

Zadania do § 8

1. Wyprowadzić wzór (Halphen'a):

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1} \cdot e^{\frac{1}{x}}) = (-1)^n x^{-n-1} \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

2. Znaleźć n -tą pochodną funkcji: $\frac{\log x}{x}$, $e^x \cos x$.

3. Obliczyć: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$.

4. Rozwinąć na szereg potęgowy funkcje: $\sinh x$ oraz $\cosh x$.

5. Podać wykresy funkcji x^x , $e^{\frac{1}{x}}$, $\log \sin x$, uwydatniając ich extrema, punkty przegięcia, asymptoty, punkty nieciągłości jednostronne lub obustronne (o ile istnieją).

6. Udowodnić, że jeśli funkcja n -krotnie różniczkowalna znika w n różnych punktach danego przedziału, to istnieje w tym przedziale punkt, w którym n -ta pochodna znika.

7. Niech $f(x) = \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$. Udowodnić, że $f'(0) = 0$.

Wyprowadzić stąd jako wniosek, że funkcja g określona przez warunki

$$g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ dla } x \neq 0 \text{ oraz } g(0) = 0$$

posiada w punkcie 0 pochodne wszystkich rzędów równe 0 (por. N° IV uw. 1).

8. Udowodnić, że $e^n < (2n+1) \frac{n^n}{n!}$. Wywnioskować stąd, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$.

ROZDZIAŁ IV

RACHUNEK CAŁKOWY JEDNEJ ZMIENNEJ

§ 9. Całki nieoznaczone

I. Definicja. Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f , określoną w przedziale otwartym (skończonym lub nieskończonym), jeśli $F'(x) = f(x)$ dla każdego x .

Np. funkcja $\sin x$ jest funkcją pierwotną funkcji $\cos x$. Również każda funkcja postaci $\sin x + C$, gdzie C jest stałą, jest funkcją pierwotną funkcji $\cos x$.

Jeżeli funkcja f jest określona w przedziale domkniętym $a \leq x \leq b$, to funkcję F nazywamy jej funkcją pierwotną, jeśli $F'(x) = f(x)$ dla $a < x < b$ oraz $F'_+(a) = f(a)$ i $F'_-(b) = f(b)$.

1. Jeśli dwie funkcje F i G są funkcjami pierwotnymi funkcji f w przedziale ab (otwartym lub domkniętym), to te dwie funkcje różnią się między sobą o stałą.

Istotnie, skoro $F'(x) = G'(x)$, to na mocy tw. 4, § 7, V, istnieje taka stała C , że $G(x) = F(x) + C$ dla każdego x .

Odwrotnie, funkcja, która powstaje przez dodanie stałej do funkcji pierwotnej funkcji f , jest funkcją pierwotną funkcji f . A zatem wyrażenie $F(x) + C$ jest ogólną postacią funkcji pierwotnej funkcji f . Wyrażenie to oznaczamy symbolem $\int f(x) dx$ („całka $f(x)$ po dx ”) i nazywamy je *całką nieoznaczoną funkcji f* . Mamy więc

$$(1) \quad \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ gdzie } F'(x) = f(x),$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x), \quad (3) \quad \int \frac{d F(x)}{dx} dx = F(x) + C.$$

Znajdywanie całki nieoznaczonej funkcji f lub — co na jedno wychodzi — znajdywanie funkcji pierwotnej funkcji f nazywamy *całko-*

waniem funkcji f . Całkowanie jest więc działaniem odwrotnym do różniczkowania.

Jak wynika z definicji całki nieoznaczonej, każdy wzór na pochodną jakiejś funkcji daje automatycznie wzór na całkę innej funkcji (mianowicie, funkcji pochodnej). Np. ze wzoru $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ otrzy-

mujemy $\int \cos x \, dx = \sin x + C$. Na ogół jednak problemat obliczenia całki funkcji ciągłej, która nie jest nam znana jako pochodna jakiejś funkcji, przedstawia większe trudności niż problemat różniczkowania; jak widzieliśmy w § 7, różniczkowanie funkcji, które się otrzymuje przez superponowanie funkcji elementarnych, nie wyprowadza poza zakres tych funkcji, natomiast analogiczne twierdzenie dla całek nieoznaczonych byłoby fałszywe. Wiadomo jedynie, że każda funkcja ciągła posiada całkę nieoznaczoną (ob. N° II); twierdzenie to nie daje jednak „praktycznego” sposobu obliczenia całki danej funkcji ciągłej.

Przykłady. Na podstawie znanych nam wzorów z rachunku różniczkowego otrzymujemy natychmiast wzory następujące:

$$(4) \quad \int 0 \, dx = C$$

$$(5) \quad \int a \, dx = ax + C$$

$$(6) \quad \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$(7) \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$(8) \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$(9) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$(10) \quad \int \frac{dx}{x} = \log |x| + C \text{ (odnośnie zakresu } x\text{-ów, ob. Uwagę)}$$

$$(11) \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$(12) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$(13) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$$

$$(14) \quad \int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, \text{ o ile } a \neq -1 \text{ i } x > 0.$$

Uwaga. Jeżeli zakres x -ów, dla których spełniona jest równość $F'(x) = f(x)$, nie jest przedziałem (skończonym lub nieskończonym), to nie można twierdzić, że wyrażenie $F(x) + C$ obejmuje wszystkie fun-

kcje pierwotne funkcji f w tym zakresie argumentów.

Np. $\log |x| + C$ obejmuje wszystkie funkcje pierwotne funkcji $\frac{1}{x}$ w każdym w dwóch zakresów $x < 0$ i $x > 0$ z osobna, lecz nie w całym zakresie x -ów rzeczywistych różnych od 0; bowiem funkcja $G(x)$, określona jako $\log |x|$ dla $x < 0$, zaś jako $\log |x| + 1$ dla $x > 0$, jest funkcją pierwotną funkcji $\frac{1}{x}$ dla wszystkich $x \neq 0$, mimo że pod wzór $\log |x| + C$ nie podpada.

Uzupełnimy obecnie tw. 1 jak następuje:

2. Niech dany będzie punkt x_0 wewnątrz przedziału ab i niech dana będzie dowolna liczba rzeczywista y_0 . Jeśli funkcja f posiada funkcję pierwotną w przedziale ab , to posiada jedną i tylko jedną funkcję pierwotną F taką, że $F(x_0) = y_0$.

Niech bowiem $P(x)$ będzie dowolną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale ab . Połóżmy $F(x) = P(x) - P(x_0) + y_0$. Mamy więc $F'(x) = P'(x) = f(x)$ oraz $F(x_0) = y_0$. Funkcja F czyni zatem zadość warunkom twierdzenia.

Zarazem jest to jedyna funkcja, która tym warunkom czyni zadość, bowiem każda inna funkcja pierwotna funkcji f jest postaci $F(x) + C$, gdzie $C \neq 0$, skąd wynika $F(x_0) + C = y_0 + C \neq y_0$.

Geometrycznie twierdzenie to oznacza, że przez każdy punkt płaszczyzny o odciętej należącej do przedziału ab przechodzi krzywa całkowa (tj. wykres funkcji pierwotnej). Ponieważ krzywe całkowe są do siebie równoległe, więc przez dany punkt płaszczyzny przechodzi może tylko jedna krzywa całkowa danej funkcji f .

II. Całka granicy. Całkowalność funkcji ciągłych. W § 7, IX udowodniliśmy, że jeśli dany jest ciąg funkcji $F_n(x)$, $a \leq x \leq b$, taki że pochodne $F'_n(x)$ są ciągłe i jednostajnie zbieżne w przedziale ab do funkcji $g(x)$ i jeśli ponadto dla jakiegoś punktu c należącego do przedziału ab ciąg $F_n(c)$ jest zbieżny, to ciąg $F_n(x)$ jest zbieżny dla każdego x należącego do tego przedziału, przy czym kładąc $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$, mamy $F'(x) = g(x)$.

Wynika stąd lemat następujący:

1. Jeżeli funkcje $f_n(x)$ są ciągłe, jednostajnie zbieżne w przedziale ab do funkcji $f(x)$ i posiadają funkcje pierwotne, to funkcja $f(x)$ również funkcję pierwotną posiada. Bowiem funkcje pierwotne $F_n(x)$ mogą być tak dobrane (stosownie do N° I, 2), aby dla pewnego punktu

c przedziału ab zachodziła równość $F_n(c) = 0$ przy każdej wartości n ; wówczas

$$\int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) + C,$$

tj. całka granicy jest granicą całek.

Istotnie wystarczy podstawić f_n na miejsce F'_n i f na miejsce g w powyższym sformułowaniu, aby z niego nasz lemat otrzymać.

2. *Twierdzenie. Każda funkcja ciągła w przedziale ab posiada w tym przedziale funkcję pierwotną.*

Na mocy twierdzenia udowodnionego w § 6, IV, każda funkcja ciągła w przedziale ab jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji przedziałami liniowych. Stosownie więc do lematu, pozostaje do udowodnienia, że każda funkcja f przedziałami liniowa posiada funkcję pierwotną.

W myśl definicji funkcji przedziałami liniowej, istnieje taki układ $n+1$ punktów $a_0 < a_1 < \dots < a_n$, gdzie $a_0 = a$, $a_n = b$, oraz takie dwa układy liczb $c_1, c_2, \dots, c_n$ i $d_1, d_2, \dots, d_n$, że

$$f(x) = c_k x + d_k \quad \text{dla} \quad a_{k-1} \leq x \leq a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Położmy

$$F_k(x) = \frac{1}{2} c_k x^2 + d_k x + e_k \quad \text{dla} \quad a_{k-1} \leq x \leq a_k,$$

przy czym $e_1 = 0$ i dla $k \geq 1$:

$$e_{k+1} = \frac{1}{2} c_k a_k^2 + d_k a_k + e_k - \left(\frac{1}{2} c_{k+1} a_k^2 + d_{k+1} a_k \right).$$

W ten sposób $F_k(a_k) = F_{k+1}(a_k)$, wskutek czego zespół funkcji $F_1, F_2, \dots, F_n$ wyznacza jedną funkcję F odpowiednio równą każdej z funkcji tego zespołu w odpowiednim przedziale.

Różniczkując funkcję F_k , otrzymujemy natychmiast $F'(x) = f(x)$, tzn. że funkcja F jest pierwotną względem funkcji f .

III. Ogólne wzory na całkowanie. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe. Zachodzą wówczas wzory następujące:

$$1. \quad \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

$$\text{Bowiemy} \quad \frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx + \int g(x) dx \right) = f(x) + g(x).$$

$$2. \quad \int a f(x) dx = a \int f(x) dx.$$

$$\text{Bo} \quad \frac{d}{dx} \left(a \int f(x) dx \right) = a \frac{d}{dx} \int f(x) dx = a f(x).$$

Przykład. Całka wielomianu:

$$\int (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) dx = C + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

3. *Wzór na całkowanie przez części:*

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

(o ile funkcje f' i g' są ciągłe).

Krócej wzór ten zapisujemy, kładąc $y = f(x)$ i $z = g(x)$ jak następuje:

$$\int y \frac{dz}{dx} dx = yz - \int z \frac{dy}{dx} dx.$$

Aby wzór ten udowodnić, zróżniczkujmy jego prawą stronę. Otrzymujemy: $yz' + y'z - zy' = yz'$. Jest to funkcja podcałkowa lewej strony wzoru. A zatem wzór jest udowodniony.

Szczególnym przypadkiem wzoru 3 jest wzór następujący, który otrzymujemy ze wzoru 3, podstawiając $z = x$.

$$3'. \quad \int y dx = yx - \int x \frac{dy}{dx} dx.$$

$$\text{Przykład.} \quad \int \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x + C.$$

4. *Wzór na całkowanie przez podstawienie (czyli wzór na zamianę zmiennych):*

$$\int g[f(x)] \frac{df(x)}{dx} dx = \int g(y) dy,$$

przy czym po prawej stronie równości należy po obliczeniu całki podstawić $y = f(x)$.

Krócej wzór ten zapisujemy, kładąc $y = f(x)$ i $z = g(y)$ jak następuje:

$$\int z \frac{dy}{dx} dx = \int z dy.$$

Położmy $G(y) = \int g(y) dy$. Aby wzór 4 udowodnić, należy wykazać, że pochodna funkcji $G[f(x)]$ równa się funkcji podcałkowej lewej stronie tego wzoru. Otóż

$$\frac{d G[f(x)]}{dx} = \left(\frac{d G(y)}{dy} \right)_{y=f(x)} \cdot \frac{d f(x)}{dx} = g[f(x)] \frac{d f(x)}{dx}, \text{ c. b. d. o.}$$

Jak widać, możemy z punktu widzenia rachunkowego skracać przez różniczkę. Możemy też wzór 3 zapisać w postaci:

$$\int y dz = yz - \int z dy.$$

Przykłady. 1) $\int g(ax) dx = \frac{1}{a} \int g(y) dy$, gdzie $y = ax$.

Podstawiając bowiem we wzorze 4: $f(x) = ax$, mamy

$$\frac{1}{a} \int g(ax) a dx = \frac{1}{a} \int g(y) dy.$$

2) Podobnie dowodzimy, że

$$\int f(x+a) dx = \int f(y) dy, \text{ gdzie } y = x+a.$$

3)¹ Aby obliczyć całkę $\int \frac{x dx}{1+x^2}$, podstawiamy $y = x^2$. Otrzymujemy:

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{2} \frac{d(x^2)}{dx} dx = \int \frac{1}{2} \frac{dy}{1+y} = \frac{1}{2} \log(1+y) = \frac{1}{2} \log(1+x^2).$$

Ponieważ przy całkowaniu można—jak mówiliśmy—podstawiać różniczkę $d f(x)$ zamiast $f'(x) dx$, tzn. w danym wypadku $d(x^2)$ zamiast $2x dx$, rachunek powyższy można przeprowadzić w sposób nieco krótszy:

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{2} \frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{2} \log(1+x^2).$$

¹ Dla uproszczenia rachunków pomijamy stałą C w przykładzie 3) i dalszych.

$$4) \text{ Dla } n > 1 \text{ mamy } \int \frac{x dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{(1+x^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

$$5) \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\log |\cos x|.$$

Wzory 3) i 5) wynikają też z łatwością z następującego wzoru ogólnego:

$$6) \int \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{dy}{y} = \log |y| + C.$$

Kładąc we wzorze 4): $y = 1+x^2$, wyprowadzamy go z łatwością z następującego ogólnego wzoru:

$$7) \int y^a \frac{dy}{dx} dx = \int y^a dy = \frac{1}{a+1} y^{a+1} + C \quad (a \neq -1).$$

Metoda całkowania stosowana w powyższych przykładach polega — jak widać — na znalezieniu takiej funkcji $y = f(x)$, ażeby całka dana przekształciła się w całkę względem zmiennej y (łatwiejszą do obliczenia). Pozwala to zastąpić obliczanie całki stojącej po lewej stronie wzoru 4 przez obliczenie całki stojącej po jego prawej stronie. Niekiedy postępowanie odwrotne — od prawej strony ku lewej — jest bardziej celowe: mając obliczyć całkę $\int g(y) dy$, szukamy takiej funkcji

ściśle monotonicznej $y = f(x)$, ażeby całka $\int g[f(x)] \frac{d f(x)}{dx} dx$ dała się łatwo obliczyć. Oznaczając przez $x = h(y)$ funkcję odwrotną względem $y = f(x)$ oraz przez $F(x)$ i $G(y)$ odpowiednio całki występujące po lewej i prawej stronie wzoru 4, mamy więc

$$F(x) = G[f(x)], \text{ tj. } G(y) = F[h(y)],$$

inaczej mówiąc

$$\int g(y) dy = \int g[f(x)] \frac{d f(x)}{dx} dx,$$

przy czym w całce stojącej po prawej stronie należy podstawić $x=h(y)$

Przykład. W następującej całce podstawmy $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$;

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos t \frac{d \sin t}{dt} dt = \int \cos^2 t dt,$$

zaś $\cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2t)$, skąd $\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t$, a ponieważ $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}$, otrzymujemy:

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}.$$

Uwaga. Prawidłowość całkowania sprawdzamy, różniczkując funkcję stanowiącą wynik całkowania. Po zróżniczkowaniu winniśmy otrzymać funkcję podcałkową.

5. *Rekurencyjne metody obliczania całek.* Metoda rekurencyjna obliczania całki $\int f_n(x) \, dx$ polega na obliczeniu całki dla $n = 1$ (lub $n = 0$) i na sprowadzeniu całki n -tej do całki $n-1$ -ej (lub wcześniejszej).

Przykłady. 1) Obliczyć całkę $I_n = \int e^{-x} x^n \, dx$. Otóż $I_0 = \int e^{-x} \, dx = -e^{-x}$. Zarazem całkując przez części, mamy (dla $n > 0$):

$$I_n = - \int x^n d(e^{-x}) = -x^n e^{-x} + \int e^{-x} \frac{dx^n}{dx} \, dx = -x^n e^{-x} + n I_{n-1}.$$

W szczególności: $I_1 = -x e^{-x} + I_0$, $I_2 = -x^2 e^{-x} + 2I_1, \dots$

Mnożąc kolejno I_0 przez $n!$, I_1 przez $\frac{n!}{1!}, \dots$, I_{n-1} przez $\frac{n!}{(n-1)!}$ i dodając, otrzymujemy

$$\int e^{-x} x^n \, dx = -n! e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) + C.$$

2) Niech $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. Otóż $I_1 = \arctg x$. Zarazem dla $n > 1$ mamy $I_n = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} \, dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}$.

Ponieważ zaś $\frac{d}{dx} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} = -2(n-1) \frac{x}{(1+x^2)^n}$, przeto całkując przez części, otrzymujemy

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n} = \frac{-1}{2n-2} \int x d \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} = \frac{-1}{2n-2} \left[\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - I_{n-1} \right].$$

W rezultacie

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1} = \\ &= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Jest to żądany wzór rekurencyjny.

3) Niech $y = f(x)$, $z = g(x)$. Całkę $\int z y^{(n+1)} \, dx$ obliczamy stosując n razy całkowanie przez części:

$$\begin{aligned} \int z y^{(n+1)} \, dx &= z y^{(n)} - \int z' y^{(n)} \, dx \\ \int z' y^{(n)} \, dx &= z' y^{(n-1)} - \int z'' y^{(n-1)} \, dx \\ &\dots \dots \dots \\ \int z^{(n)} y' \, dx &= z^{(n)} y - \int z^{(n+1)} y \, dx. \end{aligned}$$

Stąd

$$\int z y^{(n+1)} \, dx = z y^{(n)} - z' y^{(n-1)} + \dots + (-1)^n z^{(n)} y + (-1)^{n+1} \int z^{(n+1)} y \, dx.$$

Wzór ten może być zastosowany np. do poprzednio obliczonej całki $\int e^{-x} x^n \, dx$, biorąc pod uwagę, że $e^{-x} = (-1)^k \frac{d^k(e^{-x})}{dx^k}$.

IV. *Całkowanie funkcji wymiernych.* Niech dana będzie funkcja wymierna $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są to dwa wielomiany. Należy obliczyć całkę $\int f(x) \, dx$.

Możemy założyć, że *stopień licznika jest niższy od stopnia mianownika*. W przeciwnym bowiem razie dzielimy licznik przez mianownik i mamy wówczas do scałkowania sumę wielomianu (redukującego się ewentualnie do stałej) oraz ułamka, którego licznik i mianownik jest wielomianem, przy czym stopień licznika jest niższy niż stopień mianownika. Z tych dwóch składników pierwszy (jako wielomian) potra-

fimy scałkować; zadanie nasze redukuje się więc do scałkowania drugiego składnika, tj. ilorazu postaci $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie wielomian $P(x)$ jest stopnia niższego niż wielomian $Q(x)$.

O funkcjach wymiernych tej postaci dowodzi się w algebrze twierdzenia następującego:

Nazwijmy *ułamkiem prostym* wyrażenie postaci

$$\frac{A}{(x-p)^k}, \text{ względnie } \frac{Cx+D}{[(x-q)^2+r^2]^k},$$

gdzie A i p , względnie C, D, q i r są liczbami rzeczywistymi.

Otóż funkcja wymierna $\frac{P(x)}{Q(x)}$ jest sumą ułamków prostych, których mianowniki są czynnikami wielomianu $Q(x)$.

