Zadania do § 3

1. Udowodnić prawo łączności dla szeregów nieskończonych zbieżnych. Podać przykład szeregu rozbieżnego $a_1+a_2+a_3+\ldots$ takiego, że szereg $(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\ldots$ jest zbieżny.

2. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,n!}{n^n}$ jest zbieżny, zaś szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\,n!}{n^n}$ jest rozbieżny.

3. Podać przykład szeregu naprzemiennego rozbieżnego o składniku ogólnym dążącym do 0.

4. Podać przykład szeregu $a_1+a_2+\ldots$ zbieżnego o składnikach dodatnich, dla którego nie istnieje $\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

5. Dowieść, że jeśli szereg $a_1+a_2+\ldots$ o składnikach dodatnich malejących jest zbieżny, to $\lim_{n=\infty} na_n=0$.

6. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ jest zbieżny dla $s>1$, zaś rozbieżny dla $s\leqq 1$.
(Zastosować kryterium Raabego).

7. Dowieść, że jeśli szereg o wyrazach dodatnich $a_1+a_2+\ldots$ jest zbieżny, to zbieżne są również szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n} \quad\text{oraz}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[k]{a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot\ldots\cdot a_{n+k}}.$$

8. Dowieść, że jeśli szereg $a_1+a_2+\ldots$ o wyrazach dodatnich malejących jest zbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ jest zbieżny (tw. o zagęszczaniu Cauchy'ego).

9. Przyjmując wzory

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots \quad\text{oraz}\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots,$$

sprawdzić wzór $\sin(x+y)=\sin x\,\cos y+\sin y\,\cos x$, stosując twierdzenie o mnożeniu szeregów.

10. Obliczyć iloczyny nieskończone

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right),\quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right).$$

11. Zbadać zbieżność iloczynu $\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})$.

ROZDZIAŁ II

FUNKCJE

§ 4. Funkcje i ich granice

I. Definicje. Jeżeli każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowana jest jakaś liczba $y=f(x)$, to mówimy, że określona jest funkcja f na zbiorze liczb rzeczywistych.

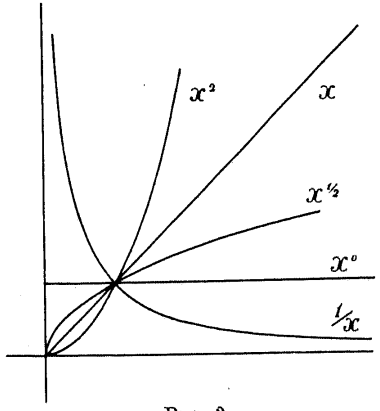
Np. przyporządkowując liczbie x jej kwadrat $y=x^2$, określiliśmy funkcję: $f(x)=x^2$. Podobnie równość $y=\sin x$ definiuje pewną funkcję na zbiorze liczb rzeczywistych.

Nie każda funkcja określona jest na całym zbiorze liczb rzeczywistych. Np. równość $y=1/x$ określa funkcję na całym zbiorze liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczby 0; liczbie 0 bowiem równość ta żadnej liczby rzeczywistej nie przyporządkowuje. Podobnie funkcja $\sqrt{x}$ określona jest tylko dla $x\geqq 0$; funkcja $\operatorname{tg} x$ określona jest dla wszystkich liczb rzeczywistych różnych od nieparzystych wielokrotności $\pi/2$.

Ogólnie: jeśli każdemu x należącemu do pewnego zbioru przyporządkowana jest liczba $y=f(x)$, to mamy do czynienia z funkcją określoną na tym zbiorze. Zbiór ten nazywamy zbiorem *argumentów* funkcji f. Liczby y postaci $y=f(x)$ nazywamy *wartościami* funkcji f. Np. dla funkcji $\sqrt{x}$ zbiorem argumentów jest zbiór liczb $\geqq 0$; zbiorem wartości tej funkcji jest również zbiór wszystkich liczb $\geqq 0$ (dodajmy przy tej okazji, że symbol $\pm\sqrt{x}$ nie określa jako symbol wieloznaczny żadnej funkcji; funkcja jest w myśl przyjętej przez nas definicji zawsze jednoznaczna).

Często mówić będziemy o funkcjach określonych na *przedziale* o końcach a i b. Rozróżniać przy tym będziemy przedział *domknięty*, tj. przedział wraz z końcami, czyli zbiór x-ów, czyniących zadość warunkowi $a\leqq x\leqq b$, od przedziału *otwartego*, tj. przedziału bez końców, czyli zbioru x-ów takich, że $a<x<b$.

Geometrycznie interpretujemy funkcję f jako zbiór punktów płaszczyzny postaci (x, y), gdzie $y = f(x)$. Zbiór ten nazywamy wykresem funkcji f (lub geometryczną interpretacją funkcji f, lub krzywą $y = f(x)$). Np. wykresem funkcji x^2 jest, jak wiadomo, parabola, wykresem funkcji $1/x$ hiperbola (ob. rys. 2).



Rys. 2

Rzutując wykres funkcji na oś x-ów otrzymamy zbiór argumentów funkcji. Rzutując na oś y-ów otrzymamy zbiór wartości funkcji. Wśród zbiorów położonych na płaszczyźnie wykresy funkcyj charakteryzują się tym, że na żadnej prostej równoległej do osi y-ów nie zawierają dwu różnych punktów.

Dodajmy, że w myśl naszej definicji funkcja, która ma za zbiór argumentów zbiór wszystkich liczb naturalnych, jest to ciąg nieskończony.

We wszelkich zastosowaniach matematyki mamy do czynienia z funkcjami; mianowicie, gdy badamy zależności między jakimiś wielkościami. Np. droga s przebyta przez ciało poruszające się ze stałą prędkością v przez czas t wyraża się wzorem $s = vt$; podobnie droga przebyta przez ciało spadające pod wpływem przyciągania ziemskiego jest funkcją czasu, mianowicie $s = \frac{1}{2}gt^2$.

W wyrażeniu $y = f(x)$ zmienną x nazywamy też zmienną *niezależną*, zaś y zmienną *zależną*. Pamiętać jednak należy, że do funkcyj zalicza się również funkcję stałą $y = c$ (piszemy też $y = constans$); jej wykresem geometrycznym jest prosta równoległa do osi x-ów (lub z nią identyczna).

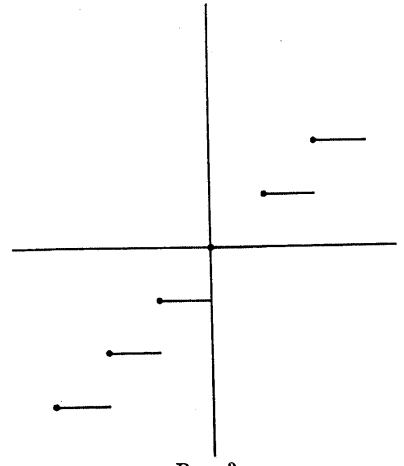
Funkcje, o których mowa była dotychczas, są to funkcje jednej zmiennej w odróżnieniu od funkcyj dwóch lub większej ilości zmiennych. Funkcja jednej zmiennej przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej (należącej do zbioru argumentów) pewną liczbę; funkcja dwóch zmiennych przyporządkowuje parom x, y wartość $f(x, y)$, podobnie funkcja trzech zmiennych przyporządkowuje pewną liczbę $f(x, y, z)$ każdej trójce liczb rzeczywistych. Funkcjami wielu zmiennych zajmować się będziemy w dalszych rozdziałach tej książki.

II. Funkcje monotoniczne. Jeśli warunek $x < x'$ pociąga za sobą $f(x) < f(x')$, to mówimy, że funkcja f jest *ściśle rosnąca*. Jeśli w ostatniej nierówności znak $<$ zastąpić przez $\leqq$, to mamy do czynienia z funkcją *rosnącą w szerszym sensie* (czyli z funkcją niemalejącą). Podobnie, jeśli warunek $x < x'$ pociąga $f(x) > f(x')$, względnie $f(x) \geqq f(x')$, mówimy, że funkcja jest *ściśle malejąca*, względnie *malejąca w szerszym sensie* (czyli nierosnąca).

Funkcje rosnące i malejące (w węższym lub szerszym sensie) obejmujemy ogólną nazwą funkcji *monotonicznych*.

Przykłady. Funkcja x^3 jest funkcją ściśle rosnącą. Funkcja x^2 jest funkcją malejącą na półprostej $x \leqq 0$, zaś rosnącą na półprostej $x \geqq 0$; na całej osi x-ów nie jest to więc ani funkcja rosnąca, ani malejąca.

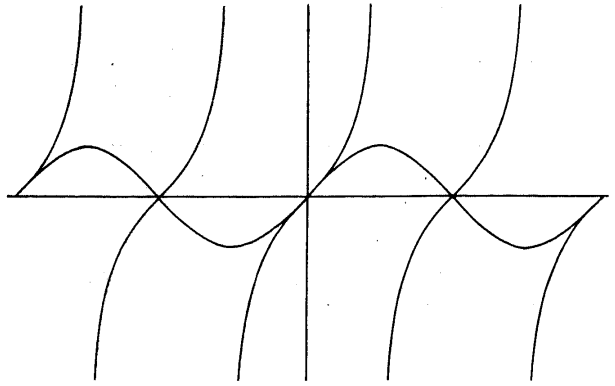
Przykładem funkcji rosnącej w szerszym sensie (lecz nie ściśle rosnącej) jest funkcja $E(x)$. Symbolem tym ("entier x") oznaczamy część całkowitą liczby x, tj. największą liczbę całkowitą n spełniającą nierówność $n \leqq x$ (ob. rys. 3).



Rys. 3

Funkcja $\sin x$ jest "*przedziałami monotoniczna*": w przedziale $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ jest rosnąca, w przedziale $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}$ malejąca itd. Podo-

bną własność mają funkcje $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ (jak zresztą większość funkcji, z którymi w praktyce się spotykamy).



