3 rzutu wynika, że rzut $A'B'$ równy jest rzutowi $C'D'$. Aby to udowodnić, zwróćmy uwagę na to, że odcinki AB i CD są sobie równe, jako równoległe i zawarte między równoległymi płaszczyznami na wysokości 2 i 3. Ponieważ kąty φ i ψ nachylenia l i m do rzutni są równe, więc:



Rys. 13.

$$A'B' = AB\cos\varphi = CD\cos\psi = C'D'.$$

Długość odcinka $A'B'$ jest według definicji (ob. § 2) modułem prostej l; podobnie długość $C'D'$ jest modułem prostej m. Widzimy więc, że *moduły prostych równoległych są równe.*

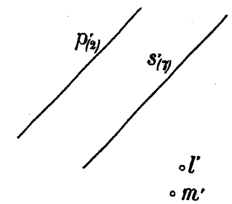
Jeśli jeszcze zauważymy, że zwrot od punktu $3'$ do punktu $2'$ na prostej l' jest zgodny ze zwrotem od $3'$ do $2'$ na m', to będziemy mogli nasze rozważania streścić w następującym twierdzeniu:

1. *Jeśli proste l i m są do siebie równoległe* (i równocześnie ukośne do rzutni), *to:*

1° $l' \| m'$ lub $l' = m'$,
2° moduły prostych są równe, tzn. $3'_l\,2'_l = 3'_m\,2'_m$,
3° zwroty na l' i m' są zgodne.

Nie trudno zauważyć, że jeśli proste są podane przez rzuty a' i b' spełniające warunki 1°, 2° i 3°, to są do siebie równoległe.

Gdy proste l i m są prostopadłe do rzutni, to ich rzuty są punktami (rys. 14). Modułem takich prostych jest zero. Jeśli proste p i s są równoległe do rzutni, to rzuty ich przedstawiają się jak na rys. 14 lub pokrywają się.



Rys. 14.

I w tym wypadku można odwrócić twierdzenie w następujący sposób:

2. *Na to, aby proste a i b równoległe do rzutni były do siebie równoległe, wystarczy, by ich rzuty były do siebie równoległe lub pokrywały się.*

Uwaga. W wypadku, gdy rzuty prostych równoległych l i m, a nachylonych do rzutni pod kątem ostrym, nie pokrywają się, można warunek 2° i 3° zastąpić jednym:

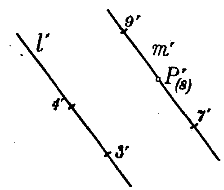
$\bar{2}$° *Proste łączące rzuty punktów o tych samych cechach na l' i m' są do siebie równoległe.*

ZADANIE I. *Dany jest punkt P o cesze 8 i prosta l; nakreślić rzut prostej m przechodzącej przez P i równoległej do l oraz zaznaczyć na nim rzuty punktów o cechach 7 i 9.*

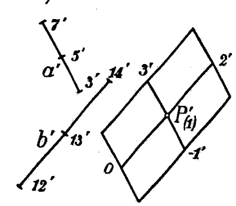
Z podanych własności wynika następujące rozwiązanie:

Przez P' kreślimy m' równolegle do l' i odkładamy od P' po obu stronach odcinek $3'4'$, tzn. moduł prostej l'.

Z dwóch uzyskanych punktów ten oznaczamy przez $7'$, dla którego zwrot $P'7'$ jest zgodny ze zwrotem $4'3'$ na l' (rys. 15).



Rys. 15.



Rys. 16.

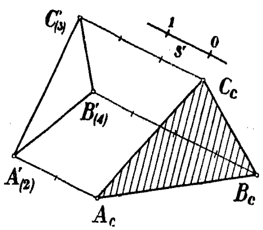
ZADANIE II. *Znaleźć rzut równoległoboku o środku P i bokach równych i równoległych do danych odcinków a i b* (rys. 16).

Przez P' kreślimy rzuty środkowych równoległoboku równoległe do a' i b' i odkładamy po obu stronach punktu P' połowy a' i b', otrzymując punkty o cechach odpowiednio —1 i 3 oraz 0 i 2. Są one środkami boków, przez nie więc wykreślamy boki równoległe do a' i b'.

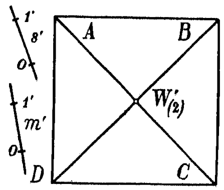
Łatwo obliczyć cechy wierzchołków.

ZADANIE III. *Znaleźć cień trójkąta na rzutnię, gdy promienie światła są równoległe do danej prostej s* (rys. 17).

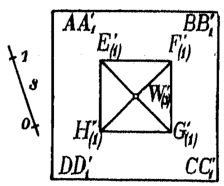
Cienie wierzchołków znajdujemy kreśląc przez nie promienie równoległe do s i zaznaczając na nich punkty o cechach 0.



Rys. 17.



Rys. 18.



Rys. 19.

ĆWICZENIA:

1. Rysunek 18 przedstawia ostrosłup o podstawie $ABCD$ położonej na rzutni i o wysokości 2; znaleźć cień, gdy kierunek światła jest równoległy do danej prostej a) s, b) m i zaznaczyć ściany oświetlone i nieoświetlone.

2. Dany jest graniastosłup o wierzchołkach A, B, C, D na rzutni i $A_1 B_1 C_1 D_1$ na wysokości 1 oraz ostrosłup $EFGHW$ (rys. 19). Wykreślić cień ostrosłupa na ścianę górną graniastosłupa oraz cień obu figur na rzutnię, gdy promienie światła są równoległe do prostej s.

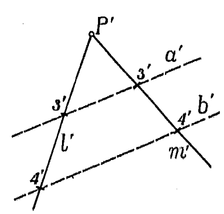
Wsk.: należy najpierw znaleźć cień wierzchołka ostrosłupa na płaszczyznę poziomą o wysokości 1 i połączyć go z F i H, a następnie wyznaczyć cień na rzutnię punktów D_1, C_1, B_1, W oraz punktów przecięcia cieni WF i HW z krawędziami graniastosłupa.

§ 4. Proste przecinające się

Niech proste l i m mają punkt wspólny P (rys. 20). Weźmy pod uwagę punkty o cechach 3 i 4 na obu prostych.

Udowodnimy, że prosta łącząca punkty 3 jest równoległa do prostej łączącej punkty 4 obu prostych.

W tym celu zauważmy, że pierwsza leży na płaszczyźnie poziomej, oddalonej od rzutni o 3 jednostki, druga w płaszczyźnie poziomej na wysokości 4, obie zaś w trzeciej płaszczyźnie przechodzącej przez dane proste l i m. Równoległość więc prostych a i b wynika z tego, że



Rys. 20.

obie płaszczyzny poziome są do siebie równoległe oraz z następującego znanego twierdzenia:

Jeśli dwie płaszczyzny są do siebie równoległe, to proste przecięcia trzecią płaszczyzną są równoległe.

Widzimy więc, że:

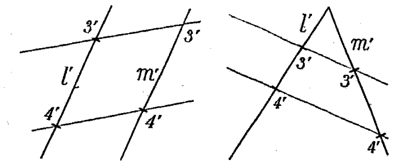
1. *Jeśli dwie proste przecinają się, to linie łączące punkty o jednakowych cechach są do siebie równoległe.*

Czy odwrócenie tego twierdzenia jest prawdziwe? Oczywiście że nie, ponieważ proste równoległe do siebie mają tę samą własność (§ 3, Uwaga).

Okazuje się, że tylko te dwa wypadki są możliwe, tzn.:

2. *Jeśli rzuty l' i m' prostych l i m mają tę własność, iż linie łączące punkty o jednakowych cechach są do siebie równoległe, to proste l i m przecinają się lub są do siebie równoległe.*

Aby to wykazać, połączmy ze sobą punkty $3_l'$ i $3_m'$ oraz $4_l'$ i $4_m'$ (rys. 21). Otrzymamy dwie proste a i b, równoległe do rzutni, ponieważ na a istnieją dwa punkty na wysokości 3, na b dwa punkty na wysokości 4. Według założenia $a' \| b'$, więc na podstawie § 3 tw. 2 a i b są równoległe.



Rys. 21.

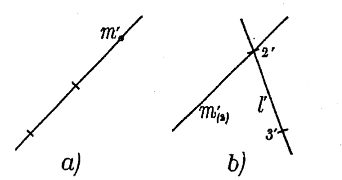
Istnieje zatem przechodząca przez nie płaszczyzna α.

Oczywiście na tej płaszczyźnie leżą proste l i m, ponieważ mają z nią po dwa punkty wspólne. Skoro więc l i m leżą w jednej płaszczyźnie, to mogą bądź przecinać się, bądź być do siebie równoległe, co mieliśmy wykazać.

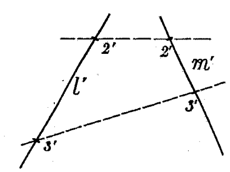
Rozpatrzenie wypadków, kiedy l i m są bądź pionowe, bądź poziome, jest natychmiastowe:

1) jeśli $m \perp \pi$, to dowolnie położona prosta l przecina m wtedy i tylko wtedy, gdy rzut m' (tzn. punkt) leży na l' (rys. 22).

2) jeśli $m \| \pi$, to l przecina m, gdy punkt prostej l, którego rzut leży na m, posiada cechę równą cesze prostej m (rys. 22 b).



Rys. 22.



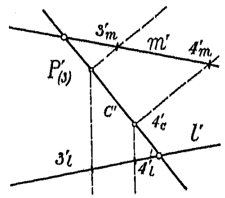
Rys. 23.

Jeśli rzuty prostych l i m są tak przyjęte, że linie łączące punkty o tych samych cechach nie są do siebie równoległe (rys. 23), to l i m ani się nie przecinają, ani nie są równoległe (lub: nie leżą w jednej płaszczyźnie); takie proste nazywamy *skośnymi*.

ZADANIE: *Przez punkt P o cesze 3 przeprowadzić prostą przecinającą dwie dane proste skośne l i m.*

Jeśli punkty $3'_l$, P' i $3'_m$ leżą na prostej, to jest ona rzutem szukanej prostej c.

Jeśli tak nie jest, to (rys. 24) punkt $4'_c$ prostej c' znajdziemy z uwagi na to, że prosta $4'_l\,4'_c$ ma być równoległa do $P'\,3'_l$ oraz $4'_m\,4'_c$ ma być równoległa do $P'3'_m$.



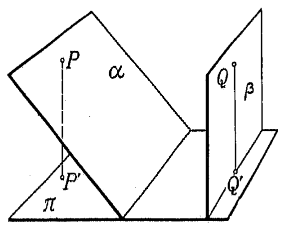
Rys. 24.

§ 5. Płaszczyzna

Weźmy pod uwagę dowolną płaszczyznę α. Jeśli α nie jest prostopadła do rzutni, to rzuty wszystkich punktów płaszczyzny α wypełnią całą płaszczyznę π. W wypadku, gdy płaszczyzna jest prostopadła do π (jak β na rys. 25), rzuty jej punktów znajdują się na jej krawędzi z π.

Wówczas krawędź ta jest rzutem płaszczyzny; oznaczać ją będziemy wobec tego symbolem β'; oczywiście β' określa położenie β.

Jeśli α nie jest prostopadła do π, to położenie jej określać będziemy jednym z następujących sposobów:

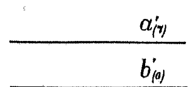


Rys. 25.

(1) trzema punktami A,B,C nie leżącymi na prostej,
(2) prostą l i punktem P nie leżącym na niej,
(3) dwiema prostymi przecinającymi się,
(4) dwiema prostymi równoległymi.

Najczęściej określa się płaszczyznę przy pomocy pewnych specjalnych *prostych równoległych*, mianowicie takich, *które są równoległe do rzutni* (rys. 26). Takie proste nazywać będziemy *warstwicami*.

Jeśli warstwica płaszczyzny znajduje się na wysokości n, to oznaczać ją będziemy symbolem n_α, a jej rzut przez n'_α (rys. 27). Warstwicą płaszczyzny poziomej jest zgodnie z definicją każda prosta leżąca na tej płaszczyźnie.



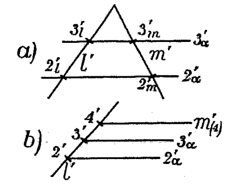
Rys. 26.

Oczywiście jeśli płaszczyzna jest prostopadła do rzutni, to rzuty jej warstwic leżą na jej krawędzi z rzutnią.

ZADANIE I. *Nakreślić rzuty warstwic płaszczyzny, określonej parą przecinających się prostych l i m.*

Jeśli żadna z prostych l i m nie jest równoległa do rzutni, to oczywiście warstwicami są proste łączące punkty o tych samych cechach (które — jak wiadomo — są do siebie równoległe) (rys. 27 a).

Jeśli np. prosta m jest równoległa do rzutni, to jest ona warstwicą i oczywiście inne warstwice są do niej równoległe (rys. 27 b).

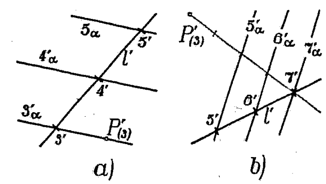


Rys. 27.

ZADANIE II. *Nakreślić rzuty warstwic płaszczyzny określonej punktem P i prostą l* (rys. 28).

Łącząc punkt P z punktem o tej samej cesze leżącym na l, otrzymujemy poziomą prostą leżącą w płaszczyźnie α, tzn. warstwicę. Inne warstwice wykreślamy równolegle do niej.

Uwaga 1. Przy tej sposobności zauważmy, że odległości między rzutami warstwic $3'_\alpha$ a $4'_\alpha$ i $4'_\alpha$ a $5'_\alpha$ itd. są równe. Wynika to z tego, iż punkty $3'$, $4'$, $5'$ itd. na prostej l' mają kolejno równe odległości.



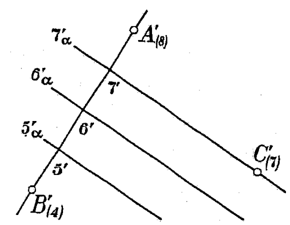
Rys. 28.

Definicja. *Odległości między rzutami warstwic różniącymi się o jednostkę,* np. $2'_\alpha$ i $3'_\alpha$, $3'_\alpha$ i $4'_\alpha$, ..., *nazywamy modułem płaszczyzny.*

Np. modułem płaszczyzny nachylonej do rzutni pod kątem 45° jest 1, modułem płaszczyzny prostopadłej do rzutni jest 0.

