

$$(15) \quad f_n(a_{k-1}) \leq f_n(x) \leq f_n(a_k).$$

Ponieważ zaś w myśl definicji funkcji f_n mamy $f_n(a_{k-1}) = f(a_{k-1})$ oraz $f_n(a_k) = f(a_k)$, przeto $f(a_{k-1}) \leq f_n(x) \leq f(a_k)$, co wobec pierwszej z nierówności (14) daje $|f_n(x) - f(a_k)| < \varepsilon$. Zestawiając tę nierówność z drugą nierównością (14), otrzymujemy wzór (13).

Oznacza to, że zbieżność funkcji f_n do funkcji f jest jednostajna.

Zadania do § 6

1. Udowodnić, że suma ciągów jednostajnie zbieżnych jest jednostajnie zbieżna. Udowodnić to samo dla iloczynu.

2. Udowodnić, że promień zbieżności r szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ spełnia wzór (Cauchy-Hadamarda):

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

3. Niech dany będzie ciąg funkcji ciągłych $f_1(x), f_2(x), \dots, a \leq x \leq b$. Udowodnić, że na to, aby ten ciąg był zbieżny jednostajnie do funkcji $f(x)$, potrzeba i wystarcza, aby warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ pociągał za sobą $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$.

4. Zbadać jednostajność zbieżności ciągów funkcji

$$f_n(x) = x^n(1-x^n), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{oraz} \quad f_n(x) = \frac{1}{nx}, \quad 0 < x \leq 1.$$

5. Udowodnić, że szereg

$$S(x) = x(1-x) - x(1-x) + \dots + x^n(1-x) - x^n(1-x) + \dots$$

jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w przedziale $0 \leq x \leq 1$.

Przetworzyć tak wyrazy tego szeregu, aby otrzymać szereg zbieżny niejednostajnie w tym przedziale.

ROZDZIAŁ III

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY JEDNEJ ZMIENNEJ

§ 7. Pochodne rzędu pierwszego

I. Definicje 1. Niech funkcja f dana będzie w pewnym przedziale otwartym, zawierającym punkt a . Pochodną funkcji f w punkcie a nazywamy granicę

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Funkcję $g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, której granicę rozpatrujemy dla h dążącego do 0, nazywamy *ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie a dla przyrostu h* .

Pochodną zapisujemy symbolicznie jak następuje:

$$(1) \quad \left[\frac{d f(x)}{dx} \right]_{x=a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

lub krócej $f'(a)$. Krócej jeszcze, kładąc $y = f(x)$, oznaczamy pochodną funkcji f w dowolnym punkcie x przez $\frac{dy}{dx}$ (pochodna „ dy po dx “). Przy tej symbolice (pochodzącej od Leibniza) pochodna przedstawiona jest jako iloraz dwóch różniczek dy i dx (por. N° XIII). Można jednak symbol $\frac{dy}{dx}$ traktować jako jedną całość, nie przypisując różniczkom znaczenia wielkości matematycznych.

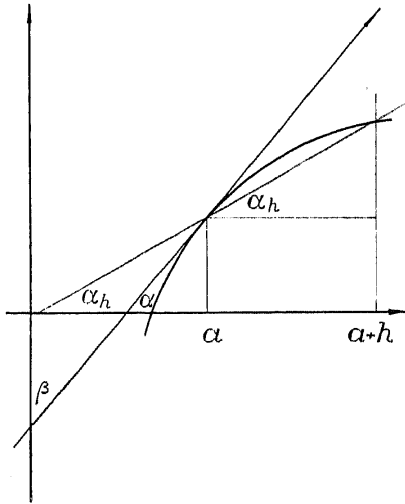
Geometrycznie interpretuje się pochodną jak następuje. Niech dana będzie krzywa $y = f(x)$. Przeprowadźmy prostą przez punkty

¹ Rachunek różniczkowy i całkowy został stworzony przez Newtona i Leibniza pod koniec XVII wieku.

$[a, f(a)]$ i $[a+h, f(a+h)]$ przy ustalonej dodatniej wartości h . Prosta tę nazywamy *sieczną* względem danej krzywej. Iloraz różnicowy $g(h)$ jest, jak łatwo widać, tangensem kąta α_h , który sieczna zorientowana według rosnących odciętych tworzy z dodatnim kierunkiem osi x -ów. Graniczne położenie, do którego zmierza sieczna, gdy h dąży do 0, uważać będziemy za położenie stycznej. A zatem

$$(2) \quad f'(a) = \operatorname{tg} \alpha,$$

gdzie α jest kątem utworzonym przez dodatni kierunek stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie a z dodatnim kierunkiem osi x -ów.



Rys. 9

Nie każda funkcja ciągła posiada pochodną, czyli nie każda krzywa posiada w każdym punkcie styczną. Np. funkcja $f(x) = |x|$ nie posiada pochodnej w punkcie 0. W tym bowiem wypadku

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1, \quad \text{zaś} \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1.$$

W danym wypadku możemy mówić o pochodnych *jednostronnych*, które są odpowiednio równe 1 i -1 . Ogólnie, nazywamy pochodną *prawostronną*, względnie *lewostronną*, granicę prawostronną, względnie lewostronną:

$$(3) \quad f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Istnieją jednak funkcje ciągłe, które nie posiadają pochodnej nawet

jednostronnej. Łatwo się przekonać, że funkcja f określona przez warunki

$$(4) \quad f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad \text{dla } x \neq 0, \quad f(0) = 0$$

jest ciągła, lecz nie posiada pochodnej w punkcie 0.

Mianowicie podstawiając na h dwa ciągi wartości

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \dots \quad \text{oraz} \quad \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \dots,$$

otrzymujemy w granicy w pierwszym wypadku 1, zaś w drugim -1 .

Nieistnienie pochodnej $f'(0)$ wynika również z nieistnienia granicy $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$. Mielibyśmy bowiem $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$ (por. §4(7)).

Istnieją jeszcze bardziej osobliwe funkcje ciągłe, mianowicie pozbawione pochodnych w każdym punkcie; przedstawiają one więc krzywe ciągłe, które w żadnym punkcie nie posiadają stycznej.

Prócz pochodnych skończonych rozważamy też pochodne nieskończone. Udowodnimy np., że

$$\left(\frac{d^s \sqrt{x}}{dx} \right)_{x=0} = \infty, \quad \left(\frac{d \sqrt{x}}{dx} \right)_{x=+0} = \infty.$$

$$\text{Istotnie} \quad \left(\frac{d^s \sqrt{x}}{dx} \right)_{x=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty, \quad \text{bo} \quad \lim_{h \rightarrow 0} h^{2/3} = 0. \quad \text{Analogicznie}$$

nie $\lim_{h \rightarrow +0} \sqrt[3]{h} = +0$, skąd drugi wzór.

Mówimy, że funkcja jest *różniczkowalna* w przedziale otwartym, jeśli posiada pochodną skończoną w każdym punkcie tego przedziału; mówiąc, że funkcja jest różniczkowalna w przedziale domkniętym $a \leq x \leq b$, zakładamy, że posiada pochodną w każdym punkcie wewnątrz przedziału, zaś pochodną jednostronną na krańcach tego przedziału.

Podobnie założenie ciągłości pochodnej $f'(x)$ w przedziale $a \leq x \leq b$ oznacza, że pochodna ta jest ciągła wewnątrz przedziału ab , pochodna prawostronna jest ciągła prawostronnie w punkcie a , zaś lewostronna lewostronnie w punkcie b .

Przez *normalną* do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $[x, f(x)]$ rozumiemy prostą prostopadłą do stycznej w tym punkcie i przez ten punkt przechodzącą.

Zgodnie z wyżej podaną interpretacją geometryczną pochodnej, styczna do krzywej w punkcie (x, y) , gdzie $y = f(x)$, wyraża się równaniem

$$(5) \quad \frac{Y-y}{X-x} = f'(x), \text{ względnie } X=x, \text{ jeśli } f'(x) = \infty,$$

gdzie X i Y oznaczają współrzędne bieżące stycznej.

Równaniem normalnej do krzywej w punkcie (x, y) jest więc:

$$(6) \quad \frac{X-x}{Y-y} = -f'(x), \text{ względnie } Y=y, \text{ jeśli } f'(x) = \infty.$$

Prócz interpretacji geometrycznej pochodna posiada ważne interpretacje w fizyce. W szczególności prędkość punktu poruszającego się po linii prostej wyraża się jako pochodna drogi względem czasu:

$v = \frac{ds}{dt}$, gdzie droga jest wyrażona jako funkcja czasu: $s = f(t)$. Prędkość więc w chwili t jest to granica prędkości przeciętnej w czasie od t do $t+h$, gdy h dąży do 0; tą bowiem prędkością przeciętną jest iloraz różnicowy.

II. Różniczkowanie funkcji elementarnych. Zauważmy przede wszystkim, że

1. *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x , to jest w tym punkcie ciągła.*

Istotnie, ponieważ granica $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ z założenia istnieje (i jest skończona), przeto

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = 0,$$

skąd $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$, co oznacza, że funkcja f jest ciągła w punkcie x .

2. *Niech funkcja f ma wartość stałą: $f(x) = c$. Wówczas $\frac{dc}{dx} = 0$.*

Mamy bowiem $f(x+h) = c = f(x)$, skąd $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$.

3. $\frac{dx}{dx} = 1$.

Ponieważ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$.

Następujące wzory dotyczą różniczkowania sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu dwóch funkcji $y = f(x)$ i $z = g(x)$, różniczkowalnych w danym punkcie x :

$$4. \quad \frac{d(y \pm z)}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx}, \quad 5. \quad \frac{d(yz)}{dx} = y \frac{dz}{dx} + z \frac{dy}{dx}.$$

$$6. \quad \frac{d(y/z)}{dx} = \frac{z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx}}{z^2}, \text{ skąd: } 6'. \quad \frac{d(1/z)}{dx} = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dx} \text{ (o ile } z \neq 0).$$

Dowód wzoru 4 wynika z układu równości:

$$\begin{aligned} \frac{d(y+z)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}. \end{aligned}$$

Dowód dla różnicy jest analogiczny.

W dowodzie wzoru 5 oprzemy się na ciągłości funkcji f w punkcie x (por. 1); mamy więc $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$. Otóż

$$\begin{aligned} \frac{d(yz)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x)] + [f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= y \frac{dz}{dx} + z \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

Aby udowodnić 6, udowodnimy najpierw 6'.

$$\begin{aligned} \frac{d(1/z)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right] = - \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}, \text{ bo } \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x) = z \text{ (przy tym ze względu na to, że } \\ &g(x) \neq 0, \text{ istnieje takie } \delta > 0, \text{ że dla } |h| < \delta \text{ jest } g(x+h) \neq 0). \end{aligned}$$

Wzory 5 i 6' pociągają za sobą 6:

$$\frac{d(y/z)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(y \cdot \frac{1}{z} \right) = y \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{z} \right) + \frac{1}{z} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z^2} \left(z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx} \right)$$

(w pierwszej z powyższych równości używamy znakowania $\frac{d}{dx} F(x)$ za miast $\frac{dF(x)}{dx}$).

Podstawiając we wzorach 4 i 5 $g(x) = c$, otrzymujemy natychmiast:

$$4'. \quad \frac{d(y+c)}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad 5'. \quad \frac{d(cy)}{dx} = c \frac{dy}{dx}.$$

Pierwszy z tych wzorów oznacza, że przesunięcie krzywej równoległe do osi y -ów nie wpływa na wartość kąta utworzonego przez styczną z osią x -ów; drugi oznacza, że zmiana skali na osi y -ów wpływa w tym samym stosunku na zmianę tangensa rozważanego kąta.

Stosując wzór 5 i zasadę indukcji, dowodzimy z łatwością, że dla wykładników naturalnych $n \geq 2$ zachodzi wzór:

$$7. \quad \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Jak widać natychmiast, wzór ten obowiązuje również dla $n=0$ i dla $n=1$, jeśli przyjąć, że dla $n=0$ należy w wypadku, gdy $x=0$, zastąpić prawą stronę wzoru przez 0, zaś dla $n=1$ — przez 1 (jak to bezpośrednio wykazują wzory 2 i 3).

Wzór pozostaje również w mocy dla n całkowitych ujemnych (gdy $x \neq 0$). W tym bowiem wypadku mamy na mocy 6' i 7:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^{-n}} \right) = -\frac{1}{x^{-2n}} \cdot \frac{d(x^{-n})}{dx} = \frac{n}{x^{-2n}} x^{-n-1} = nx^{n-1}.$$

Wzór 7 uogólnimy następnie na dowolne wykładniki rzeczywiste (dla $x > 0$).

Ze wzorów dotychczas udowodnionych z łatwością wyprowadzamy wzór na pochodną wielomianu:

$$8. \quad \frac{d}{dx} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1}.$$

Obliczmy obecnie pochodne funkcji trygonometrycznych.

$$9. \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x. \quad 10. \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x. \quad 11. \quad \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dowód wzoru 9 oprzemy na znanym z trygonometrii wzorze na różnicę sinusów i na wzorze $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, udowodnionym w § 4, V(4). Otóż

$$\begin{aligned} \frac{d \sin x}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\sin(x+h) - \sin x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{(h/2)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) = \cos x \end{aligned}$$

ze względu na ciągłość funkcji $\cos x$.