Rys. 4

Zauważmy jeszcze, że wymienione funkcje trygonometryczne posiadają ważną własność okresowości. *Okresową* nazywamy funkcję $f(x)$, gdy istnieje taka liczba c (zwana okresem funkcji), że równość $f(x)=f(x+c)$ zachodzi przy każdej wartości x. Funkcja sin ma okres 2π, funkcja tg ma okres π.

Uwaga. Ogólnie, mówić będziemy, że funkcja $f(x)$ jest *przedziałami monotoniczna* w przedziale $a \leqq x \leqq b$, jeżeli przedział ten można z pomocą skończonego układu punktów

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n, \text{ gdzie } a_0 = a \text{ i } a_n = b,$$

podzielić na przedziały a_0a_1, a_1a_2, ..., $a_{n-1}a_n$ w taki sposób, aby wewnątrz każdego z tych przedziałów funkcja $f(x)$ była określona i monotoniczna.

Np. funkcja określona przez warunki: $f(x)=x$ dla $0<x<1$, $f(1)=1/2$, $f(x)=x-1$ dla $1<x<2$, jest przedziałami monotoniczna w przedziale $0 \leqq x \leqq 2$.

III. Funkcje różnowartościowe. Funkcje odwrotne. Jeśli funkcja f jest ściśle rosnąca, to równanie $y=f(x)$ wyznacza x jako funkcję y, tj. równanie to daje się rozwiązać ze względu na x (traktowane jako niewiadoma). Istotnie, ponieważ różnym x odpowiadają różne y, więc każdemu y należącemu do zakresu wartości funkcji f odpowiada jedno i tylko jedno x takie, że $f(x)=y$; x jest więc funkcją y. Oznaczając tę funkcję przez g, widzimy więc, że równości

$$y=f(x) \text{ i } x=g(y) \tag{1}$$

są równoważne. Funkcję g nazywamy *odwrotną* względem f (oznaczamy ją niekiedy symbolem f^{-1}).

Gdyby zamiast zakładać, że funkcja f jest ściśle rosnąca, założyć, że jest ona ściśle malejąca, to rozumując jak poprzednio, przekonalibyśmy się, że f również posiada funkcję odwrotną. Istnienie funkcji odwrotnej ma bowiem miejsce zawsze, gdy dana funkcja jest *różnowartościowa*, tj. gdy warunek $x \neq x'$ pociąga za sobą $f(x) \neq f(x')$.

Przykłady. Funkcja $y=2x+3$ posiada funkcję odwrotną. Rozwiązując bowiem to równanie względem x, otrzymujemy $x=\frac{y-3}{2}$.

Funkcja x^2 nie jest różnowartościowa, jeśli rozpatrywać ją na całej osi X, bo $x^2=(-x)^2$. Jeśli jednak ograniczyć zakres argumentów do półprostej $x \geqq 0$, to w tym zakresie funkcja x^2 jest różnowartościową i jej funkcją odwrotną jest $\sqrt{x}$. Podobnie, gdyby ograniczyć zmienność argumentów do półosi ujemnej, otrzymalibyśmy jako funkcję odwrotną $-\sqrt{x}$. Wprawdzie więc funkcja x^2 rozpatrywana na całej osi X odwrócenia nie posiada, można jednak mówić o różnych "gałęziach" odwrócenia tej funkcji (gdy zakres zmienności jej argumentów odpowiednio ograniczymy).

Geometrycznie charakteryzuje się wykres funkcji różnowartościowej przez fakt, że nie zawiera on na żadnej prostej równoległej do osi X dwu różnych punktów. W myśl podanej w N° I charakteryzacji wykresów funkcji, jest to więc wykres funkcji $x=g(y)$. Aby przejść od tej funkcji do funkcji wyznaczonej przez równanie $y=f(x)$, należy dokonać obrotu wykresu dookoła prostej $y=x$ jako osi.

Zanotujmy łatwe do udowodnienia wzory

$$g[f(x)]=x, \quad f[g(y)]=y. \tag{2}$$

IV. Funkcje elementarne. Funkcję postaci $ax+b$, gdzie a i b oznaczają stałe, nazywamy *liniową*. Wykresem geometrycznym funkcji liniowej jest linia prosta. Odwrotnie, każda prosta, prócz prostych równoległych do osi Y jest wykresem pewnej funkcji liniowej. W zależności od znaku współczynnika a funkcja $ax+b$ jest rosnąca (dla $a>0$) lub malejąca (dla $a<0$); jeśli $a=0$, funkcja ma stałą wartość b. Jeśli więc $a \neq 0$, to funkcja nasza posiada odwrotną: $x=\frac{y-b}{a}$.

Następną z kolei co do prostoty jest klasa funkcji drugiego stopnia: ax^2+bx+c. Geometrycznie przedstawiają one parabole (o ile

$a \neq 0$). Ogólniejszą klasę funkcji przedstawiają *wielomiany*, tj. funkcje postaci $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$. Dalsze uogólnienie stanowią *funkcje wymierne*, tj. funkcje postaci $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są to wielomiany.

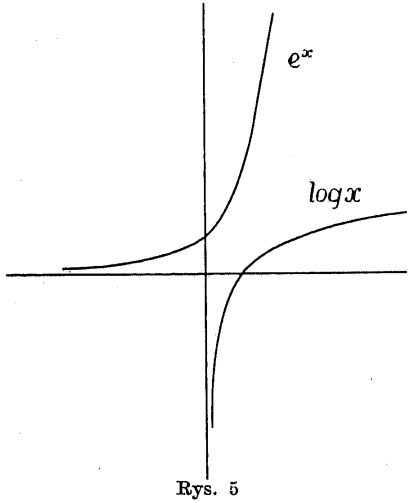
Wielomiany są określone dla wszystkich wartości x. Funkcje wymierne są określone dla wszystkich x prócz tych, dla których mianownik znika, tj. prócz pierwiastków równania $Q(x) = 0$. W obrębie funkcji wymiernych wykonalne są 4 działania arytmetyczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie; w obrębie wielomianów — pierwsze trzy.

Funkcją odwrotną do potęgi x^n jest *pierwiastek* $\sqrt[n]{x}$. Funkcja ta dla n nieparzystych określona jest dla wszystkich x, dla n parzystych jedynie dla $x \geqq 0$.

Pierwiastki są to potęgi postaci $x^{\frac{1}{n}}$. Ogólniej rozpatrujemy potęgi o dowolnym wykładniku rzeczywistym x^a dla $x > 0$. Funkcja ta jest rosnąca, jeśli $a > 0$, malejąca, jeśli $a < 0$ (dla $a = 0$ jest to stała) (por. rys. 2).

W szczególności funkcja wymierna $\frac{1}{x}$ geometrycznie przedstawia hiperbolę równoboczną.

Jeżeli w potędze traktować jako zmienną wykładnik, jako stałą zaś zasadę, to mamy do czynienia z *funkcją wykładniczą* a^x; przyjmujemy, że $a > 0$. Dla $a > 1$ funkcja wykładnicza jest rosnąca, dla $a < 1$ — malejąca.



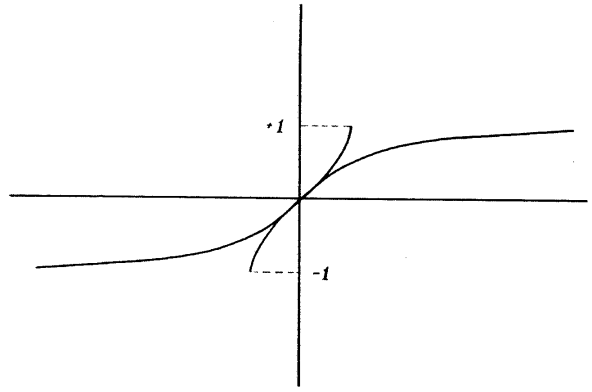
Rys. 5

Funkcją odwrotną względem funkcji wykładniczej jest *logarytm*: warunki $y = \log_a x$ i $x = a^y$ są równoważne (dla $0 < a \neq 1$).

W szczególności funkcją odwrotną względem $y = e^x$, gdzie $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (ob. § 2, X) jest *logarytm naturalny* $x = \log y$, który piszemy bez uwydatnienia podstawy.

Przez obrót krzywych wykładniczych $y = a^x$ dookoła prostej $y = x$ otrzymujemy krzywe logarytmiczne $y = \log_a x$.

Do funkcji elementarnych zaliczamy również funkcje *trygonometryczne* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ i funkcje względem nich odwrotne (tj. *cyklometryczne*): $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$. Ponieważ funkcje sin, cos i tg nie są różnowartościowe, należy więc przy odwracaniu tych funkcji wskazać przedział, do którego ograniczamy zakres argumentów. Przyjmujemy: dla $\sin x$ $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, dla $\cos x$ $0 \leqq x \leqq \pi$, dla $\operatorname{tg} x$ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. W każdym z tych przedziałów funkcje rozważane są różnowartościowe, a więc odwracalne. Można by, rzecz prosta, przyjąć inne przedziały zmienności argumentów; otrzymalibyśmy inne gałęzie funkcji odwrotnych.



Rys. 6

Zauważmy, że zakresem zmienności argumentów dla funkcji $\arcsin x$ i $\arccos x$ jest przedział $-1 \leqq x \leqq 1$, zaś dla $\operatorname{arc\,tg} x$ cała oś x.

Uwaga. Sposób wprowadzenia w wykładzie szkolnym potęgi a^x o wykładniku rzeczywistym niewymiernym opiera się zazwyczaj *implicite* na istnieniu granicy $\lim\limits_{n=\infty} a^{r_n}$, gdzie $\{r_n\}$ jest ciągiem monoto-

nicznym liczb wymiernych zbieżnym do x (np. ciągiem rozwinięć dziesiętnych liczby x). Otóż istnienie tej granicy wynika z twierdzenia o zbieżności ciągów monotonicznych ograniczonych (§ 2, VI, tw. 3) oraz ze znanego z elementarnej algebry twierdzenia o monotoniczności funkcji a^r dla r wymiernych.