Aby więc rozłożyć funkcję wymierną na ułamki proste, należy najpierw rozłożyć wielomian $Q(x)$ na czynniki pierwsze, a następnie wyznaczyć współczynniki występujące w licznikach ułamków prostych. Rozkład wielomianu $Q(x)$ na czynniki uzyskujemy na podstawie znanego z algebry twierdzenia orzekającego, że jeśli p jest pierwiastkiem (rzeczywistym lub zespolonym) równania $Q(x)=0$, to $x-p$ jest czynnikiem wielomianu $Q(x)$, przy tym jeśli p jest pierwiastkiem n -krotnym, to $(x-p)^k$ jest czynnikiem tego wielomianu dla każdego $k \leq n$; wreszcie jeśli $u+iv$ jest pierwiastkiem zespolonym równania $Q(x)=0$ o współczynnikach rzeczywistych, to i $u-iv$ jest jego pierwiastkiem (o tej samej krotności), a zatem wielomian $Q(x)$ ma jako czynnik iloczyn $(x-u-iv)(x-u+iv)=(x-u)^2+v^2$.

Współczynniki występujące w licznikach ułamków prostych wyznaczamy zazwyczaj tzw. *metodą współczynników nieoznaczonych*, którą poznamy na przykładach.

Mianownik funkcji wymiernej $\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)}$ posiada czynniki $(x-2)^2$, $(x-2)$ i $(x-3)$. A zatem nasza funkcja wymierna jest postaci:

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Aby obliczyć współczynniki A, B i C , sprowadzamy prawą stronę powyższej równości do wspólnego mianownika. Otrzymamy

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{(B+C)x^2 + (A-5B-4C)x - 3A+6B+4C}{(x-2)^2(x-3)}.$$

Liczniki lewej i prawej strony powyższej tożsamości są sobie równe przy każdej wartości x . Wynika stąd, że

$$B+C=0, A-5B-4C=1, -3A+6B+4C=-1.$$

Równania te dają wartości A, B i C : $A=-1, B=-2, C=2$.

W rezultacie

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{-1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x-3}.$$

Zauważmy jeszcze, że współczynniki A, B i C można było w sposób nieco prostszy wyznaczyć jak następuje: po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymaliśmy równość następującą:

$$A(x-3) + B(x-2)(x-3) + C(x-2)^2 = x-1.$$

Podstawiając w tej tożsamości $x=2$, otrzymujemy $A=-1$; podstawienie $x=3$ daje $C=2$. Stąd, podstawiając $x=1$, wnosimy, że $B=-2$.

Inny przykład rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste:

$$\frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{x+1}.$$

Sprowadzając do wspólnego mianownika, otrzymujemy tożsamość:

$$(Ax+B)(x+1) + (Cx+D)(x^2+1)(x+1) + E(x^2+1)^2 = x-1,$$

skąd z łatwością znajdujemy: $A=1, B=0, C=\frac{1}{2}, D=-\frac{1}{2}, E=-\frac{1}{2}$.

Twierdzenie o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste redukuje problemat całkowania funkcji wymiernych do całkowania ułamków prostych. Przekonamy się obecnie, że *ułamki proste dają się scałkować metodami już przez nas poznanymi*.

Istotnie, przez podstawienie $y=x-p$ otrzymujemy

$$\int \frac{A dx}{(x-p)^k} = A \int \frac{dy}{y^k} = A \log y \text{ dla } k=1, \text{ wzgl. } = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{y^{k-1}} \text{ dla } k>1.$$

Obliczenie całki $\int \frac{(Cx+D)dx}{[(x-q)^2+r^2]^k}$ sprowadza się do obliczenia dwóch całek: $\int \frac{dx}{[(x-q)^2+r^2]^k}$ oraz $\int \frac{(x-q)dx}{[(x-q)^2+r^2]^k}$.

Pierwsza z tych całek przez podstawienie $y=x-q$ sprowadza się do

całki $\int \frac{dy}{(y^2 + r^2)^k}$, która z kolei przez podstawienie $z = y/r$ redukuje się do znanej nam całki (por. III, 5, 2): $\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^k}$.

Drugą całkę znajdujemy na mocy wzorów III, 6) i 7), podstawiając $y = (x - q)^2 + r^2$; mianowicie:

$$\int \frac{(x - q)dx}{[(x - q)^2 + r^2]^k} = \frac{1}{2} \log [(x - q)^2 + r^2] \text{ lub } = -\frac{1}{2(k-1)} \frac{1}{[(x - q)^2 + r^2]^{k-1}}$$

w zależności od tego czy $k = 1$, czy $k \neq 1$.

W ten sposób całkowanie funkcji wymiernych jest zawsze wykonalne.

Przykłady. 1) $I = \int \frac{dx}{x^3 + x + 1}$. Ponieważ

$$x^3 + x + 1 = x^3 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{4},$$

przeto podstawiając najpierw $y = x + \frac{1}{2}$, a następnie $z = \frac{2}{\sqrt{3}}y$, otrzymamy

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dy}{y^3 + \frac{3}{4}} = \int \frac{\frac{4}{3} dy}{\left(\frac{4}{3}y^3 + 1\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dz}{z^3 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg z = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

$$2) \quad I = \int \frac{3x^3 + 10x^2 - x}{(x^2 - 1)^2} dx = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}.$$

Sprowadzając prawą stronę tej równości do wspólnego mianownika, znajdujemy z łatwością: $A = 3$, $B = 4$, $C = 2$, $D = -1$. Całkując otrzymujemy

$$I = -\frac{3}{x-1} + 4 \log |x-1| - \frac{2}{x+1} - \log |x+1| = \frac{5x+1}{1-x^2} + \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right|.$$

Uwaga. Analizując metodę całkowania funkcji wymiernych konstatujemy, że całka funkcji wymiernej jest postaci

$$W(x) + A \log U(x) + B \arctg V(x),$$

gdzie $W(x)$, $U(x)$ i $V(x)$ są funkcjami wymiernymi, zaś A i B oznaczają stałe współczynniki.

V. Całkowanie niewymierności drugiego stopnia. Rozważać będziemy całkę postaci

$$I = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx.$$

Weźmy przede wszystkim pod uwagę wypadek, gdy $a = 0$. Możemy wówczas założyć, że $b \neq 0$, w przeciwnym bowiem wypadku funkcja podcałkowa redukuje się do stałej. Mamy więc do obliczenia całkę

$$I = \int \sqrt{bx + c} dx, \quad b \neq 0.$$

Podstawiamy $t = bx + c$, tj. $x = \frac{t-c}{b}$, skąd $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{b}$. Całka przekształca się więc w całkę następującą:

$$I = \int \sqrt{t} \frac{dx}{dt} dt = \int \sqrt{t} \frac{1}{b} dt = \frac{2}{3b} t \sqrt{t} = \frac{2}{3b} (bx + c) \sqrt{bx + c}.$$

Założmy z kolei, że $a \neq 0$. Rozważamy dwa wypadki:

1) $b^2 - 4ac \geq 0$. Przy tym założeniu równanie $ax^2 + bx + c = 0$ posiada, jak wiadomo, pierwiastki rzeczywiste i trójmian kwadratowy jest postaci $ax^2 + bx + c = a(x-p)(x-q)$, gdzie p i q są pierwiastkami powyższego równania. Mamy więc

$$I = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \int (x-p) \sqrt{a \frac{x-q}{x-p}} dx.$$

Podstawmy $a \frac{x-q}{x-p} = t^2$, tj. $x = \frac{aq - t^2 p}{a - t^2}$. Otrzymujemy

$$I = \int t \frac{aq - ap}{a - t^2} \frac{dx}{dt} dt.$$

Całka ta jako całka funkcji wymiernej ($\frac{dx}{dt}$ jest bowiem, jak widać, funkcją wymierną) daje się obliczyć metodami, podanymi w N° IV.

2) $b^2 - 4ac < 0$. Można w tym wypadku założyć, że $a > 0$, bo w przeciwnym razie trójmian stanowiący funkcję podpierwiastkową byłby stale ujemny. Stosujemy następujące podstawienie Eulera:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x \sqrt{a} + t, \text{ tj. } bx + c = 2xt \sqrt{a} + t^2, \text{ czyli } x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}.$$

Ponieważ $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ jak również $\frac{dx}{dt}$ wyraża się jako funkcja wy-

mierna zmiennej t , przeto całka nasza sprowadza się do całki funkcji wymiernej.

Powyższe podstawienie Eulera można stosować również w wypadku 1), byleby było $a > 0$.

Jeśli $c > 0$, stosować można drugie podstawienie Eulera:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}, \text{ tj. } ax + b = xt^2 + 2t\sqrt{c}, \text{ czyli } x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}.$$

Podobnie jak poprzednio, widzimy, że podstawienie to sprowadza całkę I do całki funkcji wymiernej względem zmiennej t .

W rezultacie dochodzimy do wniosku, że całka I da się obliczyć dla wszelkich wartości stałych a , b i c . Z powyższych rozważań wynika też z łatwością, że jeśli $R(u, v)$ jest funkcją wymierną z mien-
nych u i v , to całka

$$\int R(\sqrt{ax^2 + bx + c}, x) dx$$

sprowadza się do całkowania funkcji wymiernej (całkowanie jest więc wykonalne).

Przykłady. 1. Niech $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}}$. Zastosujmy pierwsze podstawienie Eulera w nieco zmodyfikowanej postaci. Mianowicie podstawmy $\sqrt{x^2 + c} = t - x$, skąd $x = \frac{t^2 - c}{2t}$ oraz $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2 + c}{2t^2}$.

$$\text{Stąd } t - x = \frac{t^2 + c}{2t} \text{ oraz}$$

$$I = \int \frac{2t}{t^2 + c} \frac{t^2 + c}{2t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log |x + \sqrt{x^2 + c}| + C.$$

2. $I = \int \sqrt{x^2 + c} dx$. Całkę tę można obliczyć z pomocą podstawienia Eulera. Oblicza się prościej tę całkę, sprowadzając ją do całki poprzedniej przez całkowanie przez części. Mianowicie

$$\begin{aligned} I &= x\sqrt{x^2 + c} - \int x \frac{d\sqrt{x^2 + c}}{dx} dx = x\sqrt{x^2 + c} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + c}} = \\ &= x\sqrt{x^2 + c} - \int \frac{x^2 + c - c}{\sqrt{x^2 + c}} dx = x\sqrt{x^2 + c} - I + c \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}}. \end{aligned}$$

$$\text{Stąd } I = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + c} + \frac{c}{2} \log |x + \sqrt{x^2 + c}| + C.$$

Zauważmy, że wzory na pochodne funkcji odwrotnych względem funkcji hiperbolicznych (§ 7, (14h) i (14i)) pozwalają bezpośrednio wypisać wzory na całki rozważane w przykł. 1 dla $c = \pm 1$. Mianowicie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{ar} \sinh x + C = \log |x + \sqrt{x^2 + 1}| + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{ar} \cosh x + C = \log |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C.$$

Uwaga. Jak widzieliśmy, całkowanie niewymierności drugiego stopnia jest zawsze wykonalne. Jeśli jednak pod znakiem pierwiastka zastąpić trójmian $ax^2 + bx + c$ przez wielomian trzeciego lub wyższego stopnia, to problemat całkowalności jest na ogół (tzn. bez specjalnych założeń o współczynnikach) w obrębie funkcji elementarnych niewykonalny.

W szczególności całka $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ nie da się wyrazić z pomocą funkcji elementarnych. Wyprowadza więc ona poza obręb funkcji elementarnych (podobnie jak całka $\int \frac{dx}{x}$ wyprowadza poza obręb funkcji wymiernych). Jest to tzw. *całka eliptyczna*.

Podobnie nie dadzą się wyrazić przy pomocy funkcji elementarnych (i również do całek eliptycznych prowadzą) całki

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}}, \int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}.$$

VI. Całkowanie funkcji trygonometrycznych. Niech $R(u, v)$ oznacza funkcję wymierną dwóch zmiennych u i v . Metoda całkowania funkcji $R(\sin x, \cos x)$ polega na podstawieniu $t = \operatorname{tg}(x/2)$.

Z identyczności $\frac{1}{\cos^2(x/2)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x/2)$ wnosimy, że $\cos^2(x/2) = \frac{1}{1 + t^2}$.

Ponieważ zaś $\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1$, więc

$$\cos x = \frac{2}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Zarazem $\sin^2(x/2) = 1 - \cos^2(x/2) = \frac{t^2}{1 + t^2}$, skąd

$$\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Wreszcie równość $x = 2 \arctg t$ pociąga za sobą

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Powyższe trzy wzory dają

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt,$$

całka zaś ta ostatnia jako całka funkcji wymiernej zmiennej t daje się obliczyć metodami, które już poznaliśmy.

Przykłady. 1) Niech $I = \int \frac{dx}{\cos x}$. Stosując podstawienie $t = \tg(x/2)$,

$$\text{otrzymujemy } I = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2 dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} = \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right|.$$

Zaś $\frac{1+t}{1-t} = \frac{1+\tg(x/2)}{1-\tg(x/2)} = \tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. W rezultacie

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \left| \tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|.$$

Stąd

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log | \tg(x/2) |.$$

Bo $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, a zatem $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \log | \tg(x/2) |$.

Tę ostatnią całkę można też w prosty sposób wyprowadzić z całek (por. II, 5)):

$$\int \tg x dx = -\log |\cos x|, \quad \int \cotg x dx = \log |\sin x|.$$

Bowiem

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)}{\sin(x/2) \cos(x/2)} dx = \\ &= \int \tg(x/2) d(x/2) + \int \cotg(x/2) d(x/2) = \\ &= -\log |\cos(x/2)| + \log |\sin(x/2)| = \log | \tg(x/2) |. \end{aligned}$$

Znając całkę $\int \frac{dx}{\sin x}$, znajdujemy natychmiast całkę $\int \frac{dx}{\cos x}$, podstawiając $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

2) Do całek trygonometrycznych typu $R(\sin x, \cos x)$ sprowadzają się z łatwością niewymierności drugiego stopnia. Sprowadzają się bowiem do funkcji tego typu funkcje

$$\sqrt{1-x^2}, \quad \sqrt{x^2+1}, \quad \sqrt{x^2-1}$$

przez podstawienia: $x = \sin t$, $x = \tg t$, $x = \sec t$; przy czym w każdym z trzech wypadków pochodna $\frac{dx}{dt}$ jest też funkcją wymierną funkcji $\sin t$ i $\cos t$. Istotnie

$$\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t, \quad \frac{d \sin t}{dt} = \cos t,$$

$$\sqrt{\tg^2 t + 1} = \sec t = \frac{1}{\cos t}, \quad \frac{d \tg t}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\sqrt{\sec^2 t - 1} = \tg t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \frac{d \sec t}{dt} = \frac{\sin t}{\cos^2 t}.$$

$$\text{Np. } \int \sqrt{x^2+1} dx = \int \frac{dt}{\cos^3 t}, \quad \text{gdzie } x = \tg t.$$

Niekiedy dogodniej jest podstawić $x = \cos t$ zamiast $x = \sin t$ lub $x = \cotg t$ zamiast $x = \tg t$. Podstawmy np. $x = \cotg t$ w całce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \sin t \frac{d \cotg t}{dt} dt = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\log | \tg(t/2) |.$$

Ponieważ zaś $\frac{1}{x} = \tg t = \frac{2 \tg(t/2)}{1 - \tg^2(t/2)}$, więc $\tg(t/2) = -x + \sqrt{x^2+1}$. Stąd znajdujemy poprzednio już obliczoną na innej drodze całkę

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Podamy obecnie niektóre inne typy całek funkcji trygonometrycznych, mających ważne znaczenie w zastosowaniach.

Całka $I_n = \int \sin^n x dx$. Podamy wzór rekurencyjny.

$$\begin{aligned}
 I_n &= - \int \sin^{n-1} x d \cos x = - \sin^{n-1} x \cos x + \int \cos x \frac{d \sin^{n-1} x}{dx} dx = \\
 &= - \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = \\
 &= - \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n, \text{ bo } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.
 \end{aligned}$$

Stąd żądany wzór: $I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ (dla $n \geq 2$).

Podobnie znajdujemy

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \quad (n \geq 2).$$

$$\text{Całki: } \int \sin mx \sin nx dx, \int \sin mx \cos nx dx \text{ i } \int \cos mx \cos nx dx$$

obliczamy opierając się na znanych z trygonometrii wzorach:

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Znajdujemy z łatwością:

$$\int \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] & \text{dla } m \neq \pm n, \\ \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2mx}{2m} \right) & \text{dla } m = n, \end{cases}$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right] & \text{dla } m \neq \pm n, \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2mx}{2m} & \text{dla } m = n, \end{cases}$$

$$\int \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] & \text{dla } m \neq \pm n, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2mx}{2m} + x \right) & \text{dla } m = n. \end{cases}$$

Całka $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$. Aby tę całkę obliczyć, przedstawiamy mianownik funkcji podcałkowej w postaci $c \sin(x+\Theta)$. Mianowicie wartości na c i Θ wyznaczamy z tożsamości:

$$c \sin x \cos \Theta + c \cos x \sin \Theta = a \sin x + b \cos x,$$

tj. $a = c \cos \Theta$, $b = c \sin \Theta$, czyli $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\Theta = \arctg(b/a)$.

$$\text{Otrzymujemy } \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{c} \int \frac{d(x+\Theta)}{\sin(x+\Theta)} = \frac{1}{c} \log \left| \operatorname{tg} \frac{x+\Theta}{2} \right|.$$

Uwaga. Podaliśmy w N° II, 5 wzór rekurencyjny na całkę $\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$. Całkę tę obliczyć można również opierając się na wzorze na całkę $\int \cos^m x dx$. Podstawiając bowiem $x = \operatorname{tg} t$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \cos^{2n} t \frac{d \operatorname{tg} t}{dt} dt = \int \cos^{2n-2} t dt.$$

Zadania do § 9

Znaleźć całki nieoznaczone następujących funkcji:

- $e^{ax} \sin x$
- xe^x
- $x \sin x$
- $x^a \log x$
- $\arctg x$
- $x^a (\log x)^m$
- $\frac{1}{\sin^2 x}$
- $\frac{1}{1+x^2+x^4}$
- $\frac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)}$
- $\frac{1}{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}$
- $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$
- $\frac{1}{a^2+x^2}$
- $\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}$ przez podstawienie $\sqrt{x^2+c} = x+t$ (por. N° V, prz. 1)
- $\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}$ (m całk.)
- $\frac{x^m}{\sqrt{x^2+c}}$ (m całkowite)
- $\frac{ax+b}{(x^2+c^2)^n \sqrt{px^2+qx+r}}$ Uwaga. Udowodnić, że jeśli R jest funkcją

wymienną dwóch zmiennych, to $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = W(x) + \frac{U(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

gdzie U i W są funkcjami wymiernymi. Wyprowadzić stąd (na mocy 14-16) ogólną metodę całkowania niewymierności drugiego stopnia.

17. $\operatorname{ctg}^n x$ 18. $\sec^n x$ 19. $\sin^m x \cos^n x$
 20. $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 21. $\frac{\arcsin x}{x^3}$

§ 10. Całki oznaczone

I. Definicja i przykłady. Niech dana będzie funkcja $y = f(x)$ ciągła w domkniętym przedziale $a \leq x \leq b$. Przez *całkę oznaczoną $f(x)$ po dx od a do b* rozumiemy

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f w przedziale ab , tj. $F'(x) = f(x)$ dla $a < x < b$ oraz $F'_+(a) = f(a)$, $F'_-(b) = f(b)$.

Całka oznaczona nie zależy od wyboru funkcji F ; znaczy to, że jeśli G jest również funkcją pierwotną funkcji f , to

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

Wynika to natychmiast stąd, że różnica między funkcjami G i F jest stała w przedziale $a \leq x \leq b$ (por. § 7, V, 4, uwaga).

Wzór (1) przyjmujemy też w wypadku, gdy $b < a$. Mamy więc

$$(2) \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

oraz

$$(3) \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Z tw. 2, § 9, II wynika natychmiast, że *każda funkcja ciągła w przedziale $a \leq x \leq b$ posiada całkę $\int_a^b f(x) dx$, czyli — jak mówimy — jest całkowalna w tym przedziale.*

Na oznaczenie różnicy $F(b) - F(a)$ używamy też symbolu

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Uwaga. Jak z definicji wynika, całka oznaczona $\int_a^b f(x) dx$ zależy

od funkcji f i od granic całkowania a i b . Nie jest natomiast funkcją zmiennej x (x występuje tu jako tzw. zmienna „związana”). Wartość całki nie ulegnie zmianie, jeśli zmienną x zastąpimy przez jakąś inną zmienną, np. t :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Przykłady. 1) $\int_a^b c dx = c(b-a)$. Istotnie $\int c dx = cx + C$, skąd

$$\int_a^b c dx = [cx]_a^b = c(b-a).$$

2) $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Bowiem $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$, skąd $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

3) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos 0 = 1$.