Płaszczyzna równoległa do rzutni nie posiada modułu.

Uwaga 2. Jeśli jak na rysunku 28 b punkt o cesze 3 na l znajduje się za obszarem rysunku, to łączymy l' z innym punktem l o znanej cesze prostą m i zaznaczamy na niej punkty o cechach pośrednich przez podział na równe odcinki jak w paragrafach poprzednich.

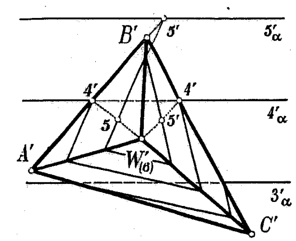


Rys. 29.

ZADANIE III. *Nakreślić rzuty warstwic płaszczyzny, wyznaczonej punktami A, B, C* (rys. 29).

Łączymy dwa punkty, np. A i B, sprowadzając zadanie do poprzedniego.

ZADANIE IV. *Dany jest ostrosłup o podstawie na płaszczyźnie α określonej warstwicami* (rys. 30); *znaleźć warstwice ścian bocznych.*



Rys. 30.

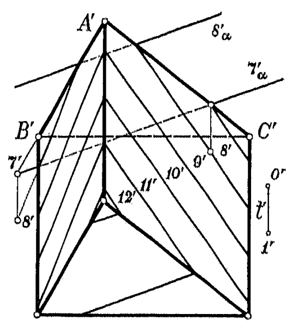
Jest to powtórzenie zadania poprzedniego, gdyż każda ze ścian bocznych ostrosłupa jest określona punktem W i prostą leżącą w płaszczyźnie α. Aby zatem wykreślić warstwicę np. płaszczyzny ABW, zauważmy, że punkty przecięcia prostej AB z warstwicami 4_α i 5_α mają odpowiednio cechy 4 i 5. Jeśli więc środek odcinka $4W$ połączymy z punktem 5 na prostej AB, to otrzymamy warstwicę 5 ściany ABW. Warstwica 4 przechodzi przez punkt 4 na AB i jest oczywiście równoległa do poprzedniej.

Warstwice innych ścian znaleziono w sposób podobny, przy czym korzystano z uwagi, że warstwice dwóch ścian posiadających wspólną krawędź przecinają się na tej krawędzi.

ZADANIE V. *Graniastosłup określony jest podstawą ABC leżącą w płaszczyźnie α oraz warunkiem równoległości jego krawędzi bocznych do prostej podanej punktami 0 i 1* (rys. 31); *znaleźć warstwicę ścian bocznych graniastosłupa.*

W celu wyznaczenia warstwic np. ściany bocznej przechodzącej przez bok AC, wykreślamy z punktu 7 na AC prostą równoległą do t i zaznaczamy punkt 8, odkładając moduł prostej t (tzn. odcinek $0'1'$). W ten sposób ściana określona jest punktem 8 i prostą AC, na której znamy punkty o cechach 7 i 8. Warstwice więc otrzymujemy jak w zadaniach poprzednich.

Warstwice innych ścian wykreślamy podobnie, przy czym jak w ostrosłupie, korzystamy z przecinania się warstwic ścian na krawędziach figury.



Rys. 31.

ĆWICZENIA:

1. Znaleźć przecięcie płaszczyzny określonej trzema punktami z płaszczyzną rzutów.

2. Dane są dwie proste skośne a i b; wykreślić warstwice płaszczyzny α przechodzącej przez a i równoległej do b.

Wsk.: przez pewien punkt na a wykreślić prostą c równoległą do b; płaszczyzna α będzie określona prostą a i c. Opieramy się tu na twierdzeniu, że jeśli prosta b jest równoległa do pewnej prostej c leżącej w płaszczyźnie α, to jest równoległa do płaszczyzny α.

3. Narysować warstwice obu płaszczyzn przechodzących przez daną prostą l, od której dane punkty A i B miałyby równe odległości.
(A i B są po jednej stronie żądanej płaszczyzny lub po obu stronach).

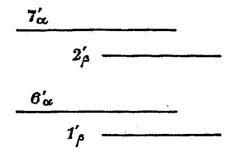
4. Wykreślić warstwice płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt P i równoległej do danych prostych skośnych a i b.

Wsk.: przez P wykreślić prostą c równoległą do a i prostą d równoległą do b; płaszczyzna jest określona prostymi c i d.

5. Wykazać, że jeżeli płaszczyzny α i β są do siebie równoległe, to:
1° warstwice ich są do siebie równoległe,
2° moduły są równe,
3° zwroty od cech niższych do wyższych są zgodne (rys. 32).

6. Dany jest punkt P i płaszczyzna α; wykreślić warstwice płaszczyzny β przechodzącej przez P i równoległej do α.

7. Dany jest punkt A i płaszczyzna α przy pomocy warstwic; narysować pewną prostą, przechodzącą przez A i równoległą do α.



Rys. 32.

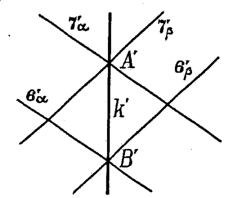
§ 6. Krawędź dwu płaszczyzn

Punkt przebicia płaszczyzny prostą

I. Weźmy pod uwagę dwie płaszczyzny α i β (rys. 33). Punkt A, w którym przecinają się warstwice 7_α i 7_β, jest ich punktem wspólnym; podobnie punkt B przecięcia warstwic 6_α i 6_β jest również wspólny.

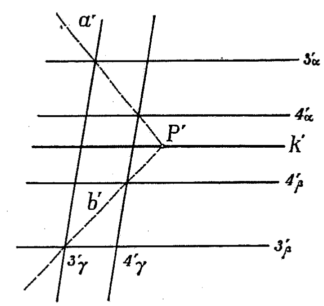
Prosta AB leży w obu płaszczyznach, ponieważ z każdą z nich ma dwa punkty A i B, jest zatem tzw. *krawędzią płaszczyzn.*

Rzut więc krawędzi k obu płaszczyzn kreślimy, łącząc ze sobą dwa punkty przecięcia par warstwic o tych samych cechach.



Rys. 33.

Zadanie nie jest tak proste, gdy warstwice obu płaszczyzn są do siebie równoległe (rys. 34). Ponieważ w tym wypadku krawędź jest oczywiście równoległa do warstwic obu płaszczyzn, więc wystarczy znaleźć tylko jeden punkt wspólny. W tym celu weźmy pewną płaszczyznę γ i znajdźmy krawędź a płaszczyzn α i γ oraz krawędź b płaszczyzn β i γ. Punkt P przecięcia prostych a i b jest wspólnym punktem płaszczyzny α i β; zatem szukana krawędź k przechodzi przez P (i jest równoległa do warstwic).

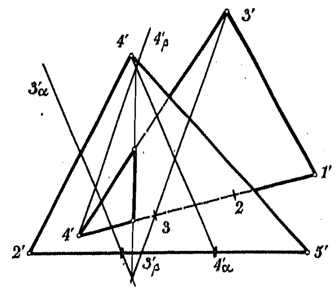


Rys. 34.

ZADANIE I. *Znaleźć przecięcie dwu trójkątów* (rys. 35).

Znajdujemy najpierw warstwice płaszczyzn, na których leżą trójkąty (patrz § 5, zadanie III). Następnie wykreślamy krawędź obu płaszczyzn, łącząc ze sobą punkty przecięcia warstwic o tych samych cechach. Oczywiście uwzględniamy tylko tę część krawędzi, która leży na obu trójkątach.

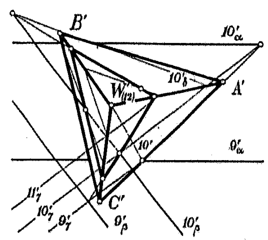
Uwaga. Na rys. 35 zaznaczono widoczne i niewidoczne odcinki, uważając z dwóch punktów posiadających wspólny rzut ten za widoczny, który ma większą cechę. Tak np. punkt przecięcia rzutów boków 41 i 45 jest rzutem dwóch punktów: jednego na 41 i drugiego na 45. Ponieważ cecha pierwszego jest mniejsza, więc jest on niewidoczny; część zatem boku 41 od tego punktu do punktu przebicia drugiego trójkąta (tzn. do przecięcia z krawędzią) jako niewidoczną, wykreślamy linią przerywaną. Pozostałe części boku 41 są widoczne. Podobnie rozstrzygamy sprawę widoczności boku 34.



Rys. 35.

ZADANIE II. *Znaleźć przecięcie ścian ostrosłupa płaszczyzną.*

Daną płaszczyzną β musimy przeciąć wszystkie ściany ostrosłupa. W tym celu powinniśmy wyznaczyć warstwice ścian. Jeśli podstawa leży na rzutni, to warstwice ścian będą równoległe do boków podstawy; jeśli podstawa znajduje się na pewnej płaszczyźnie α określonej warstwicami (rys. 36), to warstwice ścian znajdujemy jak na rys. 30.



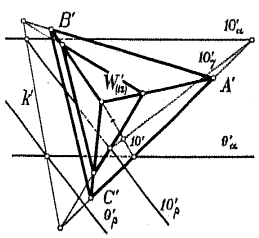
Rys. 36.

Teraz możemy znaleźć przekrój ostrosłupa przecinając płaszczyzną β wszystkie ściany jak na rysunku 33.

Okazuje się, że konstrukcje są bardzo żmudne już dla ostrosłupa trójściennego. Można je znacznie uprościć posługując się następującą prostą uwagą:

Jeśli trzy płaszczyzny α, β i γ mają punkt wspólny, to leży on na wszystkich trzech krawędziach: $a = \beta\gamma$, $b = \gamma\alpha$ *i* $c = \alpha\beta$.

Znajdźmy krawędź przecięcia płaszczyzny podstawy α i płaszczyzny przekroju β oraz punkt, w którym jedna krawędź lub pewna prosta leżąca na pewnej ścianie ostrosłupa przebija β (rys. 37). Za taką prostą można przyjąć warstwicę jednej z bocznych ścian ostrosłupa (na rys. warstwica 10 ściany ACW). Płaszczyznę β przebija ona w punkcie na warstwicy o tej samej cesze.



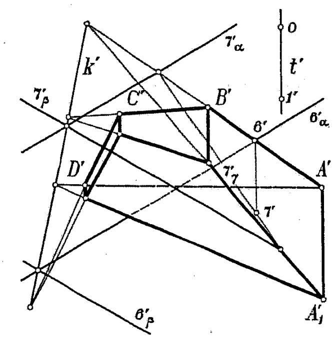
Rys. 37.

Weźmy teraz pod uwagę trzy płaszczyzny: α, β i ścianę ACW. Krawędzią α i β jest k, krawędzią zaś α i ACW jest prosta AC. Szukana trzecia krawędź wspólna dla płaszczyzn β i ACW musi

więc przejść przez punkt przecięcia dwu pierwszych; łącząc go ze znalezionym punktem na warstwicy 10, otrzymujemy prostą A_1C_1. Podobnie bok A_1B_1 przekroju znajdujemy łącząc punkt A z punktem przecięcia AB z k.

W celu łatwiejszego zapamiętania tej konstrukcji nazwijmy *odpowiadającymi sobie* punkty leżące na tej samej krawędzi bocznej i proste leżące na tej samej ścianie ostrosłupa (np. punktowi A odpowiada A_1, punktowi B punkt B_1; podobnie prostej AB odpowiada prosta A_1B_1, prostej AC prosta A_1C_1). Wówczas wypowiedzieć można następującą zasadę:

Odpowiadające sobie proste przecinają się na krawędzi k płaszczyzny podstawy i płaszczyzny przekroju.

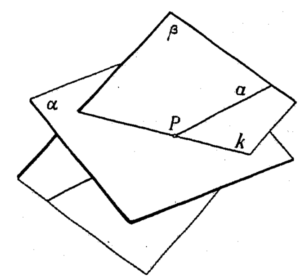


Rys. 38.

ZADANIE III. *Przeciąć graniastosłup płaszczyzną.*

Konstrukcje są podobne jak w zadaniu II.

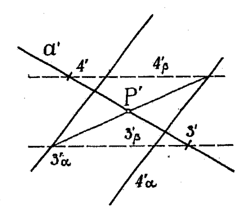
Na rysunku 38 znaleziono warstwicę 7 ściany AB graniastosłupa jak w zadaniu V § 5. Punkt jej przecięcia z 7β jest jednym punktem przekroju, przy pomocy którego znajdujemy cały przekrój posługując się zasadą o odpowiadających sobie prostych. Łącząc go bowiem z punktem przecięcia krawędzi płaszczyzn podstawy i przekroju i prostej AB, otrzymujemy bok A_1B_1. Bok B_1C_1 kreślimy łącząc B_1 z punktem przecięcia k i prostej BC itd.



Rys. 39.

II. Chcąc znaleźć punkt wspólny dla prostej a i płaszczyzny α, pomyślmy sobie płaszczyznę β (rys. 39), przechodzącą przez a. Krawędź k płaszczyzn α i β przecina prostą a w punkcie P, który leży na a i α, a więc jest szukanym punktem przebicia.

Rysunek 40 podaje konstrukcję punktu przebicia w rzutach.



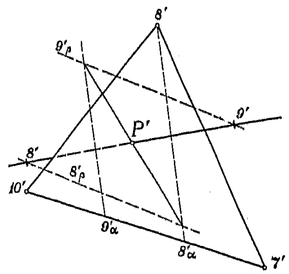
Rys. 40.

Warstwice 3_β i $4_\beta || 3_\beta$ kreślimy przez punkty 3 i 4 prostej a w dowolnym kierunku. Następnie znajdujemy krawędź płaszczyzn α i β, która przecina prostą a w szukanym punkcie P.

ZADANIE IV. *Znaleźć punkt przebicia trójkąta prostą.*

Znajdujemy najpierw warstwicę trójkąta przez podział boku 7 10 na trzy równe części (rys. 41).

Łącząc punkt 8 podziału z wierzchołkiem 8 otrzymujemy warstwicę 8_α płaszczyzny trójkąta. W ten sposób zadanie zostało sprowadzone do zadania rozwiązanego na rys. 40. Biorąc więc warstwice 8_β i 9_β przez punkty 8 i 9 danej prostej, znajdujemy krawędź płaszczyzn α i β i zaznaczamy na przecięciu jej z prostą szukany punkt.