Równość $a^x = \lim\limits_{n=\infty} a^{r_n}$ $(a>0)$ uważamy za definicję potęgi dla wykładników niewymiernych. Obojętne jest przy tym, jaki ciąg liczb wymiernych zbieżny do x oznaczymy przez $\{r_n\}$. Jeśli bowiem $\lim\limits_{n=\infty} r'_n = \lim\limits_{n=\infty} r_n$, to (por. § 2, IX, 6) $\lim\limits_{n=\infty} a^{r'_n - r_n} = 1$, skąd $\lim\limits_{n=\infty} a^{r'_n} = \lim\limits_{n=\infty} a^{r_n} \cdot \lim\limits_{n=\infty} a^{r'_n - r_n} = \lim\limits_{n=\infty} a^{r_n}$.

Następujące wzory znane z algebry elementarnej dla wykładników wymiernych zachodzą dla dowolnych wykładników rzeczywistych (przy $a>0$):

(3) $$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (ab)^x = a^x \cdot b^x, \qquad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Kładąc $x = \lim\limits_{n=\infty} r_n$, $y = \lim\limits_{n=\infty} s_n$ i stosując powyższe wzory do wykładników wymiernych r_n i s_n, przeprowadzamy dowód przez przejście do granicy.

V. Granica funkcji f w punkcie a. Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie a, co symbolicznie zapisujemy w postaci równości

$$\lim_{x=a} f(x) = g,$$

jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do a i o wyrazach różnych od a zachodzi równość $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = g$.

A zatem granica funkcji f w punkcie a istnieje, gdy istnieje wspólna granica wszystkich ciągów $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... takich, że

$$\lim_{n=\infty} x_n = a \textit{ oraz } x_n \neq a \textit{ dla każdego } n.$$

Np. $\lim\limits_{x=0} x^2 = 0$. Jeśli bowiem $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$, to $\lim\limits_{n=\infty} x_n^2 = (\lim\limits_{n=\infty} x_n)^2 = 0$.

$\lim\limits_{x=0} \cos x = 1$. Istotnie $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, zaś na mocy znanego wzoru $|\sin t| \leqq |t|$, a więc $|1 - \cos x| \leqq \frac{x^2}{2}$, skąd $\lim\limits_{x=0} (1 - \cos x) = 0$, tj. $\lim\limits_{x=0} \cos x = 1$.

Łatwo też dowieść, że

(3') $$\lim_{x=0} a^x = 1 \quad (a>0).$$

Jeśli funkcja f jest określona nie dla wszystkich liczb rzeczywistych, to o x_n zakładamy, że należy do argumentów tej funkcji; natomiast o liczbie a tego założenia nie czynimy (zakładamy jedynie, że a jest granicą jakiegoś ciągu argumentów różnych od a). Np. funkcja $\frac{\sin x}{x}$ nie jest określona dla $x=0$, istnieje jednak w tym punkcie granica tej funkcji, mianowicie

(4) $$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Istotnie dla $\frac{\pi}{2} > x > 0$ mamy

(5) $$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

a więc $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ (pierwszą z tych nierówności otrzymujemy mnożąc drugą nierówność (5) przez $\frac{\cos x}{x}$, zaś drugą otrzymujemy dzieląc pierwszą z nierówności (5) przez x). Ponieważ zaś $\lim\limits_{x=0} \cos x = 1$, z łatwością stąd wnosimy, że jeśli $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$ oraz $x_n > 0$, to $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = 1$ (por. § 2 (17)). Wreszcie założenie $x>0$ można zastąpić przez $x<0$, bowiem $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$.

Symbolu $\lim\limits_{x=a} f(x)$ używamy również na oznaczenie *granicy niewłaściwej*. Np. $\lim\limits_{x=0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Natomiast $\lim\limits_{x=0} \frac{1}{x}$ nie istnieje, bowiem dla ciągów $\{x_n\}$ zmierzających do 0 przez wartości dodatnie $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$, zaś dla ciągów o wyrazach ujemnych mamy $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$.

Można jednak w tym wypadku mówić o granicy *jednostronnej* w punkcie 0. Mianowicie, liczbę g nazywamy *prawostronną* (wzgl. *lewostronną*) granicą funkcji f w punkcie a, jeśli warunki $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ oraz $x_n > a$ (wzgl. $x_n < a$) pociągają za sobą $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = g$. Symbole

$$\lim_{x=a+0} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x=a-0} f(x)$$

oznaczają odpowiednio prawostronną i lewostronną granicę funkcji f w punkcie a.

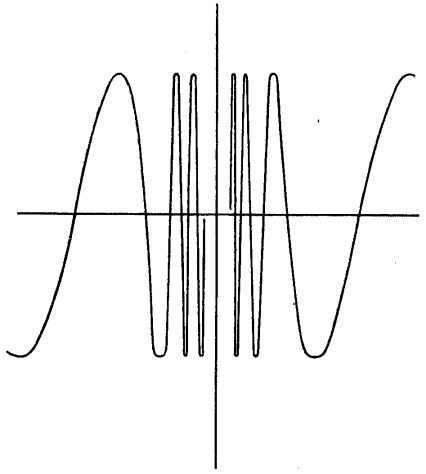
Mamy więc $\lim\limits_{x=+0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x=-0} \frac{1}{x} = -\infty$. Podobnie

(6) $\lim\limits_{x=+0} \log x = -\infty, \quad \lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = \infty, \quad \lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim\limits_{x=n-0} \mathrm{E}(x) = n-1.$

Istnieją jednak funkcje, które nie posiadają nawet jednostronnych granic (ani właściwych, ani niewłaściwych). Taką jest funkcja

(7) $$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

W punkcie 0 nie posiada ona jednostronnej granicy. Istotnie w punktach $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi, \ldots$ sin ma wartość 1, a więc, kładąc $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, mamy $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = 1$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$. Zarazem dla $x'_n = \frac{2}{(4n+3)\pi}$ mamy $\lim\limits_{n=\infty} f(x'_n) = -1$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} x'_n = 0$. Nie istnieje więc granica prawostronna funkcji f w punkcie 0; podobnie nie istnieje granica lewostronna w tym punkcie.



Rys. 7

Inny przykład funkcji osobliwej stanowi funkcja, która w punktach wymiernych ma wartość 1, zaś w punktach niewymiernych wartość 0 (tzw. funkcja Lejeune-Dirichleta[1]). Nie posiada ona w żadnym punkcie żadnej z granic jednostronnych.

Prócz granicy funkcji w punkcie a skończonym, rozważamy też granicę w nieskończoności. Mianowicie, przez $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$ oznaczamy

[1] Lejeune-Dirichlet (1805—1859) — matematyk niemiecki.

wspólną granicę ciągów $f(x_1), f(x_2), \ldots$ takich, że $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \infty$ (o ile taka wspólna granica istnieje). Mamy więc np.

(8) $$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x=\infty} e^x = \infty = \lim_{x=\infty} \log x, \quad \lim_{x=-\infty} e^x = 0.$$

Funkcje trygonometryczne sin, cos, tg nie posiadają granicy w $\pm\infty$

VI. Działania na granicy. Przy założeniu, że granice $\lim\limits_{x=a} f(x)$ i $\lim\limits_{x=a} g(x)$ istnieją (i są skończone), zachodzą wzory:

(9) $$\lim_{x=a} [f(x)+g(x)] = \lim_{x=a} f(x) + \lim_{x=a} g(x)$$

(10) $$\lim_{x=a} [f(x)-g(x)] = \lim_{x=a} f(x) - \lim_{x=a} g(x)$$

(11) $$\lim_{x=a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x=a} f(x) \cdot \lim_{x=a} g(x)$$

(12) $$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x=a} f(x)}{\lim\limits_{x=a} g(x)}, \quad o\ ile\ \lim_{x=a} g(x) \neq 0.$$

Wzory powyższe pozostają w mocy, gdy zastąpić a przez ∞ lub $-\infty$. Pozostają one również w mocy dla granic jednostronnych.

Wzory te są konsekwencjami odpowiednich wzorów dla ciągów nieskończonych (§ 2, (6) – (9)). Dla przykładu udowodnimy wzór (12).

Niech więc $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x=a} g(x) = B \neq 0$. Niech $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$, przy czym $x_n \neq a$. Mamy więc $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n=\infty} g(x_n) = B$. Na mocy wzoru o ilorazie granic (§ 2, (9)), wnosimy stąd, że

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim\limits_{n=\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n=\infty} g(x_n)},$$

skąd wynika wzór (12).

Podobnie ze wzorów (15) i (17) § 2 wnosimy, że jeśli granice $\lim\limits_{x=a} f(x)$ i $\lim\limits_{x=a} g(x)$ istnieją, to

(13) *nierówność $f(x) \leqq g(x)$ pociąga za sobą* $\lim\limits_{x=a} f(x) \leqq \lim\limits_{x=a} g(x)$,

(14) *nierówność $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ wraz z równością* $\lim\limits_{x=a} f(x) = \lim\limits_{x=a} g(x)$ *pociągają za sobą* $\lim\limits_{x=a} h(x) = \lim\limits_{x=a} f(x) = \lim\limits_{x=a} g(x)$.

Przy tym, jak poprzednio, wzory te obowiązują dla $a = \pm\infty$ i dla granic jednostronnych.

Zachodzi następujący wzór na superpozycję funkcji:

(15) *Jeśli* $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ *i* $\lim\limits_{y=A} g(y) = B$, *to* $\lim\limits_{x=a} g[f(x)] = B$

przy założeniu, że funkcja f nie przyjmuje wartości A w otoczeniu punktu a (tzn. w jakimś przedziale otwartym, zawierającym a).

Wzór ten pozostaje w mocy zarówno dla nieskończonych wartości A, B i a jak również dla granic jednostronnych, gdy umówimy się, że równość $\lim\limits_{x=a} f(x) = A+0$ oznacza, że $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ oraz, że $f(x) > A$ w otoczeniu a (analogiczna umowa dotyczy symbolu $A-0$ oraz granicy jednostronnej).