4) Następujące całki oznaczone (Fouriera, por. § 11, VII) znajdujemy z łatwością na podstawie wzorów na całki nieoznaczone (§ 9, VI): jeśli m i n oznaczają dwie różne liczby naturalne, to

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx;$$

dla dowolnych m i n naturalnych: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$;

dla dowolnego naturalnego m : $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx$.

5) Dla dowolnego naturalnego n zachodzą wzory:

$$(4) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}.$$

Wynikają one z łatwością ze wzoru rekurencyjnego (§ 9, VI):

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx \quad (n \geq 2)$$

oraz ze wzorów:

$$\left[-\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x \right]_0^{\pi/2} = 0, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^1 x \, dx = 1, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^0 x \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Zauważmy, że wzory (4) pozostają w mocy, jeśli zastąpić *sinus* przez *cosinus*.

II. Wzory rachunkowe. Pierwsze 3 wzory ogólne dla całek nieoznaczonych (§ 9, III) prowadzą natychmiast do następujących trzech wzorów rachunkowych na całki oznaczone (o funkcjach podcałkowych zakładamy, że są ciągłe w domkniętym przedziale całkowania):

$$1. \quad \int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx.$$

$$2. \quad \int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx.$$

$$3. \quad \int_a^b f(x) g'(x) \, dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) \, dx.$$

Wzór na całkowanie przez podstawienie prowadzi do wzoru następującego

$$4. \quad \int_a^b g[f(x)] f'(x) \, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) \, dy.$$

Niech bowiem $G(y)$ będzie funkcją pierwotną funkcji $g(y)$. Wówczas (na mocy wzoru 4, § 9, III) $G[f(x)]$ jest funkcją pierwotną funkcji $g[f(x)] f'(x)$. A zatem na mocy definicji całki oznaczonej

$$\int_a^b g[f(x)] f'(x) \, dx = G[f(b)] - G[f(a)] = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) \, dy.$$

5. Twierdzenie o podziale przedziału całkowania.

$$\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Bo oznaczając przez F funkcję pierwotną funkcji f , mamy

$$[F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = F(b) - F(a).$$

$$6. \quad \text{Jeśli } f(x) \geq 0 \text{ i } a < b, \text{ to } \int_a^b f(x) \, dx \geq 0.$$

Istotnie, oznaczając jak poprzednio przez F funkcję pierwotną funkcji f , mamy $F'(x) = f(x) \geq 0$, skąd wynika, że funkcja F jest rosnąca

(w szerszym sensie). A zatem $F(a) \leq F(b)$, tj. $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \geq 0$.

Wzór 6 pociąga za sobą ogólniejszy wzór następujący:

$$7. \quad \text{Jeśli } f(x) \leq g(x) \text{ i } a < b, \text{ to } \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Istotnie, z równości $g(x) = f(x) + [g(x) - f(x)]$ wynika na mocy 1:

$$\int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx. \text{ Stąd wnosimy, że}$$

$$\int_a^b g(x) \, dx \geq \int_a^b f(x) \, dx,$$

ponieważ nierówność $f(x) \leq g(x)$ pociąga za sobą $\int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx \geq 0$ na mocy 6.

Jak widać ze wzoru 7, relacja $\leq$ przy całkowaniu się zachowuje (o ile $a < b$). Wyprowadzimy stąd dwa wzory następujące:

$$8. \quad \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx, \quad \text{o ile } a < b.$$

Z podwójnej bowiem nierówności $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ wynika przez całkowanie (na mocy 7):

$$\int_a^b -|f(x)| \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b |f(x)| \, dx, \text{ tj. } -\int_a^b |f(x)| \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b |f(x)| \, dx,$$

skąd wzór żądany (bo nierówność $-u \leq v \leq u$ pociąga za sobą nierówność $|v| \leq u$, por. § 1, (16)).

$$9. \quad \text{Wzór na wartość średnią. } \int_a^{a+h} f(x) \, dx = h f(a + \Theta h), \text{ gdzie } \Theta \text{ jest}$$

odpowiednio dobraną liczbą spełniającą warunek $0 < \Theta < 1$.

Niech bowiem F oznacza funkcję pierwotną funkcji f , tj. $F'(x) = f(x)$. Mamy więc

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = F(a+h) - F(a) = h F'(a + \Theta h) = h f(a + \Theta h),$$

na mocy tw. o wartości średniej rachunku różniczkowego (§ 7, V, 2).

10. Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale $a \leq x \leq b$. Połóżmy

$$(1) \quad g(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Zachodzi wówczas następujący podstawowy wzór:

$$(2) \quad g'(x) = f(x), \text{ tj. } \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

czyli całka $\int_a^x f(t) dt$, traktowana jako funkcja górnej granicy całkowania, jest funkcją pierwotną funkcji podcałkowej.

Niech bowiem F oznacza jakąkolwiek funkcję pierwotną funkcji f , tj. $F'(x) = f(x)$. W myśl wzoru I (1) mamy $g(x) = F(x) - F(a)$. Różniczkując otrzymujemy $g'(x) = F'(x) = f(x)$.

Uwagi. 1^o Na krańcach przedziału całkowania mamy

$$g'_+(a) = f(a) \quad \text{oraz} \quad g'_-(b) = f(b).$$

2^o Zauważmy, że funkcja g jako funkcja różniczkowalna jest ciągła.

11. Jeśli ciąg funkcji ciągłych $f_n(x)$, $a \leq x \leq b$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f(x)$ w przedziale ab , to całka granicy = granicy całek:

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx, \text{ tj. } \int_a^b \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Ponieważ granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą (§ 6, I, tw. 1), funkcja f jest całkowalna. Stosując do funkcji f i f_n wzór 1, mamy więc

¹ Można też pisać $g(x) = \int_a^x f(x) dx$, co jednak jest mniej przejrzyste.

$$(4) \quad \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b [f(x) - f_n(x)] dx.$$

Zarazem, ze względu na zbieżność jednostajną ciągu funkcji $f_1, f_2, \dots$ do funkcji f , istnieje dla danego $\varepsilon > 0$ takie k , że dla $n > k$ mamy $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Stąd na mocy (4), 8 i 7:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b f(x) - f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \varepsilon |b - a|.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że dla $n > k$ zachodzi nierówność

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \varepsilon |b - a|.$$

Oznacza to, że spełniona jest równość (3).

Jako wniosek z tw. 11, otrzymujemy:

$$12. \quad \int_a^b \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

przy założeniu, że funkcje f_n są ciągłe i że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $a \leq x \leq b$.

Przykłady i zastosowania. 1) Aby obliczyć całkę $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$, podstawiamy $x = \sin t$. Mamy więc $0 = \sin 0$, $1 = \sin(\pi/2)$. A zatem (ob. I, 5).

$$(5) \quad \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}.$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \cos nx dx = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sin nx dx.$$

Istotnie, podstawiając $y = nx$, otrzymujemy

$$\int_a^b \cos nx dx = \frac{1}{n} \int_{na}^{nb} \cos y dy = \frac{1}{n} (\sin nb - \sin na).$$

Ponieważ $|\sin nb - \sin na| \leq 2$, jest więc $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \cos nx dx = 0$.

Analogicznie dowodzi się, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sin nx \, dx = 0$.

Ogólniej: zachodzi wzór następujący:

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx$, gdzie f oznacza dowolną funkcję ciągłą.

Niech dana będzie liczba $\varepsilon > 0$. Ze względu na ciągłość jednostajną funkcji f w przedziale $a \leq x \leq b$ istnieje takie m , że jeśli odcinek ab podzielić na m równych odcinków, to dla każdej pary punktów x i x' należących do tego samego spośród tych m odcinków zachodzi nierówność $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Niech $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ oznaczają punkty podziału; ponadto niech $a_0 = a, a_m = b$. Na mocy wz. 5 mamy

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx &= \sum_{k=1}^m \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) \cos nx \, dx = \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ f(a_k) \int_{a_{k-1}}^{a_k} \cos nx \, dx + \int_{a_{k-1}}^{a_k} [f(x) - f(a_k)] \cos nx \, dx \right\}. \end{aligned}$$

A więc (por. wz. 8)

$$\left| \int_a^b f(x) \cos nx \, dx \right| \leq \sum_{k=1}^m |f(a_k)| \cdot \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} \cos nx \, dx \right| + \varepsilon(b-a),$$

ponieważ $|f(x) - f(a_k)| |\cos nx| \leq |f(x) - f(a_k)| < \varepsilon$. Ponieważ zaś, jak do-

wiedliśmy, $\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} \cos nx \, dx \right| = \frac{1}{n} |\sin na_k - \sin na_{k-1}| \leq \frac{2}{n}$, przeto oznaczając

przez M kres górny funkcji $|f(x)|$ w przedziale $a \leq x \leq b$, otrzymujemy

$$\left| \int_a^b f(x) \cos nx \, dx \right| \leq \frac{2}{n} Mm + \varepsilon(b-a).$$

Dobierając więc n tak duże, aby $\frac{2}{n} Mm < \varepsilon$, mieć będziemy

$$\left| \int_a^b f(x) \cos nx \, dx \right| < \varepsilon(1+b-a).$$

Wynika stąd pierwsza z równości 3). Dowód drugiej jest analogiczny.

4) Jeśli nie znamy całki nieoznaczonej danej funkcji, lecz możemy tę funkcję rozwinąć na szereg jednostajnie zbieżny funkcji, które potrafimy scałkować (np. na szereg potęgowy), to zastosowanie twierdzenia 12 prowadzi do wyrażenia całki oznaczonej przez szereg.

Obliczmy w ten sposób całkę eliptyczną (por. § 9, V, uwaga):

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \quad (k^2 < 1).$$

Jak wiemy (ob. § 8, IV):

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^6 + \dots \quad (|t| < 1).$$

Zastępując t przez $k \sin x$, mamy więc

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4 \sin^4 x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^6 \sin^6 x + \dots$$

Szereg ten jest zbieżny jednostajnie w przedziale $0 \leq x \leq \pi/2$ (nawet na całej osi x -ów), szereg bowiem przedstawiający $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $-|k| \leq t \leq |k|$. Całkując wyraz po wyrazie i opierając się na wzorze I(4)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{\pi}{2},$$

otrzymujemy

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right].$$

III. Całka oznaczona jako granica sum. Udowodnimy obecnie twierdzenia, na których opierają się ważne zastosowania geometryczne całki oznaczonej.

1. Niech dana będzie funkcja ciągła $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, oraz liczba $\varepsilon > 0$. Istnieje wówczas liczba $\delta > 0$ o własności następującej: jeżeli punkty $a_0 < a_1 < \dots < a_m$ spełniają dla każdego $k = 1, 2, \dots, m$ nierówność $a_k - a_{k-1} < \delta$, przy czym $a_0 = a$ i $a_m = b$, i jeżeli punkty $x_1, \dots, x_m$ wybrane są odpowiednio z przedziałów $a_0 a_1, \dots, a_{m-1} a_m$ (tj. $a_{k-1} \leq x_k \leq a_k$), to

$$\left| \sum_{k=1}^m f(x_k)(a_k - a_{k-1}) - \int_a^b f(x) \, dx \right| < \varepsilon.$$

Istotnie, ze względu na jednostajną ciągłość funkcji f w przedziale $a \leq x \leq b$ (ob. § 5, IV, 1) istnieje takie $\delta > 0$, że warunek $|x - x'| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Na mocy wzorów 5 i 9 N° II mamy

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x) dx + \dots + \int_{a_{m-1}}^{a_m} f(x) dx =$$

$$= f(x'_1)(a_1 - a_0) + \dots + f(x'_m)(a_m - a_{m-1}) = \sum_{k=1}^m f(x'_k)(a_k - a_{k-1}),$$

gdzie x'_k jest odpowiednio dobraną liczbą w przedziale $a_{k-1} a_k$.

Ponieważ punkty x_k i x'_k należą do przedziału $a_{k-1} a_k$, przeto odległość ich jest nie większa od długości tego przedziału, tj. $|x_k - x'_k| \leq a_k - a_{k-1} < \delta$.

Stąd zaś wynika, że $|f(x_k) - f(x'_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. W rezultacie

$$\left| \sum_{k=1}^m f(x_k)(a_k - a_{k-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_{k=1}^m [f(x_k) - f(x'_k)](a_k - a_{k-1}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x'_k)|(a_k - a_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^m (a_k - a_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

W ten sposób tw. 1 jest udowodnione.

Weźmy teraz pod uwagę zamiast jednego podziału odcinka ab (wyznaczonego przez punkty $a_0, a_1, \dots, a_m$) ciąg podziałów tego odcinka na mniejsze odcinki. Niech n -ty podział wyznaczony będzie przez punkty

$$a_n, a_{n,1}, \dots, a_{n,l_n}, \text{ przy czym } a_{n,0} = a, a_{n,l_n} = b.$$

Niech r_n oznacza długość największego odcinka n -tego podziału. Mówić będziemy, że powyższy ciąg podziałów jest *normalny*, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Zachodzi twierdzenie następujące:

2. Niech dana będzie funkcja ciągła $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, oraz normalny ciąg podziałów tego odcinka. Jeśli punkt $x_{n,k}$ należy do k -tego przedziału n -tego podziału (tj. $a_{n,k-1} \leq x_{n,k} \leq a_{n,k}$ dla $k = 1, 2, \dots, l_n$, $n = 1, 2, \dots$), to

$$(5') \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$

Niech bowiem dane będzie $\varepsilon > 0$. Dobieramy N w taki sposób, aby dla $n > N$ zachodziła nierówność $r_n < \delta$, tj. aby wszystkie przedziały n -tego podziału miały długość $< \delta$ (gdzie δ ma to samo znaczenie, co w twierdzeniu poprzednim). Na mocy tw. 1 mamy więc

$$\left| \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Oznacza to, że spełniona jest równość (5').

Uwaga. Znakowanie $\int_a^b y dx$ pozostaje w bliskim związku pojęciowym i historycznym z tw. 2. Symbol $\int$, zmodyfikowana litera S , oznaczać miał sumowanie nieskończone wielu „nieskończenie małych” składników postaci $y dx$; ta niesprecyzowana pod względem logicznym koncepcja znajduje obecnie swój ścisły wyraz w tw. 2, które — jak widać — przedstawia całkę oznaczoną nie jako sumę nieskończoną, lecz jako granicę sum o rosnącej liczbie składników.

Do definicji całki opartej na wzorze (5') powrócimy w N° XI.

IV. Całka jako pole. Niech $f(x) \geq 0$ dla $a \leq x \leq b$. Całka $\int_a^b f(x) dx$ jest to pole obszaru P złożonego z punktów x, y płaszczyzny, spełniających warunki:

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Jest tak istotnie, gdy funkcja f jest liniowa. Obszar ten jest wówczas trapezem, którego podstawy (równoległe do osi y -ów) mają długość $f(a)$ i $f(b)$, zaś wysokość ma długość $b-a$. Pole trapezu jest więc $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$.

Z drugiej strony, funkcja f jako funkcja liniowa jest postaci $f(x) = cx + d$. A więc

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}c(b^2 - a^2) + d(b-a) = (b-a) \left(\frac{1}{2}cb + \frac{1}{2}ca + d \right) =$$

$$= \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a),$$

bowiem $f(a) = ca + d$ i $f(b) = cb + d$.

Widzimy więc, że w wypadku, gdy funkcja f jest liniowa, pojęcie pola znane z geometrii elementarnej równoważne jest powyżej zdefiniowanemu pojęciu pola jako całki oznaczonej. Równoważność ta zachodzi też w wypadku ogólniejszym, gdy funkcja f jest przedziałami

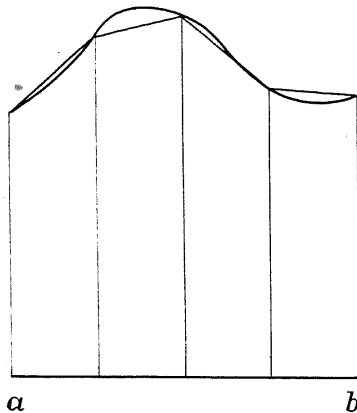
liniowa (por. § 6, IV), tj. gdy wykres tej funkcji jest łamaną. Obszar zawarty bowiem między tą łamaną a osią x -ów składa się z pewnej ilości trapezów, pole jego jest więc sumą pól tych trapezów; ponieważ zaś pole każdego z tych trapezów jest — jak przed chwilą stwierdziliśmy — odpowiednią całką, zatem pole całego obszaru jest sumą tych całek, czyli $= \int_a^b f(x) dx$ (na mocy II, 5).

W ogólnym wypadku, gdy f jest dowolną funkcją ciągłą, funkcja f jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji przedziałami liniowych (ob. § 6, IV): $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Stąd na mocy III, 11

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Widzimy więc, że pole obszaru wyznaczonego przez krzywą $y = f(x)$

(określone jako całka $\int_a^b f(x) dx$) jest granicą pól wieloboków „wpisanych” w tę krzywą.



Rys. 13

Zachodzi tu więc zupełna analogia z polem koła, które określamy jako granicę pól wielokątów wpisanych (lub opisanych). Podobnie pole obszaru P wyznaczonego przez krzywą $y=f(x)$ określamy jako całkę $\int_a^b f(x) dx$.

Można by jednak pole obszaru zdefiniować na gruncie teorii miary — której tu rozpatrywać nie będziemy — i następnie udowodnić, że definicja ta równoważna jest

definicji pola z pomocą całki określonej (dowód taki przeprowadziliśmy w wypadku najbardziej elementarnym, mianowicie gdy funkcja f jest liniowa, wzgl. przedziałami liniowa).

Przykłady. 1° Niech $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$. Obliczmy $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$.

Znajdziemy w tym celu całkę nieoznaczoną. Podstawiając $z = \frac{x}{r}$, otrzymujemy (por. § 9, III, 4):

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= r^2 \int \sqrt{1 - z^2} dz = r^2 \left(\frac{1}{2} \arcsin z + \frac{1}{2} z \sqrt{1 - z^2} \right) = \\ &= r^2 \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{1}{2} \frac{x}{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Stąd } \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = r^2 \left(\frac{1}{2} \arcsin 1 - \frac{1}{2} \arcsin (-1) \right) = \frac{1}{2} \pi r^2,$$

bo $\arcsin 1 = \pi/2$.

Otrzymaliśmy w ten sposób znany z geometrii elementarnej wzór na pole półkola o promieniu r .

2° Pole obszaru zawartego między łukiem paraboli $y = x^2$, osią x -ów i prostą $x = a$ wyraża się całką: $\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} a^3$.

3° Pole elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ obliczamy jak następuje: równanie

$$\text{powyższe daje } y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \text{ skąd pole elipsy} = 2b \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Stosując podobnie jak w przykładzie 1° wzór na całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt{1 - z^2} dz, \text{ znajdujemy } 2b \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \pi ab.$$

4° Pole między sinusoidą a odcinkiem 0π osi x -ów jest to

$$\int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi = 2.$$

5° Niech dane będą dwie funkcje ciągłe $u(x)$ i $v(x)$ określone w odcinku $a \leq x \leq b$. Niech przy tym $u(x) < v(x)$ dla $a < x < b$. Obszar N zawarty pomiędzy tymi dwiema krzywymi, tj. zbiór punktów x, y płaskich, spełniających warunki:

$$a \leq x \leq b, \quad u(x) \leq y \leq v(x),$$

nazywamy obszarem normalnym.

Pole obszaru normalnego N jest to $\int_a^b [v(x) - u(x)] dx$.

Istotnie, jeśli stałe $u(x) \geq 0$, to obszar N otrzymujemy z obszaru, zawartego między krzywą $y = v(x)$ a osią x -ów, przez odjęcie obszaru zawartego między krzywą $y = u(x)$ a osią x -ów; pole pierwszego obszaru jest to $\int_a^b v(x) dx$, pole drugiego: $\int_a^b u(x) dx$, a zatem pole N jest różnicą tych całek.

Jeśli zaś nierówność $u(x) \geq 0$ zachodzi nie dla wszystkich x , to oznaczamy przez m dolny kres funkcji u w przedziale $a \leq x \leq b$ i przez N_0 obszar normalny wyznaczony przez krzywe $u(x) - m$ i $v(x) - m$. Obszar N_0 powstaje z N przez przesunięcie, jest więc do niego przystający. A zatem

$$\text{pole } N = \text{pole } N_0 = \int_a^b \left\{ [v(x) - m] - [u(x) - m] \right\} dx = \int_a^b [v(x) - u(x)] dx.$$

Uwagi. 1) Gdy rozważamy pole obszaru normalnego, jest rzeczą obojętną, czy uwzględniamy jego obwód. Obwodowi bowiem przypisujemy pole 0. Pochodzi to stąd, że krzywą $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, można zamknąć w obszar normalny o polu dowolnie małym, mianowicie przez obszar zawarty pomiędzy łukami $y = f(x) + \varepsilon$ i $y = f(x) - \varepsilon$; pole tego obszaru jest $2\varepsilon(b - a)$.