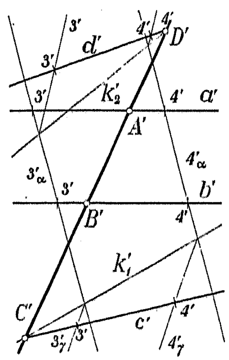
Rys. 41.

Na rysunku wykreślono część prostej jako niewidoczną, kierując się uwagą podaną przy zadaniu I.

ZADANIE V. *Znaleźć prostą l przecinającą cztery dane proste a, b, c i d, gdy $a \| b$.*

Szukana prosta musi oczywiście leżeć w płaszczyźnie α przechodzącej przez a i b. Ponieważ ma przecinać c, więc musi zawierać punkt C, w którym c przebija α; podobnie przechodzi przez punkt D przebicia α prostą d (rys. 42).

Łącząc punkty C i D otrzymamy prostą l; proste a i b przecina ona w punktach A i B. Zadanie nie posiadałoby rozwiązania, gdyby nie istniał jeden choćby z punktów C i D, tzn. w wypadku, gdyby choć jedna z prostych c i d była równoległa do płaszczyzny α oraz w tym wypadku, gdyby prosta CD była równoległa do a i b.



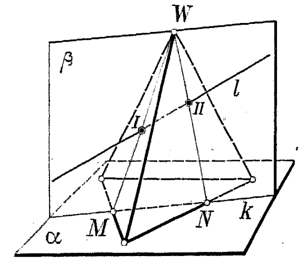
Rys. 42.

ZADANIE VI. *Znaleźć punkty, w których prosta przebija ostrosłup.*

Można by przez prostą przesunąć dowolną płaszczyznę jak w wypadku przebicia płaszczyzny prostą (rys. 33 i 34), następnie przeciąć ostrosłup — otrzyma się wówczas na ogół wielobok o tej samej ilości boków, co podstawa — i uzyskać żądane punkty na przecięciu tego wieloboku daną prostą.

Znacznie jednak prościej będzie, jeśli przeprowadzimy płaszczyznę β przez prostą i wierzchołek ostrosłupa. Taka bowiem płaszczyzna przetnie figurę w trójkącie, którego jednym wierzchołkiem będzie wierzchołek ostrosłupa, a dwa inne znajdować się będą na podstawie.

Aby je znaleźć, musimy płaszczyznę β przeciąć płaszczyzną podstawy (rys. 43); otrzymana krawędź k daje na podstawie wierzchołki M i N trójkąta. Oczywiście jeśli krawędź k nie przetnie podstawy, to prosta l nie przebije ostrosłupa, jeśli zaś k przechodzi przez wierzchołek podstawy, to l przecina odpowiednią krawędź.

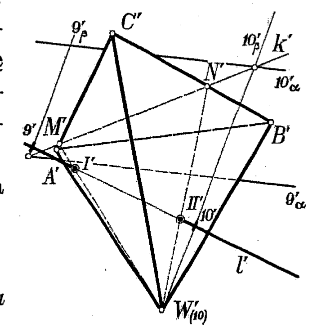


Rys. 43.

Szukane punkty przebicia ostrosłupa prostą l znajdują się na przecięciu trójkąta WMN prostą l.

Sposób wykonania konstrukcji w rzucie podaje rys. 44.

Nakreślono na nim najpierw warstwicę 10_β płaszczyzny β przez połączenie punktu 10 prostej l z wierzchołkiem W, następnie warstwicę 9_β. Punkty przecięcia boków AC i BC krawędzią k płaszczyzn α i β połączono z W i uzyskano w końcu punkty przebicia I i II.



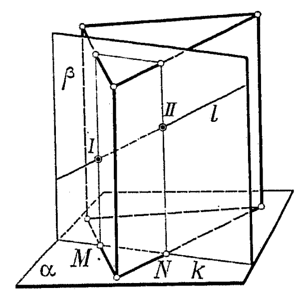
Rys. 44.

Widać, że podana konstrukcja nie jest zależna od ilości ścian ostrosłupa.

ZADANIE VII. *Wyznaczyć punkty przebicia graniastosłupa prostą.*

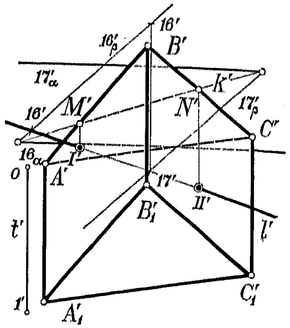
Zadanie rozwiązujemy w sposób analogiczny, przesuwając przez prostą l płaszczyznę równoległą do krawędzi graniastosłupa (rys. 45).

Oczywiście taka płaszczyzna przecina graniastosłup w równoległoboku, którego dwa wierzchołki M i N znajdują się na krawędzi k płaszczyzny podstawy i płaszczyzny przekroju. Proste równoległe do bocznych krawędzi graniastosłupa i przechodzące przez M i N wyznaczają na l szukane punkty I i II.



Rys. 45.

W celu wyznaczenia płaszczyzny β wykreślono na rys. 46 przez punkt o cesze 17 na l prostą równoległą do prostej t, określającej kierunek bocznych krawędzi graniastosłupa; punkt 16′ znajduje się na niej w odległości modułu prostej t od punktu $17'$. Łącząc go z punktem $16'$ na l', otrzymano rzut warstwicy 16_β. Następnie nakreślono kolejno $17'_\beta$, k', M' i N' oraz I′ II′ na równoległych do krawędzi graniastosłupa przez M' i N'.



Rys. 46.

ZADANIE VIII. *Znaleźć linię przenikania dwu ostrosłupów.*

Jest to miejsce geometryczne punktów należących do ścian obu brył. Ponieważ ściany są częściami płaszczyzn (trójkątami), więc linia przenikania składa się z pewnej ilości odcinków. W przypadku ogólnym odcinki te tworzą jeden lub dwa wielokąty przestrzenne.

Aby je wykreślić, można by pójść dwiema drogami: albo znaleźć boki wielokąta przez przecięcie każdej ściany jednej figury z każdą ścianą drugiej, albo znaleźć wierzchołki wielokąta przenikania, wyznaczając punkty, w których krawędzie jednej figury przebijają ściany drugiej.

Okazuje się, że druga droga jest krótsza, pownieważ można w niej wprowadzić pewne uproszczenia.

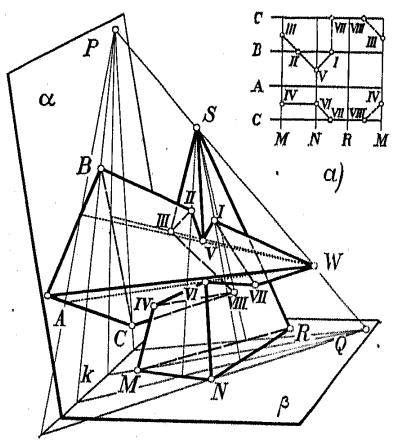
Wyjaśnimy to na rysunku 47.

Aby znaleźć punkty, w których krawędzie AW, BW i CW przebijają ściany ostrosłupa (S), należy — według konstrukcji podanej w zadaniu VI — przeprowadzić płaszczyzny AWS, BWS i CWS.

W celu wyznaczenia punktów, w których krawędzie MS, NS i RS ostrosłupa (S) przebijają ściany ostrosłupa (W), będziemy prowadzili płaszczyzny przez wierzchołek W oraz MS, NS i RS.

Wszystkie więc pomocnicze płaszczyzny (będzie ich $n+m$, jeśli podstawa jednego ostrosłupa ma m, a drugiego n wierzchołków) przechodzą przez wierzchołki W i S ostrosłupów, a zatem przez prostą WS.

Ponieważ każdą z nich należy przecinać bądź podstawą jednego ostrosłupa, bądź podstawą drugiego, celowe więc jest znalezienie punktów P i Q, w których WS przebija płaszczyzny podstaw.



Rys. 47.

Narysujmy jeszcze krawędź k płaszczyzn α i β.

Chcąc znaleźć punkty, w których np. BW przebija ostrosłup (S), powinniśmy podstawę ostrosłupa, tzn. płaszczyznę β, przeciąć płaszczyzną WBS. Oczywiście krawędź musi przejść przez punkt Q; drugi punkt znajdziemy przecinając proste k i PB.

Dalej konstrukcja przebiega jak w zadaniu VI:

Punkty przecięcia znalezionej prostej z podstawą ostrosłupa (S) łączymy z wierzchołkiem, otrzymując na przecięciu z BW szukane punkty przebicia.

Jeśli chcemy znaleźć punkty przebicia krawędzi ostrosłupa (S), np. SM, ze ścianami ostrosłupa (W), to zmienia się tylko porządek; najpierw łączymy Q z M i przecinamy z k, a następnie uzyskany punkt łączymy z P itd.

Gdy już znajdziemy w ten sposób wszystkie wierzchołki wieloboku przenikania, trzeba się będzie zastanowić nad tym, które z nich są końcami jednego i tego samego boku. Ponieważ bokiem linii przenikania jest krawędź dwu ścian różnych figur, jest więc oczywiste, że powinniśmy łączyć ze sobą te wierzchołki, które należą do jednej ściany ostrosłupa (W) i jednej ściany ostrosłupa (S). W tym celu trzeba dla każdego znalezionego wierzchołka zanotować, na których ścianach on się znajduje.

Dla przejrzystości będziemy notować to na schemacie, w którym krawędzie boczne jednego ostrosłupa będą reprezentowane przez linie poziome, krawędzie zaś drugiego przez pionowe (rys. 47 a). Ściany będą na schemacie przedstawione pasami płaszczyzny, ograniczonymi przez odpowiednie krawędzie. Aby każda ściana miała reprezentanta na schemacie, należy jedną krawędź zanotować dwa razy: na początku i na końcu schematu.

Każdy punkt linii przenikania zapisujemy na odpowiedniej krawędzi jednego i odpowiedniej ścianie drugiego ostrosłupa. Np. punkt I należy zanotować na krawędzi (B) i ścianie (NR) (p. rys. 47), tzn. między liniami pionowymi (N) i (R), punkt II na (B) i (MN), punkt III (dwukrotnie) na krawędzi (M) i ścianie (BC) itd.

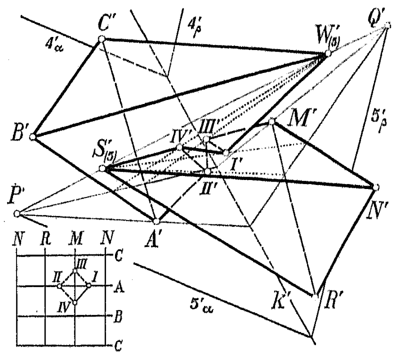
Chcąc jak najbardziej zmechanizować metodę łączymy wierzchołki linii przenikania najpierw na schemacie, gdyż tu postulat, iż należy łączyć tylko takie dwa wierzchołki, które leżą na jednej ścianie ostrosłupa (W) i jednej ścianie ostrosłupa (S), tłumaczy się jako warunek łączenia tych par punktów, które należą do jednego pasa poziomego i jednego pionowego, tzn. znajdują się na brzegu pewnego kwadratu schematu.

Po omówieniu metody przystępujemy do wykreślenia przenikania w rzutach (rys. 48).

Dla uproszczenia rysunku umieszczono wierzchołki W i S na tej samej wysokości 5. Punkty P i Q znajdować się będą wówczas na warstwicach 5_α i 5_β. Krawędź k znajdujemy przecinając warstwice 4_α i 4_β oraz 5_α i 5_β.

Mając P, Q i k, prowadzimy dalsze konstrukcje metodą wyżej wyjaśnioną.

A więc: łączymy punkt P' z A', przecinamy krawędź k i uzyskany punkt łączymy z Q; dwa punkty przecięcia z podstawą NRM łączymy z wierzchołkiem S, otrzymując na krawędzi WA wierzchołki I i II linii przenikania. Natychmiast należy na schemacie zanotować punkt I na linii (A) między prostymi (N) i (M) oraz punkt II na (A) między prostymi (M) i (R) itd.



Rys. 48.

Jeśli chcemy na rysunku odróżnić widoczne krawędzie przenikania od niewidocznych, to dobrze jest już na schemacie zaznaczyć np. znakiem — które ściany są niewidoczne w widoku z góry; oczywiście każdy odcinek leżący w pasie oznaczonym znakiem — jest niewidoczny.

ZADANIE IX. *Znaleźć linię przenikania ostrosłupa i graniastosłupa.*

Metoda pozostaje ta sama, co przy dwu ostrosłupach.

Jedynie zamiast prostej łączącej wierzchołki będziemy mieli prostą w równoległą do bocznych krawędzi graniastosłupa, a przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa. Graniastosłup powstaje bowiem z ostrosłupa, gdy wierzchołek oddala się nieskończenie w kierunku nierównoległym do płaszczyzny podstawy.

Jeśli ostrosłup przebijamy krawędzią p graniastosłupa, to — jak w zadaniu VI — należy przesunąć płaszczyznę pomocniczą przez tę krawędź i przez wierzchołek ostrosłupa, zatem przez p i prostą w; jeżeli zaś krawędzią ostrosłupa przebijamy graniastosłup, to — jak w zadaniu VII — płaszczyzna pomocnicza przechodzi przez przyjętą krawędź i jest równoległa do graniastosłupa, a więc znowu przechodzi przez w. Widzimy zatem, że prosta w gra taką samą rolę jak prosta WS w zadaniu VIII.

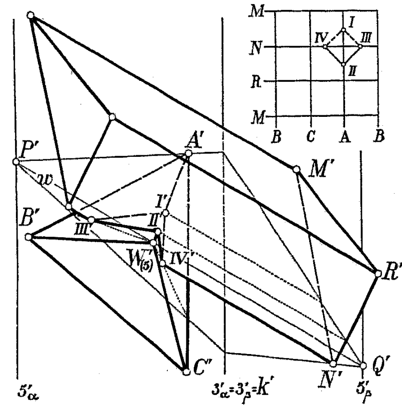
Na rysunku 49 krawędzie boczne graniastosłupa są poziome. Prosta w jest więc też pozioma; punkty P i Q przebicia płaszczyzn α i β znajdują się na warstwicach 5_α i 5_β.

