

*Książka ta została wydrukowana  
w Szwecji jako dar Rządu Szwedzkiego  
dla odbudowy kultury polskiej*

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE  
KOMITET REDAKCYJNY:

K. BORSUK, B. KNASTER, K. KURATOWSKI, W. SIERPIŃSKI,  
H. STEINHAUS, W. ŚLEBODZIŃSKI i A. ZYGMUND

TOM XV

02338

[15]

KAZIMIERZ KURATOWSKI  
PROFESOR UNIwersYTETU WARSZAWSKIEGO  
CZŁONEK POLSKIEJ AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI

WYKŁADY RACHUNKU  
RÓŻNICZKOWEGO  
I CAŁKOWEGO

CZĘŚĆ I

91/KSM

*FUNKCJE JEDNEJ ZMIENNEJ*



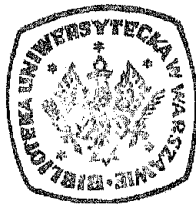
Z ZASIĘKIEM WYDZIAŁU NAUKI MINISTERSTWA OŚWIATY



SPÓŁDZIELNIA WYDAWNICZA »CZYTELNIK«

Warszawa 1948

02338



WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE

All rights reserved

## PRZEDMOWA

*Książka niniejsza zawiera opracowane do druku wykłady rachunku różniczkowego i całkowego, prowadzone przeze mnie od szeregu lat na Uniwersytecie Warszawskim.*

*Zadania znajdujące się na końcu każdego paragrafu stanowią po większej części niezbędne uzupełnienie kursu. Natomiast poszczególne działy tekstu oznaczone gwiazdką mogą być przy pierwszej lekturze opuszczone.*

*Pierwszy tom obejmuje rachunek różniczkowy i całkowy jednej zmiennej. Funkcje dwóch lub większej ilości zmiennych, pochodne cząstkowe i całki wielokrotne rozważane będą w tomie drugim.*

*Spośród podręczników, które szczególnie przydatne były przy opracowaniu tej książki, wymienić należy kursy Analizy: Banacha, Couranta, Goursata, Hardy'ego, Kowalewskiego, Mazurkiewicza, Sierpińskiego, Borsuka (Zbiór zadań).*

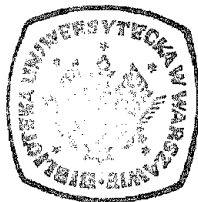
*Za liczne rady, wskazówki i uwagi udzielone mi przy opracowywaniu moich wykładów do druku przez kolegów moich pp. profesorów Karola Borsuka i Władysława Nikliborca oraz przez pp. asystentów Zygmunta Charzyńskiego i Romana Sikorskiego — wyrażam niniejszym serdeczne podziękowanie. Wyrażam również podziękowanie Wydziałowi Nauki Ministerstwa Oświaty, Spółdzielni Wydawniczej "Czytelnik", Szwedzkiemu Komitetowi Pomocy i wydawnictwu "Monografie Matematyczne", którym zawdzięczam ukazanie się tej książki.*

Kazimierz Kuratowski

Warszawa, październik 1946 roku.