Niech bowiem $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Mamy więc $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = A$. Połóżmy $y_n = f(x_n)$. Ponieważ w pewnym przedziale zawierającym punkt a wewnątrz funkcja f nie przyjmuje wartości A, więc dla dostatecznie dużych n mamy $f(x_n) \neq A$, tj. $y_n \neq A$. A zatem $\lim\limits_{n=\infty} g(y_n) = B$, czyli $\lim\limits_{n=\infty} g[f(x_n)] = B$. Wnosimy stąd, że $\lim\limits_{x=a} g[f(x)] = B$.

W szczególności zachodzi wzór następujący, który pozwala sprowadzić obliczanie granic w ∞ do granic w skończoności.

(16) *Jeśli* $\lim\limits_{x=+0} f(\frac{1}{x})$ *istnieje, to* $\lim\limits_{t=\infty} f(t) = \lim\limits_{x=+0} f(\frac{1}{x})$.

Istotnie, podstawiając $x = \frac{1}{t}$, mamy $\lim\limits_{t=\infty} \frac{1}{t} = +0$, skąd otrzymujemy wzór (16) na mocy poprzedniego (kładąc $a = \infty$ i $A = +0$).

Zachodzi też, jak łatwo sprawdzić, zależność odwrotna:

(17) *Jeśli* $\lim\limits_{t=\infty} f(t)$ *istnieje, to* $\lim\limits_{x=+0} f(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{t=\infty} f(t)$.

Przykłady. 1) Następujący wzór ma ważne zastosowanie w rachunku różniczkowym:

(18) $$\lim_{x=0} \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Aby wzór ten wyprowadzić, rozważymy dwa wypadki:

1°) $x > 0$. Połóżmy $y = \frac{1}{x}$. Zgodnie ze wzorem (17), należy dowieść, że

(19) $$\lim_{y=\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e.$$

Niech więc $\lim\limits_{n=\infty} y_n = \infty$. Połóżmy $k_n = E(y_n)$, tzn. że k_n jest liczbą naturalną, spełniającą podwójną nierówność

(20) $$k_n \leqq y_n < k_n + 1.$$

Stąd $\frac{1}{k_n+1} \leqq \frac{1}{y_n} \leqq \frac{1}{k_n}$ (dla $y_n \geqq 1$), a więc $\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \leqq \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \leqq \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}$, czyli

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{k_n+1}} \leqq \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \leqq \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \cdot \left(1+\frac{1}{k_n}\right).$$

Ponieważ $\lim\limits_{n=\infty} y_n = \infty$ i $k_n > y_n - 1$, więc $\lim\limits_{n=\infty} k_n = \infty$. Ponieważ zaś $\lim\limits_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, wnosimy stąd (por. § 2, zad. 5), że $\lim\limits_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e$. Wreszcie, ponieważ $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{k_n+1}} = 1 = \lim\limits_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{k_n}\right)$, otrzymujemy na mocy wzoru o podwójnej nierówności (§ 2, (17)): $\lim\limits_{n=\infty} \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e$.

Tym samym wzór (19), a zatem i (18) został udowodniony dla $x > 0$.

2°) Niech $x < 0$. Kładąc $y = \frac{1}{x}$, mamy

$$\lim_{x=-0} \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x=+0} \left(1-x\right)^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{y=\infty} (1-\frac{1}{y})^{y}}.$$

Pozostaje więc do udowodnienia, że

(21) $$\lim_{y=\infty} \left(1-\frac{1}{y}\right)^{y} = \frac{1}{e}.$$

Niech $\lim\limits_{n=\infty} y_n = \infty$. Wzór (20) daje

$$\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} \leqq \left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{k_n+1} \leqq \left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \leqq \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{y_n} \leqq \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}.$$

Ponieważ zaś $\lim\limits_{n=\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ (por. § 2, X (25)), przeto rozumując jak poprzednio, otrzymujemy $\lim\limits_{n=\infty} \left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = \frac{1}{e}$. Wzór (21) jest więc udowodniony.

2) $\lim\limits_{x=\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$, tzn. że funkcja e^x *szybciej rośnie niż* x.

Niech bowiem $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \infty$. Niech, jak poprzednio, $k_n = E(x_n)$. A za-

tem dla $x_n > 1$: $\frac{e^{x_n}}{x_n} \geqq \frac{e^{k_n}}{k_n+1} \geqq \frac{e^{k_n}}{2k_n}$. Ponieważ (§ 3, V, 7) $\lim\limits_{n=\infty} \frac{e^n}{n} = \infty$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} k_n = \infty$, więc $\lim\limits_{n=\infty} \frac{e^{k_n}}{k_n} = \infty$, a zatem $\lim\limits_{n=\infty} \frac{e^{x_n}}{x_n} = \infty$. Stąd wzór żądany.

3) $\lim\limits_{x=\infty} \frac{x}{\log x} = \infty$.

Ponieważ $x = e^{\log x}$ oraz $\lim\limits_{x=\infty} \log x = \infty$, więc podstawiając $y = \log x$, mamy (por. (15)):

$$\lim_{x=\infty} \frac{x}{\log x} = \lim_{x=\infty} \frac{e^{\log x}}{\log x} = \lim_{y=\infty} \frac{e^y}{y} = \infty.$$

4) $\lim\limits_{x=+0} (x \log x) = 0$.

Bowiem $\lim\limits_{x=+0} (x \log x) = \lim\limits_{t=\infty} \frac{\log \frac{1}{t}}{t} = -\lim\limits_{t=\infty} \frac{\log t}{t} = 0$.

VII. Warunki istnienia granicy. Odpowiednikiem twierdzenia o zbieżności ciągów monotonicznych ograniczonych jest twierdzenie następujące:

1. Jeśli funkcja f jest rosnąca (w szerszym sensie) i ograniczona z góry, to istnieje $\lim\limits_{x=a-0} f(x)$ w każdym punkcie a.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji *malejących*.

Przez funkcję *ograniczoną z góry* (wzgl. *z dołu*) rozumiemy funkcję, której zbiór wartości jest ograniczony z góry (z dołu), tj. dla której istnieje liczba M taka, że nierówność $M > f(x)$ (wzgl. $M < f(x)$) zachodzi dla każdego x.

Dowód twierdz. 1. Ponieważ ciąg $\left\{a - \frac{1}{n}\right\}$ jest rosnący, więc i ciąg $\left\{f(a - \frac{1}{n})\right\}$ jest rosnący. Ponieważ ten ostatni ciąg jest ponadto ograniczony, a zatem jest zbieżny. Niech $\lim\limits_{n=\infty} f(a - \frac{1}{n}) = g$. Pozostaje do udowodnienia, że warunki $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ i $x_n < a$ pociągają za sobą równość

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = g.$$

Niech dane będzie $\varepsilon > 0$. Istnieje więc takie m, że $g - f(a - \frac{1}{m}) < \varepsilon$. Do m dobieramy takie k, ażeby nierówność $n > k$ pociągała za sobą $a - \frac{1}{m} < x_n$. Stąd $f(a - \frac{1}{m}) < f(x_n)$, a więc

$$g - f(x_n) < g - f(a - \frac{1}{m}) < \varepsilon.$$

Zarazem dla każdego n istnieje r_n takie, że $x_n < a - \frac{1}{r_n}$. Stąd

$$f(x_n) < f(a - \frac{1}{r_n}) \leqq g, \text{ tj. } g - f(x_n) > 0.$$

Wnosimy stąd, że $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = g$.

Uwaga. Tw. 1 daje się uogólnić zarówno na funkcje monotoniczne nieograniczone jak i na $a = \pm\infty$.

2. *Jeśli funkcja f nie posiada granicy (skończonej) w punkcie a, to istnieje ciąg $\{x_n\}$ taki, że $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ oraz ciąg $\{f(x_n)\}$ jest rozbieżny.*

Przypuśćmy bowiem, że dla każdego ciągu $\{x_n\}$ tego rodzaju ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny. Ponieważ funkcja f nie posiada granicy w punkcie a, więc istnieć muszą dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{x'_n\}$, czyniące zadość naszym założeniom i takie, że $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n=\infty} f(x'_n)$. Weźmy pod uwagę ciąg $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots$ Ciąg ten jest zbieżny do a, składa się z samych wyrazów $\neq a$, zarazem ciąg $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots$ jest rozbieżny.

Twierdzenie następujące zawiera tzw. *definicję Cauchy'ego* granicy funkcji w punkcie.

3. *Na to, żeby zachodziła równość $\lim\limits_{x=a} f(x) = g$, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie $\delta > 0$, że nierówność $0 < |x - a| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x) - g| < \varepsilon$.*

Przypuśćmy najpierw, że warunek Cauchy'ego nie jest spełniony, tj. że istnieje takie $\varepsilon > 0$, że przy każdej wartości na $\delta > 0$ istnieje takie x, że $0 < |x - a| < \delta$, zaś $|f(x) - g| \geqq \varepsilon$. W szczególności więc, podstawiając $\delta = \frac{1}{n}$, wnosimy, że istnieje ciąg $\{x_n\}$ taki, że

(22) $\quad 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ oraz (23) $\quad |f(x_n) - g| \geqq \varepsilon$.

Z (22) wynika, że $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Gdyby więc przypuścić, że $\lim\limits_{x=a} f(x) = g$, to mielibyśmy $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = g$. Lecz ta ostatnia równość jest sprzeczna z nierównością (23).

Udowodniliśmy w ten sposób, że warunek Cauchy'ego jest koniecznym warunkiem zachodzenia równości $\lim\limits_{x=a} f(x) = g$. Udowodnimy obecnie, że jest to również warunek wystarczający.

Niech więc dane będzie $\varepsilon > 0$ i niech $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Na mocy warunku Cauchy'ego istnieje $\delta > 0$ takie, że nierówność $0 < |x_n - a| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x_n) - g| < \varepsilon$. Ze względu na równość $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$, nierówność $|x_n - a| < \delta$ zachodzi dla wszystkich n, poczynając od pewnego k. Dla tych samych n mamy więc nierówność $|f(x_n) - g| < \varepsilon$. Znaczy to, że $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = g$. Stąd wnosimy, że $\lim\limits_{x=a} f(x) = g$.