Dla wyznaczenia punktów I i II, w których krawędź WA przebija graniastosłup, przeprowadzono płaszczyznę przez WA równolegle do krawędzi graniastosłupa, tzn. przez w.

Płaszczyzna ta przecina płaszczyznę α wzdłuż prostej PA, a płaszczyznę β wzdłuż prostej łączącej punkt Q z punktem przecięcia PA i k $(= 3'_\alpha = 3'_\beta)$.

W ten sposób znajdujemy na podstawie graniastosłupa (na NM i NR) dwa punkty, z których proste wyprowadzone równolegle do krawędzi graniastosłupa przecinają AW w punktach I i II.

W podobny sposób znaleziono punkty III i IV. Ponieważ jedynie ściana NM jest niewidoczna, więc niewidoczne są tylko boki leżące na niej, tj. I—IV i I—III.



Rys. 49.

ZADANIE X. *Znaleźć linię przenikania dwu graniastosłupów.*

Również i w tym wypadku będziemy starali się wyznaczyć punkty, w których krawędzie jednej figury przebijają ściany drugiej.

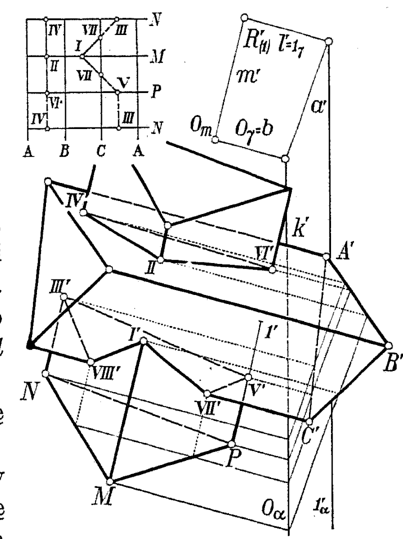
Z podanej konstrukcji punktów przebicia graniastosłupa prostą wynika, że należy prowadzić płaszczyzny pomocnicze przez krawędzie jednej figury równolegle do drugiej. Wszystkie zatem płaszczyzny pomocnicze będą do siebie równoległe, gdy w poprzednich wypadkach przechodziły one przez prostą.

Oczywiście przecięcia tych płaszczyzn płaszczyzną jednej podstawy są do siebie równoległe; tak samo przecięcia ich płaszczyzną drugiej podstawy są do siebie równoległe.

Aby znaleźć kierunki tych krawędzi, wybieramy dowolny punkt R (np. o cesze 1) i wykreślamy proste l i m, odpowiednio równoległe do krawędzi jednego i drugiego graniastosłupa (rys. 50). Ponieważ na rys. 50 graniastosłup ABC jest równoległy do rzutni, więc l jest równoległe do π.

Proste l i m określają płaszczyznę równoległą do obu graniastosłupów.

Znajdźmy krawędzie a i b płaszczyzny γ z płaszczyznami α i β (za płaszczyznę β przyjęto rzutnię, wobec czego prosta b jest to warstwica O_γ płaszczyzny γ).



Rys. 50.

Aby znaleźć punkty, w których krawędź (M) przebija graniastosłup (ABC), bierzemy płaszczyznę pomocniczą równoległą do graniastosłupa (ABC), tzn. równoległą do γ. Przecina ona płaszczyznę β (na rys. 50 — rzutnię) wzdłuż prostej równoległej do b i przechodzącej przez M.

Z punktu przecięcia jej z krawędzią k obu płaszczyzn (tu $k = O_\gamma$) kreślimy prostą równoległą do a.

Przecina ona podstawę ABC w dwu punktach, z których proste równoległe do krawędzi wyznaczają na prostej (M) szukane punkty I i II.

Tym samym sposobem znaleziono punkty III—VIII.

Porządek łączenia punktów i sprawa widoczności zostały rozstrzygnięte za pomocą schematu, tak jak w zadaniach VIII i IX.

ĆWICZENIA.

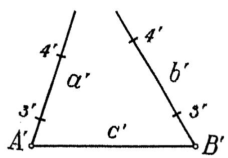
1. Dany jest punkt P oraz proste skośne a i b; znaleźć prostą l przechodzącą przez P i przecinającą a i b.

Wsk.: l będzie krawędzią płaszczyzn (Pa) i (Pb).

2. Znaleźć prostą l przecinającą proste skośne a i b i równoległą do prostej c.

3. Znaleźć prostą przecinającą trzy proste a, b i c, gdy a jest równoległe do b oraz gdy a przecina b.

4. Dane są dwie proste skośne a i b (rys. 51). Znaleźć punkty o cechach 4 i 5 na prostej c łączącej punkt A prostej a z punktem B prostej b.



Rys. 51.

Wsk.: Połączyć B i 4 na a prostą d i wyznaczyć warstwice płaszczyzny (bd). W ten sposób będzie *wycechowana* prosta d. Następnie znaleźć warstwice płaszczyzny (ad), na której już leży prosta c.

5. *Wycechować prostą* (tzn. znaleźć cechy dwu jej punktów) łączącą punkt A (o cesze niecałkowitej) prostej a z punktem B (o cesze niecałkowitej) płaszczyzny β.

Wsk.: Ćwiczenie sprowadza się do ćwiczenia 4 przez wzięcie prostej b leżącej w β i przechodzącej przez B. Można również znaleźć punkt C przebicia β prostą a i nakreślić warstwice płaszczyzny (ABC); jest to oczywiście szczególny przypadek poprzedniego rozwiązania, gdyż zamiast dowolnej prostej b na β bierzemy prostą BC przecinającą a.

6. Wycechować prostą c przechodzącą przez punkt A płaszczyzny α i przez punkt B płaszczyzny β.

Wsk.: Jeśli α i β nie są do siebie równoległe, to nakreślić warstwice płaszczyzny (ABC), gdzie C jest punktem wziętym na krawędzi płaszczyzn α i β. W przeciwnym razie obrać dwie proste równoległe a i b przechodzące przez A i B i leżące odpowiednio na α i β.

7. Znaleźć przecięcie dwu trójkątów, wyznaczając punkty przebicia dwu boków jednego trójkąta z płaszczyzną drugiego.

8. Znaleźć przecięcie ostrosłupa trójkątem.

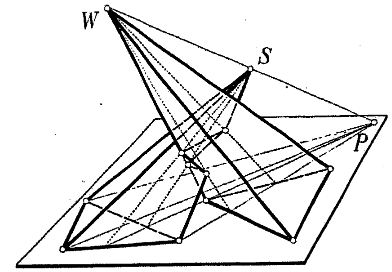
9. Znaleźć przecięcie graniastosłupa trójkątem.

Wsk.: W ćwiczeniach 8 i 9 przeciąć figurę płaszczyzną, na której leży trójkąt, a następnie uwzględnić część wieloboku przecięcia, wspólną z trójkątem.

10. Nakreślić linie przenikania: a) dwu ostrosłupów, b) ostrosłupa z graniastosłupem, c) dwu graniastosłupów, przyjmując za podstawy czworoboki.

11. Nakreślić linię przenikania dwu ostrosłupów, których podstawy znajdują się na wspólnej płaszczyźnie.

Wsk.: W tym wypadku konstrukcja znacznie się upraszcza (rys. 52): prostą łączącą wierzchołki przebijamy wspólną płaszczyznę podstaw i uzyskany punkt P łączymy z wierzchołkami podstaw; dalszy przebieg konstrukcji nie odbiega od przypadku ogólnego.



Rys. 52.

12. Wykonać ćwiczenie 11, gdy podstawy są na rzutni, a wierzchołki mają wspólną cechę.

Wsk.: Wtedy linie konstrukcyjne, wychodzące z punktu P (rys. 52), zamienią się na proste równoległe do WS.

13. Znaleźć przenikanie: a) ostrosłupa z graniastosłupem, b) dwu graniastosłupów, gdy ich podstawy leżą na wspólnej płaszczyźnie.

14. Znaleźć przenikanie dwu ostrosłupów, gdy podstawa jednego znajduje się na rzutni, a podstawa drugiego na płaszczyźnie poziomej, na wysokości np. 2.

Wsk.: Sprowadzić ćwiczenie do poprzedniego, przecinając jeden ostrosłup płaszczyzną podstawy drugiego.

§ 7. Rzuty prostych prostopadłych

Przypomnijmy definicję kąta między prostymi skośnymi:

Miarą kąta między prostymi skośnymi a i b jest kąt między prostymi c i d równoległymi do nich i przechodzącymi przez dowolny punkt.

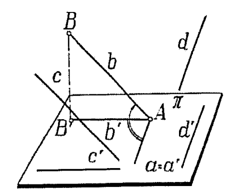
Np. każde dwie skośne krawędzie sześcianu są do siebie nachylone pod kątem 90° (czyli: są do siebie prostopadłe), gdyż przesuwając równolegle jedną krawędź do przecięcia z drugą otrzymujemy kąt 90°.

Tak więc twierdzenie, na którym często będziemy się opierać, a które orzeka, że:

jeśli prosta p jest prostopadła do dwu prostych a i b przecinających ją w jednym punkcie, to jest prostopadła do każdej prostej leżącej w płaszczyźnie (ab) i przechodzącej przez wspólny punkt,

można rozszerzyć na proste skośne w następujący sposób:

1. *Jeśli prosta p jest prostopadła do dwu przecinających się prostych a i b, to jest prostopadła do każdej prostej płaszczyzny (ab).*



Rys. 53.

Niech prosta a leży na rzutni, a prosta b niech przecina a w A prostopadle do niej (rys. 53). Udowodnimy, że:

2. *Rzut prostokątny prostej b jest prostopadły do a* (oczywiście pod warunkiem, że prosta b nie jest prostopadła do π).

W tym celu wykonajmy rzut prostokątny punktu B ($B \neq A$) prostej b. Prosta AB' jest rzutem prostej b. Zauważmy, że prosta a jest prostopadła do prostej BB', gdyż BB' jest prostopadłe do π; ponieważ poza tym prosta a jest z założenia prostopadła do prostej b, więc prosta a jest prostopadła do każdej prostej leżącej w płaszczyźnie ABB', a zatem też do prostej AB', co należało wykazać.

Weźmy teraz dowolne proste c i d odpowiednio równoległe do b i a; ponieważ $c' \parallel b'$ i $d' \parallel a'$, więc $c' \parallel d'$. Mamy zatem następujące twierdzenie:

3. *Jeśli proste c i d są do siebie prostopadłe oraz co najmniej jedna z nich jest równoległa do rzutni, to ich rzuty prostokątne są do siebie prostopadłe.*

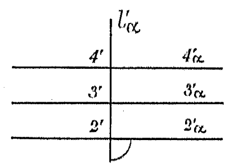
W § 8 wykażemy, że jeśli żadna z prostych prostopadłych do siebie nie jest równoległa do rzutni, to ich rzuty nie są do siebie prostopadłe. Np. rzut kwadratu jest prostokątem, jeśli jedna para boków jest równoległa do rzutni.

Definicja. *Linią spadu* płaszczyzny α nazywamy każdą prostą l leżącą w płaszczyźnie α i prostopadłą do warstwic.

Ponieważ warstwice są równoległe do rzutni, więc mamy stąd:

Wniosek I. *Rzut linii spadu płaszczyzny jest prostopadły do rzutów warstwic* (rys. 54).

Ponieważ odcinki $2'\ 3'$ i $3'\ 4'$ prostej l' są równe modułowi płaszczyzny α (§ 5), więc widzimy, że



Rys. 54.

Wniosek II. *Moduł płaszczyzny jest równy modułowi jej linii spadu.*

Weźmy pod uwagę prostą p prostopadłą do płaszczyzny α; p jest więc też prostopadłą do warstwic płaszczyzny α. Mamy zatem

Wniosek III. *Rzut prostej prostopadłej do płaszczyzny jest prostopadły do rzutów warstwic płaszczyzny.*

Pokrywa się więc z rzutem pewnej linii spadu.

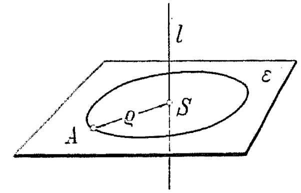
ĆWICZENIA.

1. Jaką figurą będzie rzut kwadratu, gdy jedna przekątna jest równoległa do rzutni?
2. Jaką figurą będzie rzut sześcianu, gdy trzy wierzchołki będące końcami krawędzi o wspólnym wierzchołku mają równe cechy?

§ 8. Obroty i kłady

Wiele konstrukcyj w geometrii wykreślnej opiera się na obrocie dookoła osi. Rozpatrzmy je najpierw dla obrotu punktu.

Punkt A, obracając się dookoła prostej l, porusza się po okręgu (rys. 55), który znajduje się w płaszczyźnie ε prostopadłej do osi obrotu. Środkiem S okręgu jest punkt przebicia ε prostą l, a promieniem — odległość A od S.



Rys. 55.

Przez *obrót figury* geometrycznej rozumie się obrót wszystkich punktów figury o ten sam kąt, oczywiście z tym samym zwrotem.

ZADANIE I. *Obrócić punkt dokoła prostej prostopadłej do rzutni o kąt φ.*

Rzut l' jest punktem; ponieważ płaszczyzna ε jest w tym wypadku równoległa do rzutni, więc rzutem okręgu będzie okrąg o tym samym promieniu (rys. 56) i o środku w punkcie l'.

Oczywiście środek obrotu S, punkt A i punkt B mają wspólną cechę.

ZADANIE II. *Obrócić punkt A dokoła prostej l leżącej na rzutni w wypadku, gdy rzut A' znajduje się na l'* (rys. 57).

Płaszczyzna ε jest tu prostopadła do rzutni[1] i wszystkie jej warstwice mają rzuty na ε'. Na podstawie § 7, tw. 2, jest $\varepsilon' \perp l$. Środek obrotu znajduje się na l w A'. Jeżeli więc wykonamy obrót o 90°, to punkt znajdzie się na rzutni (i na ε) w odległości od S równej cesze punktu A.

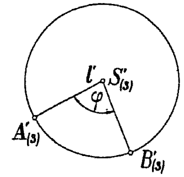
Obrócony punkt A nazywać będziemy *kładem punktu A*.

Jeżeliby prosta l była poziomą na pewnej wysokości, to zadanie wykonuje się tak samo, przy czym promieniem obrotu byłby odcinek długości równej różnicy cech A i l.