2) Symbol $y dx$ nazywamy „elementem pola“ (por. § 7, XIII).

3) Całkę $\int_a^b f(x) dx$ interpretować możemy jako pole również bez założenia, że $f(x) \geq 0$, o ile umówimy się uważać pole obszarów położonych pod osią x -ów za ujemne (przy czym $a < b$). Jeśli więc przedział ab można tak podzielić na mniejsze przedziały, że w każdym z tych przedziałów z osobna funkcja jest stała bądź nieujemna, bądź niedodatnia, to $\int_a^b f(x) dx$ jest algebraiczną sumą pól wyznaczonych przez łuki krzywej $y = f(x)$ z każdym z tych przedziałów z osobna.

Np. dla krzywej $y = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, przedział $0, 2\pi$ dzielimy na połowy. Sinusoida tworzy z przedziałem 0π osi x -ów obszar o polu 2, zaś z przedziałem $\pi, 2\pi$ obszar o polu -2 . Algebraiczna suma tych pól, tj.

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0.$$

4) Gdy interpretować całkę oznaczoną jako pole, wiele z poprzednio udowodnionych twierdzeń nabiera przejrzystej treści geometrycznej (zwłaszcza gdy funkcja podcałkowa jest nieujemna). Np. tw. II, 9 oznacza, że obszar wyznaczony przez łuk $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, oś x -ów i odcinki pionowe położone na prostych $x = a$ i $x = b$ ma to samo pole, co prostokąt mający za podstawę odcinek $a \leq x \leq b$ osi x -ów, zaś za wysokość rzędną odpowiednio dobranego punktu na łuku $y = f(x)$, $a < x < b$.

Z tw. II, 10 (ob. uwaga 2^o) wynika, że pole obszaru wyznaczonego przez łuk $y = f(x)$, $a \leq x \leq x'$ zmienia się w sposób ciągły wraz z x' .

Tw. II, 11 oznacza, że jeśli funkcje f_n są zbieżne jednostajnie w przedziale ab do funkcji f , to pola odpowiednich obszarów są zbieżne do pola obszaru wyznaczonego przez f .

V. Długość łuku. Niech dana będzie funkcja $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, o ciągłej pochodnej $f'(x)$. Całka

$$(6) \quad \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

przedstawia długość łuku złożonego z punktów x, y , spełniających warunki

$$(7) \quad y = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Jest tak istotnie, gdy funkcja f jest liniowa, tj. gdy rozważana krzywa jest odcinkiem łączącym punkty $[a, f(a)]$ i $[b, f(b)]$. Długość odcinka jest to odległość jego końców, czyli

$$\sqrt{(b-a)^2 + [f(b) - f(a)]^2}.$$

Ten sam wynik otrzymujemy z pomocą całki. Połóżmy bowiem $f(x) = cx + d$. Stąd $f'(x) = c$. A zatem

$$\int_a^b \sqrt{1 + c^2} dx = \sqrt{1 + c^2} (b - a) = \sqrt{(b-a)^2 + [f(b) - f(a)]^2},$$

$$\text{ponieważ } c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

W ogólnym wypadku (gdy nie zakładamy liniowości funkcji f) uzasadnienie przyjętej powyżej definicji długości łuku znajdujemy w następującej konstrukcji.

Jak wiemy (por. § 6, IV), łuk krzywej dany przez warunki (7) można aproksymować przez łamane w ten łuk wpisane (ob. rys. 13). Otóż udowodnimy, że oznaczając przez L długość tego łuku wyrażoną przez całkę (6), zaś przez $L_1, L_2, \dots$ długości kolejnych łamanych, mamy

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n.$$

Niech bowiem n -ta łamana powstaje przez łączenie odcinkami kolejno punktów: $[a_{n,0}, f(a_{n,0})], [a_{n,1}, f(a_{n,1})], \dots, [a_{n,l_n}, f(a_{n,l_n})]$, przy czym $a_{n,0} = a$, $a_{n,l_n} = b$ oraz długość największego przedziału n -tego podziału dąży do 0, gdy n dąży do ∞ (tj. ciąg tych podziałów jest normalny w sensie N° III). Długość n -tej łamanej jest sumą długości poszczególnych odcinków, z których ona powstaje, czyli

$$L_n = \sum_{k=1}^{l_n} \sqrt{(a_{n,k} - a_{n,k-1})^2 + [f(a_{n,k}) - f(a_{n,k-1})]^2}.$$

Stosując tw. o wartości średniej, otrzymujemy

$$L_n = \sum_{k=1}^{l_n} (a_{n,k} - a_{n,k-1}) \sqrt{1 + [f'(x_{n,k})]^2}, \text{ gdzie } a_{n,k-1} \leq x_{n,k} \leq a_{n,k}.$$

Stąd wnosimy na mocy tw. III, 2, wzór (5'), w którym podstawiamy $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ na miejsce funkcji $f(x)$, że

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n.$$

Uwagi przez nas poczynione na temat definicji pola przenoszą się na definicję długości łuku: na gruncie ogólnej teorii miary określa się pojęcie długości krzywej i dowodzi się, że dla łuków postaci (7) definicja ta zgodna jest z podaną tu definicją z pomocą całki (6). Ponieważ jednak w niniejszych wykładach nie dysponujemy teorią miary, długość łuku (7) określamy jako równą całce (6).

Rozważana przez nas aproksymacja długości łuku przez długości łamanych wpisanych jest uogólnieniem znanej z geometrii elementarnej aproksymacji długości okręgu koła przez obwody wieloboków wpisanych. Udowodnimy, że długość łuku koła w sensie geometrii elementarnej równa się długości w sensie tu przyjętej definicji.

Przykład. Niech $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $r \cos \beta \leq x \leq r \cos \alpha$ ($0 < \alpha < \beta < \pi$). Rozważany łuk jest częścią półokręgu o promieniu r i o środku O . Obliczmy całkę (6). Mamy $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, skąd $\int \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

Podstawiając $x = r \cos t$ znajdujemy $\int \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -rt = -r \arccos(x/r)$.

Stąd $\int_{r \cos \beta}^{r \cos \alpha} \sqrt{1 + (y')^2} dx = (\beta - \alpha)r$, zgodnie ze znanym wzorem z geometrii elementarnej.

Położmy

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

Funkcja $s(x)$, tj. długość łuku traktowana jako funkcja odciętej prawego (zmiennego) końca łuku, jest funkcją rosnącą. Istnieje więc funkcja względem niej odwrotna $x = x(s)$, która przedstawia x jako funkcję długości łuku. Zachodzą wzory:

$$(8) \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \text{ oraz } \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Oznaczając przez α kąt utworzony przez styczną do krzywej z osią x -ów, mamy $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$, a zatem $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$. Znaczy to, że pochodna $\frac{dx}{ds}$ jest *cosinusem kierunkowym* względem osi x -ów stycznej do krzywej $y = f(x)$.

Uwaga. Na „element długości” mamy wzór symboliczny analogiczny do wzoru Pytagorasa: $ds^2 = dx^2 + dy^2$, o przejrzystej treści geometrycznej (por. pojęcie różniczki, § 7, XIII).

Krzywizna. Oznaczmy jak poprzednio przez α kąt utworzony przez styczną z osią x -ów. Kąt ten jest funkcją x -a; uważając x za funkcję długości s , przedstawiamy α jako funkcję $\alpha(s)$ zmiennej s . Pochodną $k = \frac{d\alpha}{ds}$ nazywamy *krzywizną* krzywej $y = f(x)$ w danym punkcie. Odwrotność $\frac{1}{|k|} = \rho$ nazywamy *promieniem krzywizny*.

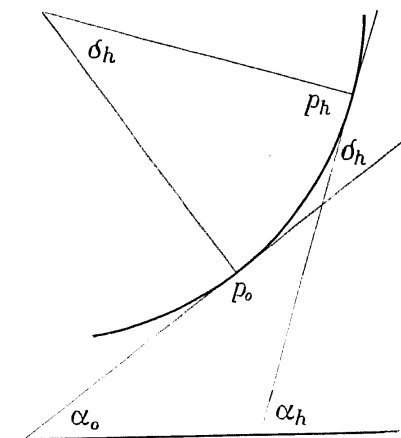
Geometrycznie krzywiznę k interpretujemy jak następuje:

Poprowadźmy styczne do rozważanej krzywej w punktach

$$p_0 = [x(s_0), y(s_0)] \text{ oraz } p_h = [x(s_0 + h), y(s_0 + h)].$$

Styczne te tworzą z dodatnim kierunkiem osi x -ów kąty $\alpha_0 = \alpha(s_0)$ oraz $\alpha_h = \alpha(s_0 + h)$. Kąt δ_h między tymi stycznymi $= \alpha_h - \alpha_0$. Ten sam kąt

tworzą ze sobą normalne do krzywej w punktach p_0 i p_h . Rozważmy stosunek tego kąta do długości łuku p_0p_h , tj. do h . Krzywizna krzywej $y=f(x)$ w punkcie p_0 jest to granica, do której dąży ten stosunek, gdy h dąży do 0.



Rys. 14

W szczególności, jeśli krzywa nasza jest łukiem koła $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r \leq x \leq r$, to $h=-r \delta_h$, a więc rozważany stosunek ma stałą wartość $-\frac{1}{r}$. Taką samą więc wartość ma krzywizna k , zaś promieniem krzywizny jest promień koła r .

W wypadku linii prostej normalne są równoległe. A zatem $\delta_h=0$ stale i krzywizna $=0$; promień krzywizny jest więc nieskończony.

Jeśli $k \neq 0$, to punkt położony na normalnej w odległości ρ od punktu p_0 po tej samej stronie stycznej, po której lokalnie leży krzywa, nazywamy *środkiem krzywizny*. Można dowieść, że punkt ten jest granicznym położeniem, do którego zmierza punkt przecięcia normalnych w punktach p_0 i p_h , gdy h dąży do 0.

Krzywiznę k wyrazić możemy we współrzędnych x i y jak następuje. Biorąc pod uwagę, że $\alpha = \arctg \left(\frac{dy}{dx} \right)$ oraz opierając się na wzorze (8), otrzymujemy

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}},$$

tj.

$$(8') \quad k = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}.$$

Środek masy. Niech dany będzie na płaszczyźnie układ n punktów materialnych o współrzędnych: $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ i o masach $m_1, \dots, m_n$. Środkiem masy tego układu jest punkt o współrzędnych

$$(8a) \quad \bar{x} = \frac{-m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}, \quad \bar{y} = \frac{m_1 y_1 + \dots + m_n y_n}{m_1 + \dots + m_n}.$$

Aby określić środek masy łuku $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$, o stałej gęstości g , postępujemy jak następuje. Przedstawmy (jak to już wyżej czyniliśmy) x jako funkcję długości s ; tj. $x=x(s)$; stąd $y=f[x(s)]=y(s)$. Niech S oznacza długość łuku $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$. Podzielmy łuk ten na n równych części. Stanowi to podział przedziału $0S$ na n równych przedziałów; niech punktami wyznaczającymi ten podział będą:

$$0 = s_{n,0}, \quad s_{n,1}, \dots, s_{n,n} = S.$$

Punkt o współrzędnych $x(s_{n,k}), y(s_{n,k})$ jest końcem k -ego łuku n -ego podziału; przyporządkujmy mu masę tego łuku. Masa ta jest iloczynem gęstości przez długość łuku, tj. $=g \cdot (s_{n,k} - s_{n,k-1})$. A zatem przy danym n , środkiem masy układu punktów

$$[x(s_{n,1}), y(s_{n,1})], \dots, [x(s_{n,n}), y(s_{n,n})]$$

jest punkt o współrzędnych

$$x_n = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n x(s_{n,k}) (s_{n,k} - s_{n,k-1}), \quad y_n = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n y(s_{n,k}) (s_{n,k} - s_{n,k-1}),$$

bowiem masa łuku $= gS$.

Graniczne położenie punktu (x_n, y_n) , gdy n dąży do ∞ , jest położeniem środka masy rozważanego łuku. Współrzędnymi środka masy są więc

$$(8b) \quad \bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{S} \int_0^S x ds \quad \text{oraz} \quad \bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{S} \int_0^S y ds.$$

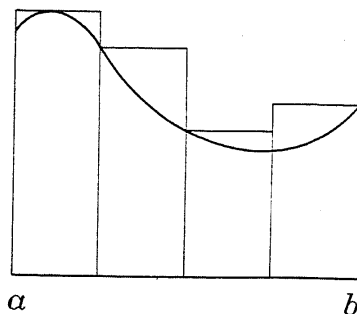
VI. Objętość i powierzchnia figur obrotowych. Niech dana będzie funkcja ciągła $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$. Niech przy tym $f(x) \geq 0$. Oznaczmy jak w N° IV, przez P obszar złożony z punktów x, y spełniających warunki

$a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$. Obracając obszar P dookoła osi x -ów, otrzymujemy bryłę obrotową. Oznaczmy jej objętość przez W . Mamy

$$(9) \quad W = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Aby wzór ten uzasadnić, weźmy pod uwagę normalny ciąg podziałów, zachowując znakowanie N° III, 2. Niech $f(x_{n,k})$ będzie kresem górnym funkcji f w przedziale $a_{n,k-1}, a_{n,k}$. Zastępując łuk naszej krzywej położony nad tym przedziałem przez odcinek $y = f(x_{n,k})$, otrzymamy przy obrocie dookoła osi x -ów walec o podstawie $\pi f(x_{n,k})^2$ i o wysokości $a_{n,k} - a_{n,k-1}$, a zatem o objętości

$$\pi f(x_{n,k})^2 (a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$



Rys. 15

Postępując w ten sposób dla każdego k (przy stałym n) zastępujemy rozważaną przez nas bryłę obrotową przez bryłę na niej opisaną, złożoną z pewnej ilości walców. Objętość tej bryły jest sumą objętości poszczególnych walców; oznaczając tę objętość przez W_n , mamy więc

$$W_n = \pi \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})^2 (a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$

W granicy, na mocy tw. 2, N° III, otrzymujemy

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n.$$

Analogicznie — gdybyśmy w powyższej konstrukcji zastąpili kres górny przez kres dolny — dowiedlibyśmy, że W jest granicą objętości pewnych brył wpisanych w rozważaną bryłę obrotową, z których każda składa się z pewnej ilości walców.

Oznaczmy przez B pole powierzchni zakreślonej przez łuk $y = f(x)$,

$a \leq x \leq b$, tj. pole powierzchni bocznej rozważanej bryły obrotowej. Zachodzi wzór (przy założeniu ciągłości pochodnej $f'(x)$):

$$(10) \quad B = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Ażeby wzór ten uzasadnić, aproksymujemy rozważaną powierzchnię przez powierzchnie, których pole znane jest z geometrii elementarnej. Weźmy w tym celu pod uwagę ciąg łamanych, aproksymujących łuk $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, określonych w N° V (ob. rys. 13). Powierzchnia powstająca przez obrót takiej łamanej dookoła osi x -ów składa się ze skończonej ilości stożków ściętych. Ponieważ tworzącą stożka ściętego jest odcinek łączący punkty $[a_{n,k-1}, f(a_{n,k-1})]$ i $[a_{n,k}, f(a_{n,k})]$, a więc odcinek o długości

$$\sqrt{(a_{n,k} - a_{n,k-1})^2 + [f(a_{n,k}) - f(a_{n,k-1})]^2},$$

zaś promienie podstaw mają odpowiednio długość $f(a_{n,k})$ i $f(a_{n,k-1})$, przeto pole powierzchni bocznej stożka wynosi na mocy znanego z geometrii elementarnej wzoru:

$$\pi [f(a_{n,k-1}) + f(a_{n,k})] \cdot \sqrt{(a_{n,k} - a_{n,k-1})^2 + [f(a_{n,k}) - f(a_{n,k-1})]^2}.$$

Oznaczając więc przez B_n pole powierzchni, która powstaje z obrotu n -tej łamanej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} B_n &= \pi \sum_{k=1}^{l_n} [f(a_{n,k-1}) + f(a_{n,k})] \cdot \sqrt{(a_{n,k} - a_{n,k-1})^2 + [f(a_{n,k}) - f(a_{n,k-1})]^2} = \\ &= \pi \sum_{k=1}^{l_n} [f(a_{n,k-1}) + f(a_{n,k})] \cdot \sqrt{1 + [f'(x_{n,k})]^2} (a_{n,k} - a_{n,k-1}), \end{aligned}$$

gdzie $a_{n,k-1} \leq x_{n,k} \leq a_{n,k}$.

Udowodnimy, że

$$(11) \quad B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n.$$

Porównajmy w tym celu B_n z

$$C_n = 2\pi \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k}) \cdot \sqrt{1 + [f'(x_{n,k})]^2} (a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$

Na mocy tw. III, 2, gdzie funkcję $f(x)$ należy zastąpić przez iloczyn $f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, wnosimy, że $B = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$. Pozostaje więc do udowodnienia, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - C_n) = 0$.

Otóż $B_n - C_n =$

$$= \pi \sum_{k=1}^{l_n} [f(a_{n,k-1}) - f(x_{n,k}) + f(a_{n,k}) - f(x_{n,k})] \cdot \sqrt{1 + [f'(x_{n,k})]^2} (a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$

Ze względu na założenie normalności rozpatrywanego ciągu podziałów przedziału całkowania możemy przyjąć, że jeśli punkty x i x' należą do tego samego przedziału n -ego podziału, to $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ (gdzie ε jest z góry daną liczbą dodatnią). A zatem

$$|f(a_{n,k-1}) - f(x_{n,k})| < \varepsilon \text{ oraz } |f(a_{n,k}) - f(x_{n,k})| < \varepsilon.$$

Oznaczając przez M kres górny funkcji $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ w przedziale ab , otrzymujemy natychmiast $|B_n - C_n| < 2\pi\varepsilon M(b-a)$. Stąd $\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - C_n) = 0$.

W ten sposób wzór (11) jest udowodniony.

Prostszy wzór na powierzchnię bryły obrotowej otrzymujemy, traktując podobnie jak w N° V x jako funkcję długości łuku. Opierając się bowiem na pierwszej równości (8), mamy

$$(12) \quad B = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^S y ds,$$

gdzie S oznacza długość łuku $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Wzór (12) możemy przekształcić jak następuje:

$$(12a) \quad B = S \cdot 2\pi \frac{1}{S} \int_0^S y ds = S \cdot 2\pi \bar{y},$$

gdzie $\bar{y}$ oznacza rzędną środka masy łuku $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ (ob. (8b)).

Inaczej mówiąc: *pole powierzchni utworzonej przez obrót łuku $y = f(x)$ dokoła osi x -ów jest iloczynem długości tego łuku przez drogę zakreśloną przez jego środek masy (tw. Guldina).*

Przykłady. 1) *Walec.* Niech $f(x)$ ma wartość stałą r dla $0 \leq x \leq h$. Obszar P złożony z punktów x, y takich, że $0 \leq x \leq h$ i $0 \leq y \leq r$, jest prostokątem. Przy pełnym obrocie tego prostokąta dokoła osi x -ów powstaje walec o wysokości h i o promieniu podstawy r . Objętość tego walca jest więc $\pi r^2 h$. Ten sam wynik uzyskujemy stosując wzór (9). Bowiem

$$W = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 h.$$

Wzór (10) daje na powierzchnię boczną walca (biorąc pod uwagę, że $y' = 0$):

$$B = 2\pi \int_0^h r dx = 2\pi rh,$$

zgodnie ze známym wzorem z geometrii.

2) *Stożek.* Niech $y = cx$, $0 \leq x \leq h$. Obszar P jest w tym wypadku trójkątem. Przy obrocie powstaje stożek o wysokości h i o promieniu podstawy $r = ch$. Na mocy wzoru (9) objętość tego stożka wynosi

$$\pi \int_0^h c^2 x^2 dx = \frac{1}{3} \pi c^2 h^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Zgodnie ze wzorem (10) powierzchnia boczna stożka równa się

$$2\pi \int_0^h cx \sqrt{1 + c^2} dx = \pi ch^2 \sqrt{1 + c^2} = \pi rl,$$

gdzie l oznacza długość tworzącej (bowiem $l = h \sqrt{1 + c^2}$).

3) *Kula.* Niech $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$. Zbiór punktów x, y wyznaczony przez te warunki jest półkolem. Obracając półkole dokoła osi x -ów, otrzymujemy kulę o promieniu r . Objętość tej kuli jest to

$$\pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \int_{-r}^r r^2 dx - \pi \int_{-r}^r x^2 dx = 2\pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Aby obliczyć powierzchnię kuli, możemy zastosować wzór (12).

W tym celu wyrażamy y w zależności od długości łuku s , tzn. $y = r \sin \frac{s}{r}$.