PRINTED IN SWEDEN

Appelbergs Boktryckeri AB Uppsala 1948



## SKOROWIDZ NAZW

Liczby oznaczają stronicę

- ABELA** twierdzenie, 44, 93.  
 Aksjomatyka liczb rzeczywistych, 15.  
**d'ALEMBERTA** kryterium zbieżności, 46.  
 Anharmoniczny szereg, 43.  
 Ar cosh, ar sinh, ar tgh, 113.  
 Arc cos, arc sin, arc tg, 65.  
 Argument funkcji, 59.  
**ASCOLIEGO** twierdzenie, 39.  
 Asymptota, 124.  
**BERNOULLIEGO** nierówność, 8.  
 Bezwzględna wartość, 13;  
 zbieżność szeregu, 49;  
 całki, 230.  
**BOLZANO-WEIERSTRASSA** tw., 28.  
**Całka** nieoznaczona, 145;  
 niewłaściwa, 201;  
 oznaczona, 164.  
 Całkowanie przez części, 149;  
 przez podstawienie, 149.  
**CAUCHY'EGO** definicja ciągłości, 77;  
 kryterium zbieżności, 46;  
 reszta, 134;  
 twierdzenia, 30, 41, 52, 55, 58, 110.  
**CAUCHY-HADAMARDA** wzór, 96.  
**CAUCHY-MACLAURINA** twier., 218.  
**CAVALIERIEGO** wzór, 198.  
 Ciąg nieskończony, 19.  
 Ciągłość funkcji, 76.  
 Cosinus kierunkowy, 179.  
 Cyklometryczne funkcje, 65.  
**DARBOUX** całki (dolna i górna), 193;  
 twierdzenie, 82;  
 własność, 83.  
**DEDEKINDA** zasada ciągłości, 12.  
**DIRICHLETA** całka, 213, funkcja, 68.  
 Długość łuku, 177.  
**e**, 34.  
 Element długości, 179; pola, 176.  
 Elementarna funkcja, 63, 114.  
 Entier (funkcja), 61.  
**EULERA** funkcja gamma, 217;  
 stała, 129, 137; wzór, 228.  
 Extremum funkcji, 106.  
**Figura** obrotowa, 181.  
**FOURIERA** całki, 165; szeregi, 222.  
**FRESNELA** całka, 211.  
 Funkcja, 59; funkcja  $\Gamma(x)$  Eulera, 217.  
**Granica** ciągu, 20; funkcji, 66;  
 jednostronna, 67; niewłaściwa, 32, 67.  
**GULDINA** twierdzenie, 184.  
**Harmoniczny** szereg, 42.  
**HEINEGO** definicja ciągłości, 77.  
 Hiperboliczne funkcje, 112.  
 Hipocykloida, 200.  
 de l'HOSPITALA wzór, 116.  
**Iloczyn** nieskończony, 54.  
 Iloraz różnicowy, 97.  
 Indukcja zupełna, 8.  
 Interpolacja, 189.  
**Jednostajna** ciągłość funkcji, 81;  
 zbieżność ciągu funkcji, 88;  
 zbieżność szeregu, 90.  
**Jednostronna** ciągłość, 76;  
 granica, 67; pochodna, 98.

**K**res (dolny i górny) funkcji, 82;  
 zbioru, 13.  
 Krzywizna, 179.  
 KUMMERA twierdzenie, 48.  
**L**AGRANGE'A interpolacja, 189;  
 reszta, 134; twierdzenie, 108.  
 LEGENDRE'A wielomiany, 201.  
 LEIBNIZA wzory, 123, 132.  
 Lewostronna ciągłość, 76;  
 granica, 67; pochodna, 98.  
 Liczby naturalne, rzeczywiste, wymierne, 7.  
 Limes, 20.  
 Limes inferior, superior, 38.  
 Liniowa funkcja, 63; niezależność, 200.  
 LIPSCHITZA warunek, 87.  
 Logarytm naturalny, 35.  
 Logarytmiczna pochodna, 112.  
 Logarytmiczne kryterium zbieżności szeregu, 221.  
 Lokalna własność, 78.  
**M**AGLAURINA wzór, 134.  
 Malejące ciągi, 20; funkcje, 61.  
 Maximum funkcji, 106.  
 Minimum funkcji, 106.  
 Monotoniczne ciągi, 20; funkcje, 61.  
 Naprzemienny szereg, 43.  
 NEWTONA dwumian, 10, 138.  
 Normalna do krzywej, 99.  
**O**bjętość, 182.  
 Obszar normalny, 176.  
 Odwrotna funkcja, 63.  
 Ograniczone ciągi, 23; funkcje, 72;  
 szeregi, 42; zbiory, 13.  
 Okresowa funkcja, 62.  
 Ortogonalny układ, 201.  
**P**ASCALA trójkąt, 39.  
 Parzysta funkcja, 75.  
 Permutacja, 50.  
 Pierwotna funkcja, 145.  
 Pochodna, 97; jednostronna, 98,  
 uogólniona, 128.  
 Podciąg, 27.  
 POISSONA całka, 215.