Podobnie

$$\begin{aligned} \frac{d \cos x}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\cos(x+h) - \cos x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{h} \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \sin \left(x + \frac{h}{2} \right) = \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{(h/2)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{h}{2} \right) = -\sin x. \end{aligned}$$

Wzory 9 i 10 pociągają za sobą wzór 11 na mocy 6. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{1}{\cos^2 x} \left(\cos x \cdot \frac{d \sin x}{dx} - \sin x \cdot \frac{d \cos x}{dx} \right) = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

$$12. \quad \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}. \quad \text{Ogólniej} \quad \frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{x \log a}.$$

Istotnie, na mocy ogólnych własności logarytmu (§ 5, IV(9) i (10)):

$$\frac{1}{h} [\log(x+h) - \log x] = \frac{1}{h} \log \left(1 + \frac{h}{x} \right) = \frac{1}{x} \log \left[\left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right].$$

Podstawmy $y = \frac{h}{x}$. Ponieważ $\lim_{h \rightarrow 0} y = 0$, mamy (por. § 4(15)):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\log(x+h) - \log x] = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log \left[\left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right] = \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \log(1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

Ponieważ zaś $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ (ob. § 4 (18)) i ponieważ $\log z$ jest funkcją ciągłą w punkcie $z = e$, więc (por. § 5 (6)):

$$\lim_{y \rightarrow 0} \log(1+y)^{\frac{1}{y}} = \log \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \log e = 1.$$

$$\text{A zatem} \quad \frac{d \log x}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\log(x+h) - \log x] = \frac{1}{x}.$$

Druga część wzoru 12 wynika z pierwszej na podstawie wzoru 5':

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{d}{dx} \left(\frac{\log x}{\log a} \right) = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x \log a}.$$

Dalsze wzory na różniczkowanie funkcji elementarnych wyprowadzimy z ogólnego wzoru na pochodną funkcji odwrotnej.

III. Różniczkowanie funkcji odwrotnych. Niech dana będzie funkcja różniczkowalna i różnowartościowa $y = f(x)$ w przedziale $a \leq x \leq b$. Jak wiadomo (§ 5, V, 1 i 2), istnieje wówczas funkcja $x = g(y)$ odwrotna względem danej i ciągła w przedziale $f(a) \leq y \leq f(b)$, względnie $f(b) \leq y \leq f(a)$ (w zależności od tego czy funkcja f jest rosnąca, czy malejąca). Udowodnimy, że w przedziale tym funkcja g jest różniczkowalna. Mianowicie:

$$1. \quad \frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}, \quad \text{o ile } \frac{dy}{dx} \neq 0.$$

Przy danym x położmy $k = f(x+h) - f(x)$. A zatem $f(x+h) = y+k$, tj. $x+h = g(y+k)$, skąd $h = g(y+k) - g(y)$. Przy zmiennym k przyrost h jest funkcją k . Ze względu na ciągłość funkcji g , mamy $\lim_{k \rightarrow 0} h = 0$; przy tym dla $k \neq 0$ mamy $h \neq 0$, bo funkcja g jest różnowartościowa. Stosując wzór (15) § 4, otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Uwagi. 1) Na krańcach przedziału zmienności y -ów, tj. w punktach $f(a)$ i $f(b)$, mamy do czynienia z *jednostronną* pochodną. Wzór nasz przybiera wówczas postać następującą:

$$1' \quad \frac{dx}{dy}_{\pm} = 1 : \frac{dy}{dx}_{\pm},$$

przy czym znaki są zgodne dla funkcji rosnących, przeciwne — dla funkcji malejących.

Jeśli bowiem funkcja f jest rosnąca, to również funkcja g jest rosnąca i wówczas przyrosty h i k mają ten sam znak i w konsekwencji $\lim_{k \rightarrow +0} h = +0$ oraz $\lim_{k \rightarrow -0} h = -0$. Natomiast, jeżeli funkcja f jest malejąca, to $\lim_{k \rightarrow +0} h = -0$ i $\lim_{k \rightarrow -0} h = +0$.

2) Geometrycznie twierdzenie 1 można zilustrować jak następuje.

Oznaczmy przez α kąt utworzony przez styczną do krzywej z osią x -ów, zaś przez β kąt utworzony przez tę styczną z osią y -ów (ob. rys. 9). Wówczas $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha$, tj. $\operatorname{tg} \beta = 1/\operatorname{tg} \alpha$, zgodnie ze wzorem 1.

3) Wzór 1 wskazuje na dogodność posługiwania się symboliką Leibniza: przy przejściu do funkcji odwrotnej pochodna $\frac{dy}{dx}$ zachowuje się jak ułamek.

Przejdziemy obecnie do zastosowań wzoru 1 przy różniczkowaniu funkcji elementarnych.

$$2. \quad \frac{d e^x}{dx} = e^x. \quad \text{Ogólniej: } 2'. \quad \frac{d a^x}{dx} = a^x \log a.$$

Położmy $y = e^x$, tj. $x = \log y$. Ponieważ na mocy 12, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$, przeto $\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy} = y$. Podstawiając $y = e^x$, otrzymujemy wzór 2.

Dowód wzoru 2' jest zupełnie analogiczny.

$$3. \quad \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 4. \quad \frac{d \arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$5. \quad \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Istotnie, położmy $y = \arcsin x$, tj. $x = \sin y$. Mamy więc

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

(przy czym pierwiastek ma znak + ze względu na to, że $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, zgodnie z definicją funkcji $\arcsin x$, ob. § 4, IV).

$$\text{Stąd } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Podobnie, kładąc $y = \arccos x$, tj. $x = \cos y$, mamy

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - x^2}, \text{ skąd } \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wreszcie dla $y = \operatorname{arctg} x$, mamy $x = \operatorname{tg} y$, a zatem

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2, \text{ skąd } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Nim przejdziemy do wzorów dotyczących superponowania powyżej rozpatrywanych funkcji elementarnych, udowodnimy kilka ogólnych twierdzeń o pochodnych.

IV. Extrema funkcji. Twierdzenie Rolle'a. Niech funkcja f określona będzie w otoczeniu punktu a (tj. w jakimś przedziale zawierającym ten punkt wewnątrz). Jeżeli istnieje takie $\delta > 0$, że nierówność $|h| < \delta$ pociąga za sobą nierówność

$$(7) \quad f(a+h) \leq f(a),$$

to mówimy, że funkcja f ma *maximum* w punkcie a .

Jeśli zaś nierówność $|h| < \delta$ pociąga za sobą

$$(8) \quad f(a+h) \geq f(a),$$

to mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *minimum*.

Inaczej mówiąc, w punkcie a występuje maximum (wzgl. minimum) funkcji f , jeśli istnieje taki przedział otaczający punkt a , że $f(a)$ jest największą (wzgl. najmniejszą) spośród wartości, jakie funkcja f przyjmuje w tym przedziale.

Jeśli we wzorach (7) i (8) zastąpić znaki $\leq$ i $\geq$ przez $<$ i $>$, to mamy do czynienia z *właściwym* maximum i minimum.

Maxima i minima obejmujemy ogólną nazwą *extremów* funkcji f .

Przykłady. Funkcja x^2 posiada minimum w punkcie 0; funkcja $\sin x$ przyjmuje na przemian maximum i minimum w punktach, które są nieparzystymi wielokrotnościami $\pi/2$.

Odnośnie związku pojęcia ekstremum funkcji z pojęciem kresu górnego i dolnego funkcji, zauważmy przede wszystkim, że pojęcie ekstremum jest pojęciem *lokalnym*, zaś pojęcie kresu funkcji jest pojęciem *integralnym*: mówimy o ekstremum funkcji w danym punkcie, zaś o kresie funkcji w danym przedziale; ażeby orzec, czy funkcja f w punkcie a posiada ekstremum, wystarczy znać wartości funkcji w dowolnym otoczeniu punktu a , natomiast gdy chodzi o kres górny funkcji w przedziale, należy znać zachowanie się funkcji w całym przedziale.

Z definicji wynika natychmiast, że

1. Jeśli funkcja $f(x)$, $a \leq x \leq b$, osiąga kres górny w punkcie c położonym wewnątrz przedziału ab (tj. $a < c < b$), to funkcja w tym punkcie posiada też maximum.

Analogiczne twierdzenie dotyczy kresu dolnego i minimum.

Jeśli natomiast kres górny funkcji wypada w jednym z końców przedziału ab , to nie jest to maximum funkcji, bo funkcja nie jest określona w żadnym otoczeniu krańców tego przedziału. Np. funkcja $y = x$ rozpatrywana w przedziale $0 \leq x \leq 1$ posiada kres górny w punkcie 1; nie jest to jednak maximum.

2. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie c i posiada w tym punkcie ekstremum, to $f'(c) = 0$.

Założmy, że funkcja posiada w punkcie c maximum (rozumowanie w wypadku minimum jest analogiczne). Niech więc liczba $\delta > 0$ będzie tak dobrana, ażeby dla $|h| < \delta$ zachodziła nierówność $f(c+h) - f(c) \leq 0$. A zatem

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \text{ dla } h > 0 \text{ i } \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \text{ dla } h < 0.$$

Ponieważ zaś z założenia istnieje pochodna $f'(c)$, a więc

$$f'_+(c) = f'(c) = f'_-(c).$$

Zarazem z poprzednich nierówności wynika: $f'_+(c) \leq 0 \leq f'_-(c)$. Stąd

$$f'_+(c) = 0 = f'_-(c), \text{ tj. } f'(c) = 0.$$

Uwaga. Twierdzenie odwrotne nie zachodzi: równość $f'(c) = 0$ może być spełniona, pomimo że w punkcie c funkcja nie posiada ekstremum. Jest tak np. dla funkcji x^3 w punkcie 0.

Geometrycznie istnienie ekstremum funkcji f w punkcie c oznacza więc (w wypadku, gdy funkcja jest różniczkowalna), że styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $[c, f(c)]$ jest równoległa do osi x -ów (względnie z osią x -ów się pokrywa).

3. **Tw. Rolle'a.** Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale domkniętym $a \leq x \leq b$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje takie c , że $a < c < b$ oraz $f'(c) = 0$.

Istotnie, jeśli funkcja f jest stale $= 0$, to również $f'(x) = 0$ dla każdego x leżącego między a i b ; można więc w tym wypadku na c przyjąć którykolwiek z tych x -ów.

Założmy więc, że funkcja f nie jest stale $= 0$, np. że przyjmuje wartości dodatnie. Oznaczając przez M kres górny tej funkcji, mamy więc $M > 0$. W myśl tw. Weierstrassa (§ 5, IV, 2) istnieje takie c w przedziale ab , że $f(c) = M$. Przy tym $a \neq c \neq b$, ponieważ z założenia $f(a) = 0 = f(b)$. A zatem $a < c < b$. Znaczący to, że funkcja f osiąga kres górny w punkcie c położonym wewnątrz przedziału ab ; w myśl tw. 1, funkcja f posiada więc w tym punkcie maximum i w myśl tw. 2: $f'(c) = 0$.

Geometrycznie twierdzenie Rolle'a posiada treść szczególnie sugestywną: jeżeli krzywa (posiadająca w każdym punkcie styczną) przecina oś x -ów w dwóch punktach, to w pewnym punkcie tej krzywej styczna jest równoległa do osi x -ów.

Uwaga. Twierdzeniu Rolle'a nadajemy również postać następującą: jeśli $f(x) = f(x+h)$, to istnieje takie Θ , że

$$(9) \quad f'(x + \Theta h) = 0, \quad 0 < \Theta < 1,$$

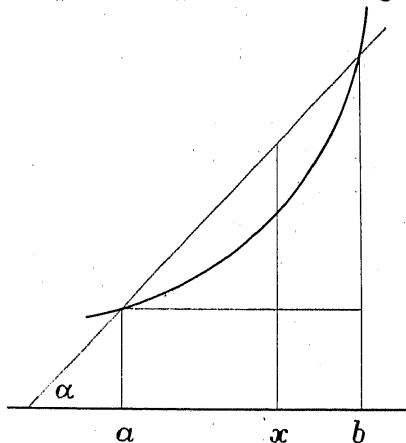
przy czym czynimy te same założenia dotyczące ciągłości i różniczkowalności, co w tw. Rolle'a (natomiast nie zakładamy, że $h > 0$, lecz jedynie, że $h \neq 0$).

V. Twierdzenia Lagrange'a¹ i Cauchy'ego. Załóżmy jak w twierdzeniu Rolle'a, że funkcja f jest ciągła w przedziale $a \leq x \leq b$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Zachodzi wówczas tzw. *wzór na wartość średnią* (Lagrange'a) (zwany też twierdzeniem "o przyrostach skończonych"):

$$1. \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \Theta h),$$

gdzie $h = b - a$ oraz Θ jest odpowiednio dobraną liczbą taką, że $0 < \Theta < 1$.