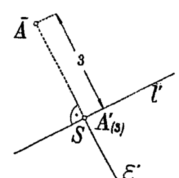
ZADANIE III. *Znaleźć długość odcinka.*

Gdy cechy końców są równe, to rzut odcinka jest równy samemu odcinkowi.

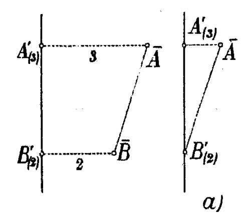
Gdy zaś cechy końców są różne, to weźmy pod uwagę płaszczyznę α prostopadłą do rzutni i przechodzącą przez odcinek (rys. 58). Przymując warstwicę



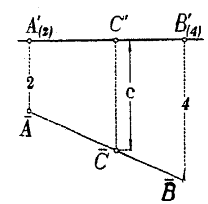
Rys. 56.



Rys. 57.



Rys. 58.



Rys. 59.

[1] Wynika to z następującego twierdzenia: *jeśli prosta* (l) *jest prostopadła do płaszczyzny* (ε), *to każda płaszczyzna* (π) *przechodząca przez nią jest prostopadła do tej płaszczyzny* (ε).

zerową tej płaszczyzny za oś obrotu, wykonajmy jak w zadaniu II kłady $\bar{A}$ i $\bar{B}$ punktów A i B. Oczywiście idzie o obroty o tym samym zwrocie, a więc $\bar{A}$ i $\bar{B}$ znajdą się po tej samej stronie rzutu $A'B'$, gdy cechy punktów A i B są tego samego znaku, a po przeciwnych, gdy są różnych znaków. Odcinek $\bar{A}\bar{B}$, czyli tzw. *kład odcinka*, będzie oczywiście równy odcinkowi AB.

Zauważmy, że mamy równocześnie miarę kąta między prostą AB a rzutnią; jest to bowiem według definicji kąt między prostą AB a jej rzutem prostokątnym $A'B'$ czyli w kładzie: między $\bar{A}\bar{B}$ a $A'B'$.

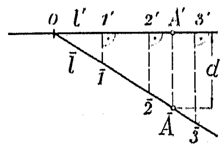
Jeślibyśmy za oś obrotu wzięli np. warstwicę 2_α (rys. 58 a), to byłoby $A'\bar{A} = 1$ i $B'\bar{B} = 0$; jeśli zaś warstwicę $2{,}5_\alpha$, to $\bar{A}$ i $\bar{B}$ leżałyby po przeciwnych stronach rzutu w odległości połowy jednostki.

ZADANIE IV. *Znaleźć cechę c punktu C odcinka AB* (rys. 59).

Wykonajmy kład odcinka AB. Kład $\bar{C}$ punktu C będzie się oczywiście znajdował na odcinku $\bar{A}\bar{B}$, przy czym $C'\bar{C} \perp A'B'$.

Cechą punktu C jest długość odcinka $c = C'\bar{C}$.

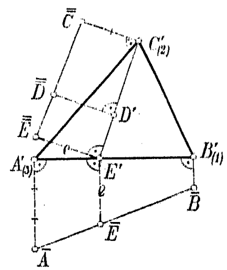
ZADANIE V. *Znaleźć na prostej l punkt A, którego cechą jest dana liczba d.*



Rys. 60.

Wykonujemy kład $\bar{l}$ prostej l, kreśląc kłady $\bar{1}$ i $\bar{2}$ punktów 1 i 2 (rys. 60). Następnie znajdujemy na $\bar{l}$ punkt $\bar{A}$, którego odległość od l' równa jest d. Kreśląc z $\bar{A}$ prostą prostopadłą do l', otrzymujemy na przecięciu z l' rzut A' szukanego punktu.

ZADANIE VI. *Znaleźć cechę punktu D trójkąta ABC* (rys. 61).



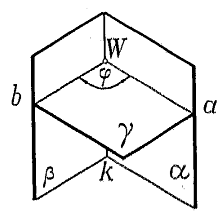
Rys. 61.

Nakreślmy linię CD i weźmy pod uwagę jej punkt wspólny E z bokiem AB.

Cechę punktu E znajdujemy kreśląc kład boku AB. Teraz możemy już wykreślić kład $\bar{E}\bar{C}$ odcinka EC ($E'\bar{\bar{E}} = E'\bar{E}$).

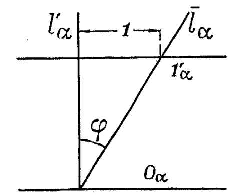
Cechą punktu D będzie odcinek $D'\bar{\bar{D}}$.

ZADANIE VII. *Znaleźć kąt między płaszczyzną α a rzutnią.*



Rys. 62.

Jak wiadomo, kąt między płaszczyznami α i β (rys. 62) mierzy się kątem płaskim φ, którego wierzchołek W znajduje się na krawędzi k, a ramiona a i b są prostopadłe do k i leżą odpowiednio na α i β. Płaszczyzna kąta φ jest więc prostopadła do k.

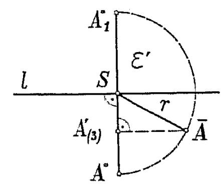


Rys. 63.

W danym razie $\beta = \pi$, krawędź k jest warstwicą O_α, prosta a linią spadu l_α, prosta zaś b rzutem l'_α linii l_α (rys. 63).

Kład kąta między l'_α a l_α otrzymujemy jak w zadaniu III.

ZADANIE VIII. *Obrócić punkt A dokoła prostej leżącej na rzutni o taki kąt, by znalazł się na rzutni* (rys. 64).



Rys. 64.

Płaszczyzną obrotu będzie — jak w zadaniu II — płaszczyzna ε, a środkiem obrotu — punkt S na l i ε.

Idzie o punkt A° (lub A_1°), w którym okrąg o środku S i promieniu AS przecina rzutnię.

Wyobraźmy sobie w tym celu kład płaszczyzny ε; A znajduje się w $\bar{A}$, S nie zmieni położenia.

Oczywiście kład okręgu obrotu przecina warstwicę O_ε w szukanym punkcie A° (lub A_1°).

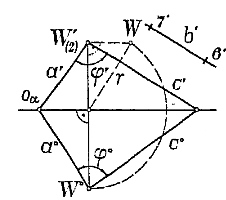
Punkt A° (A_1°) nazywać będziemy również *kładem punktu A*.

Będziemy stale przez $\bar{A}$ oznaczać kład, który jest wynikiem obrotu o $90°$, a przez A°, gdy kąt obrotu jest różny od $90°$.

Należy podkreślić, że celem zadania VIII jest kład A° (lub A_1°). Kład $\bar{A}$ gra tu rolę pomocniczą (dla wyznaczenia promienia obrotu SA).

ZADANIE IX. *Znaleźć kąt między prostymi a i b.*

Jeśli proste a i b są skośne, to (§ 7, definicja kąta między prostymi skośnymi) przez pewien punkt W, np. punkt o cesze 2 na a, prowadzimy prostą c równoległą do b i znajdujemy kąt φ między a i c. W tym celu obracamy płaszczyznę kąta dokoła jakiejś warstwicy, np. O_α (rys 65). Aby nakreślić kłady a° i c°, wystarczy znaleźć kład W° wierzchołka. Po wyznaczeniu W° (jak w zadaniu VIII) łączymy go z punktami zerowymi prostych a i c; te bowiem, jako leżące na osi obrotu, nie zmienią położenia.



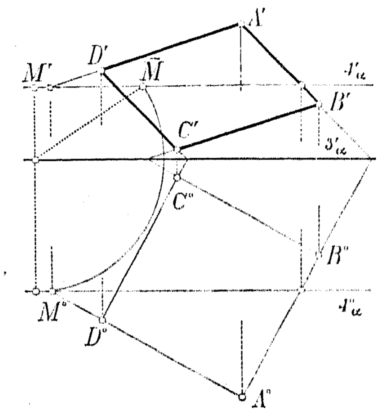
Rys. 65.

Uwaga. Posługując się rysunkiem 65 można udowodnić, że *jeśli proste l i m są do siebie prostopadłe i żadna z nich nie jest równoległa do rzutni, to rzuty l' i m' nie mogą być do siebie prostopadłe.*

Niech bowiem wierzchołek W kąta ma np. cechę 1. Weźmy pod uwagę na l i m punkty O_l i O_m i kład kąta $\sphericalangle (O_l W O_m)$. Widać, że jeśli $\sphericalangle (O_l W' O_m) = 90°$, to $\sphericalangle (O_l W^\circ O_m) < 90°$.

Odwracając konstrukcję rys. 65, można wykreślić rzut dowolnie podanej figury płaskiej. Rozwiążemy np. następujące

ZADANIE X. *Nakreślić rzut kwadratu leżącego w płaszczyźnie* α *(określonej warstwicami), którego jednym bokiem jest dany odcinek* AB.



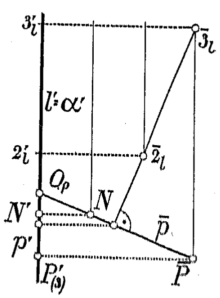
Rys. 66.

Obróćmy płaszczyznę α (rys. 66) dokoła warstwicy 3_α i wykonajmy jej kład na płaszczyznę poziomą o wysokości 3. Dobrze jest najpierw znaleźć kład warstwicy 4_α. Oczywiście do tego celu wystarczy mieć kład jednego punktu M warstwicy, gdyż kład 4_α° będzie równoległy do $3'_\alpha$. Żeby wykreślić kład odcinka AB, bierzemy na prostej AB dwa punkty: jeden na osi obrotu, a drugi na warstwicy 4_α. Kład pierwszego pokrywa się z jego rzutem, kład drugiego znajduje się na warstwicy 4_α° (i oczywiście na prostej prostopadłej do osi obrotu 3_α); łącząc je otrzymamy kład prostej AB. Punkty A i B przenosimy z rzutu do kładu w kierunku prostopadłym do osi obrotu.

Mając bok AB w kładzie znajdujemy wierzchołki C° i D° kwadratu.

Teraz idzie o wykreślenie rzutu boku CD; odwracając poprzednią konstrukcję kładu $A^\circ B^\circ$, przenosimy punkt przecięcia prostej $C^\circ D^\circ$ z 4_α° prostopadle do $3'_\alpha$ na $4'_\alpha$ i łączymy z punktem przecięcia $C^\circ D^\circ$ z osią obrotu. Na tej prostej leżą punkty C' i D'.

ZADANIE XI. *Dana jest prosta* l *i punkt* P, *którego rzut* P' *leży na* l'; *znaleźć punkt* N *o cesze* 1 *na prostej* p *prostopadłej do* l *przechodzącej przez* P *i leżącej z* l *w płaszczyźnie prostopadłej do rzutni.*



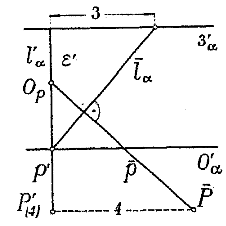
Rys. 67.

Obróćmy płaszczyznę α, której rzut pokrywa się z l', dookoła warstwicy 1_α o 90° i nakreślmy kłady $\bar{l}$ i $\bar{P}$ (rys. 67).

Kład $\bar{p}$ prostej p będzie przechodził przez $\bar{P}$ i będzie prostopadły do $\bar{l}$. Jak w zadaniu V, zaznaczamy najpierw punkt $\bar{N}$ na kładzie $\bar{p}$, a następnie kreślimy przez $\bar{N}$ prostą prostopadłą do l', uzyskując na przecięciu rzut punktu N.

Równocześnie znaleźliśmy kład i rzut punktu przecięcia l z p.

ZADANIE XII. *Dany jest punkt* P *i płaszczyzna* α; *nakreślić i wycechować prostą* p *przechodzącą przez punkt* P *i prostopadłą do płaszczyzny* α.



Rys. 68.

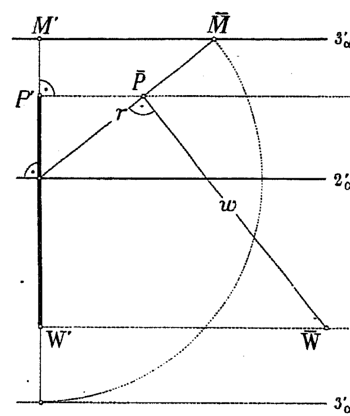
Rzut p' prostej prostopadłej do α jest prostopadły do warstwic (§ 7), a więc pokrywa się z rzutem l'_α pewnej linii spadu płaszczyzny α (rys. 68).

Ponieważ p jest prostą prostopadłą do linii spadu l_α, więc należy jedynie powtórzyć rozwiązanie zadania XI.

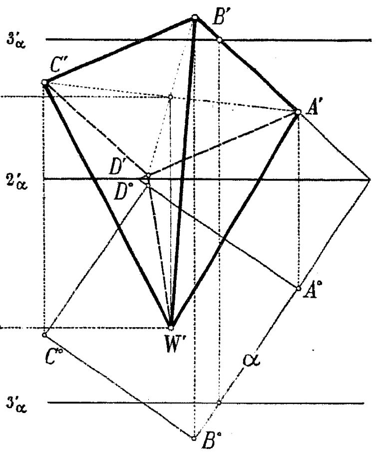
ZADANIE XIII. *Nakreślić rzut ostrosłupa prostego o podstawie kwadratowej, stojącego na danej płaszczyźnie. Wysokość i bok podstawy są dane.*

Podstawę wykreślamy jak w zadaniu X (rys. 70). Ponieważ wysokość ostrosłupa ma być prostopadła do podstawy, więc tak jak w zadaniu XII wykreślamy rzut, a następnie kład prostej prostopadłej do α i przechodzącej przez środek kwadratu. Koniec odmierzonej w kładzie wysokości przenosimy na p' prostopadle do p.

Konstrukcja wysokości podana jest oddzielnie na rys. 69.



Rys. 69.



Rys. 70.

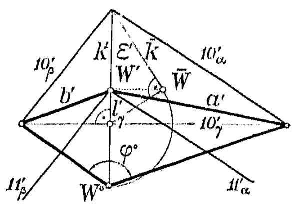
ZADANIE XIV. *Znaleźć kąt między płaszczyznami.*

Jak wynika z definicji kąta między płaszczyznami α i β, należy wykreślić krawędź obu płaszczyzn (rys. 62) i z pewnego jej punktu, np. z punktu W o cesze 11, narysować na α i β proste a i b prostopadłe do niej.