Pole obszaru, 173.  
 Potęgowy szereg, 91.  
 Powierzchnia boczna, 183.  
 Prawostronna ciągłość, 76;  
 granica, 67; pochodna, 98.  
 Promień krzywizny, 179.  
 zbieżności szeregu, 92.  
 Prosta liczbowa, 7.  
 Przedział domknięty, otwarty, 59.  
 Przedział zbieżności szeregu  
 potęgowego, 92.  
 Przedziałami ciągła (funkcja), 208;  
 liniowa, 94; monotoniczna, 62.  
 Przęgłęcia punkt, 142.  
 Przekrój, 12.  
 Przemienność szeregu, 50.  
 Przyrosty skończone (twierdzenie), 108.

**R**AABEGO kryterium, 49.  
 Rekurencyjna definicja, 19.  
 Reszta szeregu, 41;  
 we wzorze Taylora, 134.  
 RIEMANNA całka, 193;  
 twierdzenie, 52.  
 ROLLE'A twierdzenie, 107.  
 Rosnące ciągi, 21; funkcje, 61.  
 Rozbieżny ciąg, 21;  
 do nieskończoności, 32.  
 Różniczka, 125.  
 Różniczkowalna funkcja, 99.  
 Różnowartościowa funkcja, 63.

**S**CHWARZA nierówności, 11; 200.  
 Sieczna, 98.  
 SIMPSONA wzór, 190.  
 Średnia arytmetyczna, geometryczna,  
 harmoniczna, 18, 36.  
 Środek krzywizny, 180; masy, 181.  
 STERLINGA wzór, 192.  
 Styczna do krzywej, 98.  
 Suma częściowa, 41.  
 Superpozycja funkcji, 70.  
 Szereg nieskończony, 40.  
 Szybkość wzrostu ciągu, 47.

TAYLORA wzór, 133.  
 Torus, 199.

**U**kłamek prosty, 154.

**W**ahanie ograniczone, 75.  
 WALLISA wzór, 190.  
 Wartość asymptotyczna  $n!$ , 193;  
 funkcji, 59; średnia (tw. Lagran-  
 ge'a), 108, (tw. z rach. całk.) 166,  
 185.  
 Warunek dostateczny, konieczny, 31.  
 Warunkowa zbieżność szeregu, 49.

WEIERSTRASSA twierdzenia, 28, 81.  
 Wykładnicza funkcja, 64.  
 Wymierna funkcja, 64.  
 Wyraz ciągu, 19.  
 Wyrażenia nieoznaczone, 118.  
 Zbieżność ciągu, 21.  
 Zmienna, 60.

## SPIS RZECZY

PRZEDMOWA

ROZDZIAŁ I

CIAGI I SZEREGI

## § 1 Wstęp

I. Różne rodzaje liczb .....	7
II. Zasada indukcji zupełnej .....	8
III. Dwumian Newtona .....	10
IV. Nierówność Schwarz'a .....	11
V. Zasada ciągłości (Dedekinda) .....	12
VI. Wartość bezwzględna .....	13
VII. Zbiory ograniczone. Kres górny i dolny .....	13
VIII. Aksjomatyka liczb rzeczywistych .....	15
IX. Liczby rzeczywiste jako zbiory liczb wymiernych .....	16
Zadania .....	17

## § 2 Ciągi nieskończone

I. Definicja i przykłady .....	19
II. Pojęcie granicy .....	20
III. Ciągi ograniczone .....	23
IV. Działania na ciągach .....	23
V. Dalsze własności rachunkowe granicy .....	26
VI. Podciągi .....	27
VII. Twierdzenie Cauchy'ego .....	30
VIII. Rozbieżność do $\infty$ .....	32

IX. Przykłady .....	33
X. Liczba $e$ .....	34
XI. Ciągi średnich arytmetycznych i średnich geometrycznych .....	36
Zadania .....	38
§ 3 Szeregi nieskończone	
I. Definicje i przykłady .....	40
II. Ogólne własności szeregów .....	41
III. Szeregi naprzemienne. Twierdzenie Abela .....	43
IV. Szeregi o składnikach dodatnich. Kryteria zbieżności d'Alemberta i Cauchy'ego .....	45
V. Zastosowania i przykłady .....	47
V'. Inne kryteria zbieżności .....	48
VI. Szeregi bezwzględnie zbieżne .....	49
VII. Mnożenie szeregów .....	52
VIII. Iloczyny nieskończone .....	54
Zadania .....	58