Nim przystąpimy do dowodu, zinterpretujemy geometrycznie wzór powyższy. Lewa jego strona oznacza tangens kąta α , który tworzy z osią x -ów prosta, łącząca punkty $[a, f(a)]$ i $[b, f(b)]$. Twierdzenie więc orzeka, że istnieje styczna do krzywej, która jest równoległa do tej prostej ("siecznej do krzywej"). Szczególnym wypadkiem, mianowicie gdy sieczna ta pokrywa się z osią x -ów, jest tw. Rolle'a. Do tego też twierdzenia sprowadzimy dowód tw. Lagrange'a.



Rys. 10

¹ Lagrange (1736—1813) — najznakomitszy matematyk XVIII wieku, jeden z twórców teorii równań różniczkowych.

Poprowadźmy przez dowolny punkt x mieszczący się między a i b prostą równoległą do osi y -ów (ob. rys. 10) i oznaczmy przez $g(x)$ długość odcinka tej prostej zawartego między krzywą a wyżej określona sieczną. Długość odcinka zawartego między osią x -ów a sieczną jest więc $= g(x) + f(x)$. Zarazem długość ta $= f(a) + (x - a) \operatorname{tg} \alpha$, skąd

$$(10) \quad g(x) = f(a) - f(x) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Funkcja g spełnia założenia tw. Rolle'a. Jest ona ciągła w przedziale $a \leq x \leq b$, różniczkowalna:

$$g'(x) = -f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

oraz $g(a) = 0 = g(b)$. A zatem funkcja $g'(x)$ znika w pewnym punkcie pomiędzy a i b . Inaczej mówiąc, istnieje takie Θ , że $0 < \Theta < 1$ oraz

$$g'(a + \Theta h) = 0, \quad \text{tj.} \quad 0 = -f'(a + \Theta h) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór 1.

Uwagi. 1) Rozważania geometryczne miały tu charakter heurystyczny; wyjaśniają one dlaczego wprowadza się funkcję g . Sam dowód tw. Lagrange'a można jednak było rozpocząć od określenia funkcji g z pomocą wzoru (10).

2) Analogicznie do wzoru (9), można równości 1 dać kształt następujący:

$$(11) \quad f(x + h) = f(x) + h \cdot f'(x + \Theta h).$$

Tw. Lagrange'a pociąga za sobą następujące dwa wnioski, mające podstawowe znaczenie dla rachunku całkowego.

3. Jeżeli $f'(x) = 0$ dla każdego x położonego wewnątrz przedziału ab , to funkcja f ma w tym przedziale wartość stałą.

Mamy bowiem dla każdego x i h na mocy (11): $f(x + h) = f(x)$, co oznacza, że funkcja f ma wartość stałą.

4. Jeżeli dla $a < x < b$ mamy stale $f'(x) = g'(x)$, to $f(x) = g(x) + \text{constans}$, tj. funkcje f i g różnią się między sobą o stałą.

Istotnie $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x) = 0$, co oznacza, że funkcja $f(x) - g(x)$ ma pochodną stale $= 0$. Na mocy tw. 3 funkcja ta jest stała. Kładąc $f(x) - g(x) = C$, mamy $f(x) = g(x) + C$.

Uwaga. Jeżeli w tw. 3 założyć dodatkowo, że funkcja f jest ciągła w całym przedziale $a \leq x \leq b$, to f ma wartość stałą również w całym tym przedziale. Można bowiem w dowodzie podstawić $x = a$.

Analogiczna uwaga dotyczy tw. 4.

Tw. Lagrange'a daje się uogólnić jak następuje:

5. *Tw. Cauchy'ego.* Jeżeli funkcje f i f_1 są ciągłe w całym przedziale $a \leq x \leq b$, zaś wewnątrz różniczkowalne i jeżeli $f_1'(x) \neq 0$ dla żadnego x , to

$$(12) \quad \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)} = \frac{f'(a + \Theta h)}{f_1'(a + \Theta h)}, \quad 0 < \Theta < 1,$$

gdzie $h = b - a$.

Z tw. Cauchy'ego otrzymuje się tw. Lagrange'a, podstawiając $f_1(x) = x$. Odwrotnie, aby udowodnić tw. Cauchy'ego, zastąpmy funkcję g ze wzoru (10) przez następującą:

$$g_1(x) = f(a) - f(x) + [f_1(x) - f_1(a)] \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)}.$$

(Zauważmy, że $f_1(b) \neq f_1(a)$ ze względu na założenie $f_1'(x) \neq 0$ i tw. Rolle'a).

Funkcja ta spełnia założenia tw. Rolle'a:

$$(13) \quad g_1'(x) = -f'(x) + f_1'(x) \frac{f(b) - f(a)}{f_1(b) - f_1(a)}, \quad g_1(a) = 0 = g_1(b).$$

A zatem istnieje takie Θ między 0 i 1, że $g_1'(a + \Theta h) = 0$. Podstawiając $x = a + \Theta h$ we wzorze (13), otrzymujemy równość (12).

Analogicznie do wzorów (9) i (11), z tw. Cauchy'ego otrzymujemy:

$$(14) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{f_1(x+h) - f_1(x)} = \frac{f'(x + \Theta h)}{f_1'(x + \Theta h)}.$$

Uwaga. We wzorze Cauchy'ego istotne jest to, że Θ oznacza tę samą liczbę w liczniku i mianowniku. Bezpośrednie zastosowanie tw. 1 do funkcji f i do funkcji f_1 i utworzenie ilorazu otrzymanych wyrażeń prowadzi do różnych (na ogół) liczb Θ w liczniku i mianowniku.

VI. Różniczkowanie funkcji superponowanych. Niech $y = f(x)$, $z = g(y)$, przy tym funkcja g jest określona dla wartości y funkcji f , wreszcie funkcje f i g są różniczkowalne i pochodna g' jest ciągła. Następujący wzór określa pochodną funkcji superponowanej $g[f(x)]$ w zależności od pochodnych f' i g' .

$$1. \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \text{tzn.}^1 \quad \frac{d g f(x)}{dx} = \left[\frac{d g(y)}{dy} \right]_{y=f(x)} \cdot \frac{d f(x)}{dx}.$$

Przy danym x i $h \neq 0$ połączmy $k = f(x+h) - f(x)$, tj. $f(x+h) = y+k$.

Otrzymujemy, stosując wzór (11) na wartość średnią do funkcji g :

$$\frac{g f(x+h) - g f(x)}{h} = \frac{g(y+k) - g(y)}{h} = g'(y + \Theta k) \cdot \frac{k}{h} = g'(y + \Theta k) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Aby otrzymać wzór 1, należy przejść do granicy dla h dążącego do 0. Otóż ze względu na ciągłość funkcji g , mamy $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$, a ponieważ $0 < \Theta < 1$, więc i $\lim_{h \rightarrow 0} \Theta k = 0$ (zauważmy, że Θ jest również funkcją zmiennej h). A zatem $\lim_{h \rightarrow 0} (y + \Theta k) = y$, co ze względu na ciągłość funkcji g' daje $\lim_{h \rightarrow 0} g'(y + \Theta k) = g'(y) = g'[f(x)]$. W rezultacie

$$\begin{aligned} \frac{d g f(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g f(x+h) - g f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} g'(y + \Theta k) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= g'[f(x)] \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Uwaga. Twierdzenie jest prawdziwe również bez założenia ciągłości funkcji g' . Wymaga jednak wówczas innego, bardziej skomplikowanego dowodu.

Zastosowania. Wzór 1 pozwala na następujące uogólnienie wzoru II, 7: dla każdego rzeczywistego a i dodatniego x mamy

$$2. \quad \frac{dx^a}{dx} = a \cdot x^{a-1}.$$

Mamy bowiem $x^a = e^{a \log x}$, a więc kładąc $z = e^y$ i $y = a \cdot \log x$, znaj-

$$\text{dujemy } \frac{dx^a}{dx} = \frac{d e^y}{dy} \cdot \frac{d(a \log x)}{dx} = e^y \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}.$$

Powyższy rachunek można było jeszcze w taki sposób zapisać:

$$\frac{dx^a}{dx} = \frac{d e^{a \log x}}{d(a \log x)} \cdot \frac{d(a \log x)}{dx} = e^{a \log x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}.$$

$$3. \quad \frac{d x^x}{dx} = x^x (\log x + 1).$$

¹ Dla krótkości piszemy $g f(x)$ zamiast $g[f(x)]$.

$$\begin{aligned} \text{Bo } \frac{d x^x}{d x} &= \frac{d e^{x \log x}}{d x} = \frac{d e^{x \log x}}{d(x \cdot \log x)} \cdot \frac{d(x \cdot \log x)}{d x} = \\ &= e^{x \log x} (\log x + 1) = x^x (\log x + 1). \end{aligned}$$

Zauważmy też, że poprzednio udowodniony wzór III, 2': $\frac{d a^x}{d x} = a^x \cdot \log a$ można było w analogiczny sposób udowodnić, kładąc $a^x = e^{x \log a}$.

W praktyce stosujemy nieraz wzór 1 kilkakrotnie; np. gdy $y = f(x)$, $z = g(y)$, $w = h(z)$, pochodną $\frac{d h\{g[f(x)]\}}{d x}$ obliczamy, opierając się na równości:

$$\frac{d w}{d x} = \frac{d w}{d z} \cdot \frac{d z}{d y} \cdot \frac{d y}{d x}.$$

Jak widać, pochodne we wzorze powyższym zachowują się jak ułamki.

$$4. \quad \frac{d \log f(x)}{d x} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Wyrażenie to nazywamy *pochodną logarytmiczną* funkcji f . Znajomość pochodnej logarytmicznej daje natychmiast pochodną zwykłą. Stwierdzić to łatwo na przykładzie funkcji $y = x^x$ (gdzie różniczkujemy $\log y = x \cdot \log x$).

Przykłady.

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{d \log \sin(x^2)}{d x} &= \frac{d \log \sin(x^2)}{d \sin(x^2)} \cdot \frac{d \sin(x^2)}{d x^2} \cdot \frac{d x^2}{d x} = \frac{1}{\sin(x^2)} \cos(x^2) 2x = \\ &= 2x \cotg(x^2). \end{aligned}$$

2) *Pochodne funkcji hiperbolicznych.* Przez sinus i cosinus hiperboliczny rozumiemy funkcje

$$(14a) \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{oraz} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Aby znaleźć ich pochodne, zauważmy, że

$$\frac{d e^{-x}}{d x} = \frac{d e^{-x}}{d(-x)} \cdot \frac{d(-x)}{d x} = -e^{-x}.$$

Stąd z łatwością znajdujemy:

$$(14b) \quad \frac{d \sinh x}{d x} = \cosh x, \quad \frac{d \cosh x}{d x} = \sinh x.$$

Pokładźmy jeszcze

$$(14c) \quad \tgh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Ponieważ, jak łatwo sprawdzić,

$$(14d) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

więc

$$(14e) \quad \frac{d \tgh x}{d x} = \frac{d \frac{\sinh x}{\cosh x}}{d x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Funkcje $\sinh x$ i $\cosh x$ posiadają funkcje odwrotne. Niech bowiem $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Wówczas $e^x - e^{-x} - 2y = 0$, tj. $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$, skąd

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}, \quad \text{tj. } x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

(wartości $y - \sqrt{y^2 + 1}$ nie uwzględniamy jako ujemnej). Wyraziliśmy w ten sposób x jako funkcję y . Jest to żądana funkcja odwrotna względem $\sinh x$. Oznaczamy tę funkcję symbolem ar sinh :

$$(14f) \quad \text{ar sinh } x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Podobnie znajdujemy funkcję odwrotną względem $\cosh x$ ($x \geq 0$), którą oznaczamy symbolem ar cosh . Mianowicie,

$$(14g) \quad \text{ar cosh } x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1.$$

Opierając się na wzorach (14b) i na wzorze na pochodną funkcji odwrotnej, z łatwością znajdujemy

$$(14h) \quad \frac{d \text{ar sinh } x}{d x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{d}{d x} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$(14i) \quad \frac{d \text{ar cosh } x}{d x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{d}{d x} \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Rachunek ten można również wykonać, różniczkując funkcje występujące po prawej stronie wzorów (14h) i (14i).

Dodajmy wreszcie, że na funkcję odwrotną względem $\tgh x$ znajdujemy wzór

$$(14j) \quad \operatorname{ar} \operatorname{tgh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Stąd

$$(14k) \quad \frac{d \operatorname{ar} \operatorname{tgh} x}{dx} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \right).$$

Uwaga. Poznane przez nas w NN^o II i III wzory na różniczkowanie funkcji zasadniczych pozwalają — w zestawieniu ze wzorem na różniczkowanie funkcji superponowanych — na różniczkowanie dowolnej funkcji elementarnej (a więc funkcji, którą otrzymuje się z funkcji zasadniczych przez zastosowanie dowolnej ilości superpozycji). Pochodna funkcji elementarnej jest funkcją elementarną.

Weźmy jeszcze pod uwagę następującą funkcję (nieelementarną):

$$(15) \quad f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \text{ dla } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Ogólne wzory na różniczkowanie funkcji elementarnych nie dają możliwości obliczenia $f'(0)$. Pochodną tę musimy obliczyć bezpośrednio z definicji pochodnej. Mianowicie

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Rzecz jasna, że dla $x \neq 0$ pochodną $f'(x)$ obliczyć można na podstawie ogólnych wzorów, dotyczących różniczkowania funkcji elementarnych.