Otrzymujemy na powierzchnię kuli wartość

$$2\pi \int_0^{2\pi r} r \sin \frac{s}{r} ds = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t dt = 2\pi r^2 [-\cos t]_0^\pi = 4\pi r^2.$$

VII. Dwa twierdzenia o wartości średniej. *Pierwsze twierdzenie.* Niech dane będą w przedziale $a \leq x \leq b$ dwie funkcje ciągłe $f(x)$ i $g(x)$. Niech przy tym funkcja g ma znak stały. Wówczas

$$(13) \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx,$$

gdzie ξ jest odpowiednio dobraną wartością, spełniającą warunek $a \leq \xi \leq b$.

Istotnie, niech m i M oznaczają kres dolny i górny funkcji $f(x)$ w przedziale $a \leq x \leq b$. Mamy więc dla każdego x

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Założmy, że stale $g(x) \geq 0$. Mnożąc powyższą podwójną nierówność przez $g(x)$, otrzymujemy więc

$$m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x),$$

stąd zaś przez całkowanie (por. II, 7):

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Wnosimy stąd (przy założeniu, że funkcja g nie jest identycznie równa 0, które oczywiście uczynić możemy), że

$$m \leq \left\{ \int_a^b f(x) g(x) dx : \int_a^b g(x) dx \right\} \leq M.$$

Ze względu na własność Darboux funkcji f (która jest konsekwencją jej ciągłości), funkcja ta przybiera wszystkie wartości zawarte pomiędzy m i M . Istnieje więc takie ξ w odcinku ab , że

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx},$$

tj. że wzór (13) jest spełniony.

W wypadku, gdy stale $g(x) \leq 0$, dowód jest zupełnie analogiczny.

Przy założeniu, że $g(x) \neq 0$, otrzymujemy krótszy dowód powyższego twierdzenia, opierając się na tw. Cauchy'ego z rachunku różniczkowego (§ 7, V (12)). Oznaczmy, mianowicie przez $H(x)$ funkcję pierwotną funkcji $f(x)g(x)$ oraz przez $G(x)$ funkcję pierwotną funkcji $g(x)$. Mamy więc

$$H'(x) = f(x)g(x), \quad G'(x) = g(x), \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = H(b) - H(a), \quad \int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a).$$

Na mocy tw. Cauchy'ego:

$$\frac{H(b) - H(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{H'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = f(\xi),$$

skąd wzór (13).

Drugie twierdzenie. Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła, zaś funkcja $g(x)$ jest monotoniczna i posiada ciągłą pochodną w przedziale $a \leq x \leq b$, to

$$(14) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx$$

przy odpowiednio dobranej wartości ξ , należącej do przedziału ab .

Oznaczmy przez $F(x)$ funkcję pierwotną funkcji $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$. Ponieważ pochodna funkcji monotonicznej ma znak stały (ob. § 7, VII, tw. 2), możemy więc zastosować pierwsze twierdzenie o wartości średniej do iloczynu funkcji $F(x)g'(x)$. Stosując równocześnie całkowanie przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \int_a^b g(x)F'(x) dx = \left[g(x)F(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx = \\ &= [g(b)F(b) - g(a)F(a)] - F(\xi) \int_a^b g'(x) dx = \\ &= g(b)F(b) - g(a)F(a) - F(\xi)g(b) + F(\xi)g(a), \end{aligned}$$

ponieważ $\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$.

W rezultacie:

$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a)[F(\xi) - F(a)] + g(b)[F(b) - F(\xi)]$, skąd otrzymujemy wzór (14), biorąc pod uwagę, że

$$F(\xi) - F(a) = \int_a^\xi f(x) dx \quad \text{oraz} \quad F(b) - F(\xi) = \int_\xi^b f(x) dx.$$

Przykłady i zastosowania. Twierdzenia o wartości średniej stosuje się szczególnie często w celu szacowania całek. Poznamy kilka takich zastosowań.

1) Niech $0 < a < b$. Udowodnimy, że

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\sin nx}{x} dx = 0.$$

Udowodnimy w tym celu, że

$$(16) \quad \left| \int_a^b \frac{\sin cx}{x} dx \right| < \frac{4}{ca}, \quad \text{o ile } c > 0.$$

Stosujemy drugie tw. o wartości średniej, podstawiając $f(x) = \sin cx$ oraz $g(x) = \frac{1}{x}$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sin cx}{x} dx &= \frac{1}{a} \int_a^\xi \sin cx dx + \frac{1}{b} \int_\xi^b \sin cx dx = \\ &= \frac{1}{ac} (\cos ca - \cos c\xi) + \frac{1}{bc} (\cos c\xi - \cos cb). \end{aligned}$$

Ponieważ $|\cos t| \leq 1$ oraz $a < b$, wnosimy stąd, że

$$\left| \int_a^b \frac{\sin cx}{x} dx \right| \leq \frac{2}{ac} + \frac{2}{bc} < \frac{4}{ac}.$$

Ze wzoru (16) wynika natychmiast wzór (15).

2) Wzór (15) można uogólnić jak następuje: jeśli funkcja $g(x)$ jest monotoniczna (i ma ciągłą pochodną) oraz $0 < a < b$, to

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \frac{\sin nx}{x} dx = 0.$$

Mamy bowiem

$$\int_a^b g(x) \frac{\sin nx}{x} dx = g(a) \int_a^\xi \frac{\sin nx}{x} dx + g(b) \int_\xi^b \frac{\sin nx}{x} dx.$$

Na mocy nierówności (16) stąd otrzymujemy

$$\left| \int_a^b g(x) \frac{\sin nx}{x} dx \right| \leq |g(a)| \frac{4}{na} + |g(b)| \frac{4}{nb};$$

przechodząc do granicy, uzyskujemy wzór (17).

3) Posługując się I twierdzeniem o wartości średniej, można wyprowadzić wzór Taylora w sposób następujący.

W udowodnionym w § 9, III, 5, 3) wzorze:

$$\begin{aligned} \int z y^{(n+1)} dx &= z y^{(n)} - z' y^{(n-1)} + \dots + (-1)^n z^{(n)} y + \\ &+ (-1)^{n+1} \int z^{(n+1)} y dx \end{aligned}$$

podstawmy $z = (b-x)^n$, $y = f(x)$, przy czym zakładamy, że funkcja f posiada ciągłą $n+1$ pochodną w przedziale $a \leq x \leq b$.

Całkując od a do b , znajdujemy

$$\begin{aligned} \int_a^b (b-x)^n y^{(n+1)} dx &= \left[(b-x)^n y^{(n)} + n(b-x)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + n! y \right]_a^b = \\ &= n! f(b) - \left\{ (b-a)^n f^{(n)}(a) + n(b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) + \dots + n! f(a) \right\}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, ponieważ funkcja $(b-x)^n$ ma znak stały w przedziale $a \leq x \leq b$, przeto na mocy I tw. o wartości średniej otrzymujemy

$$\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x) dx = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \int_a^b (b-x)^n dx = \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+1)}(\xi).$$

Zestawiając otrzymane wzory uzyskujemy wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a.

VIII. Przybliżone metody całkowania. Interpolacja Lagrange'a. Mając danych $n+1$ punktów $x_0, x_1, \dots, x_n$ na osi x -ów, możemy określić wielomian n -tego stopnia $w(x)$, który w punktach tych przyjmuje z góry danych $n+1$ wartości: $y_0, y_1, \dots, y_n$; tj.

$$w(x_k) = y_k \quad \text{dla } k=0, 1, \dots, n.$$

Określimy najpierw dla każdego k wielomian n -tego stopnia $u_k(x)$, mający tę własność, że

$$u_k(x_k) = 1 \quad \text{oraz} \quad u_k(x_m) = 0 \quad \text{dla każdego } m \neq k.$$

Kładziemy mianowicie:

$$u_k(x) = \frac{(x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_k-x_0) \cdot \dots \cdot (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_k-x_n)}.$$

Z pomocą wielomianów $u_k(x)$ określamy wielomian $w(x)$:

$$(18) \quad w(x) = y_0 u_0(x) + y_1 u_1(x) + \dots + y_n u_n(x).$$

Widać natychmiast, że jest to wielomian n -tego stopnia, spełniający warunek $w(x_k) = y_k$ dla każdego k . Jest to tzw. *wielomian interpolacyjny Lagrange'a*.

Gdy funkcja wyrażająca zależność między jakimiś wielkościami fizycznymi znana nam jest jedynie empirycznie, mianowicie znana jest skończona ilość wartości tej funkcji (na podstawie pomiarów) — stosuje się przybliżone obliczenie całki tej funkcji: stosuje się np. interpolację Lagrange'a i oblicza się całkę otrzymanego wielomianu interpolacyjnego.

Szczególnie prosty wzór otrzymujemy, gdy $n=2$ oraz $x_0=a$, $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=b$, tj. gdy przez dane trzy punkty przeciągamy parabolę. Jak łatwo obliczyć, otrzymujemy

$$(19) \quad \int_a^b w(x) dx = \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Jest to wzór *Simpsona*, dający przybliżoną wartość na $\int_a^b f(x) dx$.

Dokładność obliczenia możemy zwiększyć, dzieląc przedział ab na mniejsze przedziały i stosując do każdego z nich z osobna wzór Simpsona. Mianowicie, dzieląc przedział ab na $2n$ równych przedziałów z pomocą punktów $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$, gdzie $x_0 = a, x_{2n} = b$, otrzymujemy ogólny wzór *Simpsona* na przybliżoną wartość całki:

$$\frac{b-a}{6n} \left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) \right].$$

Przykład. Zastosujmy wzór Simpsona do obliczenia $\log 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$,

dzieląc odcinek $1 \leq x \leq 2$ na połowy. Mamy więc

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad x_1 = 1,5, \quad y_1 = 0,667..., \quad x_2 = 2, \quad y_2 = 0,5.$$

A zatem wzór (19) daje przybliżoną wartość na $\log 2$:

$$\frac{1}{6} (1 + 4 \cdot 0,667 + 0,5) = 0,694...$$

W rzeczywistości $\log 2 = 0,6931...$

IX. Wzór Wallisa¹. Udowodnimy wzór następujący:

$$(20) \quad \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2.$$

Oprzemy się w tym celu na udowodnionych w N^o I, 5 wzorach:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}.$$

Ze wzorów tych wynika:

$$(21) \quad \frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx : \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx \right\}.$$

$$\text{Udowodnimy, że } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx : \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx \right\} = 1.$$

¹ Wallis (1616-1703) - matematyk angielski.

Istotnie w przedziale $0 \leq x \leq \pi/2$ zachodzą nierówności

$$0 \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x,$$

$$\text{skąd } 0 \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx, \text{ a więc}$$

$$1 \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx : \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx : \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx \leq \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

W granicy więc rozważany stosunek całek dąży do 1.

Wnosimy stąd na podstawie (21), że

$$(21') \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \right].$$

Wzór ten natychmiast daje wzór (20), ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Uwagi. 1) Wzór Wallisa stosujemy również w postaci następującej:

$$(22) \quad \sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{\sqrt{n} (2n)!}$$

Mamy bowiem

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n &= n! \cdot 2^n \\ 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2n}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}. \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe wzory we wzór (20) i wyciągając pierwiastek kwadratowy, otrzymujemy równość (22).

2) Wzór Wallisa można też zapisać w postaci iloczynu nieskończonego:

$$(22') \quad \frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots$$

Oznaczając bowiem przez p_n iloczyn częściowy

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{4 \cdot 1^2}{4 \cdot 1^2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \\ &= \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}, \end{aligned}$$

mamy zgodnie z (21'): $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{\pi}{2}$. Zarazem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1},$$

skąd wzór (22').

X. Wzór Stirlinga. Ze wzoru Wallisa wyprowadzimy następujący wzór Stirlinga:

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = 1.$$

Położmy

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}.$$

Należy więc dowieść, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2\pi}$.

Udowodnimy najpierw, że ciąg $a_1, a_2, \dots$ jest zbieżny. Ponieważ jest to ciąg o wyrazach dodatnich, wystarczy dowieść, że ciąg ten jest malejący, tj. że $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$. Otóż

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

stad $\log \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$. Ponieważ zaś (ob. § 7, (37'''))

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \log(1+x) > 1$$

dla $0 < x \leq 1$, więc podstawiając $x = \frac{1}{n}$, znajdujemy

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1, \text{ tj. } \log \frac{a_n}{a_{n+1}} > 0, \text{ skąd } \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1.$$

Ciąg $a_1, a_2, \dots$ jest więc zbieżny. Położmy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$. Należy więc dowieść, że $g = \sqrt{2\pi}$. Zastosujemy w tym celu wzór (22), biorąc pod uwagę, że

$$a_n^2 = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n} n} \text{ oraz } a_{2n} = \frac{(2n)! e^{2n}}{(2n)^{2n} \sqrt{2n}}.$$

Otrzymujemy

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_{2n} \cdot \sqrt{2}} = \frac{g^2}{g\sqrt{2}}, \text{ tj. } g = \sqrt{2\pi}.$$

Uwaga. Znaczenie praktyczne wzoru Stirlinga polega na tym, że dla dużych n wyrażenie $\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ daje przybliżoną wartość na $n!$. Mówimy, że jest to *asymptotyczna* wartość $n!$ (rozumiejąc przez to, że stosunek tych dwóch wyrażeń dąży do 1).

XI*. Całka Riemanna. Całki Darboux, górna i dolna. Twierdzenia N° III stanowią punkt wyjścia do uogólnienia pojęcia całki oznaczonej na pewne kategorie funkcji nieciągłych. Wprowadzimy w tym celu całki Darboux.

Niech dana będzie funkcja $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, ograniczona (lecz niekoniecznie ciągła). Niech dany będzie ciąg podziałów przedziału ab na 2^n równych części ($n = 0, 1, \dots$). Oznaczmy punkty n -ego podziału przez

$$a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,2^n}, \text{ przy czym } a_{n,0} = a, \quad a_{n,2^n} = b.$$

Niech $M_{n,k}$ oznacza kres górny funkcji f w przedziale $a_{n,k-1} a_{n,k}$. Niech wreszcie

$$(24) \quad S_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} M_{n,k}.$$

Ciąg $\{S_n\}$ jest ciągiem malejącym (w szerszym sensie). Istotnie, dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$ przedziały $a_{n+1,2k-2} a_{n+1,2k-1}$ oraz $a_{n+1,2k-1} a_{n+1,2k}$ są zawarte w przedziale $a_{n,k-1} a_{n,k}$. A zatem

$$M_{n+1,2k-1} \leq M_{n,k} \text{ oraz } M_{n+1,2k} \leq M_{n,k}, \text{ tj. } \frac{1}{2} (M_{n+1,2k-1} + M_{n+1,2k}) \leq M_{n,k}.$$

Stąd

$$S_{n+1} = \frac{b-a}{2^n} \left(\frac{M_{n+1,0} + M_{n+1,1}}{2} + \dots + \frac{M_{n+1,2^{n+1}-1} + M_{n+1,2^{n+1}}}{2} \right) \leq S_n.$$

Ciąg $\{S_n\}$ jest więc nierosnący. Zarazem jest to ciąg ograniczony, oznaczając bowiem przez m kres dolny funkcji f , mamy oczywiście $S_n \geq m(b-a)$. Ciąg ten jest więc zbieżny. Granicę jego nazywamy *górną całką Darboux* i oznaczamy symbolem

$$(25) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Podobnie: oznaczając przez $m_{n,k}$ kres dolny funkcji f w przedziale $a_{n,k-1}$ $a_{n,k}$ i kładąc

$$(26) \quad s_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} m_{n,k},$$

dowodzimy, że ciąg $\{s_n\}$ jest rosnący (w szerszym sensie) i ograniczony, a zatem zbieżny. Granicę jego nazywamy *dolną całką Darboux* i oznaczamy symbolem

$$(27) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Jeżeli całki górna i dolna funkcji f są sobie równe, to mówimy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna*; wspólną wartość tych całek nazywamy *całką Riemanna funkcji f* i oznaczamy symbolem

$\int_a^b f(x) dx$, jak w wypadku całki oznaczonej funkcji ciągłej. Możemy

posługiwać się tym samym znakowaniem, ponieważ — jak natychmiast z tw. III, 2 wynika — *całka Riemanna funkcji ciągłej pokrywa się z całką oznaczoną tej funkcji* (w sensie definicji podanej w N° I).

Funkcje całkowalne w sensie Riemanna obejmują obszerniejszą klasę niż funkcje ciągłe. W szczególności funkcje ograniczone o skończonej ilości punktów nieciągłości (do których zresztą powrócimy w § 11) oraz funkcje monotoniczne są całkowalne. Istnieją jednak funkcje (ograniczone) niecałkowalne w sensie Riemanna; taką jest np. znana nam już funkcja Dirichleta (ob. § 4, V) równa 1 w punktach wymiernych, a 0 w niewymiernych; dla funkcji tej mamy stale $S_n = 1$

$$\text{ i } s_n = 0, \text{ a więc } \int_a^b f(x) dx = 1, \quad \int_a^b f(x) dx = 0.$$

Dodajmy, że istnieje definicja całki (Lebesgue'a), która przypisuje całkę obszerniejszej klasie funkcji aniżeli całka Riemanna.¹

Definicję całek Darboux oparliśmy na rozważaniu ciągu podziałów "dwójkowych" przedziału całkowania. Wykażemy obecnie, że do tego samego wyniku dochodzi się rozważając dowolny ciąg normalny podziałów. Ścisłej mówiąc, udowodnimy następujące twierdzenie:

Niech dany będzie normalny ciąg podziałów odcinka ab wyznaczony przez punkty

¹ Ob. S. Saks, *Zarys teorii całki*, Warszawa, Kasa im. Mianowskiego, 1930, lub obszerniejsze wydanie angielskie w *Monogr. Matemat. t. 7* (1937).

$$(28) \quad a'_{n,0} < a'_{n,1} < \dots < a'_{n,l_n}, \text{ przy czym } a'_{n,0} = a, a'_{n,l_n} = b.$$

Niech $M'_{n,k}$ oznacza kres górny funkcji f w przedziale $a'_{n,k-1}$ $a'_{n,k}$ i niech

$$(29) \quad S'_n = \sum_{k=1}^{l_n} M'_{n,k} (a'_{n,k} - a'_{n,k-1}).$$

Wówczas

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Dowód tego twierdzenia oprzemy na lemacie następującym:

Niech dane będą dwa podziały przedziału ab :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b \text{ oraz } a = a'_0 < a'_1 < \dots < a'_{r'} = b.$$

Niech d i d' oznaczają odpowiednio długość największego przedziału pierwszego, wzgl. drugiego podziału. Niech M_k i M'_k oznaczają kres górny funkcji f w przedziale a_{k-1} a_k , wzgl. w przedziale a'_{k-1} a'_k i niech

$$(31) \quad S = \sum_{k=1}^r M_k (a_k - a_{k-1}) \text{ oraz } S' = \sum_{k=1}^{r'} M'_k (a'_k - a'_{k-1}).$$

Niech wreszcie liczba M spełnia nierówność $M > |f(x)|$ dla każdego x przedziału ab .

Wówczas zachodzi zależność

$$(32) \quad S' \leq S + 3rMd'.$$

Przedziały drugiego podziału można rozklasyfikować na $r+1$ klas, zaliczając dany przedział do klasy k -ej (dla $k=1, 2, \dots, r$) wtedy, gdy mieści się w przedziale a_{k-1} a_k , zaś do klasy $r+1$ -ej, gdy nie mieści się w żadnym z przedziałów pierwszego podziału, tj. gdy zawiera wewnątrz któryś z punktów $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}$. Rzecz jasna, że niektóre z tych klas mogą być puste.

Jeśli klasa k -ta (dla $k \leq r$) jest niepusta, to niech p_k oznacza pierwszy, zaś j_k ostatni ze wskaźników i spełniających warunek $a_{k-1} \leq a'_i \leq a_k$. Ponieważ dla przedziałów a'_{i-1} a'_i k -ej klasy zachodzi nierówność $M'_i \leq M_k$, przeto oznaczając przez Σ^k sumę rozciągniętą na przedziały k -ej klasy, mamy

$$\begin{aligned} \Sigma^k M'_i (a'_i - a'_{i-1}) &\leq M_k \Sigma^k (a'_i - a'_{i-1}) = M_k (a'_{j_k} - a'_{p_k}) = \\ &= M_k (a_k - a_{k-1}) - M_k (a'_{p_k} - a_{k-1}) - M_k (a_k - a'_{j_k}) \leq \\ &\leq M_k (a_k - a_{k-1}) + M(a'_{p_k} - a_{k-1}) + M(a_k - a'_{j_k}) \leq M_k (a_k - a_{k-1}) + 2Md'. \end{aligned}$$

Jeśli klasa k -ta jest pusta, to niech $\Sigma^k = 0$. Zauważmy wreszcie, że przedziałów klasy $r+1$ -ej jest co najwyżej $r-1$. A zatem

$$\Sigma^{r+1} M'_i(a'_i - a'_{i-1}) \leq (r-1) M d'.$$

W rezultacie

$$\begin{aligned} S' &= \Sigma^1 M'_i(a'_i - a'_{i-1}) + \dots + \Sigma^r M'_i(a'_i - a'_{i-1}) + \Sigma^{r+1} M'_i(a'_i - a'_{i-1}) \leq \\ &\leq M_1(a_1 - a_0) + \dots + M_r(a_r - a_{r-1}) + 2r M d' + (r-1) M d', \end{aligned}$$

skąd wzór (32).