Ponieważ płaszczyzna γ przechodząca przez a i b jest prostopadła do k, więc zaczniemy od wykreślenia jej warstwic (wystarczy 10_γ).

W tym celu zauważmy, że rzut l'_γ linii spadu płaszczyzny γ przechodzącej przez W pokrywa się z k' (rys. 71).

Obróćmy o 90° płaszczyznę, na której leżą l_γ i k, dokoła osi na wysokości 10. Oczywiście musi być $\bar{k} \perp \bar{l}_\gamma$.



Rys. 71.

Przez punkt $10'$ na l'_γ, znajdujący się na przecięciu l'_γ i $\bar{l}_\gamma$, przechodzi $10'_\gamma$ prostopadle do k'.

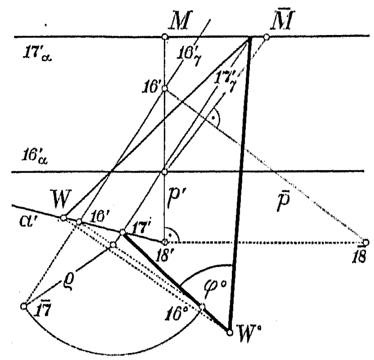
Ramiona a i b kąta otrzymamy przecinając α i β płaszczyzną γ. Aby otrzymać kąt między a i b, należy wykonać kład płaszczyzny γ, na której on leży, obracając ją np. dokoła warstwicy 10_γ.

ZADANIE XV. *Znaleźć kąt między prostą a i płaszczyzną α.*

Należy wykreślić rzut prostokątny prostej a na płaszczyznę α. W tym celu obieramy pewien punkt, np. o cesze 18, na prostej a (rys. 72) i wykreślamy z niego prostą p prostopadłą do α.

Sposób wyznaczenia cechy 16 na p podany był w zadaniu XII.

Weźmy teraz pod uwagę płaszczyznę γ określoną prostymi a i p. Oczywiście jest ona prostopadła do α, gdyż przechodzi przez prostą p. Krawędź jej z α jest drugim ramieniem szukanego kąta.



Rys. 72.

Aby narysować kład kąta między a i k, wykonano obrót dokoła warstwicy 17_α płaszczyzny γ. Ponieważ cechy wierzchołka bezpośrednio nie znamy, więc kreślimy najpierw kład punktu 16 prostej a, następnie przez połączenie z punktem 17 na a — kład a° i w końcu punkt W°; łącząc W° z $17'$ na k' otrzymujemy kład k° drugiego ramienia kąta.

ĆWICZENIA.

1. Dany jest trójkąt ABC. Nakreślić rzut i znaleźć cechę jego środka ciężkości G. Udowodnić, że cecha punktu G jest średnią arytmetyczną cech wierzchołków.

2. Na prostej a dany jest punkt A o cesze niecałkowitej oraz na prostej b punkt B również o cesze niecałkowitej. Znaleźć cechę punktu C obranego na prostej AB.

3. Znaleźć cechę punktu C obranego na odcinku AB, gdy końce tego odcinka leżą na danych płaszczyznach α i β.

4. Znaleźć rzut warstwicy 1_α płaszczyzny α, mając daną warstwicę 0_α oraz kąt między α i π.

5. Wykreślić rzut sześciokąta foremnego położonego w danej płaszczyźnie, mając rzut przekątnej.

6. Wykreślić rzuty wysokości trójkąta $A(1)$, $B(2)$, $C(3)$.

Wsk.: Nakreślić warstwicę np. 1_α i przyjmując ją za oś obrotu, wykonać kład trójkąta. Nakreślone w kładzie wysokości przenieść do rzutu.

7. Nakreślić rzut symetralnej kąta między przecinającymi się prostymi a i b.

8. Znaleźć rzut środka koła opisanego na trójkącie $A(2)B(4)C(5)$.

9. Znaleźć odległość punktu od płaszczyzny.

10. Nakreślić rzut sześcianu, którego jedna ściana znajduje się na danej płaszczyźnie.

11. Dany jest punkt A i prosta p; nakreślić rzuty warstwic płaszczyzny przechodzącej przez A i prostopadłej do p.

Wsk.: Gdy rzut A' leży na rzucie p', to linię spadu l_α płaszczyzny znajduje się jak w zadaniu XI, następnie kreśli się warstwice prostopadłe do $l_\alpha = p'$. Przypadek, gdy A' nie leży na p', można sprowadzić do poprzedniego, kreśląc np. przez punkt A prostą q równoległą do p.

12. Nakreślić warstwice płaszczyzny symetrii odcinka $A(1)B(5)$.

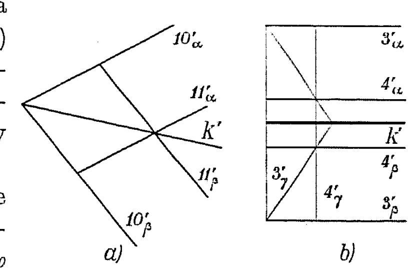
13. Dany jest ostrosłup, którego podstawą jest leżący na rzutni prostokąt o bokach 5 cm i 7 cm, a wierzchołkiem punkt W o cesze 6 na prostej prostopadłej do π α, przechodzącej przez środek podstawy. Znaleźć kąt między: 1° sąsiednimi ścianami bocznymi, 2° ścianami mającymi tylko punkt W wspólny, 3° krawędzią boczną a ścianą (nie przechodzącą przez nią), 4° przekątną podstawy a ścianą.

§ 9. Zastosowania

I. Jeśli dwie płaszczyzny są nachylone pod tym samym kątem do rzutni, a warstwice ich nie są do siebie równoległe, to rzut krawędzi jest dwusieczną kąta między warstwicami (rys. 73 a).

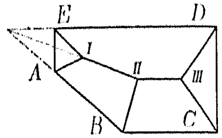
W tym wypadku bowiem moduły płaszczyzn są równe i wobec tego rzut krawędzi jest przekątną rombu utworzonego z rzutów warstwic.

Jeśli warstwice obu płaszczyzn są do siebie równoległe (rys. 73 b), to — jak wynika z konstrukcji krawędzi za pomocą płaszczyzny (patrz rys. 34) o warstwicach prostopadłych do warstwic danych płaszczyzn — rzut krawędzi dzieli na połowy obszar zawarty między warstwicami O_α i O_β.



Rys. 73.

Weźmy pod uwagę na płaszczyźnie rzutów pewien obszar ograniczony wielobokiem (rys. 74) oraz pewien kąt φ mniejszy od 90°. Przez każdy bok przeprowadźmy płaszczyznę nachyloną do rzutni pod kątem φ, tak by punkty o dodatnich cechach znajdowały się nad obszarem.



Rys. 74.

Powstanie bryła ograniczona $n+1$ ścianami, jeśli wielobok był n-bokiem (dach nad blokiem, którego podstawą jest wielobok).

Ponieważ bok wieloboku będzie warstwicą odpowiedniej ściany, więc rzuty krawędzi dzielą na połowy kąty wewnętrzne wieloboku. Oczywiście będą się przecinać nie tylko ściany sąsiednie, ale również i ściany wychodzące z boków niesąsiednich (np. AB i DE).

Krawędziami bryły będą pewne odcinki krawędzi przecięcia płaszczyzn. Aby poprawnie nakreślić krawędzie bryły, dobrze jest najpierw narysować krawędzie wszystkich par ścian (sąsiednich i niesąsiednich) cienkimi liniami, a następnie wychodząc z jakiegoś wierzchołka wieloboku, np. A, nakreślić mocno odpowiednią krawędź aż do przecięcia (I) z pierwszą napotkaną krawędzią. W takim punkcie schodzą się trzy ściany (AB), (AE) i (ED).

Istnieje więc prócz krawędzi AI i EI jeszcze trzecia (szczytowa) przechodząca przez punkt I: mianowicie przecięcie ścian (AB) i (ED); krawędź tę wykreślamy aż do przecięcia (II) z pierwszą napotkaną krawędzią, tzn. wychodzącą z B. W punkcie II schodzą się ściany (AB), (BC) i (DE), musi więc z niego wyjść krawędź przecięcia płaszczyzn (BC) i (ED) itd.

Konstrukcja ta ma zastosowanie w budownictwie.

Jeśli obszar jest ograniczony więcej niż jednym wielobokiem (bloki z podwórzami), to konstrukcja nie ulega żadnej istotnej zmianie.

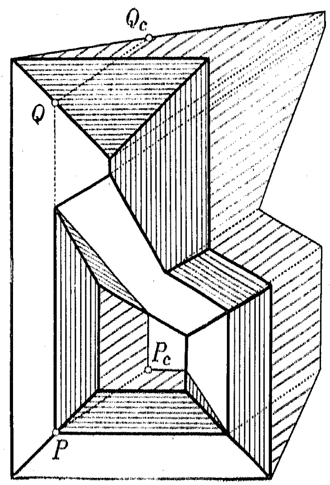
Na rysunku 75 nakreślono krawędzie i dla lepszego przedstawienia figury wykonano cień przy oświetleniu równoległym, przyjmując kierunek światła tak, by cieniem punktu P był dowolnie wybrany punkt P_c.

Przy wyznaczaniu cieni krawędzi kierowano się następującymi zasadami:

(1) cieniem na rzutni krawędzi równoległej do rzutni jest prosta równoległa do niej.

(2) jeśli prosta przebija płaszczyznę, to cień na tę płaszczyznę wychodzi z punktu przebicia.

Dla wyznaczenia cienia jednej z krawędzi wzięto na niej punkt Q na tej samej wysokości co P i odłożono $Q'Q_c = P'P_c$.

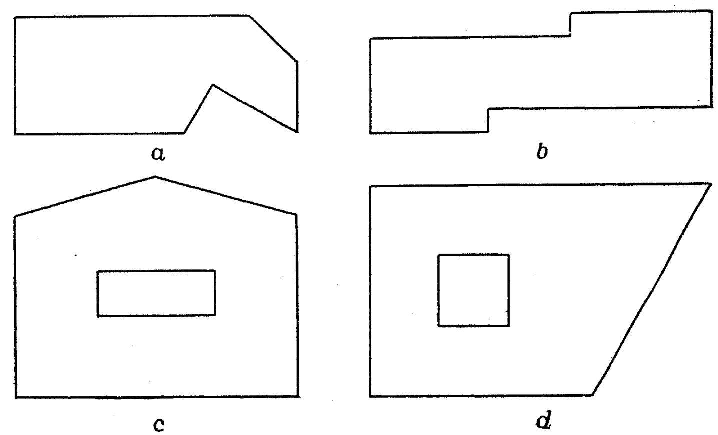


Rys. 75.

ĆWICZENIA.

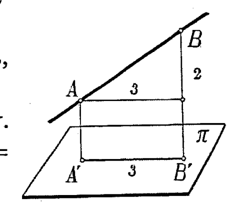
1. Wykreślić krawędzie i narysować cień dachów dla wielokątów podanych na rys. 76.

2. Dla dachu na rys. 76 a przyjąć kąt nachylenia do poziomu równy 45° i nakreślić: 1° kłady ścian, 2° kąty między sąsiednimi ścianami.



Rys. 76.

II. Położenie prostej względem rzutni określa się najczęściej za pomocą tzw. *nachylenia*, czyli *tangensa kąta*, jaki tworzy ona z rzutnią. Tak więc np. nachylenie 2/3 (rys. 77) znaczy, że dwa punkty prostej, których cechy różnią się o 2, mają rzuty odległe o trzy jednostki (moduł prostej wynosi wtedy oczywiście 3/2); nachylenie 1 znaczy, że prosta tworzy z rzutnią kąt 45°.



Rys. 77.

Z definicyj modułu (p. § 2) i nachylenia prostej wynika, że nachylenie jest odwrotnością modułu.

Często nachylenie mnoży się przez 100 i podaje tzw. *procent nachylenia*; np. 4 % oznacza nachylenie $4/100 = 1/25$).

Nachylenie płaszczyzny jest to oczywiście nachylenie jej linii spadu.

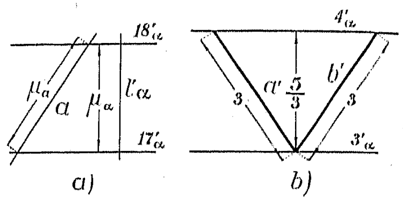
Każda prosta leżąca w płaszczyźnie i nie będąca jej linią spadu posiada moduł większy od modułu płaszczyzny, a zatem nachylenie mniejsze od nachylenia płaszczyzny (rys. 78 a).

ZADANIE I. *Na płaszczyźnie o nachyleniu* 3/5 *nakreślić prostą o nachyleniu* 1/3.

Moduł płaszczyzny wynosi tu 5/3, a moduł prostej 3. Kreślimy więc rzuty

3 – 47502 *E. Otto*

warstwic, np. $4'_\alpha$ i $3'_\alpha$, w odległości 5/3 (rys. 78 b) oraz odcinek o długości trzech jednostek umieszczamy tak, by końce jego znajdowały się na $4'_\alpha$ i $3'_\alpha$. Prosta zawierająca ten odcinek jest rzutem prostej o nachyleniu 1/3. Widać, że przez każdy punkt płaszczyzny przechodzą dwie proste o danym nachyleniu, mniejszym od nachylenia płaszczyzny.

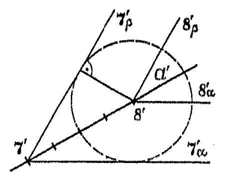


Rys. 78.

ZADANIE II. *Przez daną prostą a o nachyleniu* 1/4 *przeprowadzić płaszczyznę o nachyleniu* 1/2.

Moduł prostej wynosi 4, moduł płaszczyzny 2 (rys. 79). Aby wykreślić warstwice $7'_\alpha$ i $8'_\alpha$ należy zważyć, że: 1° $8'_\alpha$ i $7'_\alpha$ mają być równoległe, 2° mają przechodzić odpowiednio przez $8'$ i $7'$ na l' i 3° odległość między $7'_\alpha$ i $8'_\alpha$ ma wynosić 2.

Warunki te będą spełnione, jeśli z punktu $7'$ na a' wykreślimy styczną do okręgu o środku $8'$ i o promieniu 2, a z punktu $8'$ — prostą do niej równoległą. Gdy moduł prostej jest większy od modułu płaszczyzny, to istnieją dwa rozwiązania; gdy jest równy, to jedno (wtedy a jest linią spadu płaszczyzny α); jeśli moduł prostej jest mniejszy od zadanego modułu płaszczyzny, to nie ma rozwiązania.