VII. Interpretacja geometryczna znaku pochodnej. Twierdzenie Lagrange'a pozwala na ustalenie związku między znakiem pochodnej a wzrastaniem, wzgl. zmniejszaniem się funkcji.

1. *Jeżeli dla każdego x należącego do przedziału ab zachodzi nierówność $f'(x) > 0$, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.*

Jeśli stale $f'(x) < 0$, to funkcja f jest malejąca.

Na mocy wzoru (11) mamy dla $h > 0$: $f(x+h) > f(x)$, wzgl. $f(x+h) < f(x)$, w zależności od tego, czy zakładamy, że pochodna jest stale dodatnia, czy stale ujemna. W pierwszym wypadku funkcja f rośnie, w drugim — maleje.

Uwaga. Jeśli założyć, że stale $f'(x) \geq 0$, wzgl. $f'(x) \leq 0$, to funkcja f jest rosnąca w szerszym sensie, wzgl. malejąca w szerszym sensie.

Odwrotnym do tw. 1 jest twierdzenie następujące:

2. *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie c i rośnie (wzgl. maleje) w jakimś przedziale otaczającym ten punkt, to $f'(c) \geq 0$ (wzgl. $f'(c) \leq 0$).*

Jeśli bowiem funkcja f rośnie, to dla $h > 0$, mamy $f(c+h) - f(c) > 0$, a zatem $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$ i przechodząc do granicy: $f'(c) \geq 0$.

Podobnie rozumiemy przy założeniu, że funkcja f maleje.

Z tw. 1 wnosimy, że

3. *Jeżeli $f'(c) > 0$, to funkcja jest w pewnym otoczeniu punktu c rosnąca (przy założeniu ciągłości pochodnej w punkcie c).*

Analogicznie: *jeśli $f'(c) < 0$, to funkcja jest lokalnie w punkcie c malejąca.*

Istotnie, ze względu na ciągłość funkcji f' , nierówność $f'(c) > 0$ pociąga za sobą istnienie takiej liczby $\delta > 0$, że dla $|h| < \delta$ zachodzi $f'(c+h) > 0$. Znaczący to, że pochodna f' jest dodatnia w każdym punkcie przedziału $c-h < x < c+h$. A zatem funkcja f jest w tym przedziale rosnąca na mocy tw. 1.

Uwaga. Tw. 3 można jeszcze w taki sposób wysłowić: jeśli $f'(c) \neq 0$, to (przy założeniu ciągłości pochodnej) funkcja f jest lokalnie w punkcie c różnowartościowa, tzn. jest różnowartościowa w pewnym przedziale $c-\delta < x < c+\delta$ ($\delta > 0$). W przedziale tym funkcja $y = f(x)$ posiada więc funkcję odwrotną $x = g(y)$. Pochodna tej funkcji odwrotnej jest, jak już wiemy, odwrotnością pochodnej funkcji f .

Widzimy więc, że przy powyższych założeniach równanie $y = f(x)$ posiada dla danej wartości na y jedno i tylko jedno rozwiązanie w zakresie x -ów, należących do przedziału $c-\delta, c+\delta$.

Przykład. Funkcja $f(x) = \frac{e^x}{x}$ maleje dla $x < 1$, rośnie dla $x > 1$.

Istotnie $\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x}{x} \right) = \frac{x e^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$. Wyrażenie to jest < 0 lub > 0 w zależności od tego, czy $x < 1$, czy $x > 1$.

Stąd wynika, że $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$. Istotnie, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n} = \infty$ (ob. § 3, V, 7), a więc

funkcja $\frac{e^x}{x}$ jako nieograniczona i rosnąca dąży do ∞ wraz z x (wynik ten uzyskaliśmy na innej drodze w § 4, VI, 2).

Ogólniej: dowodzimy w sposób zupełnie podobny, że funkcja $f(x) = e^x x^a$ ($x > 0$) jest malejąca dla $x < -a$, rosnąca dla $x > -a$. Ponieważ zaś $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n n^a = \infty$ (por. § 3, V, 7), przeto

$$(15a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x x^a = \infty.$$

VIII. Wyrażenia nieoznaczone. Twierdzenie Cauchy'ego z N° V pozwala na obliczanie granicy postaci następującej

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ gdzie } f(a) = 0 = g(a).$$

Wyrażenia tego rodzaju noszą nazwę „wyrażeń nieoznaczonych typu $\frac{0}{0}$ ”.

1. Jeśli funkcje f i g są ciągłe w przedziale domkniętym $a \leq x \leq b$ i są różniczkowalne wewnątrz tego przedziału i jeśli $f(a) = 0 = g(a)$, to

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

przy założeniu, że ta ostatnia granica istnieje.

Położmy $x = a + h$. Należy więc dowieść, że

$$(18) \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}.$$

Otóż równości $f(a) = 0 = g(a)$ i wzór Cauchy'ego dają

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f'(a + \Theta h)}{g'(a + \Theta h)}.$$

Ponieważ $\lim_{h \rightarrow +0} \Theta h = +0$, więc $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f'(a + \Theta h)}{g'(a + \Theta h)} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}$, skąd

wzór (18).

Analogiczne twierdzenie dotyczy granicy lewostronnej.

W wypadku, gdy pochodne f' i g' są ciągłe w punkcie a , przy czym $g'(a) \neq 0$, ze wzoru (17) wynika natychmiast następujący wzór de l'Hospitala¹:

$$(19) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Analogiczny wzór dotyczy granicy jednostronnej i pochodnych jednostronnych.

¹ de l'Hospital — matematyk francuski drugiej połowy XVII wieku, znany zwłaszcza jako popularyzator rachunku różniczkowego.

Przykłady. 1° Aby znaleźć $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$, przyjmujemy

$$f(x) = \log(1+x) \text{ i } g(x) = x.$$

Stąd

$$f(0) = 0 = g(0), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g'(x) = 1, \quad f'(0) = 1.$$

A zatem

$$(19a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

2° Obliczyć $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$. Położmy $f(x) = e^x - 1$ i $g(x) = x$. Mamy więc $f(0) = 0 = g(0)$, $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 1$. A zatem

$$(19b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 1.$$

Uwagi. 1) Jeśli $g'(a) = 0$, lecz $f'(a) \neq 0$, to wzór (19) daje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. Jeśli natomiast $f'(a) = 0 = g'(a)$, to wzór (19) nie ma zastosowania. Należy wówczas stosować pochodne wyższych rzędów (ob. § 8, III).

2) Wzór (17) daje się również stosować w wypadku, gdy $a = \infty$. Inaczej mówiąc, jeśli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$, to

$$(20) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

przy założeniu, że ta ostatnia granica istnieje.

Położmy $x = \frac{1}{t}$ i określmy funkcję pomocniczą $F(t)$ przez warunki: $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ dla $t \neq 0$ oraz $F(0) = 0$. Podobnie niech $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$ dla $t \neq 0$ oraz $G(0) = 0$. Dla każdego $t \neq 0$ funkcja F jest ciągła jako superpozycja dwóch funkcji ciągłych: funkcji $\frac{1}{t}$ i f . Jest ona również ciągła prawostronnie w punkcie 0, bowiem (por. § 4 (17))

$$\lim_{t \rightarrow +0} F(t) = \lim_{t \rightarrow +0} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = F(0).$$

Podobnie funkcja G jest ciągła. Aby móc zastosować wzór (17), należy obliczyć $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{F'(t)}{G'(t)}$. Otóż dla $t \neq 0$ mamy

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d f\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = \frac{d f(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right).$$

Podobnie $G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)$. A zatem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prócz wyrażeń nieoznaczonych postaci $\frac{0}{0}$ rozważamy również nieoznaczoności postaci $\frac{\infty}{\infty}$, rozumiejąc przez to

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ gdzie } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Obliczanie nieoznaczoności tej postaci można niekiedy sprowadzić do postaci $\frac{0}{0}$. Mianowicie kładąc $F(x) = \frac{1}{f(x)}$ i $G(x) = \frac{1}{g(x)}$, mamy $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{G(x)}{F(x)}$, zaś ta ostatnia nieoznaczoność jest postaci $\frac{0}{0}$.

Podobnie, jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, to wyrażenie nieoznaczoności $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$ postaci $0 \cdot \infty$ sprowadza się do postaci $\frac{0}{0}$, bowiem

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, to nieoznaczoność $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ postaci $\infty - \infty$ sprowadzamy również do postaci $\frac{0}{0}$, kładąc

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{G(x) - F(x)}{F(x) \cdot G(x)}.$$

Pozostają jeszcze do rozpatrzenia nieoznaczoności 0^0 , ∞^0 i 1^∞ . Sprowadzają się one do wyżej rozważanych na podstawie równości

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \log f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \log f(x)}.$$

Przykłady. 1) $\lim_{x \rightarrow +0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} \log \cos x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \log \cos x} = 1$. Bo

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log \cos x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\operatorname{tg} x}{1} = 0.$$

2) Znaleźć pochodną prawostronną $f'_+(0)$ funkcji f określonej jak następuje: $f(x) = x^x$, gdy $x > 0$, $f(0) = 1$.

Mamy $f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h^h - 1}{h}$. Jest to nieoznaczoność postaci $\frac{0}{0}$, bowiem $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$ (§ 5, III). Stosując wzór (17) i biorąc pod uwagę, że $\frac{d}{dx}(x^x - 1) = x^x(\log x + 1)$ (ob. VI, 3), otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^x(\log x + 1)} = -0, \text{ skąd } f'_+(0) = -\infty.$$

IX. Pochodna granicy. Twierdzenie. Jeżeli w przedziale $a \leq x \leq b$ spełnione są równości

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f(x) \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x),$$

przy czym funkcje f'_n są ciągłe i zbieżne jednostajnie do g , to

$$(22) \quad f'(x) = g(x), \quad \text{tj.} \quad \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d f_n(x)}{dx}.$$

Niech c będzie danym punktem, należącym do przedziału ab . Oszacujemy różnicę

$$(23) \quad \frac{f_n(c+h) - f_n(c)}{h} - g(c) = f'_n(c + \theta h) - g(c).$$

Niech dane będzie $\varepsilon > 0$. Ponieważ ciąg $\{f'_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do g , istnieje takie k , że dla $n > k$ i dla każdego x przedziału ab

$$(24) \quad |f'_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Ponieważ zaś funkcja g jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła (por. § 6, I, 1), istnieje więc takie $\delta > 0$, że nierówność $|x - c| < \delta$ pociąga za sobą

$$(25) \quad |g(x) - g(c)| < \varepsilon.$$

Zakładając, że $n > k$ i $|h| < \delta$, otrzymujemy więc następujące oszacowanie

$$|f'_n(c + \Theta h) - g(c)| \leq |f'_n(c + \Theta h) - g(c + \Theta h)| + |g(c + \Theta h) - g(c)| < 2\varepsilon,$$

tj. na mocy (23)

$$\left| \frac{f'_n(c+h) - f'_n(c)}{h} - g(c) \right| < 2\varepsilon.$$

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(c+h) = f'(c+h)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(c) = f'(c)$, mamy więc

$$\left| \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} - g(c) \right| \leq 2\varepsilon,$$

o ile tylko $|h| < \delta$. Przechodząc do granicy dla h dążącego do 0, otrzymujemy stąd równość (22).

Uwagi. 1) Zbieżność ciągu funkcji nawet jednostajna nie pociąga za sobą zbieżności ciągu pochodnych. Świadczy o tym przykład następujący: $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$.

2) Twierdzenie pozostaje w mocy, jeśli zamiast zakładać, że pierwsza z równości (21) spełniona jest w całym przedziale ab , założyć jedynie, że spełniona jest w danym punkcie c . Jeśli bowiem ciąg funkcji jest zbieżny w punkcie c , zaś ciąg pochodnych jest zbieżny jednostajnie w przedziale ab , to ciąg funkcji jest zbieżny w całym przedziale ab .

Istotnie, na mocy naszych założeń istnieje dla danego $\varepsilon > 0$ taka liczba k , że dla $n > k$ spełnione są nierówności

$$(26) \quad |f'_n(c) - f'_k(c)| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |f'_n(x) - f'_k(x)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b.$$

Położmy $F_n(x) = f'_n(x) - f'_k(x)$ oraz $x = c + h$. Mamy więc

$$F_n(x) = F_n(c) + h \cdot F'_n(c + \Theta h) = f'_n(c) - f'_k(c) + h[f''_n(c + \Theta h) - f''_k(c + \Theta h)].$$

Stąd na mocy (26): $|F_n(x)| < \varepsilon + |b-a|\varepsilon = \varepsilon(1 + |b-a|)$. A zatem ciąg $f'_n(x)$ jest zbieżny.

X. Pochodna szeregu potęgowego. Udowodnimy, że

$$(27) \quad \frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

dla każdego x leżącego wewnątrz przedziału zbieżności szeregu

$$(28) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Przy tym szeregi (28) i

$$(29) \quad g(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

mają ten sam promień zbieżności.