W ten sposób lemat nasz jest udowodniony.

Aby udowodnić twierdzenie, weźmy pod uwagę $\varepsilon > 0$ i dobierzmy taki wskaźnik q , aby $S_q < \int_a^{\bar{b}} f(x) dx + \varepsilon$. Ponieważ rozważany ciąg podziałów jest normalny, przeto dla dostatecznie dużych n mamy $d'_n < \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^q M}$. W myśl lematu mamy więc

$$S'_n \leq S_q + 3 \cdot 2^q M d'_n < \int_a^{\bar{b}} f(x) dx + 2\varepsilon.$$

Zarazem przyporządkujmy każdemu n taki wskaźnik j_n , ażeby spełniona była nierówność $\frac{b-a}{2^{j_n}} < \frac{\varepsilon}{3l_n M}$. Wówczas

$$S_{j_n} \leq S'_n + 3l_n M \frac{b-a}{2^{j_n}} < S'_n + \varepsilon,$$

skąd $\int_a^{\bar{b}} f(x) dx < S'_n + \varepsilon$, bo $\int_a^{\bar{b}} f(x) dx \leq S_{j_n}$.

W rezultacie $\int_a^{\bar{b}} f(x) dx < S'_n + \varepsilon < \int_a^{\bar{b}} f(x) dx + 3\varepsilon$. Ze względu na to, że ε jest dowolną liczbą dodatnią, nierówność ta pociąga za sobą wzór (30).

Twierdzenie nasze jest więc udowodnione. Analogiczne twierdzenie dotyczy całki dolnej.

Ważną konsekwencją naszego twierdzenia jest wzór następujący:

$$(33) \quad \int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_a^{\bar{c}} f(x) dx + \int_{\bar{c}}^{\bar{b}} f(x) dx, \quad \int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_a^{\underline{c}} f(x) dx + \int_{\underline{c}}^{\bar{b}} f(x) dx,$$

o ile $a < c < b$.

Istotnie, podzielmy odcinki ac i cb na 2^n równych części. Oznaczmy punkty podziału przez

$$(34) \quad a = a_{n,0} < a_{n,1} < \dots < a_{n,2^n} = c = b_{n,0} < b_{n,1} < \dots < b_{n,2^n} = b.$$

Niech $M_{n,k}$ oznacza kres górny funkcji f w przedziale $a_{n,k-1} a_{n,k}$ zaś $P_{n,k}$ kres górny w przedziale $b_{n,k-1} b_{n,k}$. Mamy więc

$$\int_a^{\bar{c}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_{k=1}^{2^n} M_{n,k} (a_{n,k} - a_{n,k-1})$$

oraz

$$\int_c^{\bar{b}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_{k=1}^{2^n} P_{n,k} (b_{n,k} - b_{n,k-1}).$$

$$\text{Zarazem } \int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \Sigma_{k=1}^{2^n} M_{n,k} (a_{n,k} - a_{n,k-1}) + \Sigma_{k=1}^{2^n} P_{n,k} (b_{n,k} - b_{n,k-1}) \right\},$$

punkty (34) wyznaczają bowiem normalny ciąg podziałów odcinka ab . Stąd pierwszy ze wzorów (33). Dowód drugiego jest analogiczny.

Ze wzorów (33) wynika, że jeśli funkcja f jest całkowalna w przedziałach ac i cb (gdzie $a < c < b$), to jest też całkowalna w przedziale ab i zachodzi przy tym wzór II, 5 (o podziale przedziału całkowania).

Odwrotnie, jeśli funkcja jest całkowalna w przedziale ab , to jest też całkowalna w każdym z przedziałów ac i cb (a zatem i w każdym przedziale zawartym w ab).

$$\text{Istotnie, z założenia: } \int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_a^{\bar{c}} f(x) dx + \int_{\bar{c}}^{\bar{b}} f(x) dx. \text{ Zestawiając tę}$$

podwójną równość ze wzorami (33), otrzymujemy

$$\left(\int_a^{\bar{c}} f(x) dx - \int_a^{\underline{c}} f(x) dx \right) + \left(\int_{\bar{c}}^{\bar{b}} f(x) dx - \int_{\underline{c}}^{\bar{b}} f(x) dx \right) = 0.$$

Stąd na mocy oczywistych nierówności:

$$\int_a^{\underline{c}} f(x) dx \leq \int_a^{\bar{c}} f(x) dx, \quad \int_{\bar{c}}^{\bar{b}} f(x) dx \leq \int_{\underline{c}}^{\bar{b}} f(x) dx$$

$$\text{wnosimy, że } \int_a^{\bar{c}} f(x) dx = \int_a^{\underline{c}} f(x) dx \quad \text{oraz} \quad \int_{\bar{c}}^{\bar{b}} f(x) dx = \int_{\underline{c}}^{\bar{b}} f(x) dx.$$

Podobnie jak dla funkcji ciągłych, przyjmujemy dla dowolnych funkcji całkowalnych wzory (2) i (3) i dowodzimy twierdzeń 1, 2, 6, 7 i 8 N^o II. Zamiast wzoru na wartość średnią (II, 9) mamy dla dowolnych funkcji całkowalnych podwójną nierówność

$$(35) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

gdzie $a < b$ i gdzie M i m oznaczają kresy górny i dolny funkcji f w przedziale ab .

Dla dowolnych funkcji całkowalnych twierdzenie II, 10 o różniczkowalności funkcji $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ nie zachodzi. Można jednak udowodnić, że funkcja $g(x)$ jest ciągła.

Istotnie, oznaczając przez M kres górny funkcji $|f(x)|$ w przedziale ab , mamy (na mocy wzorów (33) i (35)):

$$\left| g(x+h) - g(x) \right| = \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq |h| \cdot M,$$

skąd $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$.

Zadania do § 10

1. Dowieść, że $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.
2. Obliczyć sumę $\frac{1}{1} \binom{n}{0} - \frac{1}{3} \binom{n}{1} + \frac{1}{5} \binom{n}{2} - \dots \pm \frac{1}{2n+1} \binom{n}{n}$.
(Zastosować do całki $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ podstawienie $x = \cos t$).
3. Wyprowadzić wzór (Cavalieriego)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1},$$

posługując się całką $\int_0^1 x^m dx$ (por. też zad. 2 i 3, § 1).

$$4. \text{ Obliczyć } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + 1^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right)$$

(całkując funkcję $\frac{1}{1+x^2}$).

$$5. \text{ Dowieść, że } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \log 2.$$

6. Podać interpretację geometryczną stałej Eulera (por. § 7, zad. 18)

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right), \text{ opierając się na równości } \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n.$$

$$7. \text{ Dowieść, że } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Rozłożyć przedział całkowania na połowy i w drugiej całce podstawić $x = \pi - t$.

$$8. \text{ Dowieść, że } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

$$\left(\text{Dowieść najpierw, że } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin 2x}{2} dx \right).$$

9. Znaleźć długość łuku paraboli o równaniu $y = x^2$ zawartego między punktami o odciętych 0 i a .

10. Dana jest elipsa o mimośrodku e i o większej osi o długości 2. Wyrazić jej obwód przez szereg potęgowy względem e .

11. Koło o równaniu $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ położone na płaszczyźnie XY dokonywa obrotu (w przestrzeni) dokoła osi Y . Obliczyć pole powierzchni otrzymanej w ten sposób bryły, tzw. torusa (przyjmujemy $a > r$).

12. Obliczyć pole wspólnej części koła o promieniu r i współśrodkowej z nim elipsy o osiach a i b .

13. Obliczyć $\frac{\pi}{4}$ z dokładnością do 5 znaków dziesiętnych, stosując

$$\text{wzór Simpsona do całki } \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

14. Wykazać, że wzór (19) Simpsona daje pole z dokładnością do $\frac{M(b-a)^4}{576}$, gdzie M oznacza kres górny $|f'''(x)|$ w przedziale $a \leq x \leq b$.

Aby to wykazać, wprowadzić funkcję pomocniczą:

$$g(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x) dx - \frac{t}{3} [f(c-t) + 4f(c) + f(c+t)], \text{ gdzie } c = \frac{a+b}{2},$$

i wyprowadzić nierówność $-\frac{|t|}{3} 2M \leq g'''(t) \leq \frac{|t|}{3} 2M$. Przez całkowanie tej nierówności dojść dożądanego wyniku.

15. Udowodnić nierówność Schwarza dla całek:

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

Skorzystać z nierówności $\int_a^b [f(x) + c \cdot g(x)]^2 dx \geq 0$, która zachodzi dla każdego c .

16. Podać wzór na promień krzywizny w punkcie x, y dla następujących krzywych:

- 1) hiperboli $xy = 1$, 2) elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 3) paraboli $y = 4px^2$,
- 4) hipocykloidy $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, 5) krzywej $y = x^3$.

17. Wyznaczyć punkt na krzywej wykładniczej $y = e^x$, w którym krzywizna jest największa.

18. Dana jest hipocykloida z zad. 16, 4). Obliczyć jej długość, pole obszaru przez nią ograniczonego, objętość i powierzchnię figury obrotowej, otrzymanej przez jej obrót dokoła osi x -ów.

19. Układ funkcji $f_1, \dots, f_n$ nazywamy *liniowo niezależnym*, jeśli nie istnieje układ n stałych $c_1, \dots, c_n$ (z wyjątkiem układu złożonego z n zer) taki, aby równość

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

zachodziła przy wszelkiej wartości x .

Udowodnić, że na to, aby układ n funkcji $f_1, \dots, f_n$ ciągłych

w przedziale ab był liniowo niezależny, potrzeba i wystarcza, aby zachodziła nierówność

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

gdzie $a_{km} = \int_a^b f_k(x) f_m(x) dx$.

(Skorzystać z warunków rozwiązalności układu n równań

$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

o n niewiadomych).

20. Układ skończony lub nieskończony funkcji $f_1, f_2, \dots$ nazywamy *ortogonalnym*, jeśli spełnione są warunki (w rozważanym przedziale ab):

$$\int_a^b f_k(x) f_m(x) dx \begin{cases} = 0 & \text{dla } k \neq m, \\ \neq 0 & \text{dla } k = m. \end{cases}$$

Podać przykłady układów ortogonalnych w obrębie funkcji trygonometrycznych.

21.* Udowodnić, że wielomiany (tzw. *wielomiany Legendre'a*¹⁾) określone przez wzór

$$w_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

tworzą w przedziale $-1, +1$ układ ortogonalny.

Udowodnić najpierw, że jeśli $m < n$, to $\int_{-1}^{+1} w_n(x) \cdot x^m dx = 0$.

§ 11. Całki niewłaściwe i ich związki z szeregami nieskończonymi

I. Całki o nieograniczonym przedziale całkowania. Niech dana będzie funkcja ciągła $y = f(x)$ w przedziale nieskończonym $x \geq a$. Wów-

¹⁾ A. Legendre (1752—1833) — wielki analityk francuski.

czas dla każdego $x \geq a$ istnieje całka $\int_a^x f(z) dz$. Jeżeli istnieje

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x), \text{ gdzie } F(x) = \int_a^x f(z) dz,$$

to granicę tę oznaczamy symbolem $\int_a^\infty f(x) dx$ i nazywamy *całką niewłaściwą funkcji f od a do ∞* . Przy założeniu, że granica ta istnieje, mamy więc

$$(1) \quad \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(z) dz.$$

Mówimy też w tym wypadku, że całka niewłaściwa jest *zbieżna*.

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(z) dz = \infty$ (lub $-\infty$), to piszemy $\int_a^\infty f(x) dx = \infty$ (lub $-\infty$); mówimy wówczas, że całka jest *rozbieżna do $+$ lub $-\infty$* .

Analogicznie określamy:

$$(2) \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(z) dz \text{ oraz } \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx.$$

Na mocy definicji

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} [F(x) - F(a)] = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(a),$$

gdzie F oznacza funkcję pierwotną funkcji f .

$$\text{Np. } \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + 1 = 1.$$

Całka ta jest więc zbieżna. Ogólniej: dla $s > 1$ zbieżna jest całka

$$(3) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \left[\frac{1}{x^{s-1}} \right]_1^\infty = \frac{1}{s-1}.$$

Natomiast dla $s=1$ otrzymujemy całkę rozbieżną do ∞ :

$$(4) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \left[\log x \right]_1^\infty = \infty.$$

Przykładem całki nie posiadającej ani skończonej, ani nieskończonej granicy jest $\int_0^\infty \sin x dx$. Nie istnieje bowiem $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$.

W tym ostatnim przykładzie istotne jest to, że funkcja podcałkowa przyjmuje zarówno dodatnie jak i ujemne wartości. Zachodzi bowiem twierdzenie:

1. Jeśli $f(x) \geq 0$ dla $x \geq a$, to całka $\int_a^\infty f(x) dx$ ma bądź wartość skończoną, bądź nieskończoną (w zależności od tego czy funkcja $F(x) = \int_a^x f(z) dz$

jest ograniczona, czy nieograniczona w promieniu $x \geq a$).

Istotnie, funkcja $F(x)$ jako funkcja niemalejąca posiada granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ skończoną lub nieskończoną, w zależności od tego czy funkcja ta jest ograniczona, czy nieograniczona (por. § 4, VII, 1).

Tw. 4', § 4, VII pociąga za sobą natychmiast twierdzenie następujące:

2. Na to, żeby całka $\int_a^\infty f(x) dx$ była zbieżna (do granicy skończonej), potrzeba i wystarcza, aby do każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie r , że warunki $x > r$ i $x' > r$ pociągają za sobą nierówność

$$\left| \int_{x'}^x f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Istnienie bowiem granicy $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ równoważne jest istnieniu dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ takiej liczby r , że $|F(x) - F(x')| < \varepsilon$, o ile tylko $x > r$ oraz $x' > r$. Ponieważ zaś

$$F(x) - F(x') = \int_{x'}^x f(z) dz, \text{ przeto } \left| \int_{x'}^x f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Geometrycznie całkę $\int_a^\infty f(x) dx$ interpretujemy podobnie jak całkę

w granicach skończonych: jeśli $f(x) \geq 0$, całka ta oznacza pole obszaru nieograniczonego złożonego z punktów x, y takich, że $x \geq a$ i $0 \leq y \leq f(x)$.

II. **Całki funkcji nieokreślonych w jednym punkcie.** Niech dana będzie funkcja ciągła w przedziale $a \leq x < b$ (przedział pozbawiony punktu b). Dla każdego x spełniającego powyższy warunek istnieje więc

całka oznaczona $\int_a^x f(z) dz$. Jeżeli istnieje granica $\lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$, gdzie

$F(x) = \int_a^x f(z) dz$, to granicę tę oznaczamy symbolem $\int_a^b f(x) dx$, jak w wy-

padku rozważanym w § poprzednim, mianowicie gdy funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła w całym przedziale $a \leq x \leq b$ (wraz z końcami). W tym ostatnim wypadku definicja podana w § 10 (wzór (1)) jest zgodna

z definicją symbolu $\int_a^b f(x) dx$ obecnie podaną. Inaczej mówiąc: *jeśli*

funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $a \leq x \leq b$, to całka $\int_a^b f(x) dx$

(w sensie definicji z § 10, wzór (1)) *spełnia warunek*

$$(5) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x), \quad \text{gdzie } F(x) = \int_a^x f(z) dz.$$

Równość ta bowiem oznacza, że $F(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$, tzn. że funkcja $F(x)$ jest ciągła w punkcie b (lewostronnie); to zaś wynika z tw. 10, § 10 (uwaga 2°).

Całkę funkcji $f(x)$ określonej w przedziale $a \leq x < b$ nazywamy całką *niewłaściwą* (drugiego rodzaju). Jeśli ta całka istnieje, tj. jeśli istnieje $\lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$, to mówimy, że całka jest *zbieżna*.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła w przedziale $a < x \leq b$, to

całkę $\int_a^b f(x) dx$ określamy analogicznie: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow a+0} \int_x^b f(z) dz$.

Ogólniej: jeśli funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła w przedziale otwartym $a < x < b$ i jeśli zbieżne są całki niewłaściwe $\int_a^c f(x) dx$ i

$\int_c^b f(x) dx$, gdzie c jest dowolnym punktem przedziału $a < x < b$, to przez całkę $\int_a^b f(x) dx$ rozumiemy

$$(6) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Łatwo się przekonać, że suma ta nie zależy od wyboru punktu c .

Jeszcze ogólniej: jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła w przedziale $a \leq x \leq b$ *poza skończoną ilością punktów* (w których jest nieciągła lub nieokreślona), to przez całkę (niewłaściwą) funkcji f w tym przedziale rozumiemy sumę

$$(7) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x) dx,$$

gdzie $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$, przy czym układ tych punktów obejmuje wszystkie punkty, w których funkcja f jest nieokreślona lub nieciągła.

Całka $\int_a^b f(x) dx$ jest więc zbieżna, jeśli wszystkie całki występujące po prawej stronie wzoru (7) są zbieżne.

1. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona i poza skończoną ilością punktów przedziału ab jest określona i ciągła, to jej całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna.*

Ze względu na wzory (6) i (7) wystarczy twierdzenie to udowodnić dla szczególnego wypadku, gdy funkcja f jest określona i ciągła dla $a \leq x < b$.

Zauważmy w tym celu, że na zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju istnieje warunek konieczny i dostateczny, analogiczny do warunku podanego dla całek niewłaściwych pierwszego rodzaju (N° I, 2):

2. *Na to, żeby całka $\int_a^b f(x) dx$ funkcji określonej i ciągłej dla $a \leq x < b$ była zbieżna, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie*

$\delta > 0$, że warunki $0 < b - x < \delta$ i $0 < b - x' < \delta$ pociągają za sobą nierówność

$$(8) \quad \left| \int_{x'}^x f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Istotnie, kładąc $F(x) = \int_a^x f(z) dz$, wnioskujemy z tw. § 4, VII, 4, że istnienie granicy $\lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$ równoważne jest nierówności $|F(x) - F(x')| < \varepsilon$ (gdy x i x' spełniają wymienione warunki). Lecz

$$F(x) - F(x') = \int_{x'}^x f(z) dz,$$

skąd wzór (8).

Przejdźmy teraz do dowodu tw. 1. Należy więc dla danego $\varepsilon > 0$ znaleźć takie $\delta > 0$, żeby warunki $0 < b - x < \delta$ i $0 < b - x' < \delta$ pociągały za sobą nierówność (8).

Z założenia funkcja $f(x)$ jest ograniczona w przedziale $a \leq x < b$. Istnieje więc taka liczba M , że $M > |f(x)|$ dla każdego x rozważanego przedziału. Połóżmy $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Otóż

$$\left| \int_{x'}^x f(z) dz \right| < |x - x'| M,$$

zaś z nierówności $0 < b - x < \delta$ i $0 < b - x' < \delta$ wynika, że $|x - x'| < \delta = \frac{\varepsilon}{M}$, skąd żądany wzór (8).

Tw. 1 jest w ten sposób udowodnione. Pojęcie całki niewłaściwej pozwala więc na uogólnienie pojęcia całki oznaczonej na funkcje ograniczone, posiadające skończoną ilość punktów nieciągłości.

Przykłady. 1) $\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \left[x^{1-s} \right]_0^1 = \frac{1}{1-s}$ dla $s < 1$. $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$.

2) $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} dx$ istnieje na mocy tw. 1, funkcja podcałkowa bowiem jest ciągła i ograniczona dla $0 < x \leq 1$.

3) Podobnie istnieje całka $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$. W tym wypadku uważamy

całkę za *pozornie niewłaściwą*; wprawdzie funkcja podcałkowa nie jest określona w punkcie 0, posiada jednak w tym punkcie granicę; przyjmując tę granicę za wartość funkcji podcałkowej w punkcie 0, mamy do czynienia z całką oznaczoną (funkcją ciągłą) w zwykłym sensie.