Rys. 79.

Łatwo zauważyć, że α jest płaszczyzną styczną do stożka, którego wierzchołkiem jest punkt 8 na l, a podstawą okrąg na wysokości 7.

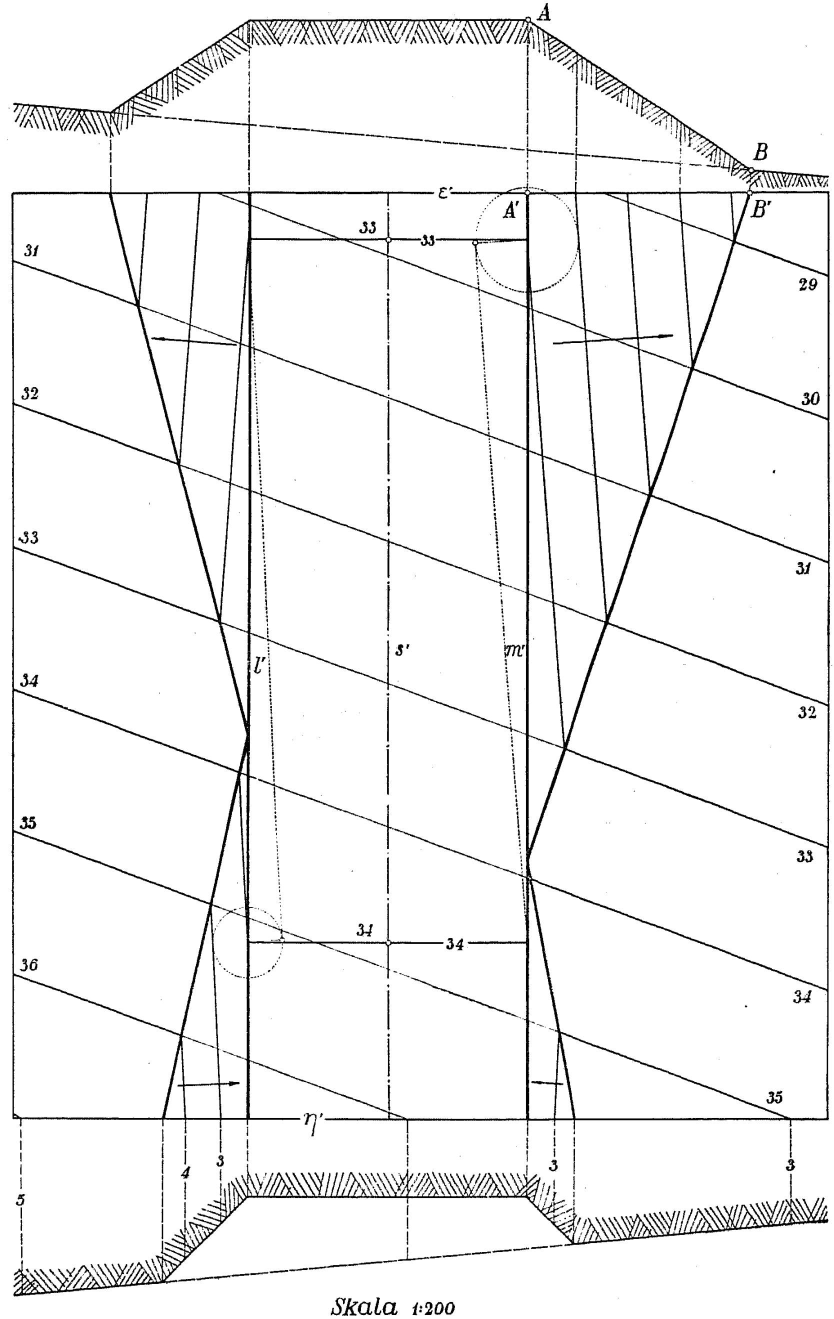
Posługując się tą konstrukcją, możemy rozwiązać następujące zadanie z dziedziny budownictwa drogowego:

Dana jest pewna płaszczyzna — powierzchnia terenu — oraz oś drogi s, której wysokość w określonym punkcie i nachylenie są z góry dane (na rys. 80 przyjęto nachylenie 5%); *narysować drogę wraz z wykopami i nasypami* (rys. 80).

Oś drogi jest linią spadu płaszczyzny drogi (dla uproszczenia zakładamy, że nawierzchnia drogi jest płaszczyzną).

Biorąc szerokość drogi równą 8 m, wykreślamy najpierw krawędzie l i m drogi w odległości 4 m (a więc 2 cm w skali 1: 200) po obu stronach osi drogi, a następnie warstwice płaszczyzny drogi przez dane punkty na osi o cechach 34 i 33. Odległość ich czyli moduł drogi wynosi $100/5 = 20$ m, a więc 10 cm na rysunku).

Przez te krawędzie należy przeprowadzić płaszczyzny opadające w dół, jeśli droga biegnie powyżej terenu, a wznoszące się na zewnątrz w górę, jeśli droga przebiega poniżej terenu. W pierwszym wypadku płaszczyzny nazywamy *skarpami nasypu* i dla nich przyjmujemy nachylenie 2/3 (a więc



Rys. 80.

moduł $3/2 = 1{,}5$), w drugim — *skarpami wykopu*, dla których nachylenie bierze się równe 1 (moduł $= 1$).

Dla wykreślenia warstwic nasypu i wykopu należy więc czterokrotnie powtórzyć zadanie II. Ponieważ w sąsiedztwie punktu 33 na m będziemy mieli nasyp, więc po wykreśleniu okręgu o środku $33'$ na m' i o promieniu 1,5 m (na rysunku 0,75 cm) rysujemy styczną z punktu $34'$ na m' na wewnątrz drogi. Będzie to warstwica skarpy nasypu. Warstwica 33 i następne tej skarpy będą do niej równoległe. Podobnie wykreślamy warstwice nasypu po stronie krawędzi l.

W sąsiedztwie punktu 34 na drodze mamy wykop. Kreślimy więc okrąg o środku $34'$ na l' i rysujemy warstwicę 33 wykopu z punktu $33'$ na l', styczną do niego. Warstwica 34 i dalsze będą do niej równoległe. Wykop po drugiej stronie wyznacza się podobnie.

Po wykreśleniu warstwic skarp przecinamy je z terenem. Oczywiście przecięcia ze skarpami położonymi po jednej stronie drogi schodzą się na krawędzi drogi.

Na rysunku 80 zostały wykonane tzw. *przekroje poprzeczne*, czyli przekroje płaszczyznami ε i η, prostopadłymi do rzutu osi drogi.

Np. płaszczyzna ε przecina cztery płaszczyzny: teren, dwie skarpy nasypu i drogę. Każda z tych krawędzi posiada rzut na ε'.

Jeśli chcemy wykonać kład krawędzi, np. AB, to bierzemy na niej dwa punkty o znanych cechach 32 i 30 i odkładamy na prostopadłych do ε' odcinki długości 4 i 2 (za oś obrotu przyjęto warstwicę 28 płaszczyzny ε).

Podobnie znajdujemy kład drugiej skarpy nasypu, a przez połączenie końców — kłady przekroju drogi i terenu.

Przy obrocie płaszczyzny η za oś obrano warstwicę 32.

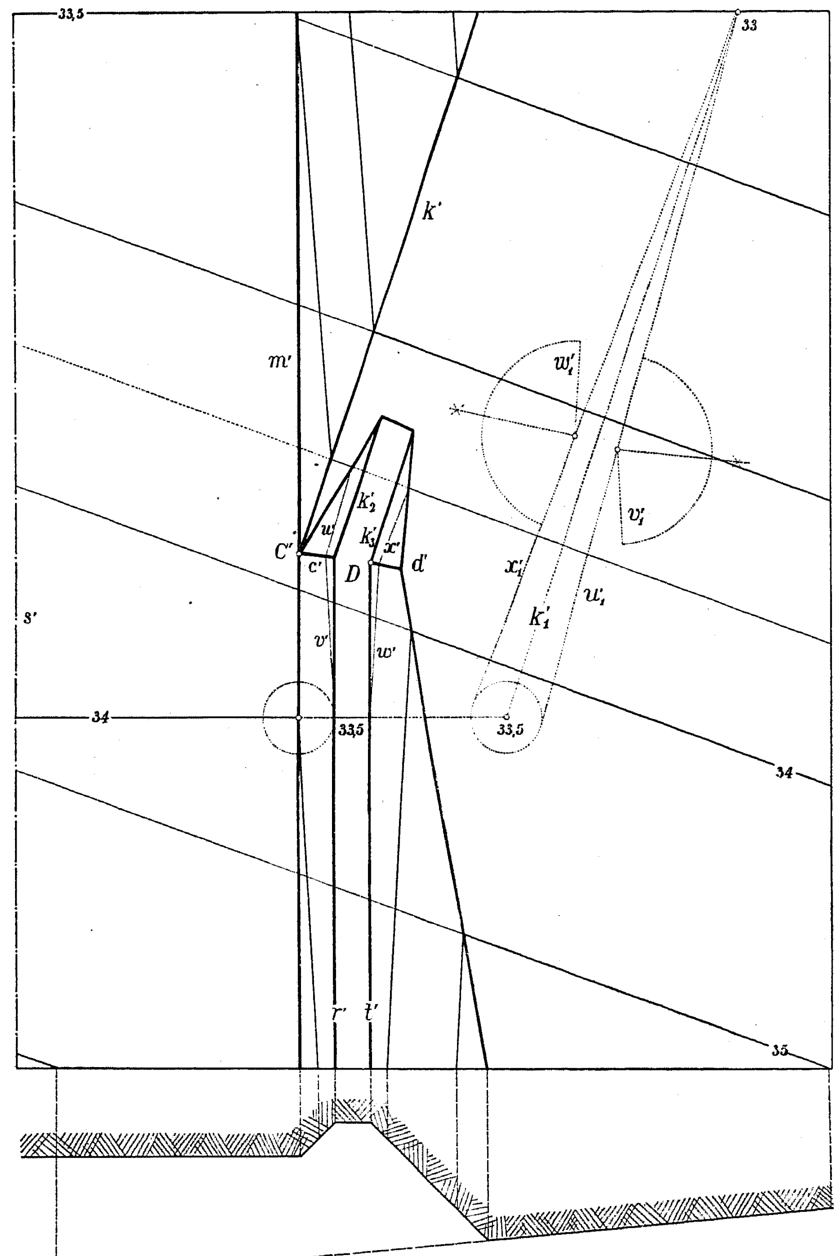
ĆWICZENIA.

1. Narysować drogę przyjmując, że teren jest poziomy, a oś ma mieć nachylenie 4%.
2. Narysować drogę poziomą w terenie ukośnym.

III. Zauważmy, że skarpy wykopu opadają w kierunku ku drodze. Tak w praktyce nie może pozostać ze względu na niszczące działanie wód opadowych. Aby drogę zabezpieczyć, należy wykonać rowy po obu stronach drogi.

Sposób wykreślenia rowu i odpowiednich skarp podano na osobnym rysunku w skali 1: 100 (rys. 81). Zarówno głębokość jak szerokość dna rowu wynosi 50 cm. Nachylenie skarpy rowu przyjmuje się takie jak w wykopie, czyli równe 1.

Podobnie jak na poprzednim rysunku, wykreślono warstwice 34 i 35,5 ściany rowu, posługując się okręgiem o środku w punkcie 34 na m i o promieniu



Skala: 1:100

Rys. 81.

1/2 m. Mamy tu połowę modułu, gdyż różnica wysokości jest 34—33,5 = = 1/2 m, czyli na rysunku 5 mm. Za dno rowu przyjmujemy płaszczyznę równoległą do drogi, a znajdującą się o 0,5 m niżej. Żądając, aby głębokość rowu wynosiła 0,5 m, mamy na myśli takie położenie, żeby pionowy odcinek o końcach na tych płaszczyznach miał długość 0,5 m; z tego wynika, że na przedłużeniu rzutu warstwicy 34 drogi będzie rzut warstwicy 33,5 dna rowu i podobnie na przedłużeniu rzutu 33,5 drogi — rzut 33′ dna rowu.

Na przecięciu skarpy i dna rowu mamy krawędź r dna rowu. Druga krawędź t jest w odległości 0,5 od r. Ponieważ na prostej t mamy znane punkty 33,5 i 33, więc — jak w wielu innych przypadkach — wykreślamy warstwice zewnętrznej skarpy rowu (dla której również przyjmujemy nachylenie 1). Przecięcie jej z terenem nie nastręcza trudności.

W miejscu, gdzie rów dochodzi do nasypu, zmieniamy jego kierunek. Wykonujemy to zakładając, że:

1° dno rowu pozostaje w tej samej płaszczyźnie,

2° skarpa wewnętrzna przechodzi przez punkt C, w którym zaczyna się nasyp,

3° rzut dna rowu jest równoległy do rzutu krawędzi terenu z nasypem.

Mamy zatem do wykonania ciekawe pod względem geometrycznym zadanie:

Przez punkt C przeprowadzić płaszczyznę o nachyleniu 1 *tak, aby jej krawędź z dnem rowu miała rzut równoległy do prostej k' danej na planie.*

Kierunek warstwic szukanej płaszczyzny znajdziemy, biorąc prostą k_1 na płaszczyźnie dna rowu o rzucie równoległym do k'. Znając na niej punkty o cechach 33,5 i 33, wyznaczamy za pomocą stożka jak w zadaniu II kierunek u żądanych warstwic. Teraz będziemy mogli nakreślić krawędź c nowej ściany rowu z pierwotną; przejdzie ona przez punkt C i będzie równoległa do dwusiecznej c_1 kąta między warstwicami, gdyż mamy tu płaszczyzny o tym samym nachyleniu (p. zastosowanie I). Dla wykreślenia c'_1 narysowano $v'_1 \parallel v'$.

Mając rzut krawędzi c kreślimy kolejno: rzut u' warstwicy 33,5 nowej ściany, krawędź jej z terenem oraz rzut k'_2.

Ścianę zewnętrzną zakończenia rowu znajdujemy tak samo: najpierw kreślimy k'_3 (w odległości 0,5 m od k'_2), uzyskując punkt D, przez który winna przejść krawędź zewnętrznych ścian rowu, następnie samą krawędź d równolegle do dwusiecznej d_1 kąta między kierunkami w_1 a x_1, a w końcu przecięcia ściany i dna rowu z terenem.