Udowodnimy najpierw drugą część twierdzenia. Niech więc r będzie promieniem zbieżności szeregu (28) i niech $0 < c < r$. Udowodnimy, że szereg $g(c)$ jest zbieżny. Niech $c < C < r$. Porównajmy wyrazy szeregu

$$(30) \quad |a_1| + 2|a_2|c + \dots + n|a_n|c^{n-1} + \dots$$

z odpowiednimi wyrazami szeregu zbieżnego (por. § 6, III, tw. 1):

$$(81) \quad |a_1|C + |a_2|C^2 + \dots + |a_n|C^n + \dots$$

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (ob. § 3, V, 8), zaś $\frac{C}{c} > 1$, przeto dla dużych n :

$$n|a_n|c^{n-1} = \frac{|a_n|}{c} \left(\sqrt[n]{n}c\right)^n < \frac{|a_n|}{c} \left(\frac{C}{c}c\right)^n = \frac{1}{c}|a_n|C^n.$$

Wnosimy stąd, że szereg (30) jest zbieżny, a zatem zbieżny jest również (bezwzględnie) szereg $g(c)$.

Odwrotnie, jeśli szereg (29) jest zbieżny bezwzględnie, to również szereg (28) jest zbieżny. Bowiem

$$|a_n x^n| = |x| \cdot |a_n x^{n-1}| \leq |x| \cdot |n a_n x^{n-1}|.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że każdy punkt leżący wewnątrz przedziału zbieżności szeregu (28) należy do przedziału zbieżności szeregu (29) i odwrotnie: każdy punkt leżący wewnątrz przedziału zbieżności szeregu (29) należy do przedziału zbieżności szeregu (28). A zatem oba te przedziały zbieżności się pokrywają.

Przejdźmy teraz do dowodu wzoru (27). Niech x będzie punktem wewnętrznym przedziału zbieżności szeregu (28), a zatem i szeregu (29). Niech ab będzie jakimś przedziałem domkniętym, otaczającym ten punkt i również położonym wewnątrz przedziału zbieżności. Na mocy tw. 1, § 6, III, szereg (29) jest w przedziale ab jednostajnie zbieżny. Oznacza to, że jeśli przyjąć

$$f'_n(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + a_n x^n,$$

to funkcje f'_n tworzą ciąg jednostajnie zbieżny w przedziale ab do

funkcji g . Stosując twierdzenie numeru poprzedniego, otrzymujemy wzór (27).

Jak widać, wzór (27) orzeka, że *szereg potęgowy różniczkuje się podobnie jak wielomian — wyraz po wyrazie*.

Ogólniej: jeżeli różniczkując wyraz po wyrazie szereg $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ uzyskujemy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$ zbieżny jednostajnie i jeśli przy tym funkcje $u'_n(x)$ są ciągłe, to

$$(32) \quad \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x).$$

Przykład. Różniczkując szereg

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots,$$

otrzymujemy dla $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

XI. Rozwinięcie na szereg potęgowy funkcji $\log(1+x)$ i $\arctg x$.

Weźmy pod uwagę znany nam wzór

$$(33) \quad \frac{d \log(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (|x| < 1).$$

Szereg występujący w tym wzorze jest, jak widać natychmiast, pochodną szeregu $S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$. A zatem funkcje $\log(1+x)$ i $S(x)$ mają tę samą pochodną; różnią się więc o stałą (ob. V, 4). Położmy $\log(1+x) = S(x) + C$. Stałą C można obliczyć, podstawiając $x = 0$; otrzymujemy $\log(1+0) = 0 = S(0)$. A zatem $C = \log(1+0) - S(0) = 0$.

Dowiedliśmy w ten sposób, że funkcje $\log(1+x)$ i $S(x)$ są identyczne w przedziale $-1 < x < 1$. Inaczej mówiąc:

$$(34) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (|x| < 1).$$

Podobnie ze wzoru

$$\frac{d \arctg x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (|x| < 1)$$

wnosimy, że $\arctg x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$. Podstawiając $x = 0$ i biorąc pod uwagę, że $\arctg 0 = 0$, otrzymujemy $C = 0$. W rezultacie

$$(35) \quad \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (|x| < 1).$$

Udowodniliśmy, że wzór (34) obowiązuje dla $|x| < 1$. Wykażemy, że obowiązuje on również dla $x = 1$. Istotnie, dla $x = 1$ szereg występujący po prawej stronie tego wzoru, tj. szereg $S(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ jest zbieżny, a zatem na mocy tw. Abela (§ 6, III, 3) funkcja $S(x)$ jest lewostronnie ciągła w punkcie 1. Stąd

$$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \log(1+x) = \log 2,$$

ponieważ funkcja $\log(1+x)$ jest ciągła w punkcie 1. W rezultacie:

$$(36) \quad \log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Podobnie ze wzoru (35) wyprowadzimy wzór Leibniza:

$$(37) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Oznaczając prawą stronę równości (35) przez $T(x)$, mamy

$$T(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} T(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \arctg x = \arctg 1 = \frac{\pi}{4},$$

skąd wzór (37).

Uwagi. 1) W praktyce wzór Leibniza mało się nadaje do obliczania liczby π ; np. aby obliczyć $\pi/4$ z dokładnością do trzech znaków dziesiętnych, należałoby wziąć sumę pierwszych 500 składników rozwinięcia Leibniza. Znacznie dogodniejszy jest wzór następujący.

Niech $\alpha = \arctg(1/2)$, $\beta = \arctg(1/3)$, tj. $\tg \alpha = 1/2$, $\tg \beta = 1/3$. Ponieważ

$$\tg(\alpha + \beta) = \frac{\tg \alpha + \tg \beta}{1 - \tg \alpha \cdot \tg \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1,$$

zaś $1 = \arctg(\pi/4)$, więc $\pi/4 = \alpha + \beta = \arctg(1/2) + \arctg(1/3)$. Stąd na mocy wzoru (35) otrzymujemy:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{5 \cdot 32} - \dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 27} + \frac{1}{5 \cdot 243} - \dots$$

Znane są inne wzory, dające jeszcze szybsze sposoby obliczania π .

2) Wzór (34) prowadzi do następującej nierówności:

$$(37'') \quad \frac{1}{x} \log(1+x) < 1 \quad \text{dla} \quad 0 < x \leq 1.$$

Mamy bowiem

$$(37'') \quad \frac{1}{x} \log(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots \pm \frac{x^n}{n+1} \mp \dots$$

Dla $0 < x \leq 1$ jest to szereg naprzemienny, spełniający warunki

$$1 > \frac{x}{2} > \frac{x^2}{3} > \dots \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = 0,$$

a zatem w myśl tw. § 3, III suma tego szeregu jest mniejsza od pierwszego jego składnika, tj. zachodzi nierówność (37').

Podobnie dowodzimy, że

$$(37''') \quad \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \log(1+x) > 1 \quad \text{dla} \quad 0 < x \leq 1.$$

Dodając bowiem do szeregu (37'') szereg (34) podzielony przez 2, otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \log(1+x) = 1 + x^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - x^3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \dots \pm x^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n}\right) \mp \dots$$

Po odrzuceniu pierwszego składnika, otrzymujemy — jak łatwo sprawdzić — szereg naprzemienny, spełniający założenia tw. § 3, III, 1. Wnosimy stąd, że suma tego szeregu jest dodatnia. A zatem zachodzi wzór (37''').

XII.* Asymptoty. Z pomocą rachunku różniczkowego wyznaczyć można asymptoty danej krzywej $y = f(x)$. Mianowicie prostą $Y = aX + b$ nazywamy asymptotą krzywej $y = f(x)$, jeśli

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax].$$

Jak widać, kierunek asymptoty jest granicznym kierunkiem, do którego zmierza kierunek stycznej do krzywej w punkcie $[x, f(x)]$ gdy x dąży do ∞ ; przy tym odległość tego punktu od asymptoty

zmierza do 0. Odległość ta bowiem $= |[f(x) - ax - b] \cos \alpha|$, gdzie α jest kątem utworzonym przez asymptotę z osią X .

Podobnie rozważamy asymptoty dla x dążącego do $-\infty$.

Wreszcie prostą $X = c$ (równoległą do osi Y) nazywamy asymptotą krzywej $y = f(x)$, $x < c$, jeśli $\lim_{x \rightarrow c-0} f'(x) = \pm \infty = \lim_{x \rightarrow c-0} f(x)$. Podobnie określamy asymptoty dla krzywej $y = f(x)$, $x > c$.

Przykłady. Dla hiperboli $y = 1/x$ asymptotami są, jak łatwo sprawdzić, osie X i Y .

Aby znaleźć asymptoty krzywej $y = e^{-\frac{1}{x}}$, obliczamy $y' = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$. Stąd

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} y' = 0$. A zatem $a = 0$ i $b = 1$. Prosta $Y = 1$ jest więc asymptotą. Drugą asymptotą jest oś Y , bowiem $\lim_{x \rightarrow -0} y = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow -0} y' = \infty$.

XIII.* Pojęcie różniczki. Pojęciu różniczki można nadać ścisłą treść matematyczną w sposób następujący. Przez różniczkę funkcji $y = f(x)$ w punkcie x ze względu na przyrost h nazywamy iloczyn $f'(x)h$. Piszemy

$$(38) \quad d f(x) = f'(x) h \quad \text{lub} \quad \text{krócej} \quad dy = f'(x) h.$$

Symbolika $d f(x)$ lub dy , dogodna w zastosowaniach ze względu na swą prostotę, nie uwydatnia zależności różniczki od zmiennej x , względem której się różniczkuje, ani zależności od przyrostu h . Ażeby tym wymaganiom uczynić zadość, należałoby pisać np. $d_x(y, h)$; przy tym jeśli chcemy zaznaczyć, że różniczka rozpatrywana jest w punkcie x_0 , należałoby pisać $[d_x(f(x), h)]_{x=x_0}$, podobnie jak dla oznaczenia pochodnej w punkcie x_0 .

W myśl wzoru (38) $dx = h$, bo podstawiając $f(x) = x$, mamy $f'(x) = 1$.

Możemy zatem podstawić we wzorze (38): $h = dx$. Otrzymujemy $dy = f'(x) dx$. Dzieliąc obie strony tej równości przez dx , mamy więc

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

gdzie po prawej stronie występuje iloraz dwóch różniczek (co uważać można za uzasadnienie symboliki Leibniza dla pochodnych). Ścisłej

mówiąc, mamy $f'(x) = \frac{d_x(y, h)}{d_x(x, h)}$ dla każdego $h \neq 0$.

Wzory rachunku różniczkowego można notować w symbolice różniczkowej, jak widać na przykładach następujących:

$$de^x = e^x dx, d \sin x = \cos x dx, dc = 0.$$

Wzór II, 4 na pochodną sumy prowadzi do analogicznego wzoru na różniczkę sumy:

$$(39) \quad d(y+z) = dy + dz.$$

Istotnie, niech $y = f(x)$, $z = g(x)$. Mamy

$$d(y+z) = (y+z)' h = y' h + z' h = dy + dz.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$(40) \quad d(yz) = y dz + z dy.$$

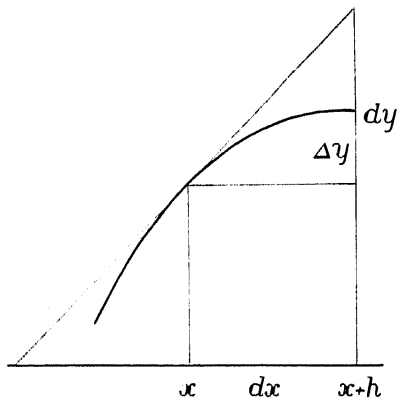
Podamy jeszcze wzór na różniczkę funkcji superponowanych.

Niech $y = f(x)$ i $z = g(y)$. Wówczas

$$(41) \quad d_x z = g'(y) d_x y.$$

Bowiem $d_x z = \frac{d g f(x)}{dx} dx = g'(y) f'(x) dx = g'(y) d_x y$ na mocy (38).

Zauważmy, że na mocy (38) mamy też: $d_y z = g'(y) d_y y$. Zestawiając tę ostatnią równość z równością (41), widzimy, że jeśli z jest funkcją zmiennej y , to wzór na różniczkę z formalnie pozostanie bez zmiany, gdy y przedstawić jako funkcję nowej zmiennej x (pomijając oczywiście wskaźnik przy d , wskazujący względem jakiej zmiennej należy różniczkować).



Rys. 11

Interpretacja geometryczna różniczki widoczna jest natychmiast z rysunku.

Zachodzi twierdzenie następujące: różnica między przyrostem funkcji $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ a różniczką dy , podzielona przez różniczkę dx , dąży do 0 wraz z tą różniczką, tj.

$$(42) \quad \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta y - dy}{dx} = 0.$$

Bowiem

$$\frac{\Delta y - dy}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x),$$

$$\text{zaś } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Twierdzenie powyższe pozwala często w praktyce (np. w zastosowaniach fizycznych) zastępować różniczkę dy przez przyrost Δy .