4) Analizując definicję całki (niewłaściwej) funkcji $f(x)$ ciągłej i określonej w przedziale otwartym $a < x < b$ widzimy, że całkę tę można określić jako różnicę $F(b) - F(a)$, gdzie $F(x)$ jest dowolną funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $a \leq x \leq b$ i spełniającą warunek $F'(x) = f(x)$ w przedziale otwartym $a < x < b$ (oczywiście o ile taka funkcja F istnieje).

Np. całka $\int_{-r}^r \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ wyrażająca długość półokręgu o promieniu r

jest całką niewłaściwą (mianownik funkcji podcałkowej znika w końcach przedziału całkowania). Ponieważ jednak funkcja pierwotna funkcji podcałkowej, tj. $F(x) = -r \arccos(x/r)$ jest ciągła w całym przedziale $-r \leq x \leq r$, wartość rozważanej całki wyraża się (podobnie jak w przykładzie rozpatrywanym w § 10, V) przez różnicę $F(r) - F(-r) = \pi r$.

Uwaga. Całka niewłaściwa funkcji ograniczonej i ciągłej poza skończoną ilością punktów jest identyczna z całką Riemanna tej funkcji. Ze względu na twierdzenie o podziale przedziału całkowania, dowód redukuje się do wypadku, gdy funkcja f jest ciągła w przedziale $a \leq x < b$. Ze względu zaś na ciągłość całki Riemanna traktowanej jako funkcja górnej granicy całkowania (ob. § 10, XI), całka Riemanna

funkcji f w przedziale ab równa się $\lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(x) dx$, tj. $= \int_a^b f(x) dx$

(symbole $\int_a^x$ i $\int_a^b$ użyte są tu w sensie definicji § 10, I i § 11, II).

III. Wzory rachunkowe. Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą ciągłe i określone dla $a \leq x < b$, przy czym b może oznaczać ∞ . Załóżmy, że całki (niewłaściwe pierwszego lub drugiego rodzaju) $\int_a^b f(x) dx$ i $\int_a^b g(x) dx$ są zbieżne. Wzory 1 i 2 § 10, II pozostają wówczas w mocy. Bowiem

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x [f(x) \pm g(x)] dx =$$

$$= \lim_{x=b} \int_a^x f(x) dx \pm \lim_{x=b} \int_a^x g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

Analogicznie dowodzi się, że zachodzi wzór II, 2 (§ 10, II).

Wzór na całkowanie przez części (tj. wzór 3) również pozostaje w mocy, gdy przyjąć, że $f(b)g(b)$ oznacza $\lim_{x=b} f(x)g(x)$.

Podobnie, jeśli przez $f(b)$ oznaczyć $\lim_{x=b} f(x)$ (przy czym zarówno b jak i $f(b)$ mogą być $= \infty$), to wzór 4 na całkowanie przez podstawienie zachodzi. Bowiem przy założeniu zbieżności całki $\int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy$ mamy

$$\begin{aligned} \int_a^b g[f(x)] f'(x) dx &= \lim_{x=b} \int_a^x g[f(x)] f'(x) dx = \\ &= \lim_{x=b} \int_{f(a)}^{f(x)} g(y) dy = \lim_{y=f(b)} \int_{f(a)}^y g(y) dy = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy \end{aligned}$$

ze względu na ciągłość całki traktowanej jako funkcja górnej granicy całkowania (§ 10, II, 10).

Jeżeli założyć ściśle monotoniczność funkcji f , to zbieżność całki $\int_a^b g[f(x)] f'(x) dx$ pociąga za sobą zbieżność całki $\int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy$. Poprzednio udowodniona zależność daje się więc odwrócić; ze względu bowiem na równość $\lim_{y=f(b)} h(y) = b$, gdzie $h(y)$ oznacza funkcję odwrotną względem $f(x)$, poprzednie rozumowanie również w odwrotnym kierunku daje się przeprowadzić.

Inne wzory rachunkowe: wzór 5 o podziale przedziału całkowania oraz wzory 6–8 również z łatwością dają się uogólnić na całki niewłaściwe.

Uwaga. Niech funkcja f będzie przedziałami ciągła w przedziale ab . Znaczy to (por. § 5, I), że istnieje taki układ punktów

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n, \text{ gdzie } a_0 = a \text{ i } a_n = b,$$

że funkcja f_k określona przez warunki

$$f_k(x) = f(x) \text{ dla } a_{k-1} < x < a_k, \quad f_k(a_{k-1}) = f(a_{k-1} + 0) \text{ i } f_k(a_k) = f(a_k - 0)$$

jest ciągła w całym przedziale $a_{k-1} \leq x \leq a_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Mamy wówczas

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k(x) dx.$$

Opierając się na tej równości i biorąc pod uwagę, że $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k(x) dx$

jest całką właściwą, z łatwością stwierdzamy, że wzór na całkę sumy pozostaje w mocy, jeśli funkcje f i g są przedziałami ciągłe oraz że wzór na całkowanie przez podstawienie obowiązuje przy założeniu, że funkcje $g[f(x)]$ i $f'(x)$ są przedziałami ciągłe.

IV. Przykłady. 1) Aby obliczyć całkę $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, podstawiamy

$x = \operatorname{tg} t$. Ponieważ $\operatorname{tg} 0 = 0$ oraz $\lim_{t=\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} t = \infty$, przeto

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \frac{d \operatorname{tg} t}{dt} dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t dt = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)} \frac{\pi}{2} \text{ dla } n > 1 \text{ (por. § 10, I, 5)).} \end{aligned}$$

Tę samą całkę obliczyć można stosując wzór rekurencyjny (§ 9, III, 5, 2):

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

i biorąc pod uwagę, że

$$\left[\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \right]_0^{\infty} = 0 \quad \text{oraz} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right]_0^{\infty} = \pi/2.$$

2) Aby udowodnić zbieżność całki $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, zastosujemy drugie

tw. o wartości średniej (§ 10, VII), biorąc pod uwagę, że funkcja $\frac{1}{x}$ jest malejąca. Otrzymujemy

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{a} \int_a^{\frac{b}{a}} \sin x dx + \frac{1}{b} \int_{\frac{b}{a}}^b \sin x dx.$$

Niech dane będzie $\varepsilon > 0$. Należy określić takie r , żeby warunki $b > a > r$ pociągały za sobą (por. I, 2):

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon.$$

$$\text{Otóż } \left| \int_a^b \sin x dx \right| \leq 2, \text{ a więc } \left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) < \frac{4}{a} < \frac{4}{r}.$$

Wystarczy zatem przyjąć $r = \frac{4}{\varepsilon}$.

Zauważmy jeszcze, że

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin nx}{x} dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx \quad (a > 0).$$

Podstawmy bowiem $y = nx$. Otrzymujemy

$$(9') \quad \int_0^a \frac{\sin nx}{x} dx = \int_0^{na} \frac{\sin y}{y} dy,$$

$$\text{zaś } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{na} \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy, \text{ bo } \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty.$$

$$\text{Uwaga. Położmy } I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx. \text{ Mamy więc } \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Jest to szereg naprzemienny (co łatwo też geometrycznie zilustrować na wykresie funkcji $y = \frac{\sin x}{x}$) o składnikach malejących (bezwzględnie) i dążących do 0. Istotnie, podstawiając $y = x - n\pi$, mamy

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(y+n\pi)}{y+n\pi} dy = \pm \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y+n\pi} dy \text{ oraz } \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y+n\pi} dy < \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y+(n-1)\pi} dy = \mp I_{n-1}.$$

Stąd z łatwością wynika, że dla każdego $a > 0$ zachodzi wzór

$$(9'') \quad \left| \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Wzór ten w zestawieniu z (9') daje

$$(9''') \quad \left| \int_0^a \frac{\sin nx}{x} dx \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

3) Podobnie jak w przykładzie poprzednim, dowodzimy zbieżności całki (Fresnela stosowanej w optyce) $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$, nie znając całki nieoznaczonej. Przez podstawienie $x^2 = t$ otrzymujemy

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Stosując do ostatniej całki II tw. o wartości średniej, znajdujemy

$$\int_a^b \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_a^{\frac{b}{a}} \sin t dt + \frac{1}{\sqrt{b}} \int_{\frac{b}{a}}^b \sin t dt$$

i rozumując jak w przykładzie poprzednim, dowodzimy zbieżności całki $\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$. Tym samym zbieżna jest całka $\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx$, a więc i całka

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx, \text{ ponieważ całka } \int_0^1 \sin(x^2) dx \text{ jest całką właściwą.}$$

4) Udowodniliśmy poprzednio zbieżność całki $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Udowodnimy obecnie, że

$$(10) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Na mocy (9) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{x} dx$, skąd

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx.$$

Tę ostatnią całkę sprowadzimy do całki $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$, którą najpierw obliczymy. Wykażemy mianowicie, że

$$(11) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Istotnie, ze wzoru (ob. § 1, (2))

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

wynika, że $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + \dots + 2\cos 2nx$, skąd

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} + 2 \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx + \dots + 2 \int_0^{\pi/2} \cos 2nx dx = \frac{\pi}{2},$$

ponieważ wszystkie całki występujące w środkowej części tej podwójnej równości znikają.

Wzór (11) jest więc udowodniony. Pozostaje do udowodnienia, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} - \frac{\sin(2n+1)x}{x} \right] dx = 0,$$

tj. że $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \sin(2n+1)x dx = 0$. Otóż ta ostatnia równość jest

bezpośrednią konsekwencją udowodnionego przez nas wzoru (§ 10, II, 3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin nx dx = 0,$$

w którym podstawiamy

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \quad \text{dla } x > 0 \text{ oraz } f(0) = 0.$$

Tak określona funkcja f jest ciągła, bowiem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = 0$ (por. § 8, III, (13'')).

5) *Całka Dirichleta*: $\int_0^a f(x) \frac{\sin nx}{x} dx$. Udowodnimy, że jeśli funkcja f jest monotoniczna i f' ciągła w przedziale $0 \leq x \leq a$ ($a > 0$), to

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Niech dana będzie liczba $\varepsilon > 0$. Dobieramy c w taki sposób, aby

$$(13) \quad |f(c) - f(0)| < \varepsilon \text{ oraz } 0 < c < a.$$

Aby oszacować różnicę $\int_0^c f(x) \frac{\sin nx}{x} dx - \frac{\pi}{2} f(0)$, połóżmy

$$(14) \quad \int_0^c f(x) \frac{\sin nx}{x} dx - \frac{\pi}{2} f(0) = \int_0^c [f(x) - f(0)] \frac{\sin nx}{x} dx + f(0) \left(\int_0^c \frac{\sin nx}{x} dx - \frac{\pi}{2} \right)$$

i oszacujemy każdy z dwóch składników prawej strony z osobna.

Do pierwszego składnika możemy zastosować drugie twierdzenie o wartości średniej ze względu na to, że funkcja $g(x) = f(x) - f(0)$ jest monotoniczna. Otrzymujemy, biorąc pod uwagę, że $g(0) = 0$,

$$\int_0^c [f(x) - f(0)] \frac{\sin nx}{x} dx = [f(c) - f(0)] \int_{\xi_n}^c \frac{\sin nx}{x} dx, \quad 0 \leq \xi_n \leq c.$$

Na mocy (9'') $\left| \int_{\xi_n}^c \frac{\sin nx}{x} dx \right| \leq 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. Nierówność ta w zestawieniu

z nierównościami (13) daje

$$(15) \quad \left| \int_0^c [f(x) - f(0)] \frac{\sin nx}{x} dx \right| \leq 2\varepsilon \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Aby oszacować drugi składnik wzoru (14), zauważmy, że na mocy wzorów (9) i (10)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

A zatem dla dostatecznie dużych n mamy

$$(16) \quad \left| \int_0^c \frac{\sin nx}{x} dx - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon.$$

Z oszacowań (15) i (16) wnosimy natychmiast na podstawie równości (14), że zachodzi wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Zarazem zastępując we wzorze § 10, II, 3) $f(x)$ przez $\frac{f(x)}{x}$ i biorąc pod uwagę, że $0 < c < a$, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^a f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = 0.$$

Z zestawienia dwóch ostatnich równości otrzymujemy wzór (12).

Uwaga. Wzór (12) pozostaje w mocy, gdy zastąpić założenie ciągłości f' i monotoniczności f przez założenie słabsze, mianowicie przez założenie, że funkcja f jest *przedziałami ciągła wraz ze swą pochodną* i *przedziałami monotoniczna*; równocześnie $f(0)$ należy zastąpić przez $f(+0)$ (w wypadku gdy funkcja f jest nieciągła w punkcie 0); tj.

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0).$$

Istotnie, założenie nasze oznacza (por. § 5, I), że istnieje taki układ punktów $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = a$, że dla każdego $k \leq m$ funkcja f_k określona przez warunki

$f_k(x) = f(x)$ dla $a_{k-1} < x < a_k$ oraz $f_k(a_{k-1}) = f(a_{k-1}+0)$, $f_k(a_k) = f(a_k-0)$ jest ciągła wraz ze swą pochodną i monotoniczna w całym przedziale $a_{k-1} \leq x \leq a_k$.

Stosując twierdzenie o podziale przedziału całkowania do całek niewłaściwych otrzymujemy

$$\int_0^a f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \int_0^{a_1} f_1(x) \frac{\sin nx}{x} dx + \dots + \int_{a_{m-1}}^{a_m} f_m(x) \frac{\sin nx}{x} dx.$$

$$\text{Stąd } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \sum_{k=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k(x) \frac{\sin nx}{x} dx. \text{ Stąd zaś otrzy-}$$

mujemy wzór (17), ponieważ z jednej strony na mocy (12)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_0}^{a_1} f_1(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} f_1(0) = \frac{\pi}{2} f(+0),$$

zaś z drugiej strony na mocy § 10, II, 3) dla każdego $k > 1$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_k(x) \frac{\sin nx}{x} dx = 0$$

ze względu na ciągłość funkcji $\frac{f_k(x)}{x}$ w przedziale $a_{k-1} \leq x \leq a_k$.

6) Ze wzoru (12) z łatwością wynika wzór następujący, który interweniować będzie w teorii szeregów Fouriera:

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0) \quad 0 < a < \pi,$$

przy czym o funkcji f zakładamy jak poprzednio, że jest przedziałami ciągła (wraz ze swą pochodną) i przedziałami monotoniczna.

Wystarczy w tym celu zauważyć, że jeśli $0 \leq u < v < \pi$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_u^v f(x) \frac{\sin nx}{\sin x} dx - \int_u^v f(x) \frac{\sin nx}{x} dx \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_u^v f(x) \frac{x - \sin x}{x \sin x} \sin nx dx = 0.$$

Biorąc bowiem pod uwagę, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = 0$ (por. § 8, III, (13''')) oraz

że $x < \pi$, można we wzorze § 10, II, 3) podstawić na miejsce funkcji $f(x)$ funkcję $f(x) \frac{x - \sin x}{x \sin x}$.

$$7) \text{ Całka Poissona}^1 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Zauważmy przede wszystkim, że stosując podstawienie $x = z\sqrt{n}$ otrzymujemy

$$(19) \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{n} \int_0^\infty e^{-nz^2} dz.$$

Aby tę ostatnią całkę móc porównać ze znanymi nam całkami

¹ Poisson (1781—1840) — autor licznych prac z rachunku prawdopodobieństwa, mechaniki, fizyki i astronomii.

$$(20) \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \text{ oraz } \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(por. § 10, II, (5) i przykład 1)), zastosujemy podwójną nierówność

$$1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2},$$

która wynika z nierówności $e^t \geq 1+t$ (ob. § 8, III, (13a)) przez podstawienie $t=-x^2$ oraz $t=x^2$. Mamy więc

$$(1-x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

(pierwsza nierówność dla $|x| \leq 1$), skąd

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^\infty e^{-nx^2} dx \leq \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Uwzględniając wzory (19) i (20), wnosimy stąd, że

$$\sqrt{n} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{n}.$$

Oznaczając przez a_n lewy człon tej zależności, zaś przez b_n człon

prawy, mamy $a_n \leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq b_n$ dla każdego $n=1, 2, \dots$

Zarazem na mocy wzoru Wallisa (§ 10, IX, (20)):

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n, \text{ gdzie } c_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}.$$

A zatem $a_n = c_n \cdot \frac{2n}{2n+1}$ i ponieważ ciąg $\{c_n\}$ jest, jak łatwo spraw-

dzić, malejący, więc $\frac{\sqrt{\pi}}{2} < c_n$, tj. $\frac{\pi}{2} < 2c_n^2$, skąd

$$b_n \leq \sqrt{n} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)} 2c_n^2 = c_n \cdot \frac{2n}{2n-1}.$$

W rezultacie dochodzimy do wniosku, że:

$$c_n \cdot \frac{2n}{2n+1} \leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq c_n \cdot \frac{2n}{2n-1},$$

a ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-1}$, przeto $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

V. Funkcja Eulera $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$. Całka ta dla $x < 1$

posiada obie osobliwości: jest bowiem całką w nieskończonym przedziale całkowania, a ponadto funkcja podcałkowa dąży do ∞ , gdy t dąży do 0. Aby wykazać jej zbieżność, rozłożymy ją na dwie całki:

$$(21) \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \text{ oraz } \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

i udowodnimy zbieżność każdej z nich z osobna.

Aby udowodnić zbieżność pierwszej z tych całek, zauważmy, że

$0 < t^{x-1} e^{-t} < t^{x-1}$, ponieważ $t > 0$. Ponieważ zaś całka $\int_1^\infty t^{x-1} dt$ jest

zbieżna ze względu na to, że $1-x < 1$ (por. II, 1)), wnosimy, że pierwsza z całek (21) jest zbieżna.

Zarazem

$$t^{x-1} e^{-t} = \frac{t^{x+1}}{e^t} \cdot \frac{1}{t^2} \text{ oraz } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0 \text{ (por. § 7 (15a))},$$

a zatem dla dostatecznie dużych t mamy $t^{x-1} e^{-t} < \frac{1}{t^2}$ i zbieżność dru-

giej całki (21) wynika ze zbieżności całki $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ (ob. (3)).

W ten sposób zbieżność całki $\Gamma(x)$ dla każdego $x > 0$ została udowodniona.

Wykażemy obecnie, że dla naturalnych n zachodzi wzór

$$(22) \Gamma(n) = (n-1)!$$

Stosujemy w tym celu do całki $\Gamma(x)$ przy $x > 1$ wzór na całkowanie przez części:

$$(23) \Gamma(x) = - \int_0^\infty t^{x-1} \frac{d e^{-t}}{dt} dt = - \left[t^{x-1} e^{-t} \right]_0^\infty + (x-1) \int_0^\infty t^{x-2} e^{-t} dt = (x-1) \Gamma(x-1).$$

Stąd wyprowadzamy przez indukcję wzór (22), opierając się na równości

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt, \quad 0!$$

Zauważmy, że rozpatrywana w N° I, wartości funkcji Γ dla $x = 1/2$. Stosując Poissona jest n podstawienie i znajdujemy

$$(24) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-z} dz.$$

VI. Zależność między zbieżnością całki a zbieżnością szeregu nieskończonego. Twierdzenie Cauchy - Maclaurina. Niech $f(x)$, $x \geq a$, będzie ciągła, malejąca i dodatnia. Wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności całki $\int_a^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżność szeregu nieskończonego $\sum_{n=1}^{\infty} f(a+n)$.

Z założenia $f(a+n) \leq f(x) \leq f(a+n-1)$ dla $a+n-1 \leq x \leq a+n$. A zatem

$$\int_{a+n-1}^{a+n} f(a+n) dx \leq \int_{a+n-1}^{a+n} f(x) dx \leq \int_{a+n-1}^{a+n} f(a+n-1) dx,$$

$$\text{tj.} \quad f(a+n) \leq \int_{a+n-1}^{a+n} f(x) dx \leq f(a+n-1).$$

Oznaczając przez S_n sumę częściową szeregu $\sum_{m=1}^{\infty} f(a+m)$, tj.

$$S_n = f(a+1) + \dots + f(a+n), \text{ mamy więc } S_n \leq \int_a^{a+n} f(x) dx \leq S_{n-1} + f(a).$$

Jeżeli przypuścimy, że całka jest zbieżna, to wnioskujemy stąd, że szereg rozważany jest ograniczony: $S_n \leq \int_a^{\infty} f(x) dx$, a zatem że jest zbieżny (jako szereg o wyrazach dodatnich). Odwrotnie, jeśli założymy zbieżność szeregu, to mamy

$$\int_a^{a+n} f(x) dx \leq \sum_{m=0}^{\infty} f(a+m) \text{ dla każdego } n.$$

Stąd $\int_a^x f(x) dx \leq \sum_{m=0}^{\infty} f(a+m)$ dla każdego x ; oznaczając bowiem dla danego x przez n taką liczbę naturalną, że $x < a+n$, mamy

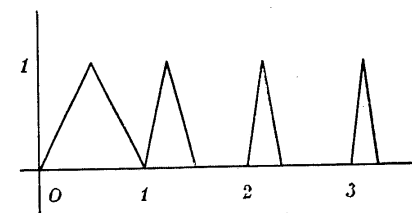
$$\int_a^x f(x) dx \leq \int_a^{a+n} f(x) dx \leq \sum_{m=0}^{\infty} f(a+m). \text{ Funkcja } \int_a^x f(t) dt \text{ jest więc ograniczona i w konsekwencji całka } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ jest zbieżna (por. I, 1).}$$

Uwagi. 1) Założenie, że funkcja $f(x)$ jest dodatnia, można w powyższym twierdzeniu pominąć. Jeśli bowiem funkcja malejąca jest ujemna, to zarówno całka jak i szereg rozważany są rozbieżne do $-\infty$.