Przekrój poprzeczny nakreślono jak na rys. 80.

ĆWICZENIE.

Wykonać to samo po drugiej stronie drogi w skali 1: 50.

IV. Zadanie narysowania drogi wykonano w warunkach idealnych, gdy teren jest płaszczyzną (poziomą lub nie). W rzeczywistości nie mamy jednak nigdy dokładnej płaszczyzny, lecz tzw. *powierzchnię topograficzną*, odbiegającą znacznie od płaszczyzny.

Powierzchnie przedstawiamy również z pomocą warstwic.

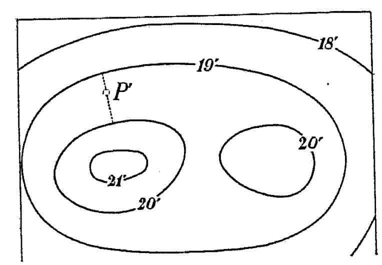
Warstwicą powierzchni nazywamy zbiór wszystkich punktów powierzchni o jednej i tej samej cesze.

Np. warstwicami kuli są koła, warstwicami walca poziomego — pary prostych itd.

Inaczej warstwice można określić jako przekroje powierzchni płaszczyznami poziomymi.

Weźmy pod uwagę zbiór rzutów warstwic o cechach np. 1, 2, 3, . . . (rys. 82).

Rysunek taki nazywa się *planem warstwicowym*.



Rys. 82.

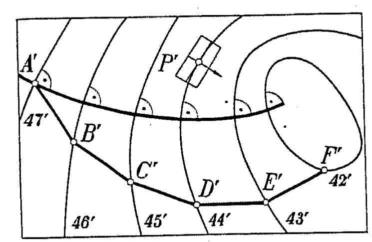
Oczywiście plan warstwicowy podaje dokładnie jedynie cechy punktów, znajdujących się na warstwicach narysowanych. Jeśli rzut punktu leży między warstwicami, to można tylko określić granice, w jakich zawiera się jego cecha. Np. dla punktu P mamy nierówność $19 < c < 20$.

Będziemy zakładali, że różnice cech punktu i sąsiednich warstwic są proporcjonalne do odległości rzutu punktu od rzutów tych warstwic. Np. dla P będziemy mieli w przybliżeniu $c = 19{,}3$.

Takie wyznaczanie wartości pośrednich nazywamy *interpolacją*.

Na planie warstwicowym można nakreślić w przybliżeniu rzuty pewnych charakterystycznych krzywych. Wykonajmy analogiczne do zadania I

ZADANIE I′. *Wykreślić na powierzchni linie o stałym nachyleniu* 1/5 (czyli 20 %).



Skala: 1:500

Rys. 83.

Jeśli krzywa ma przejść przez punkt A o cesze 47 (rys. 83), to idzie o wskazanie takiego punktu B na warstwicy 46, aby rzut łuku krzywej AB miał długość pięć razy większą niż różnica wysokości punktów A i B (a więc na rysunku 5 m: 500 = 1 cm).

Oczywiście wobec braku pośrednich warstwic powierzchni musimy się zadowolić grubym przybliżeniem, biorąc zamiast łuku AB odcinek. W praktyce konstrukcja polega na wykreśleniu łamanej, złożonej z odcinków długości 1 cm o końcach znajdujących się na rzutach sąsiednich warstwic.

Podobnie jak na płaszczyźnie, można i tu wskazać linie największego spadu. W tym celu weźmy pod uwagę pewien punkt P na warstwicy. Możemy w sąsiedztwie punktu P zastąpić powierzchnię małą częścią płaszczyzny stycznej do powierzchni w tym punkcie. Oczywiście warstwica tej płaszczyzny przechodząca przez P będzie prosta styczna w P do warstwicy powierzchni. Ponieważ linia spadu płaszczyzny stycznej jest prostopadła do warstwicy, a krzywa największego spadu powierzchni w punkcie P musi mieć oczywiście kierunek linii spadu płaszczyzny stycznej, więc mamy

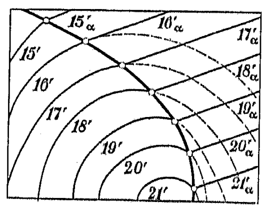
Wniosek. *Krzywe największego spadu na powierzchni przecinają warstwice pod kątami prostymi.*

Korzystając z tego, nakreślono na rys. 83 linię największego spadu, przechodzącą przez punkt A.

Przejdźmy do podstawowych konstrukcyj:

1. *Nakreślić linie przecięcia powierzchni płaszczyzną.*

Dokładnie można jedynie wskazać punkty o cechach 15, 16, ... (rys. 84); są to punkty wspólne warstwic powierzchni i płaszczyzny na tych samych wysokościach. Inne punkty otrzymujemy w przybliżeniu, łącząc punkty przecięcia warstwic krzywą.

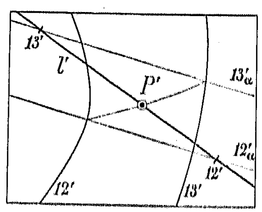


Rys. 84.

2. *Znaleźć punkt, w którym prosta przebija powierzchnię.*

Tak jak w § 5 przesuwamy (rys. 85) przez tę prostą płaszczyznę, a następnie przecinamy tą płaszczyzną powierzchnię. Oczywiście punkt wspólny P linii przecięcia i danej prostej jest szukanym punktem.

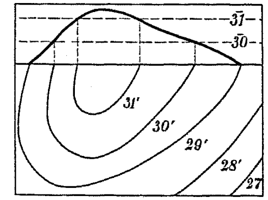
W celu możliwie dokładnego wyznaczenia punktu P wskazane jest wziąć płaszczyznę o dużym nachyleniu, tj. taką, której warstwice tworzą mały kąt z rzutem prostej oraz posługiwać się dwiema warstwicami, z których jedna ma cechę mniejszą, a druga większą od cechy punktu P. Idzie to, aby P było punktem wewnętrznym pola, ograniczonego warstwicami powierzchni i płaszczyzny, wchodzącymi do konstrukcji; wtedy bowiem P jest wynikiem interpolacji.



Rys. 85.

3. *Narysować kład przekroju powierzchni płaszczyzną pionową.*

Tu również dokładnie można narysować kłady tylko tych punktów, w których warstwice powierzchni przebijają pionową płaszczyznę (rys. 86).



Rys. 86.

Po wykreśleniu ich łączymy je krzywą, która jest przybliżeniem przekroju.

Po tych przygotowaniach możemy już przystąpić do wykonania zadania:

Nakreślić plan drogi, gdy dany jest plan warstwicowy terenu.

Na rysunku 87 przyjęto oś drogi o nachyleniu 8% (moduł $100/8 = 12{,}5$, a więc 6,25 cm w skali 1: 200. Warstwice skarp wykopu i nasypu znaleziono tak samo jak na rys. 80. Jedynie krawędzie przecięcia z terenem wypadają inaczej; są to bowiem krzywe, które znajduje się w przybliżeniu, łącząc punkty przecięcia warstwic o tych samych cechach.

Przekrój poprzeczny znajdujemy tak jak na rysunkach 80 i 86.

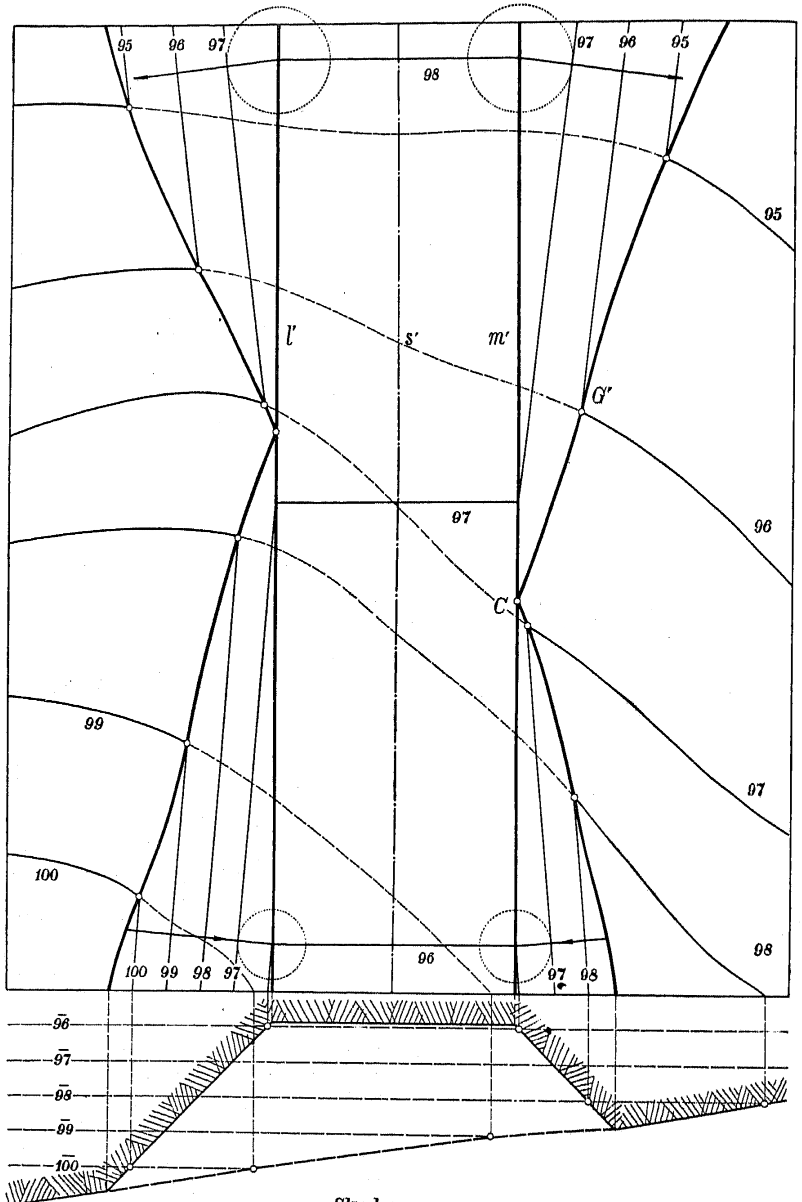
Przystępując do wykonania rowu po stronie wykopu (rys. 88), należy dokładnie rozważyć, jakie elementy zadania zmienią się w porównaniu z rysunkiem 81, a jakie pozostaną.

W tym celu zauważmy, że ściany wewnętrzne rowu, dno oraz ściany zewnętrzne — są to płaszczyzny związane z krawędziami drogi, a nie z terenem; zatem ani ich położenie względem drogi, ani tym bardziej konstrukcje warstwic nie ulegną zmianie (oczywiście odgięcie rowu nie będzie teraz równoległe do krawędzi nasypu i terenu, bo jest ona krzywą, lecz np. do odcinka CG). Jedyna zmiana dotyczyć więc będzie linii przecięcia skarp zewnętrznych z terenem.

Na rys. 81 mamy zakończenie rowu, podczas gdy obecnie (p. rys. 88) mamy początek rowu. Założenia jednak, pod którymi wykonywa się odgięcie, są takie same.

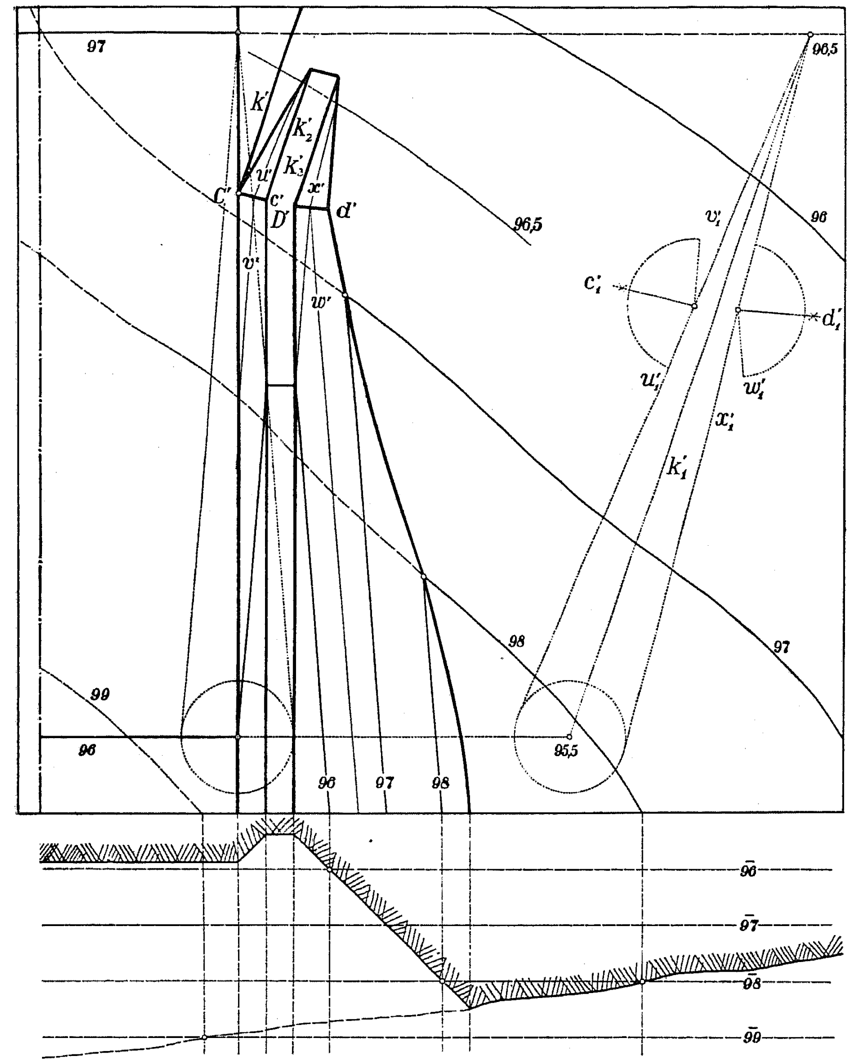
ĆWICZENIE.

Narysować drogę poziomą z rowami, gdy dany jest plan warstwicowy terenu.



Skala 1:200

Rys. 87.



Skala 1:125

Rys. 88.