Zadania do § 7

1. Zróżniczkować funkcje następujące:

$$1) \frac{x^2 + 2x + 4}{x^4 - 1}$$

$$2) \sqrt{2x - x^5}$$

$$3) \frac{x}{\sqrt{c+x^8}}$$

$$4) \sec x$$

$$5) \operatorname{cosec} x$$

$$6) \cotg x$$

$$7) \operatorname{arc} \sec x$$

$$8) \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$$

$$9) \operatorname{arc} \cotg x$$

$$10) \log \sin x$$

$$11) \log \operatorname{tg} x$$

$$12) \operatorname{arc} \cos(1-x)$$

$$13) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{5x}{1-x^2}$$

$$14) \log \sinh x$$

$$15) \operatorname{ar} \operatorname{tgh} \sqrt[3]{x}$$

2. Udowodnić, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna, to jej pochodna f' posiada własność Darboux (tj. przechodzi od jednej wartości do drugiej przez wszystkie wartości pośrednie).

(Udowodnić najpierw, że jeśli $f'(a) < 0 < f'(b)$, to istnieje w przedziale ab taki punkt c , że $f'(c) = 0$. Ogólny wypadek, gdy $f'(a) < A < f'(b)$, sprowadzić do poprzedniego, rozważając funkcję $f(x) - Ax$).

3. Dany jest szereg $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$. Znaleźć $f'(x)$ oraz sumę szeregu pochodnych. Wyniki uzyskane zestawzić z tw. N° IX.

4. Udowodnić, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x , to

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Wykazać na przykładzie, że nie zachodzi zależność odwrotna: powyższa granica (czyli tzw. pochodna uogólniona) może istnieć, pomimo że funkcja nie jest w punkcie x różniczkowalna.

5. Podać przykład funkcji, która w punkcie nieciągłości posiada pochodną uogólnioną.

6. Podać przykład funkcji parzystej (tj. takiej, że $f(x) = f(-x)$), dla której $f'(0) = 0$, pomimo że w punkcie 0 funkcja nie posiada ekstremum (nawet niewłaściwego).

7. Udowodnić, że jeśli funkcja różniczkowalna posiada w punktach a i b maximum, to posiada też minimum w jakimś punkcie pośrednim między a i b .

8. Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale $a \leq x \leq b$, zaś różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Jeśli istnieje prawostronna granica $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x)$, to istnieje też prawostronna pochodna funkcji f i są one równe: $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x)$.

9. Udowodnić, że wśród prostokątów o tym samym obwodzie kwadrat ma największe pole.

10. Udowodnić, że wśród trójkątów o stałym obwodzie i stałej podstawie trójkąt równoramienny ma największe pole.

11. Udowodnić, że wśród trójkątów o stałym obwodzie największe pole ma trójkąt równoboczny.

12. Dowieść, że jeśli pochodna $f'(x)$ jest różnowartościowa, to dla każdego x_0 krzywa $y = f(x)$ leży po jednej stronie stycznej w tym punkcie.

Wywnioskować stąd, że $e^x > 1+x$ dla $x \neq 0$.

13. Dowieść, że $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right) \log(1+x) < 1$ dla $0 < x \leq 1$.

14. Dowieść, że $\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$ dla $x > -1$.

15. Rozwinąć na szereg potęgowy $\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

16. Dane są dwa punkty P i Q położone na płaszczyźnie nad osią x -ów. Znaleźć na osi x -ów taki punkt R , aby suma odcinków PR i RQ była najkrótsza. Udowodnić, że kąty (ostre) utworzone przez te odcinki z osią x -ów są sobie równe.

(Zinterpretować ten wynik na gruncie optyki: PRQ droga promienia, oś x -ów zwierciadło).

17. Obliczyć $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$.

18. Udowodnić istnienie granicy (zwanej stałą Eulera):

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

(wykazać, że rozważany ciąg jest malejący i ograniczony, opierając się na nierówności z zad. 14).

19. Udowodnić, że jeśli dwie funkcje różniczkowalne f i g spełniają dla każdego x nierówność $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$, to pomiędzy każdymi dwoma pierwiastkami równania $f(x) = 0$ znajduje się pierwiastek równania $g(x) = 0$.

(Rozważać funkcję pomocniczą $\frac{f(x)}{g(x)}$).

§ 8. Pochodne rzędów wyższych

I. Definicja i przykłady. Nazywamy drugą pochodną funkcji f pochodną pochodnej tej funkcji. Podobnie trzecia pochodna jest to pochodna drugiej pochodnej. Ogólnie n -ta pochodna jest to pochodna $n+1$ -ej pochodnej. Pochodne wyższych rzędów oznaczamy:

$$f'', f''', f^{(4)}, \dots, f^{(n)}, \dots \text{ lub } \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}, \dots$$

Mamy więc $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)$.

Np. niech $f(x) = x^3$. Mamy $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$ oraz $f^{(n)}(x) = 0$ dla $n > 3$. Ogólniej

$$(1) \quad \frac{d^k (x^n)}{dx^k} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) x^{n-k} \quad \text{dla } k \leq n, \quad \frac{d^n (x^n)}{dx^n} = n!$$

Jeśli a jest liczbą rzeczywistą (różną od liczb naturalnych), to dla dowolnego naturalnego k i dowolnego $x > -1$ mamy

$$(2) \quad \frac{d^k}{dx^k} (1+x)^a = a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-k+1) (1+x)^{a-k}.$$

Funkcja e^x ma tę własność, że pochodne wszystkich rzędów są z nią identyczne.

Dla funkcji $f(x) = \sin x$ mamy

$$(3) \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{IV}(x) = \sin x.$$

Zachodzi tu równość $f^{(n)}(x) = f^{(n+4)}(x)$. Ta sama równość jest spełniona przez funkcję $f(x) = \cos x$.

Zauważmy przy tej okazji, że dogodnie jest rozważać pochodną rzędu 0 jako identyczną z samą funkcją: $f^{(0)}(x) = f(x)$. Podana powyżej równość obowiązuje również dla $n = 0$.

Wzór (1) pozwala łatwo obliczyć k -tą pochodną wielomianu n -ego stopnia: $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$. Podstawiając w $f^{(k)}(x)$ (dla $k = 0, 1, \dots, n$) $x = 0$, znajdujemy:

$$(4) \quad a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(0), \dots, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

Stąd otrzymujemy wzór, który następnie uogólnimy:

$$(5) \quad f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Jako przykład na obliczanie pochodnych wyższych rzędów przytoczymy wzór na drugą pochodną funkcji odwrotnej.

$$\text{Jak wiemy } \frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}. \text{ Stąd } \frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d \left(1 : \frac{dy}{dx} \right)}{dy} = - \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx} \right)^3} \cdot \frac{dx}{dy}.$$

$$\text{tj.} \quad \frac{d^2 x}{dy^2} = - \frac{d^2 y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx} \right)^3.$$

W zastosowaniach do fizyki mamy bardzo często do czynienia z drugą pochodną. W szczególności, *przyspieszenie* jako pochodna prędkości względem czasu jest drugą pochodną drogi względem czasu: $\frac{d^2 s}{dt^2}$. Stąd siła $= m \frac{d^2 s}{dt^2}$, gdzie m oznacza masę.

I*. Różniczki wyższych rzędów. Drugą różniczkę funkcji $f(x)$ określamy jako różniczkę różniczki funkcji $f(x)$. Ścisłej mówiąc, jako różniczkę ze względu na przyrost h różniczki funkcji f ze względu na przyrost h ; zmienną, względem której się różniczkuje, jest x . Kładąc $y = f(x)$ i oznaczając drugą różniczkę przez $d^2 y$ mamy więc

$$d^2 y = d(dy) = d(y'h) = \frac{d}{dx} (y'h) h = y'' h^2 = y'' (dx)^2.$$

Widzimy zatem, że druga pochodna funkcji f jest ilorazem jej drugiej różniczki przez kwadrat różniczki dx (co uzasadnia znakowanie na drugą pochodną).

Ogólnie n -tą różniczkę $d^n y$ określamy jako n -tą iterację różniczki, tj. $d^n y = d(d^{n-1} y)$ (ze względu na ten sam przyrost h).

Mamy wówczas

$$(5') \quad d^n y = y^{(n)} (dx)^n.$$

Dowodzimy tego przez indukcję. Wzór (5') zachodzi dla $n = 1$ (i jak widzieliśmy, dla $n = 2$). Przyjmując ten wzór dla n , należy go udowodnić dla $n + 1$. Otóż

$$d^{n+1} y = d(d^n y) = d[y^{(n)} (dx)^n] = \frac{d}{dx} [y^{(n)} (dx)^n] dx = y^{(n+1)} (dx)^{n+1}.$$

Przykład. Pochodne wyższych rzędów funkcji odwrotnej (por. Nº poprzedni) obliczyć można z pomocą różniczek wyższych rzędów jak następuje. Niech funkcja $x = g(y)$ będzie odwrotną względem $y = f(x)$. Różniczki dy , $d^2 y$, $d^3 y$ itd. rozumiane będą jako $d_y y$, $d_y^2 y$, $d_y^3 y$ itd. Oczywiście $d^2 y = 0$, $d^3 y = 0$, ...

Ponieważ $y'x' = 1$, przeto $dy = y'x'dy$. Różniczkując względem y , otrzymujemy

$$0 = d^2 y = \left(\frac{dy'}{dx} \frac{dx}{dy} x' + \frac{dx'}{dy} y' \right) (dy)^2 = [y''(x')^2 + y'x''] (dy)^2.$$

Analogicznie

$$0 = d^3 y = [y'''(x')^3 + 3y'' x' x'' + y' x'''] (dy)^3.$$

Otrzymujemy w ten sposób równania, które pozwalają nam kolejno obliczać pochodne x' , x'' , x''' , ... :

$$\begin{aligned} y' x' &= 1 \\ y''(x')^2 + y' x'' &= 0 \\ y'''(x')^3 + 3y'' x' x'' + y' x''' &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

II. Działania arytmetyczne. Niech $y = f(x)$, $z = g(x)$. Z łatwością sprawdzamy przez indukcję, że

$$(6) \quad (y + z)^{(n)} = y^{(n)} + z^{(n)}$$

oraz

$$(7) \quad (y - z)^{(n)} = y^{(n)} - z^{(n)}.$$

Dla n -tej pochodnej iloczynu mamy następujący wzór *Leibniza*:

$$\begin{aligned} (8) \quad (yz)^{(n)} &= y^{(n)} z + \binom{n}{1} y^{(n-1)} z' + \binom{n}{2} y^{(n-2)} z'' + \dots + y z^{(n)} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^{(n-k)} z^{(k)}. \end{aligned}$$

Wzór ten udowodnimy przez indukcję. Dla $n = 1$ jest to znany nam wzór na pochodną iloczynu. Załóżmy, że wzór ten zachodzi dla n i zróżniczkujemy go. Otrzymamy

$$\begin{aligned} (yz)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n \left\{ \binom{n}{k} y^{(n-k+1)} z^{(k)} + \binom{n}{k} y^{(n-k)} z^{(k+1)} \right\} = \\ &= y^{(n+1)} z + \sum_{k=1}^n \left\{ y^{(n-k+1)} z^{(k)} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] \right\} + y z^{(n+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} y^{(n+1-k)} z^{(k)}, \end{aligned}$$

bowiem $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ (ob. § 1, (4)).

Przykład. Aby znaleźć n -tą pochodną funkcji $x e^x$, połóżmy $y = e^x$

i $z = x$. Jak widać, tylko pierwsze dwa wyrazy we wzorze (8) nie znikają. A zatem

$$\frac{d^n}{dx^n} (x e^x) = e^x (x + n).$$

III. Wzór Taylora¹. Wzór Lagrange'a (§ 7, (11)) jest „pierwszym przybliżeniem“ następującego wzoru Taylora:

Założmy, że funkcja f jest n -krotnie różniczkowalna w przedziale $a \leq x \leq b$. Połóżmy $h = b - a$. $f(b)$ można przedstawić w postaci następującej

$$(9) \quad f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

przy czym

$$(10) \quad R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \Theta h) = \frac{h^n (1 - \Theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \Theta' h),$$

gdzie Θ i Θ' oznaczają odpowiednio dobrane liczby, czyniące zadość nierównościom $0 < \Theta < 1$ oraz $0 < \Theta' < 1$.

Dowód. Na mocy równości (9) mamy

$$(10') \quad R_n = f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \dots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a).$$

Oznaczmy przez $g_n(x)$ funkcję pomocniczą, która powstaje z R_n , gdy zastąpimy a przez x , tj.

$$(11) \quad g_n(x) = f(b) - f(x) - \frac{b-x}{1!} f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) - \dots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x).$$

Różniczkując, otrzymujemy

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= -f'(x) + \left[f'(x) - \frac{b-x}{1!} f''(x) \right] + \left[2 \frac{b-x}{2!} f''(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x) \right] + \dots \\ &\quad + \left[(n-1) \frac{(b-x)^{n-2}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \right]. \end{aligned}$$

A zatem $g'_n(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)$. Zarazem $g_n(b) = 0$, $g_n(a) = R_n$.

¹ Taylor i cytowany dalej Maclaurin — matematycy angielscy pierwszej połowy XVIII wieku.