2) Jeśli całka $\int_a^{\infty} f(x) dx$ funkcji malejącej jest zbieżna, to jak widać natychmiast, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Jeśli jednak funkcja nie jest malejąca, to całka może być zbieżna, mimo że równość ta nie zachodzi. Świadczy o tym przykład rozważany już przez nas w N° IV, 3) całki $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$;

całka ta jest zbieżna, zaś granica $\sin(x^2)$, gdy x dąży do ∞ , nie istnieje.

Można nawet powyższą osłabiłość zaostrzyć, zakładając, że $f(x) \geq 0$. Zbudujemy mianowicie ciąg nieskończony trójkątów równoramiennych o



Rys. 16

wysokości 1 i mających jako podstawę kolejno odcinki: $(0, 1)$, $(1, 1\frac{1}{2})$, ..., $(n, n + \frac{1}{2^n})$, ... osi x -ów. Niech $y = f(x)$ będzie wykresem łamanej

nieskończonej złożonej z boków tych trójkątów (różnych od podstaw) oraz z odcinków osi x -ów, łączących kolejne trójkąty. Obszar zawarty pomiędzy tą łamaną a osią x -ów jest więc złożony z powyższych trójkątów; pole jego jest zatem sumą ich pól, tj.

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots = 1.$$

Zarazem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ nie istnieje.

Przykłady. 1) Szereg $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ jest zbieżny dla każdego $s > 1$.¹

Bowiem całka $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ jest zbieżna (ob. I, (3))

2) Szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ jest zbieżny dla $s > 1$, zaś rozbieżny dla $s = 1$.

Aby to udowodnić, weźmy pod uwagę całkę $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^s}$. Otóż

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^s} = \int \frac{d \log x}{(\log x)^s} = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{(\log x)^{s-1}} \text{ dla } s > 1.$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)^{s-1} = \infty$, więc $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^s} = \frac{1}{(s-1)(\log 2)^{s-1}}$.

Na mocy tw. Cauchy-Maclaurina wnosimy stąd, że szereg nasz jest dla $s > 1$ zbieżny. Natomiast dla $s = 1$ szereg ten jest rozbieżny, bowiem

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{d \log x}{\log x} = \log(\log x),$$

co ze względu na równość $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(\log x) = \infty$ pociąga za sobą rozbieżność całki $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x}$.

3) Podobnie można dowieść, że całka $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)[\log(\log x)]^s}$ jest zbieżna dla $s > 1$, zaś rozbieżna dla $s = 1$ (a dostatecznie duże). Stąd

¹ Funkcja $\zeta(s)$ (Riemanna) posiada ważne znaczenie dla Teorii liczb.

zaś wynika, że szereg $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)[\log(\log n)]^s}$ jest zbieżny dla $s > 1$ i rozbieżny dla $s = 1$.

Ogólniejsze wyniki otrzymuje się rozważając iloczyn n kolejnych iteracji logarytmu, z których ostatnia podniesiona jest do potęgi s (w poprzednim przykładzie $n = 2$, zerowa iteracja $= x$).

Prowadzi to do dalszych typów szeregów zbieżnych oraz do ciągu nieskończonego coraz wolniej rozbieżnych szeregów nieskończonych:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}, \quad \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log(\log n)} \text{ itd.}$$

4) *Kryteria logarytmiczne.* Porównanie składników danego szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ ze składnikami szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ prowadzi do następującego kryterium zbieżności: *jeśli*

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n a_n)}{\log(\log n)} < -1,$$

to szereg $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ jest zbieżny; jeśli ta granica jest > -1 , to szereg jest rozbieżny.

Istotnie założmy, że spełniona jest nierówność (25) i oznaczmy przez $-s$ liczbę większą od rozważanej granicy, zaś mniejszą od -1 . Mamy więc $s > 1$ oraz dla dostatecznie dużych n

$$\log(n a_n) < -s \log(\log n) = \log(\log n)^{-s},$$

skąd $n a_n < (\log n)^{-s}$, tj. $a_n < \frac{1}{n(\log n)^s}$. A zatem na mocy twierdzenia o porównywaniu szeregów o składnikach dodatnich zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}$ pociąga za sobą zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Jeśli natomiast rozważana we wzorze (25) granica jest > -1 , to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\log(n a_n) > -\log(\log n), \text{ skąd } n a_n > (\log n)^{-1}, \text{ tj. } a_n > \frac{1}{n \log n}$$

i rozbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ pociąga za sobą rozbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Wypadek, gdy rozważana granica $= -1$, stanowi wypadek „wątpliwy” dla naszego kryterium logarytmicznego, tzn. nie można na podstawie tego kryterium osądzić, czy szereg jest zbieżny czy rozbieżny. Można jednak wówczas stosować mocniejsze kryteria logarytmiczne, do których prowadzą szeregi rozpatrywane w przykł. 3.

Dodajmy, że istnieją szeregi (o wyrazach dodatnich), które na żadne kryterium logarytmiczne nie reagują.

VII. Szeregi Fouriera.¹ Niech dany będzie szereg trygonometryczny zbieżny postaci następującej:

$$(26) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \\ \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots$$

Zauważmy, że jeśli szereg rozważany jest jednostajnie zbieżny w przedziale $-\pi \leq x \leq \pi$, to współczynniki a_n i b_n dają się łatwo wyrazić w zależności od sumy szeregu, tj. od funkcji f . Mianowicie, ze względu na jednostajną zbieżność mamy (por. § 10, II, 12)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

Ponieważ zaś

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \quad \text{oraz} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0, \quad \text{więc} \\ (27) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Aby obliczyć a_n , mnożymy obie strony równości (26) przez $\cos nx$ i podobnie jak poprzednio znajdujemy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nx dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_m \cos mx \cos nx + b_m \sin mx \cos nx) dx.$$

Ponieważ zaś (por. § 10, I, 4)

¹ Fourier (1768–1830). Rozwinięcia funkcji na szeregi znane pod jego imieniem wprowadził Fourier w związku z pracami z teorii ciepła.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \quad \text{oraz} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx \\ \text{dla } m \neq n, \quad \text{przeto}$$

$$(28) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Podobnie znajdujemy

$$(29) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Powstaje zagadnienie następujące: jakie funkcje $f(x)$ dadzą się przedstawić w postaci (26), przy czym współczynniki a_n i b_n mają spełniać wzory (27)–(29). Jeśli tego rodzaju rozwinięcie istnieje, to nazywamy je *szeregiem Fouriera funkcji* f .

Jest rzeczą oczywistą, że ze względu na okresowość funkcji $\cos$ i $\sin$ założyć należy okresowość funkcji f . Założymy ponadto, że funkcja f jest przedziałami monotoniczna (por. § 4, II).

Udowodnimy mianowicie następujące

Twierdzenie. Każda funkcja okresowa o okresie 2π (tzn. $f(x+2\pi)=f(x)$), przedziałami ciągła (wraz ze swą pochodną), przedziałami monotoniczna i spełniająca (w punktach nieciągłości) warunek

$$(30) \quad f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

daje się rozwinąć na szereg Fouriera.

Oznaczmy przez $S_n(x)$ n -tą sumę częściową szeregu (26), tj.

$$(31) \quad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Należy dowieść, że jeśli współczynniki spełniają warunki (27)–(29), to

$$(32) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

Wymienione warunki pozwalają przekształcić wzór (31) jak następuje:

$$(33) \quad \pi S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} f(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos t \cos x + \sin t \sin x) dt + \dots \\ \dots + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx) dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \dots + \cos n(t-x) \right] dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt$$

na mocy znanego wzoru (ob. § 1, (2)):

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Podstawmy $\frac{t-x}{2} = z$. Otrzymujemy

$$(34) \quad \pi S_n(x) = \int_{\frac{-\pi-x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz.$$

Rozkładając tę całkę na dwie całki w przedziałach od 0 do $\frac{\pi-x}{2}$ i od $\frac{-\pi-x}{2}$ do 0 i podstawiając w drugiej całce $z = -y$, otrzymujemy

$$(35) \quad \pi S_n(x) = \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz + \int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2y) \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y} dy.$$

Udowodnimy obecnie równość (32) dla $-\pi < x < \pi$. Ze względu na (30) wystarczy dowieść, że

$$(36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz = \frac{\pi}{2} f(x+0)$$

oraz

$$(37) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2y) \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y} dy = \frac{\pi}{2} f(x-0).$$

Położmy przy danym x : $f(x+2z) = g(z)$. Funkcja $g(z)$ jest więc przedziałami ciągła (wraz ze swą pochodną) i przedziałami monotoniczna. Spełnia ona zatem (ob. (18)) wzór

$$(38) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a g(z) \frac{\sin nz}{\sin z} dz = \frac{\pi}{2} g(+0), \text{ o ile } 0 < a < \pi.$$

We wzorze tym można zastąpić a przez $\frac{\pi-x}{2}$, nierówność bowiem $-\pi < x < \pi$ pociąga za sobą nierówność $0 < \frac{\pi-x}{2} < \pi$. Ponieważ zaś $g(+0) = f(x+0)$, wzór (38) natychmiast daje (36) (przechodzimy od ciągu $n = 1, 2, \dots$ do podciągu liczb nieparzystych).

Zupełnie podobnie, kładąc $f(x-2y) = h(y)$ i biorąc pod uwagę, że $0 < \frac{\pi+x}{2} < \pi$ i że $h(+0) = f(x-0)$, otrzymujemy wzór (37).

Twierdzenie nasze jest więc udowodnione dla $-\pi < x < \pi$. Pozostaje do rozpatrzenia wypadek, gdy $x = -\pi$ (lub gdy $x = \pi$).

Niech więc $x = -\pi$. Zgodnie z (34) mamy

$$\pi S_n(-\pi) = \int_0^{\pi} f(-\pi+2z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz.$$

Rozkładając tę całkę na dwie całki: w przedziałach od 0 do $\frac{\pi}{2}$ i od $\frac{\pi}{2}$ do π i podstawiając w drugiej całce $y = \pi - z$, otrzymujemy

$$\pi S_n(x) = \int_0^{\pi/2} f(-\pi+2z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz + \int_0^{\pi/2} f(\pi-2y) \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y} dy.$$

Jak poprzednio, pierwsza z tych całek dąży do $\frac{\pi}{2} f(-\pi+0)$, druga do $\frac{\pi}{2} f(\pi-0)$, tj. do $\frac{\pi}{2} f(-\pi-0)$ (ze względu na okresowość funkcji f).

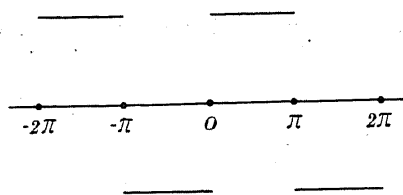
Wzór (32) zachodzi więc również i dla $x = -\pi$; a zatem — ze względu na okresowość — dla każdego x .

W ten sposób twierdzenie nasze udowodnione jest w całości.

VIII. Zastosowania i przykłady. 1) Niech $f(x)$ oznacza funkcję okresową o okresie 2π daną przez warunki następujące:

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} \text{ dla } -\pi < x < 0, \quad f(0) = 0, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} \text{ dla } 0 < x < \pi, \quad f(\pm\pi) = 0.$$

Wykres tej funkcji składa się więc z odcinków długości π położonych na przemian na prostych $y = \frac{\pi}{4}$ i $y = -\frac{\pi}{4}$ oraz z punktów osi x -ów będących całkowitymi wielokrotnościami liczby π (końce odcinków do wykresu nie należą).



Rys. 17

Widać natychmiast, że funkcja tak określona jest przedziałami ciągła i przedziałami monotoniczna (mianowicie w przedziałach postaci $(m-1)\pi < x < m\pi$, gdzie m jest liczbą całkowitą); ponadto spełniony jest warunek (30). Do funkcji tej można więc stosować twierdzenie o rozwijaniu na szereg Fouriera.

Obliczmy współczynniki a_n i b_n stosownie do wzorów (27)–(29).

$$\text{Otrzymujemy } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\frac{\pi}{4} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\pi}^0 -\cos nx dx + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right\} = 0 \quad (n > 0),$$

$$b_n = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\pi}^0 -\sin nx dx + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right\} = \frac{1}{4n} (2 - 2\cos n\pi),$$

a więc $b_n = 0$ dla n parzystych i $b_n = 1/n$ dla n nieparzystych.

W rezultacie

$$(39) \quad f(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots$$

Dla x spełniającego warunek $0 < x < \pi$ możemy więc $f(x)$ zastąpić przez $\pi/4$.

W szczególności, podstawiając $x = \frac{\pi}{2}$, otrzymujemy znane już nam rozwinięcie Leibniza (por. § 7, (37)):

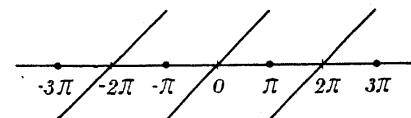
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

2) Niech $f(x)$ będzie funkcją o okresie 2π zdefiniowaną jak następuje:

$$f(x) = x/2 \quad \text{gdy} \quad -\pi < x < \pi, \quad f(-\pi) = 0 = f(\pi).$$

Konstatujemy z łatwością, że funkcja f tak określona jest przedzia-

łami ciągła i przedziałami monotoniczna (por. rys. 18). Ponadto spełniony jest warunek (30). Funkcja f daje się więc rozwinąć na szereg Fouriera.



Rys. 18

Obliczając na mocy wzorów (27)–(29) współczynniki a_n i b_n , znajdujemy

$$(40) \quad \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \quad -\pi < x < \pi.$$

Zauważmy, że podstawiając $x = \frac{\pi}{2}$, znajdujemy rozwinięcie Leibniza dla $\frac{\pi}{4}$ (podobnie jak w przykładzie poprzednim).

3) Rozwiemy funkcję $f(x) = |x|$ w przedziale $-\pi \leq x \leq \pi$. Dla innych x -ów funkcja jest określona przez warunek $f(x + 2m\pi) = f(x)$. Jest to więc funkcja ciągła na całej osi x -ów. Wykresem jej jest linia łamana.

Obliczmy współczynniki rozwinięcia na szereg Fouriera.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = 0 \quad \text{lub} \quad -\frac{4}{\pi n^2}$$

w zależności od tego czy n jest parzyste (> 0), czy nieparzyste. Bowiem

$$\int x \cos nx dx = \frac{1}{n} x \sin nx - \frac{1}{n} \int \sin nx dx = \frac{1}{n} x \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx.$$

Analogicznie znajdujemy $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx dx = 0$. A zatem

$$(41) \quad |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$

Zauważmy, że w szczególności podstawiając $x = 0$, otrzymujemy

$$(42) \quad \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Stąd wzór Eulera:

$$(42') \quad \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Oznaczając bowiem sumę tego szeregu przez s , mamy

$$\frac{s}{4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots, \text{ a więc } s - \frac{s}{4} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots,$$

$$\text{tj. } \frac{3}{4}s = \frac{\pi^2}{8}, \text{ czyli } s = \frac{\pi^2}{6}.$$

4) Niech $y = \cos tx$, $-\pi \leq x \leq \pi$. Zakładamy przy tym, że t nie jest liczbą całkowitą. Wzory (27)–(29) dają z łatwością:

$$a_0 = \frac{2}{\pi t} \sin \pi t, \quad a_n = \frac{2}{\pi} (-1)^n \frac{t}{t^2 - n^2} \sin \pi t, \quad b_n = 0.$$

A zatem

$$(43) \quad \pi \cos tx = 2t \sin \pi t \left(\frac{1}{2t^2} - \frac{\cos x}{t^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{t^2 - 2^2} - \dots \right).$$

W szczególności podstawiając $x = \pi$, otrzymujemy po podzieleniu obu stron równości (43) przez $\sin \pi t$:

$$(44) \quad \pi \cotg \pi t = \frac{1}{t} + 2t \left(\frac{1}{t^2 - 1^2} + \frac{1}{t^2 - 2^2} + \dots \right).$$

Wzór (44) daje następujące interesujące zastosowanie.

Pokładźmy $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2}$. Dla danej liczby x spełniającej warunek $0 < x < 1$ szereg $S(t)$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $0 \leq t \leq x$, bowiem $\frac{t}{n^2 - t^2} < \frac{1}{n^2 - x^2}$, zaś szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$ jest, jak łatwo widać, zbieżny.

Szereg $S(t)$ można więc całkować wyraz po wyrazie w przedziale $0 \leq t \leq x$. Ponieważ

$$\int \frac{2t}{n^2 - t^2} dt = -\log(n^2 - t^2), \text{ więc } \int_0^x \frac{2t}{n^2 - t^2} dt = -\log \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

Stąd (ob. § 10, II, 12 i § 5, (11)):

$$\int_0^x S(t) dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) = -\log \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

Z drugiej strony

$$\pi \int \left(\cotg \pi t - \frac{1}{\pi t} \right) dt = \log \sin \pi t - \log \pi t = \log \frac{\sin \pi t}{\pi t}.$$

A zatem

$$\pi \int_0^x \left(\cotg \pi t - \frac{1}{\pi t} \right) dt = \log \frac{\sin \pi x}{\pi x} - \lim_{t \rightarrow +0} \log \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \log \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

$$\text{bowiem } \lim_{t \rightarrow +0} \log \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \log \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \log 1 = 0.$$

Biorąc pod uwagę, że zależność (44) zachodzi dla każdego t spełniającego nierówność $0 < t \leq x$ i że funkcja $\cotg \pi t - \frac{1}{\pi t}$ ma w punkcie 0 prawostronną granicę, mianowicie $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\cotg t - \frac{1}{t} \right) = 0$ (por. § 8, (13^{IV})), wnosimy, że

$$\pi \int_0^x \left(\cotg \pi t - \frac{1}{\pi t} \right) dt = - \int_0^x S(t) dt,$$

tj.

$$\log \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \log \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right),$$

czyli

$$(45) \quad \sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right), \quad -1 < x < 1.$$

Zauważmy jeszcze, że podstawiając we wzorze (45) $x = 1/2$, otrzymujemy znany nam już wzór Wallisa (ob. § 10, (22')):

$$(46) \quad \frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots = \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \dots$$

Podstawiając $x = 1/4$, otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(4n)^2} \right] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \dots,$$

skąd ze względu na (46) wnosimy, że

$$\sqrt{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \dots = \frac{4}{3} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{100}{99} \cdot \dots$$

Zadania do § 11

1. Obliczyć $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$, $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$.

2. Zbadać zbieżność całek

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$

3. Niech $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ i niech dana będzie liczba $c > 0$. Połóżmy

$$a_n = \int_{a+c(n-1)}^{a+cn} f(x) dx.$$

Jeżeli szereg $a_1 + a_2 + \dots$ jest zbieżny, to również całka $\int_a^{\infty} f(x) dx$ jest

zbieżna i $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Zastosować powyższe twierdzenie do dowodu zbieżności całki

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

4. Całkę $\int_a^{\infty} f(x) dx$ nazywamy bezwzględnie zbieżną, jeśli całka

$\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ jest zbieżna. Udowodnić, że całka bezwzględnie zbieżna jest zbieżna też w zwykłym sensie.

5. Dowieść, że szereg $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$ jest zbieżny ($k > a$).

6. Dowieść, że $\int_{-1}^{+1} \frac{\log(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

(Rozwinąć funkcję podcałkową na szereg nieskończony i zastosować wzór (42)).

7. Dowieść, że $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$.

(Por. wzór (42)).

8. Rozwinąć na szereg Fouriera funkcje:

1) x^2 , 2) $x \cos x$, 3) $|\sin x|$, 4) $\sinh tx$, 5) $\cosh tx$.

9. Przy założeniu, że układ funkcji $f_1, f_2, \dots$ jest ortogonalny i że szereg $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie (w rozważanym przedziale ab), obliczyć współczynniki a_n (w zależności od funkcji $f, f_1, f_2, \dots$).