Odpowiednikiem tw. Cauchy'ego z teorii ciągów (§ 2, VII) jest:

4. *Na to, żeby istniała granica (skończona) funkcji f w punkcie a, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie $\delta > 0$, że warunki*

$$(24) \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad i \qquad 0 < |x' - a| < \delta$$

pociągają za sobą $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Istotnie, warunek nasz jest konieczny, bo jeśli $\lim\limits_{x=a} f(x) = g$, to dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że warunek $0 < |x - a| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x) - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jeśli więc warunki (24) są spełnione, to zachodzą nierówności $|f(x) - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|f(x') - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dodając te nierówności, otrzymujemy $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Warunek jest dostateczny. Przypuśćmy bowiem, że granica funkcji f w punkcie a nie istnieje. Istnieje wówczas na mocy tw. 2 taki ciąg $\{x_n\}$, że $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ oraz że ciąg $\{f(x_n)\}$ jest rozbieżny. Załóżmy zarazem, że warunek sformułowany w twierdzeniu jest spełniony. Ponieważ z równości $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ wynika, że istnieje takie k, że dla $n \geqq k$ można w nierównościach (24) podstawić $x = x_n$ i $x' = x_k$, przeto $|f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon$. Na mocy tw. Cauchy'ego o ciągach wnosimy stąd, że ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny — wbrew naszemu założeniu.

Uwaga. Dla $a = \infty$ twierdzenia 3 i 4 dają się sformułować, jak następuje:

3'. *Na to, żeby zachodziła równość $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = g$, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie r, że nierówność $x > r$ pociąga za sobą $|f(x) - g| < \varepsilon$.*

4'. *Na to, żeby istniała granica (skończona) $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie r, że warunki $x > r$ i $x' > r$ pociągają za sobą $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

Dowody tych twierdzeń są zupełnie analogiczne do dowodów tw. 3 i 4.

Zadania do § 4

1. Podać wykres funkcyj

$$\frac{x}{x+1}, \quad x - \mathrm{E}(x), \quad x \sin\frac{1}{x}, \quad x^2 \sin\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

i obliczyć granice tych funkcyj w punkcie 0.

2. Znaleźć granice wielomianu w ∞, tj. $\lim\limits_{x=\pm\infty} (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$ (oddzielnie rozważać n parzyste i nieparzyste).

3. Obliczyć: $\lim\limits_{x=0} \frac{\sin ax}{x}$, $\lim\limits_{x=1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

4. Niech dana będzie funkcja ograniczona $f(x)$ w przedziale $a \leqq x \leqq b$. Podzielmy ten przedział na skończoną ilość przedziałów z pomocą punktów $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ (przy czym $a_0 = a$, $a_n = b$) i weźmy pod uwagę sumę

$$s = |f(a_1) - f(a_0)| + |f(a_2) - f(a_1)| + \ldots + |f(a_n) - f(a_{n-1})|.$$

Jeśli zbiór liczb s odpowiadających wszelkim możliwym podziałom przedziału ab jest ograniczony, to funkcję f nazywamy *o wahaniu ograniczonym*.

Udowodnić, że: suma dwóch funkcyj o wahaniu ograniczonym jest funkcją o wahaniu ograniczonym; funkcja monotoniczna jest o wahaniu ograniczonym.

5. Dowieść, że jeśli funkcja f, ograniczona w każdym skończonym przedziale, czyni zadość warunkowi $\lim\limits_{x=\infty} [f(x+1) - f(x)] = g$, to $\lim\limits_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = g$.

6. Udowodnić, że wzór $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} \lim\limits_{k=\infty} (\cos n!\pi x)^{2k}$ przedstawia funkcję Dirichleta rozważaną w N⁰ V.

7. Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją *parzystą*, jeśli spełniony jest warunek $f(x) = f(-x)$ dla każdego x. Analogicznie, jeśli spełniony jest warunek $f(x) = -f(-x)$, to funkcję f nazywamy *nieparzystą*.

Podać przykłady funkcyj parzystych i nieparzystych w obrębie funkcyj trygonometrycznych.

Scharakteryzować parzystość i nieparzystość funkcyj z pomocą warunków geometrycznych.

8. Udowodnić, że każda funkcja jest sumą funkcji parzystej i nieparzystej.

(Zauważyć, że funkcja $g(x)=f(x)+f(-x)$ jest parzysta).

§ 5. Funkcje ciągłe

I. Definicja. Mówimy, że funkcja f *jest ciągła w punkcie* a, jeśli spełniony jest warunek

(1) $$f(a)=\lim_{x=a} f(x).$$

Na mocy definicji symbolu $\lim\limits_{x=a} f(x)$ oznacza to, że równość $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$ pociąga za sobą równość $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n)=f(a)$. (Założenie, że $x_n \neq a$, możemy tu oczywiście pominąć).

Jeśli więc funkcja f jest ciągła w punkcie a, to

(2) $$f(\lim_{n=\infty} x_n)=\lim_{n=\infty} f(x_n), \text{ o ile } \lim_{n=\infty} x_n = a.$$

Jeżeli w równości (1) zastąpić granicę przez granicę jednostronną, to otrzymamy definicję *ciągłości jednostronnej*. Mianowicie, funkcja f jest prawostronnie, wzgl. lewostronnie ciągła w punkcie a, jeżeli

$$f(a)=\lim_{x=a+0} f(x) \text{ wzgl. } f(a)=\lim_{x=a-0} f(x).$$

Jeżeli funkcja f określona jest nie dla wszystkich x, to w powyższych definicjach ograniczamy, rzecz jasna, zmienność x do zbioru argumentów funkcji f. Jeśli np. zbiorem argumentów funkcji f jest przedział domknięty $a \leqq x \leqq b$, to ciągłość funkcji f w punkcie a oznacza to samo, co jej ciągłość prawostronna.

Funkcję ciągłą dla każdej wartości argumentu nazywamy krótko *funkcją ciągłą*. W szczególności więc funkcja ciągła określona w przedziale $a \leqq x \leqq b$ jest to funkcja ciągła dla każdego punktu położonego wewnątrz tego przedziału, zaś prawostronnie ciągła w a i lewostronnie ciągła w b.

Mówić też będziemy, że funkcja f jest *przedziałami ciągła w przedziale* $a \leqq x \leqq b$, jeśli przedział ten można podzielić z pomocą skończonego układu punktów

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n, \text{ gdzie } a_0 = a \text{ i } a_n = b,$$

na przedziały a_{k-1}, a_k, $k=1, 2, \ldots, n$, w taki sposób, że wewnątrz każdego z tych przedziałów funkcja f jest ciągła i że istnieją granice jednostronne $\lim\limits_{x=a_{k-1}+0} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x=a_k-0} f(x)$; tzn. jeśli dla każdego k funkcja $f_k(x)$ określona przez warunki

$$f_k(x)=f(x) \text{ dla } a_{k-1} < x < a_k \text{ oraz } f_k(a_{k-1})=f(a_{k-1}+0),\ f_k(a_k)=f(a_k-0),$$

jest ciągła w przedziale $a_{k-1} \leqq x \leqq a_k$.

Funkcja posiadająca skończoną ilość punktów nieciągłości, w których jednak istnieją obie granice jednostronne, jest więc funkcją przedziałami ciągłą.

Przykłady. Jak dowiedliśmy w § 4, V, $\lim\limits_{x=0} x^2 = 0$. Oznacza to, że funkcja x^2 jest ciągła w punkcie 0 (łatwo zresztą się przekonać, że jest to funkcja w każdym punkcie ciągła). Podobnie równość $\lim\limits_{x=0} \cos x = 1 = \cos 0$ oznacza, że funkcja cos jest ciągła w punkcie 0.

Funkcja $E(x)$ jest nieciągła w punktach całkowitych; mówiąc dokładniej: jest ciągła prawostronnie w tych punktach, lecz nie lewostronnie.

Funkcja $\sin\frac{1}{x}$ jest nieciągła w punkcie 0 niezależnie od tego, jaką wartość jej w tym punkcie nadamy. Nie istnieje bowiem granica tej funkcji w punkcie 0. Funkcja Dirichleta (ob. § 4, V) jest nieciągła w każdym punkcie.

Pojęcie ciągłości funkcji można również rozciągnąć na punkty w nieskończoności, rozumiejąc przez funkcję ciągłą w ∞ funkcję f, dla której istnieje granica $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$.

II. Charakteryzacja ciągłości Cauchy'ego. Interpretacja geometryczna. Twierdzenie następujące może być przyjęte jako definicja ciągłości ("definicja Cauchy'ego" w odróżnieniu od przyjętej przez nas w N° I "definicji Heinego"). Wynika ono bezpośrednio z § 4, VII, 3.

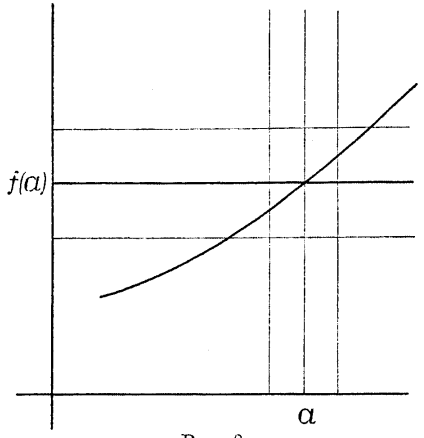
Na to, żeby funkcja f była ciągła w punkcie a, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie $\delta > 0$, że nierówność $|x-a| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Wyrażając się bardziej obrazowo, oznacza to, że dostatecznie małym przyrostom zmiennej niezależnej odpowiadają dowolnie małe przyrosty zmiennej zależnej. Zapisać to można, jak następuje:

(3) *warunek* $|h| < \delta$ *pociąga za sobą* $|f(a+h)-f(a)| < \varepsilon$.