Stosując twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy

$$\frac{g_n(b) - g_n(a)}{b - a} = g'_n(a + \Theta' h),$$

tj.

$$-\frac{R_n}{h} = -\frac{(b - a - \Theta' h)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \Theta' h) = -\frac{h^{n-1}(1 - \Theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \Theta' h),$$

skąd $R_n = \frac{h^n(1 - \Theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \Theta' h)$, zgodnie z drugą częścią wzoru (10); jest to tzw. *postać Cauchy'ego reszty*.

Aby udowodnić pierwszą część wzoru (10), tj. *wzór Lagrange'a na resztę*, zastosujemy tw. Cauchy'ego (§ 7, V, 5) do funkcji $g_n(x)$ oraz $u_n(x) = (b - x)^n$. Otrzymujemy

$$\frac{g_n(b) - g_n(a)}{u_n(b) - u_n(a)} = \frac{g'_n(a + \Theta h)}{u'_n(a + \Theta h)}.$$

Biorąc pod uwagę, że $u_n(b) = 0$, $u_n(a) = h^n$ i $u'_n(x) = -n(b - x)^{n-1}$, wnosimy stąd, że

$$-\frac{R_n}{h^n} = -\frac{(b - a - \Theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \Theta h) \frac{1}{-n(b - a - \Theta h)^{n-1}},$$

skąd reszta R_n w postaci Lagrange'a.

W ten sposób tw. Taylora jest w całości udowodnione.

Podstawiając $b = x$ i $a = 0$, otrzymujemy *wzór Maclaurina*:

$$(12) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

gdzie

$$(13) \quad R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\Theta x) = \frac{x^n(1 - \Theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\Theta' x).$$

Wzór powyższy jest spełniony przy założeniu, że funkcja f jest n -krotnie różniczkowalna w przedziale domkniętym $0x$, wzgl. $x0$, w zależności od tego, czy $x > 0$, czy $x < 0$ (jak widać z dowodu, założenie n -krotnej różniczkowalności można zastąpić przez założenie słabsze: mianowicie przez założenie, że $n-1$ -sza pochodna jest ciągła w całym przedziale i że n -ta pochodna istnieje wewnątrz przedziału; są to założenia, które dla $n=1$ czyniliśmy w tw. Rolle'a).

Przykłady i zastosowania. 1) Zastosujmy wzór Maclaurina, podstawiając we wzorze (12): $f(x) = e^x$ oraz $n=2$. Ponieważ

$$f'(x) = e^x = f''(x) \text{ oraz } f(0) = 1 = f'(0),$$

a zatem

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{\Theta x}.$$

Wnosimy stąd, że dla każdego x zachodzi nierówność

$$(13') \quad e^x \geq 1 + x.$$

Bowiem $x^2 \geq 0$ oraz $e^{\Theta x} > 0$.

Nierówność (13') posiada przejrzystą treść geometryczną na wykresach funkcji $y = e^x$ i $y = 1 + x$.

2) Wzór Taylora pozwala zaostrzyć w następujący sposób wzór de l'Hospitala (§ 7, (19)): *jeśli funkcje f i g posiadają n -te pochodne ciągłe i jeśli*

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \dots, \quad f^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$g(a) = 0, \quad g'(a) = 0, \dots, \quad g^{(n-1)}(a) = 0, \text{ zaś } g^{(n)}(a) \neq 0,$$

to

$$(13'') \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Istotnie na mocy naszych założeń i wzoru (9) Taylora (w którym b zastępujemy przez x) otrzymujemy

$$f(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}[a + \Theta(x-a)] \text{ oraz } g(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} g^{(n)}[a + \Theta'(x-a)].$$

A zatem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}[a + \Theta(x-a)]}{g^{(n)}[a + \Theta'(x-a)]}.$$

Przechodząc do granicy dla x dążącego do a i opierając się na ciągłości funkcji $f^{(n)}$ i $g^{(n)}$, otrzymujemy wzór (13'').

Np. aby obliczyć $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$, kładziemy $f(x) = x - \sin x$ oraz $g(x) = x \sin x$. Mamy więc

$$\begin{aligned} f(0) = 0 = g(0), \quad f'(x) = 1 - \cos x, \quad g'(x) = \sin x + x \cos x, \\ f'(0) = 0 = g'(0), \quad f''(x) = \sin x, \quad g''(x) = 2 \cos x - x \sin x, \\ f''(0) = 0, \quad g''(0) = 2. \end{aligned}$$

Na podstawie wzoru (13'') (dla $n = 2$) znajdujemy

$$(13''') \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Podobnie znajdujemy

$$(13'IV) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cotg x - \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Mianowicie $\cotg x - \frac{1}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x}$ i kładąc

$$f(x) = x \cos x - \sin x \quad \text{oraz} \quad g(x) = x \sin x$$

otrzymujemy przez rachunek zupełnie podobny do poprzedniego wzór żądany.

3) Stosując wzór Maclaurina do funkcji $f(x) = \log(1+x)$ i biorąc pod uwagę, że

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$$

otrzymujemy dla $x > -1$:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\Theta x)^2}.$$

W szczególności dla $x = \frac{1}{n}$ mamy więc

$$0 < \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \Theta_n\right)^2} < \frac{1}{2n^2}.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (ob. § 3, (14)), więc zbieżny jest też szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right)$. Sumę tego ostatniego szeregu oznaczaemy przez C . Mamy więc

$$\begin{aligned} C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1) \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ zaś $\lim_{n \rightarrow \infty} [\log(n+1) - \log n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+1}{n} = 0$, otrzymujemy w rezultacie (por. str. 129, 18):

$$(13V) \quad C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right).$$

Liczbę C nazywamy stałą Eulera. W przybliżeniu $C = 0,5772 \dots$ ¹

IV. Rozwinięcia na szeregi potęgowe. Ze wzoru (10') wnosimy natychmiast, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, to

$$(14) \quad f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

W szczególności, jeśli we wzorze Maclaurina mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, to funkcja $f(x)$ daje się rozwinąć na szereg potęgowy:

$$(15) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Nim przejdziemy do zastosowań powyższego twierdzenia, zauważmy, że jeśli wszystkie pochodne $f^{(n)}$ są wspólnie ograniczone w przedziale $0x$, tj. jeśli istnieje taka liczba M , że nierówność $M > |f^{(n)}(\Theta x)|$ zachodzi dla każdego n i dla każdego Θ spełniającego warunek $0 < \Theta < 1$, to $f(x)$ ma rozwinięcie (15) na szereg potęgowy (Maclaurina).

Bowiem $|R_n| = \left| \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\Theta x) \right| \leq \left| \frac{x^n}{n!} \right| \cdot M$, a ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, więc i $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Uwagi. 1) Zbieżność szeregu występującego po prawej stronie wzoru (15) nie wystarcza, aby równość (15) była spełniona, tj. aby funkcja $f(x)$ dała się rozwinąć na szereg potęgowy.

Np. funkcja $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ (dla $x \neq 0$), $f(0) = 0$, nie daje się rozwinąć na szereg potęgowy, pomimo że jej szereg Maclaurina jest zbieżny; dla każdego n mamy tu $f^{(n)}(0) = 0$.

2) Wzór (4) daje się uogólnić na szeregi potęgowe. Mianowicie,

¹ Nie wiadomo do tej pory, czy C jest liczbą wymierną czy niewymierną.

Leonhard Euler (1707—1783) — wielki matematyk (szwajcarski), któremu matematyka zawdzięcza, prócz wielu nowych wyników, systematyczne opracowanie ówczesnej analizy matematycznej.

jeśli $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, to $a_0 = f(0)$, $a_1 = \frac{1}{1!} f'(0)$, ogólnie

$$(16) \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

Inaczej mówiąc, jeśli funkcja posiada rozwinięcie na szereg potęgowy, to posiada tylko jedno takie rozwinięcie, mianowicie rozwinięcie Maclaurina (wzór (15)).

Aby to udowodnić, dowodzimy najpierw przez indukcję, że założenie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pociąga za sobą $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k}$. Podstawiając w tym wzorze $x = 0$, otrzymujemy równość (16).

Zastosowania. 1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Aby ten wzór udowodnić, zauważmy, że kładąc $f(x) = e^x$, mamy $f^{(n)}(x) = e^x$ oraz $f^{(n)}(0) = 1$. Ponadto w przedziale $0x$ pochodne wszystkich rzędów są wspólnie ograniczone; jeśli bowiem $0 \leq x$, to $f^{(n)}(0x) \leq e^x$, jeśli $0 > x$, to $f^{(n)}(0x) < 1$.

W szczególności: 1. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$

2. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

Opierając się na wzorze (3) N° I, wnosimy natychmiast, że pochodne wszystkich rzędów funkcji $\sin$ są wspólnie ograniczone (przez liczbę 1) w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych. Ponadto $f^{(n)}(0) = \sin 0 = 0$ dla $n = 0, 2, 4, \dots$ oraz $f'(0) = 1$, $f'''(0) = -1$, $f^{(5)}(0) = 1, \dots$

Podobnie dowodzimy, że

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

Wyprowadzimy obecnie wzór na dwumian Newtona dla dowolnych wykładników rzeczywistych (nie naturalnych) i dla $|x| < 1$:

$$4. (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} x^n.$$

Rozważymy oddzielnie wypadki, gdy x jest dodatnie i gdy x jest ujemne.

1° $x > 0$. Ponieważ $f^{(n)}(x) = a(a-1) \dots (a-n+1) (1+x)^{a-n}$ (ob. (2)), więc reszta w postaci Lagrange'a przedstawia się jak następuje:

$$R_n(x) = \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} x^n (1+\theta_n x)^{a-n}.^1$$

Ponieważ (ob. § 3, IV, 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} x^n = 0$ dla $|x| < 1$, więc aby dowieść, że $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, wystarczy wykazać, że przy danym x ciąg $(1+\theta_n x)^{a-n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, jest ograniczony. Otóż ze względu na nierówność $x > 0$ mamy $1 < 1+\theta_n x < 1+x$. A zatem

$$1 \leq (1+\theta_n x)^a \leq (1+x)^a, \text{ względnie } (1+x)^a \leq (1+\theta_n x)^a \leq 1,$$

w zależności od tego czy $a \geq 0$, czy $a \leq 0$. Ponadto $(1+\theta_n x)^{-n} < 1$.

Rozważany ciąg jest więc ograniczony.

2° $x < 0$. Zapisując resztę w postaci Cauchy'ego, mamy

$$R_n(x) = \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} (1+\theta'_n x)^{a-n}.$$

Ponieważ podobnie jak poprzednio $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-1) \dots (a-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} = 0$, należy więc dowieść, że ciąg $(1+\theta'_n x)^{a-n}$ jest ograniczony, tj. że ciągi $\left(\frac{1-\theta_n}{1+\theta'_n x}\right)^{n-1}$ i $(1+\theta'_n x)^{a-1}$ są ograniczone. Połóżmy w tym celu $y = -x$. A zatem $y > 0$ oraz $\theta'_n > \theta'_n y$, skąd $1 - \theta'_n < 1 - \theta'_n y < 1$.

A więc $\left(\frac{1-\theta'_n}{1-\theta'_n y}\right)^{n-1} < 1$.

Z drugiej strony $1-y < 1 - \theta'_n y < 1$, a zatem

$$(1-y)^{a-1} \leq (1-\theta'_n y)^{a-1} \leq 1, \text{ względnie } 1 \leq (1-\theta'_n y)^{a-1} \leq (1-y)^{a-1},$$

w zależności od tego czy $a-1 \geq 0$, czy $a-1 \leq 0$.

Oba ciągi są więc ograniczone. Stąd $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Przykłady. Podstawiając $a = 1/2$, otrzymujemy

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$$

Dla $a = -1/2$ mamy

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

¹ Piszemy wskaźnik n przy θ dla uwidocznienia, że θ zależy od n .

Stąd

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$$

Powyższy wzór pozwala na zastosowanie w celu rozwinięcia funkcji $\arcsin x$ na szereg potęgowy tej samej metody, którą stosowaliśmy rozwijając funkcje $\log x$ i $\arctg x$. Mianowicie, szereg występujący w tym wzorze jest, jak widać, pochodną szeregu

$$S(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

Ponieważ zaś $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, więc $\arcsin x = S(x) + C$. Zauważmy, że $\arcsin 0 = 0 = S(0)$, a zatem $C = 0$, tj. $\arcsin x = S(x)$. Otrzymaliśmy w ten sposób wzór następujący:

$$5. \quad \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| < 1.$$

Zauważmy, że podstawiając $x = 1/2$, otrzymujemy ze względu na to, że $\sin(\pi/6) = 1/2$:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

V. Kryterium na extrema. W § 7, IV, 2 udowodniliśmy, że jeśli funkcja (różniczkowalna) posiada w punkcie x ekstremum, to $f'(x) = 0$. Nie jest jednak odwrotnie: równość $f'(x) = 0$ nie pociąga za sobą istnienia w punkcie x ekstremum; świadczy o tym przykład funkcji $f(x) = x^3$. Badanie pochodnych wyższych rzędów prowadzi do następującego dokładniejszego kryterium na występowanie ekstremum:

Załóżmy, że $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$, ..., $f^{(n-1)}(c) = 0$, zaś $f^{(n)}(c) \neq 0$. Wówczas jeśli n jest liczbą parzystą, to w punkcie c funkcja f ma ekstremum właściwe, mianowicie maximum, jeśli $f^{(n)}(c) < 0$, minimum, jeśli $f^{(n)}(c) > 0$. Natomiast jeśli n jest liczbą nieparzystą, to funkcja nie posiada ekstremum w punkcie c . (O n -tej pochodnej zakładamy ciągłość w punkcie c).