## ROZDZIAŁ II

### FUNKCJE

§ 4 Funkcje i ich granice	
I. Definicje .....	59
II. Funkcje monotoniczne .....	61
III. Funkcje różnowartościowe. Funkcje odwrotne .....	62
IV. Funkcje elementarne .....	63
V. Granica funkcji $f$ w punkcie $a$ .....	66
VI. Działania na granicy .....	69
VII. Warunki istnienia granicy .....	72
Zadania .....	75
§ 5 Funkcje ciągłe	
I. Definicja .....	76
II. Charakteryzacja ciągłości Cauchy'ego .....	77
III. Ciągłość funkcji elementarnych .....	78
IV. Ogólne własności funkcji ciągłych .....	81
V. Ciągłość funkcji odwrotnych .....	84
Zadania .....	86

§ 6 Ciągi i szeregi funkcyj	
I. Zbieżność jednostajna .....	87
II. Szeregi zbieżne jednostajnie .....	90
III. Szeregi potęgowe .....	91
IV. Aproksymowanie funkcji ciągłych przez funkcje przemiałami liniowe .....	94
Zadania .....	96

## ROZDZIAŁ III

### RACHUNEK RÓŻNICZKOWY JEDNEJ ZMIENNEJ

§ 7 Pochodne rzędu pierwszego	
I. Definicje .....	97
II. Różniczkowanie funkcji elementarnych .....	100
III. Różniczkowanie funkcji odwrotnych .....	104
IV. Ekstrema funkcji. Twierdzenie Rolle'a .....	106
V. Twierdzenia Lagrange'a i Cauchy'ego .....	108
VI. Różniczkowanie funkcji superponowanych .....	110
VII. Interpretacja geometryczna znaku pochodnej .....	114
VIII. Wyrażenia nieoznaczone .....	116
IX. Pochodna granicy .....	119
X. Pochodna szeregu potęgowego .....	120
XI. Rozwinięcie na szereg potęgowy funkcji $\log(1+x)$ i $\arctg x$ .....	122
XII. Asymptoty .....	124
XIII. Pojęcie różniczki .....	125
Zadania .....	127
§ 8 Pochodne rzędów wyższych	
I. Definicja i przykłady .....	129
I'. Różniczki wyższych rzędów .....	131
II. Działania arytmetyczne .....	132
III. Wzór Taylora .....	133
IV. Rozwinięcia na szeregi potęgowe .....	137
V. Kryterium na ekstrema .....	140
VI. Interpretacja geometryczna drugiej pochodnej. Punkty przegięcia .....	141
Zadania .....	144

## ROZDZIAŁ IV

## RACHUNEK CAŁKOWY JEDNEJ ZMIENNEJ

## § 9 Całki nieoznaczone

I. Definicja .....	145
II. Całka granicy. Całkowalność funkcji ciągłych .....	147
III. Ogólne wzory na całkowanie .....	148
IV. Całkowanie funkcji wymiernych .....	153
V. Całkowanie niewymierności drugiego stopnia .....	157
VI. Całkowanie funkcji trygonometrycznych .....	159
Zadania .....	163

## § 10 Całki oznaczone

I. Definicja i przykłady .....	164
II. Wzory rachunkowe .....	166
III. Całka oznaczona jako granica sum .....	171
IV. Całka jako pole .....	173
V. Długość łuku .....	177
VI. Objętość i powierzchnia figur obrotowych .....	181
VII. Dwa twierdzenia o wartości średniej .....	185
VIII. Przybliżone metody całkowania. Interpolacja Lagrange'a .....	189
IX. Wzór Wallisa .....	190
X. Wzór Stirlinga .....	192
XI. Całka Riemanna. Całki Darboux, górna i dolna .....	193
Zadania .....	198

## § 11 Całki niewłaściwe i ich związek z szeregami nieskończonymi

I. Całki o nieograniczonym przedziale całkowania .....	201
II. Całki funkcji nieokreślonych w jednym punkcie .....	204
III. Wzory rachunkowe .....	207
IV. Przykłady .....	209
V. Funkcja Eulera .....	217
VI. Zależność między zbieżnością całki a zbieżnością szeregu nieskończonego .....	218
VII. Szeregi Fouriera .....	222
VIII. Zastosowania i przykłady .....	225
Zadania .....	230

SKOROWIDZ NAZW .....	233
----------------------	-----