Geometrycznie ciągłość funkcji f w punkcie a oznacza, co następuje: niech P oznacza pas równoległy do osi X i zawierający prostą $y=f(a)$ wewnątrz; istnieje wówczas taki pas Q równoległy do osi Y

i zawierający prostą $x=a$ wewnątrz, że część krzywej danej przez równanie $y=f(x)$, znajdująca się w pasie Q, mieści się równocześnie w pasie P.



Rys. 8

Przejście od definicji analitycznej opartej na warunku Cauchy'ego do powyższej definicji geometrycznej uzyskamy natychmiast, przyjmując, że pas P jest wyznaczony przez proste $y=f(a)\pm\varepsilon$, zaś pas Q przez proste $x=a\pm\delta$.

Jak widać z powyższych definicji, ciągłość funkcji f w punkcie a jest własnością *lokalną* w tym sensie, że zależy ona od zachowania się funkcji w otoczeniu punktu a. Na to, aby się przekonać, czy funkcja f jest ciągła w punkcie a, wystarczy znać tę funkcję w dowolnie małym przedziale zawierającym punkt a wewnątrz.

III. Ciągłość funkcji elementarnych. Ze wzorów na działania na granicach funkcji (§ 4, (9)—(12)) wynika natychmiast, że *działania arytmetyczne wykonane na funkcjach ciągłych dają w wyniku funkcje ciągłe.* Ściślej mówiąc: *jeśli funkcje f i g są ciągłe w punkcie a, to suma, różnica, iloczyn i iloraz (o ile $g(a)\neq 0$) tych funkcji są również w tym punkcie ciągłe.*

Np. przy założeniu, że $\lim\limits_{x=a} f(x)=f(a)$ i $\lim\limits_{x=a} g(x)=g(a)$, mamy $\lim\limits_{x=a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x=a} f(x)\cdot\lim\limits_{x=a} g(x)=f(a)\cdot g(a)$, co oznacza, że funkcja $f(x)\cdot g(x)$ jest ciągła w punkcie a.

Wynika stąd, że *wielomian jest funkcją ciągłą.*

Funkcja bowiem stała $f(x)=\text{const.}$ i funkcja $f(x)=x$ (identyczność) są, jak widać natychmiast, funkcjami ciągłymi.

Ogólniej: *każda funkcja wymierna, tj. funkcja postaci $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są to wielomiany, jest funkcją ciągłą* (oczywiście w punktach, w których jest określona, tj. wszędzie poza pierwiastkami mianownika).

Nim przejdziemy do dowodu ciągłości innych funkcji elementarnych, zauważmy, że w myśl wzoru (1) ciągłość funkcji f w punkcie x oznacza, że $\lim\limits_{h=0} f(x+h)=f(x)$, tj. że

$$\lim_{h=0}[f(x+h)-f(x)]=0. \tag{4}$$

Udowodnimy obecnie, że *funkcja wykładnicza a^x $(a>0)$ jest ciągła.*

Istotnie mamy $a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1)$ oraz $\lim\limits_{h=0} a^h=1$ (ob. § 4, (3')). Stąd $\lim\limits_{h=0}(a^{x+h}-a^x)=0$, co zgodnie ze wzorem (4) oznacza, że funkcja a^x jest ciągła.

Funkcje trygonometryczne sin *i* cos *są ciągłe.*

Istotnie $\sin(x+h)-\sin x=2\sin\dfrac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)$.

Ponieważ zaś $|\sin t|\leqq|t|$ i $|\cos t|\leqq 1$, więc

$$|\sin(x+h)-\sin x|\leqq|h|,\ \text{skąd}\ \lim_{h=0}|\sin(x+h)-\sin x|=0,$$

tj. $\lim\limits_{h=0}\sin(x+h)-\sin x=0$.

Podobnie $|\cos(x+h)-\cos x|=2\left|\sin\dfrac{h}{2}\right|\cdot\left|\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\right|\leqq|h|$, skąd $\lim\limits_{h=0}\cos(x+h)-\cos x=0$.

Ponieważ $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, więc funkcja tg jako iloraz funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Również funkcje

$$\sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad \operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$$

są ciągłe (dla każdego x, dla którego są określone).

Spośród funkcji elementarnych pozostają jeszcze do rozpatrzenia funkcje odwrotne do już rozpatrywanych, mianowicie, logarytm i funkcje cyklometryczne. Nie będziemy teraz dowodzić ich ciągłości, ponieważ wynika ona z ogólnego twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnych względem funkcji ciągłych, które udowodnimy nieco później.

Udowodnimy natomiast obecnie, że *superpozycja funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.* Ściślej mówiąc: *jeśli dane są dwie funkcje $y=f(x)$*

i $z=g(y)$ *i jeśli funkcja* f *jest ciągła w punkcie* a, *zaś funkcja* g *w punkcie* $f(a)$, *to funkcja* $g[f(x)]$ *jest ciągła w punkcie* a.

Niech bowiem $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$. Stąd $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = f(a)$. Kładąc $b=f(a)$ i $y_n = f(x_n)$, mamy więc $\lim\limits_{n=\infty} y_n = b$, skąd na mocy ciągłości funkcji g, $\lim\limits_{n=\infty} g(y_n) = g(b)$, tj. $\lim\limits_{n=\infty} g[f(x_n)] = g[f(a)]$. Oznacza to, że funkcja superponowana (złożona) $g[f(x)]$ jest ciągła w punkcie a.

Wynika stąd, że biorąc za punkt wyjścia funkcje elementarne rozważane w § 4, IV i operując na nich z pomocą działań arytmetycznych i superpozycji, pozostajemy stale w obrębie funkcji ciągłych.

Np. funkcja $x+\operatorname{tg}(x^2)$ jest funkcją ciągłą. Podobnie funkcja $\sin\frac{1}{x}$ jest funkcją ciągłą w zakresie swoich argumentów, tj. dla $x \neq 0$. Natomiast funkcja f określona przez warunki:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \text{ dla } x \neq 0 \text{ oraz } f(0)=0 \tag{5}$$

jest nieciągła w punkcie 0. W punkcie tym, jak wiemy, nie istnieje w ogóle granica funkcji f (ob. § 4, V, (7)).

Wynika też stąd, że funkcja określona przez warunki (5) nie da się zapisać przy użyciu samych funkcji ciągłych. Podobnie: funkcja zdefiniowana, jak następuje:

$$f(x) = 1 \text{ dla } x \neq 0 \text{ oraz } f(0)=0.$$

Daje się jednak ta funkcja zapisać z pomocą przejścia do granicy. Mianowicie:

$$f(x) = \lim_{t=\infty} \frac{xt}{1+xt} = \lim_{n=\infty} \frac{nx}{1+nx}.$$

Uwaga. Następujące, nieco ogólniejsze sformułowanie twierdzenia o superpozycji funkcji dogodne jest w zastosowaniach: *jeśli istnieje* $\lim\limits_{x=a\pm 0} f(x)$ *i jeśli w tym punkcie funkcja* g *jest ciągła, to*

$$\lim_{x=a\pm 0} g[f(x)] = g[\lim_{x=a\pm 0} f(x)]. \tag{6}$$

Dowód pozostaje prawie bez zmian.

Przykład. $\lim\limits_{x=+0} x^x = 1$. Bowiem

$$\lim_{x=+0} x^x = \lim_{x=+0} e^{x\log x} = e^{\lim\limits_{x=+0}(x\log x)} = e^0 = 1.$$

Tutaj $f(x) = x\log x$, $g(x) = e^x$. Funkcja f nie jest określona w punkcie 0; posiada jednak w tym punkcie granicę prawostronną (= 0, por. § 4, VI, 4)).

IV. Ogólne własności funkcji ciągłych. 1. *Twierdzenie o ciągłości jednostajnej. Jeśli funkcja* f *jest ciągła w przedziale domkniętym* $a \leqq x \leqq b$, *to dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje takie* $\delta > 0$, *że nierówność* $|x-x'| < \delta$ *pociąga za sobą* $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$.

Nim przystąpimy do dowodu, zauważmy, że liczba δ, o której mowa w tezie twierdzenia, nie zależy od x, jak to ma miejsce w definicji funkcji ciągłej dla każdego x (należącego do rozważanego zbioru argumentów). Tej niezależności liczby δ od zmiennej x dajemy wyraz mówiąc o "jednostajnej" ciągłości.

Dowód twierdzenia przeprowadzimy przez sprowadzenie do niedorzeczności. Przypuśćmy, że istnieje takie $\varepsilon > 0$, że dla każdego $\delta > 0$ istnieje para argumentów x i x' takich, że $|x-x'| < \delta$ i $|f(x)-f(x')| \geqq \varepsilon$. W szczególności więc, kładąc $\delta = \frac{1}{n}$, wnosimy, że istnieją takie dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{x'_n\}$, że spełnione są następujące nierówności:

$$a \leqq x_n \leqq b, \quad a \leqq x'_n \leqq b, \quad |x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \text{ oraz } |f(x_n)-f(x'_n)| \geqq \varepsilon. \tag{7}$$

Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony, przeto zawiera on na podstawie tw. Bolzano-Weierstrassa (§ 2, VI, 2) podciąg zbieżny. Połóżmy więc $\lim\limits_{n=\infty} x_{m_n} = c$. Z pierwszej z nierówności (7) wynika, że $a \leqq c \leqq b$. A zatem funkcja f jest ciągła w punkcie c. Wynika stąd, że $\lim\limits_{n=\infty} f(x_{m_n}) = f(c)$. Lecz na mocy trzeciej nierówności (7) również $\lim\limits_{n=\infty} x'_{m_n} = c$, bo $\lim\limits_{n=\infty} x'_{m_n} = \lim\limits_{n=\infty} x_{m_n}$. Ciągłość funkcji f daje jak poprzednio, $\lim\limits_{n=\infty} f(x'_{m_n}) = f(c)$. A zatem $\lim\limits_{n=\infty} [f(x_{m_n}) - f(x'_{m_n})] = 0$. Lecz ta ostatnia równość jest sprzeczna z ostatnią nierównością (7).