Istotnie, na mocy wzoru Taylora mamy

$$(17) \quad f(c+h) = f(c) + \frac{h}{1!} f'(c) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(c) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c) + o(h^n),$$

skąd, ze względu na założenia naszego twierdzenia,

$$(17') \quad f(c+h) - f(c) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c) + o(h^n).$$

Założmy, że n jest liczbą parzystą. Niech przy tym $f^{(n)}(c) < 0$. Ze względu na ciągłość funkcji $f^{(n)}$ w punkcie c istnieje takie $\delta > 0$, że nierówność $|x - c| < \delta$ pociąga za sobą $f^{(n)}(x) < 0$. Jeśli więc $|h| < \delta$, to i $| \Theta h | < \delta$, a zatem $f^{(n)}(c + \Theta h) < 0$. Wnosimy stąd na mocy (17'), że jeśli $0 < |h| < \delta$, to $f(c+h) - f(c) < 0$ (dla n parzystych bowiem $h^n > 0$). Oznacza to, że funkcja f ma w punkcie c maximum.

Analogicznie rozumując dowodzimy, że jeśli n jest liczbą parzystą i $f^{(n)}(c) > 0$, to $f(c+h) - f(c) > 0$, a zatem w punkcie c funkcja ma minimum.

Założmy obecnie, że n jest liczbą nieparzystą. Niech $f^{(n)}(c) < 0$ (w wypadku, gdy $f^{(n)}(c) > 0$, rozumowanie jest analogiczne). Dobieramy jak poprzednio $\delta > 0$ w taki sposób, aby dla $|h| < \delta$ było $f^{(n)}(c + \Theta h) < 0$. Mamy wówczas dla $0 < h < \delta$ nierówność $f(c+h) - f(c) < 0$, tj. $f(c) > f(c+h)$, zaś dla $-\delta < h < 0$ mamy nierówność $f(c+h) - f(c) > 0$, skąd $f(c) < f(c+h)$. W punkcie c nie ma więc ani maximum, ani minimum.

Przykład. Funkcja $f(x) = x^n$ posiada minimum w punkcie 0, jeśli n jest liczbą parzystą. Jeśli n jest nieparzyste, w punkcie tym nie ma ekstremum.

Istotnie pierwszą nie znikającą w punkcie 0 pochodną funkcji x^n jest pochodna n -ta (por. (1)), przy tym $f^{(n)}(x) = n!$

Uwaga. Aczkolwiek twierdzenie poprzednie nie dla wszystkich funkcji (dowolną ilość razy różniczkowalnych) pozwala rozstrzygnąć, czy w danym punkcie występuje ekstremum (np. dla rozpatrywanej w Nº IV funkcji $e^{-\frac{1}{x^2}}$, której wszystkie pochodne w punkcie 0 znikają), to jednak dla funkcji posiadających rozwinięcie Taylora (wzór (14)) w otoczeniu danego punktu a pozwala ono zawsze na to pytanie odpowiedzieć. Ze wzoru (14) bowiem wynika, że jeśli funkcja f nie jest stała, to nie wszystkie jej pochodne znikają w punkcie a .

VI. Interpretacja geometryczna drugiej pochodnej. Punkty przegięcia. Jak widzieliśmy w § 7, VII, 3, jeśli $f'(c) > 0$, to funkcja w otoczeniu punktu c rośnie. Jeśli więc $f''(c) > 0$, to funkcja f' rośnie; a zatem przy założeniu, że $f'(c) > 0$, funkcja f rośnie coraz szybciej.

1. Jeśli $f''(c) > 0$, to krzywa $y = f(x)$ jest dla pewnego otoczenia punktu c pociągana powyżej stycznej do tej krzywej w punkcie $[c, f(c)]$ (jest więc wypukłością skierowaną w dół).

Analogicznie, jeśli $f''(c) < 0$, to krzywa ta lokalnie leży poniżej stycznej (jest więc skierowana wypukłością ku górze).

W obu wypadkach zakładamy ciągłość drugiej pochodnej.

Istotnie, oszacujmy różnicę między ilorazem różnicowym a pochodną

$$\varphi(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c).$$

Na mocy wzoru Taylora mamy $f(c+h) - f(c) - hf'(c) = \frac{h^2}{2} f''(c + \Theta h)$.

Jeśli więc założyć, że $f''(c) > 0$, to dla dostatecznie małych h mamy również $f''(c + \Theta h) > 0$, skąd $f(c+h) - f(c) - hf'(c) > 0$. Interpretując iloraz różnicowy jako tangens kąta między sieczną a osią x -ów, wnosimy stąd, że dla $h > 0$ tangens ten jest większy niż $f'(c)$, tj. niż tangens kąta między styczną a osią x -ów. Oznacza to, że rozważany łuk krzywej leży nad krzywą.

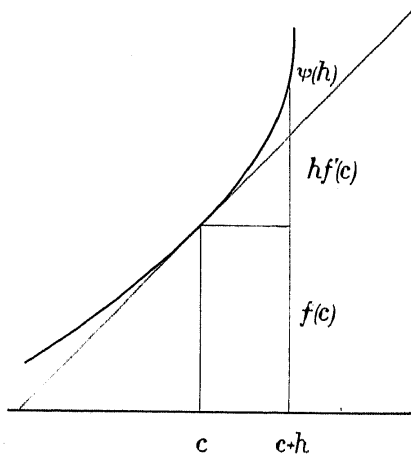
Dowód drugiej części twierdzenia jest zupełnie analogiczny.

Przykład. Parabola $y = x^2$ leży w otoczeniu każdego punktu ponad styczną w tym punkcie. Druga pochodna = 2.

Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ posiada w punkcie c *punkt przegięcia*, jeżeli dla dostatecznie małych przyrostów h ($|h| < \delta$) łuk krzywej dla przyrostów dodatnich leży po innej stronie stycznej do krzywej w punkcie $[c, f(c)]$ niż dla przyrostów ujemnych. Inaczej mówiąc: jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że dla $0 < h < \delta$ wyrażenie

$$\psi(h) = f(c+h) - f(c) - hf'(c)$$

jest dodatnie, zaś dla $0 > h > -\delta$ ujemne lub odwrotnie: dla $0 < h < \delta$ ujemne, zaś dla $0 > h > -\delta$ dodatnie.



Rys. 12

Przykład. Sinusoida $y = \sin x$ ma punkt przegięcia w punkcie 0. Istotnie $\sin h - \sin 0 - h \cos 0 = \sin h - h$. Różnica ta jest ujemna dla $h > 0$, dodatnia dla $h < 0$.

Podobnie parabola kubiczna $y = x^3$ posiada punkt przegięcia w punkcie 0.

Z tw. 1 wynika, że jeśli $f''(c) \neq 0$, to krzywa leży (lokalnie) po jednej stronie stycznej. Punkt c nie jest więc punktem przegięcia. Inaczej mówiąc:

2. Jeśli punkt c jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$, to $f''(c) = 0$.

Twierdzenie to nie daje się odwrócić: druga pochodna może zniknąć w punkcie c , mimo że punkt c nie jest punktem przegięcia (podobnie jak pierwsza pochodna może zniknąć, mimo że dany punkt nie stanowi ekstremum krzywej). Np. krzywa $y = x^4$ posiada minimum w punkcie 0, a więc punkt ten nie jest jej punktem przegięcia, mimo że druga pochodna $12x^2$ znika dla $x = 0$.

Aby uzyskać dokładniejsze kryterium, należy badać dalsze pochodne. Prowadzi to do następującego twierdzenia:

3. Jeśli $f''(c) = 0, f'''(c) = 0, \dots, f^{(n-1)}(c) = 0$, natomiast $f^{(n)}(c) \neq 0$, to w wypadku, gdy n jest liczbą nieparzystą, krzywa $y = f(x)$ posiada punkt przegięcia w punkcie c ; jeśli zaś n jest parzyste, to c nie jest punktem przegięcia. (Zakładamy ciągłość n -tej pochodnej w c).

Istotnie, stosując wzór Taylora (17), otrzymujemy

$$\psi(h) = f(c+h) - f(c) - hf'(c) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c + \Theta h).$$

Założmy, że n jest liczbą nieparzystą. Niech $f^{(n)}(c) > 0$ (rozumowanie w wypadku, gdy $f^{(n)}(c) < 0$, jest analogiczne). Dla dostatecznie małych przyrostów h mamy więc $f^{(n)}(c + \Theta h) > 0$. A zatem dla $h > 0$ mamy $\psi(h) > 0$, zaś dla $h < 0$ mamy $\psi(h) < 0$. Punkt c jest więc punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$.

Jeśli natomiast n jest liczbą parzystą, to $h^n > 0$ niezależnie od znaku h , wskutek czego $\psi(h)$ ma taki sam znak, co $f^{(n)}(c)$. Krzywa więc leży po jednej stronie stycznej do krzywej w punkcie $[c, f(c)]$. Punkt ten nie stanowi więc punktu przegięcia.

Uwaga. Podobnie jak w wypadku ekstremów, pytanie, czy punkt c jest punktem przegięcia, jest zawsze na mocy tw. 3 rozstrzygalne dla funkcji posiadających rozwinięcie na szereg Taylora w otoczeniu punktu c . Zatem punkty przegięcia krzywej $y = f(x)$ stanowią extrema krzywej $y = f'(x)$.

Zadania do § 8

1. Wyprowadzić wzór (Halphen):

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1} \cdot e^{\frac{1}{x}}) = (-1)^n x^{-n-1} \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

2. Znaleźć n -tą pochodną funkcji: $\frac{\log x}{x}$, $e^x \cos x$.

3. Obliczyć: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right)$.

4. Rozwinąć na szereg potęgowy funkcje: $\sinh x$ oraz $\cosh x$.

5. Podać wykresy funkcji x^x , $e^{\frac{1}{x}}$, $\log \sin x$, uwydatniając ich extrema, punkty przegięcia, asymptoty, punkty nieciągłości jednostronne lub obustronne (o ile istnieją).

6. Udowodnić, że jeśli funkcja n -krotnie różniczkowalna znika w n różnych punktach danego przedziału, to istnieje w tym przedziale punkt, w którym n -ta pochodna znika.

7. Niech $f(x) = \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$. Udowodnić, że $f'(0) = 0$.

Wyprowadzić stąd jako wniosek, że funkcja g określona przez warunki

$$g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ dla } x \neq 0 \text{ oraz } g(0) = 0$$

posiada w punkcie 0 pochodne wszystkich rzędów równe 0 (por. N° IV uw. 1).

8. Udowodnić, że $e^n < (2n+1) \frac{n^n}{n!}$. Wywnioskować stąd, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$.

ROZDZIAŁ IV

RACHUNEK CAŁKOWY JEDNEJ ZMIENNEJ

§ 9. Całki nieoznaczone

I. Definicja. Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f , określoną w przedziale otwartym (skończonym lub nieskończonym), jeśli $F'(x) = f(x)$ dla każdego x .

Np. funkcja $\sin x$ jest funkcją pierwotną funkcji $\cos x$. Również każda funkcja postaci $\sin x + C$, gdzie C jest stałą, jest funkcją pierwotną funkcji $\cos x$.

Jeżeli funkcja f jest określona w przedziale domkniętym $a \leq x \leq b$, to funkcję F nazywamy jej funkcją pierwotną, jeśli $F'(x) = f(x)$ dla $a < x < b$ oraz $F'_+(a) = f(a)$ i $F'_-(b) = f(b)$.

1. Jeśli dwie funkcje F i G są funkcjami pierwotnymi funkcji f w przedziale ab (otwartym lub domkniętym), to te dwie funkcje różnią się między sobą o stałą.

Istotnie, skoro $F'(x) = G'(x)$, to na mocy tw. 4, § 7, V, istnieje taka stała C , że $G(x) = F(x) + C$ dla każdego x .

Odwrotnie, funkcja, która powstaje przez dodanie stałej do funkcji pierwotnej funkcji f , jest funkcją pierwotną funkcji f . A zatem wyrażenie $F(x) + C$ jest ogólną postacią funkcji pierwotnej funkcji f . Wyrażenie to oznaczamy symbolem $\int f(x) dx$ („całka $f(x)$ po dx ”) i nazywamy je *całką nieoznaczoną funkcji f* . Mamy więc

$$(1) \quad \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ gdzie } F'(x) = f(x),$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x), \quad (3) \quad \int \frac{d F(x)}{dx} dx = F(x) + C.$$

Znajdywanie całki nieoznaczonej funkcji f lub — co na jedno wychodzi — znajdywanie funkcji pierwotnej funkcji f nazywamy *całko-*