Twierdzenie jest w ten sposób udowodnione.

Uwaga. Założenie, że przedział rozpatrywany jest domknięty, jest istotne. Np. funkcja $\frac{1}{x}$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału otwartego $0 < x < 1$, lecz nie jest w tym przedziale ciągła jednostajnie.

2. *Twierdzenie Weierstrassa. Funkcja* f *ciągła w przedziale domkniętym* $a \leqq x \leqq b$ *jest ograniczona, osiąga przy tym w tym przedziale*

swe kresy górny i dolny: M i m; tzn. istnieją w tym przedziale takie dwa punkty c i d, że $f(c)=M$ oraz $f(d)=m$.

Udowodnimy przede wszystkim, że funkcja f jest ograniczona, tj. że istnieje takie A, że nierówność $A>|f(x)|$ zachodzi dla każdego x przedziału ab. Otóż z tw. 1 wnosimy podstawiając $\varepsilon=1$, że istnieje takie $\delta>0$, że jeśli punkty x i x' należą do jakiegoś przedziału (zawartego w przedziale ab) o długości $<\delta$, to $|f(x)-f(x')|<1$. Dobierzmy liczbę n w taki sposób, aby $\frac{b-a}{n}<\delta$; jeśli więc podzielimy przedział ab na n równych przedziałów, to długość każdego z nich będzie mniejsza niż δ. A zatem oznaczając przez $a_0, a_1, \ldots, a_n$ kolejne końce tych przedziałów ($a_0=a$, $a_n=b$), mamy:

$$\text{dla } a_0 \leqq x \leqq a_1 \quad |f(x)-f(a_1)|<1, \text{ skąd } |f(x)|<1+|f(a_1)|,$$

$$\text{ogólnie: dla } a_{k-1} \leqq x \leqq a_k, \ |f(x)-f(a_k)|<1, \text{ skąd } |f(x)|<1+|f(a_k)|.$$

Oznaczmy przez A największą z liczb $1+|f(a_k)|$, gdzie k przyjmuje wartości $1, 2, \ldots, n$. Mamy więc $|f(x)|<A$ dla każdego x należącego do przedziału ab.

Udowodniliśmy w ten sposób, że funkcja f jest ograniczona, tzn. że zbiór wartości tej funkcji jest ograniczony. Istnieje więc kres górny M i kres dolny m tego zbioru (por. § 1, VII). Udowodnimy — przez sprowadzenie do niedorzeczności — że jedną z wartości funkcji f jest M (dowód dla m jest zupełnie analogiczny).

Przypuśćmy, że tak nie jest, tj. że dla każdego x mamy $M-f(x)\neq 0$. A zatem funkcja $g(x)=\frac{1}{M-f(x)}$ jest określona dla każdego x przedziału $a\leqq x\leqq b$ i jest w tym przedziale ciągła. Jest to więc, jak przed chwilą udowodniliśmy, funkcja ograniczona. Istnieje więc takie N, że $g(x)<N$, tj. $M-f(x)>\frac{1}{N}$, czyli $f(x)<M-\frac{1}{N}$. Lecz ta ostatnia nierówność dowodzi, że istnieje liczba mniejsza od M, która jest większa od wszystkich liczb $f(x)$, gdy x przebiega przedział $a\leqq x\leqq b$. Przeczy to jednak założeniu, że M jest kresem górnym funkcji f w tym przedziale.

Doszliśmy w ten sposób do sprzeczności, przypuszczając, że twierdzenie jest fałszywe.

3. *Twierdzenie Darboux.*[1] *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $a\leqq x\leqq b$ przechodzi od jednej wartości do drugiej przez wszystkie wartości pośrednie. Znaczy to, że jeśli y jest liczbą pośrednią pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ (tj. bądź $f(a)<y<f(b)$, bądź $f(b)<y<f(a)$), to istnieje takie c w przedziale ab, że $f(c)=y$.*

[1] G. Darboux (1842—1917) — słynny geometra francuski.

Załóżmy, że $f(a)<y<f(b)$ (w wypadku, gdy druga ewentualność zachodzi, rozumowanie jest zupełnie podobne). Przypuśćmy, że twierdzenie jest fałszywe, tj. że $y-f(x)\neq 0$ dla każdego x, należącego do przedziału ab. Funkcja $h(x)=\frac{1}{|y-f(x)|}$ jest więc na mocy tw. 2 ograniczona.

Niech $M>h(x)$, tj.

$$|y-f(x)|>\frac{1}{M}. \tag{8}$$

Podstawiając w twierdzeniu 1: $\varepsilon=\frac{1}{M}$, wnosimy, że istnieje takie $\delta>0$, że jeśli punkty x i x' należą do przedziału o długości $<\delta$, to $|f(x)-f(x')|<\frac{1}{M}$. Niech n oznacza liczbę naturalną taką, że $\frac{b-a}{n}<\delta$. Dzieląc odcinek ab na n równych odcinków i oznaczając jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia przez $a_0, a_1, \ldots, a_n$ kolejne końce tych odcinków, dochodzimy do wniosku, że

$$|f(a_k)-f(a_{k-1})|<\frac{1}{M} \text{ dla } k=1, 2, \ldots, n. \tag{8'}$$

Ponieważ $f(a_0)<y<f(a_n)$, więc wśród liczb $1, 2, \ldots, n$ istnieje taka najmniejsza liczba m, że $y<f(a_m)$. Mamy więc $m>0$ oraz

$f(a_{m-1})<y<f(a_m)$, skąd $0<y-f(a_{m-1})<f(a_m)-f(a_{m-1})<\frac{1}{M}$ wobec (8'), co jednak przeczy nierówności (8).

Zestawiając twierdzenia 2 i 3, dochodzimy do wniosku następującego:

4. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $a\leqq x\leqq b$ przyjmuje wszystkie wartości od kresu dolnego m do kresu górnego M włącznie.* Inaczej mówiąc, *zbiorem wartości funkcji jest przedział domknięty $m\leqq y\leqq M$.*

Uwagi. 1) Własność funkcji ciągłych wyrażona w tw. 3 (tzw. własność Darboux) jest szczególnie intuicyjna, jeśli ją interpretować geometrycznie. Nie należy jednak sądzić, że charakteryzuje ona funkcje ciągłe. Np. funkcja (5), choć nieciągła, tę własność posiada.

2) Z tw. Darboux wynika natychmiast istnienie $\sqrt[n]{x}$ dla każdego x rzeczywistego, gdy n jest nieparzyste i dla każdego $x \geqq 0$, gdy n jest parzyste. Istotnie, gdy n jest nieparzyste, to $\lim\limits_{x=-\infty} x^n = -\infty$, $\lim\limits_{x=\infty} x^n = \infty$, a zatem funkcja x^n przybiera wszystkie wartości rzeczywiste. Funkcja względem niej odwrotna, tj. $\sqrt[n]{x}$ jest więc określona dla każdego x rzeczywistego. Podobnie, jeśli n jest parzyste, to funkcja x^n, $x \geqq 0$, przybiera wszystkie wartości od 0 do ∞; a zatem $\sqrt[n]{x}$ jest dla tych wszystkich wartości określony.

Analogicznie ze wzorów $\lim\limits_{x=-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x=\infty} e^x = \infty$ wynika, że funkcja e^x przybiera wszystkie wartości dodatnie; a zatem $\log x$ określony jest dla każdego dodatniego x. Wreszcie $\operatorname{arc\,tg} x$ określony jest dla każdego rzeczywistego x.

Dodajmy, że wzory § 4, IV, (3) z łatwością pociągają za sobą wzory następujące, dotyczące logarytmów dla dodatnich a, x i y $(a \neq 1)$:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a(x^y) = y \log_a x \tag{9}$$

$$a^x = e^{x \log a}, \qquad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}. \tag{10}$$

Np. aby dowieść pierwszy ze wzorów (9), połóżmy $\log_a x = t$, $\log_a y = z$, tj. $x = a^t$, $y = a^z$. Na mocy § 4, IV, (3)

$$xy = a^t \cdot a^z = a^{t+z}, \text{ skąd } \log_a xy = t + z = \log_a x + \log_a y.$$

Drugi ze wzorów (10) otrzymuje się z drugiego wzoru (9):

$$\log a^t = t \log a, \text{ tj. } \log x = \log_a x \log a.$$

V. Ciągłość funkcji odwrotnych. Widzieliśmy w § 4, III, że funkcja $y = f(x)$ różnowartościowa wyznacza funkcję odwrotną $x = g(y)$. Udowodnimy obecnie, że *funkcja odwrotna względem funkcji ciągłej jest ciągła.* Ściślej mówiąc:

1. *Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest różnowartościowa i ciągła w przedziale $a \leqq x \leqq b$, to funkcja odwrotna $x = g(y)$ jest ciągła w przedziale $m \leqq y \leqq M$, gdzie m i M oznaczają odpowiednio kres dolny i górny funkcji f.*

Niech $m \leqq c \leqq M$. Na mocy tw. IV, 4 funkcja g jest określona w punkcie c. Niech $c = \lim\limits_{n=\infty} y_n$, gdzie y_n należy do przedziału mM, tj. y_n jest postaci $y_n = f(x_n)$. Należy dowieść, że $\lim\limits_{n=\infty} g(y_n) = g(c)$.

Niech $c = f(d)$. Mamy więc dowieść, że warunek $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = f(d)$ pociąga za sobą $\lim\limits_{n=\infty} x_n = d$ (bowiem $g(y_n) = x_n$, $g(c) = d$). Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ jako położony w przedziale ab jest ograniczony, ta ostatnia równość będzie udowodniona, skoro wykażemy, że każdy zbieżny podciąg ciągu $\{x_n\}$ jest zbieżny do granicy d (ob. § 2, VI, tw. 4). Niech więc $\lim\limits_{n=\infty} x_{k_n} = d'$. Wykażemy, że $d' = d$. Z ciągłości funkcji f wynika, że $\lim\limits_{n=\infty} f(x_{k_n}) = f(d')$. Ponieważ zaś $\lim\limits_{n=\infty} f(x_{k_n}) = \lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = f(d)$, więc $f(d') = f(d)$. Stąd wnosimy, że $d' = d$ ze względu na to, że funkcja f jest różnowartościowa.

Twierdzenie jest więc udowodnione.

Zastosowania. 1) $\log_a x$ *jest funkcją ciągłą* $(1 \neq a > 0)$. Jest to bowiem odwrócenie ciągłej funkcji a^x.

2) *Funkcje cyklometryczne*: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ itd. *są ciągłe* jako odwrócenia funkcji trygonometrycznych (które są ciągłe).

3) *Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Jeśli iloczyn nieskończony $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest również szereg nieskończony $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log a_n$, przy czym zachodzi zależność*

$$\log \prod_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n, \text{ tj. } \prod_{n=1}^{\infty} a_n = e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log a_n}. \tag{11}$$

Podobnie, *jeśli założyć zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log a_n$, to zbieżnym jest iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i również zależność* (11) *ma miejsce.*

Niech bowiem $p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$. Z założenia, że ciąg $\{p_n\}$ jest zbieżny i z ciągłości logarytmu wynika (por. (2)):

$$\log \lim_{n=\infty} p_n = \lim_{n=\infty} \log p_n,$$

zaś $\lim\limits_{n=\infty} \log p_n = \lim\limits_{n=\infty} \log(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = \lim\limits_{n=\infty} [\log a_1 + \ldots + \log a_n] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \log a_n$.

Podobnie, kładąc $s_n = \log a_1 + \ldots + \log a_n$ i zakładając zbieżność ciągu $\{s_n\}$, mamy na mocy ciągłości funkcji wykładniczej:

$$e^{\lim\limits_{n=\infty} s_n} = \lim_{n=\infty} e^{s_n},$$

zaś

$$e^{s_n} = e^{\log a_1 + \ldots + \log a_n} = e^{\log a_1} \cdot \ldots \cdot e^{\log a_n} = p_n,$$

skąd $\lim\limits_{n=\infty} e^{s_n} = \lim\limits_{n=\infty} p_n$.

Wzór (11), który, jak widać, jest uogólnieniem na działania nieskończone pierwszego wzoru (9), pozwala przenieść na iloczyny nieskończone wiele twierdzeń, dotyczących szeregów nieskończonych.

2. *Każda funkcja f różnowartościowa i ciągła w przedziale $a \leqq x \leqq b$ jest ściśle monotoniczna* (tj. bądź stale rosnąca, bądź stale malejąca).

Z założenia $f(a) \neq f(b)$. Możemy więc założyć, że $f(a) < f(b)$ (jeżeli $f(a) > f(b)$, rozumowanie jest analogiczne). Udowodnimy, że funkcja f jest stale rosnąca. Niech więc $x < x'$. Należy dowieść, że $f(x) < f(x')$.

Zauważmy przede wszystkim, że warunki $a \leqq x \leqq b$ i $f(a) < f(b)$ pociągają za sobą $f(a) \leqq f(x) \leqq f(b)$. Istotnie, gdyby tak nie było, to mielibyśmy bądź $f(x) < f(a)$, bądź $f(x) > f(b)$. W pierwszym wypadku, ze względu na podwójną nierówność $f(x) < f(a) < f(b)$ istniałby (na mocy tw. Darboux) w przedziale xb taki punkt x'', że $f(x'') = f(a)$. Lecz to przeczy założeniu, że funkcja f jest różnowartościowa (bo $x'' \neq a$). Podobnie, w drugim wypadku istniałby punkt x''' w przedziale ax taki, że $f(x''') = f(b)$, co jest sprzeczne z nierównością $x''' \neq b$.

Udowodniliśmy więc, że $f(a) \leqq f(x) \leqq f(b)$. Wnosimy zarazem, że warunki $x \leqq x' \leqq b$ i $f(x) < f(b)$ pociągają za sobą $f(x) \leqq f(x') \leqq f(b)$.

A zatem $f(x) < f(x')$, c. b. d. o.

Zadania do § 5

1. Niech $f(x)$ oznacza funkcję określoną jak następuje: jeśli x jest liczbą niewymierną, to $f(x) = 0$; jeśli zaś x jest liczbą wymierną: $x = \frac{p}{q}$ (przy czym ułamek ten jest nieprzywiedlny), to $f(x) = \frac{1}{q}$. Udowodnić, że funkcja ta jest ciągła w punktach niewymiernych, zaś nieciągła w punktach wymiernych.

2. Udowodnić, że każda funkcja $f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, różnowartościowa i posiadająca własność Darboux (N⁰ IV, uw. 1) jest ciągła.

3. Udowodnić, że każde równanie stopnia n nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych, tj. równanie postaci $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, posiada przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty (Por. zad. 2, § 4).

4. Udowodnić, że funkcja f ciągła i spełniająca warunek

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

dla każdego x i y jest postaci $f(x) = ax$.

(Udowodnić najpierw tę równość dla x wymiernych, przyjmując $a = f(1)$).

5. Czy funkcja $\sin \frac{1}{x}$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $0 < x < 1$, zaś funkcja $\sqrt{x}$ w przedziale $0 \leqq x < \infty$?

6. Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą dwiema funkcjami ciągłymi w przedziale $a \leqq x \leqq b$. Niech $h(x)$ oznacza większą z dwóch wartości $f(x)$ i $g(x)$ (ewentualnie ich wspólną wartość, jeśli są one równe). Udowodnić, że funkcja $h(x)$ jest ciągła.

7. Do danego ciągu $a_1, a_2, \ldots$ dobrać funkcję, która jest nieciągła w punktach tego ciągu, zaś ciągła we wszystkich punktach pozostałych.

8. O funkcji f mówimy, że spełnia *warunek Lipschitza*, jeśli istnieje taka stała C, że zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(x')| \leqq C|x - x'|$$

dla każdej pary x i x'.

Scharakteryzować warunek Lipschitza w sposób geometryczny.

Udowodnić, że funkcja spełniająca warunek Lipschitza (w przedziale domkniętym lub otwartym, ograniczonym lub nieograniczonym) jest jednostajnie ciągła.

Wykazać na przykładzie, że nie zachodzi twierdzenie odwrotne.

§ 6. Ciągi i szeregi funkcyj

I. **Zbieżność jednostajna.** Jeżeli każdej liczbie naturalnej n przyporządkowana jest funkcja f_n, to mamy do czynienia z ciągiem fun-

kcyj $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ Załóżmy, że wszystkie te funkcje określone są na tym samym zbiorze argumentów A (np. na przedziale $a \leqq x \leqq b$). Jeżeli dla każdego x (należącego do A) ciąg $f_1(x), f_2(x), \ldots$ jest zbieżny do granicy $f(x)$, to mówimy, że ciąg funkcji $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji f. W myśl definicji granicy (§ 2, II) oznacza to, że do każdego x i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że dla $n > k$ zachodzi nierówność

(1) $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Liczbę k dobieramy więc (przy danym ε) do każdego x z osobna. Jeśli jednak można ustalić k *niezależnie* od x-ów, to mówimy, że zbieżność naszego ciągu jest *jednostajna*. A więc: *ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f (na zbiorze A), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że dla każdego $n > k$ i każdego x (należącego do A) zachodzi nierówność* (1).

Geometrycznie zbieżność jednostajna oznacza, że jeśli krzywą graniczną $y = f(x)$ otoczymy pasem wyznaczonym przez dwie krzywe równoległe do niej (dane przez równania $y = f(x) \pm \varepsilon$), to dla dostatecznie dużych n wszystkie krzywe $y = f_n(x)$ mieszczą się w tym pasie.

Przykłady. Niech $f_n(x) = x^n$. Mamy

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = 0 \text{ dla } 0 \leqq x < 1 \text{ i } \lim_{n=\infty} f_n(x) = 1 \text{ dla } x = 1.$$

Ciąg ten jest zbieżny jednostajnie w przedziale $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$.

Dobierzmy bowiem do danej liczby $\varepsilon > 0$ liczbę k w taki sposób, aby $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Wówczas dla $n > k$ mamy $x^n \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$, o ile $x \leqq \frac{1}{2}$. Nierówność (1) jest więc spełniona przez każde $n > k$ i każde x należące do przedziału $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$. Znaczy to, że zbieżność ciągu $\{f_n\}$ w tym przedziale jest jednostajna. Natomiast w przedziale $0 \leqq x \leqq 1$ zbieżność jest niejednostajna. Łatwo się o tym przekonać bezpośrednio (podstawiając np. $\varepsilon = \frac{1}{2}$); wynika to też z nieciągłości funkcji granicznej i twierdzenia następującego.

1. *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła.*

Niech ciąg $\{f_n\}$ będzie jednostajnie zbieżny do f (na zbiorze A). Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje więc takie k, że dla $n \geqq k$ spełniona jest nierówność

(2) $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$

dla każdego x (należącego do A). Niech a będzie dowolnym punktem

należącym do A. Należy dowieść, że funkcja f jest ciągła w tym punkcie. Należy więc dobrać do danego ε takie $\delta > 0$, aby nierówność $|x - a| < \delta$ pociągała za sobą (w zakresie x-ów należących do A).

(3) $$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Otóż ze względu na ciągłość funkcji f_k w punkcie a, istnieje takie $\delta > 0$, że nierówność $|x - a| < \delta$ pociąga za sobą

(4) $$|f_k(x) - f_k(a)| < \varepsilon/3.$$

Ponieważ nierówność (2) spełniona jest dla $n = k$ i $x = a$, przeto

(5) $$|f_k(a) - f(a)| < \varepsilon/3.$$

Zastępując w nierówności (2) n przez k i dodając do niej (4) i (5), otrzymujemy nierówność (3), c. b. d. o.

Uwaga. Jak widzieliśmy, funkcja $f(x) = \lim_{n=\infty} x^n$ jest w przedziale $0 \leqq x \leqq 1$ nieciągła. Granica niejednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych może więc być nieciągła. Tw. 1 w zestawieniu z przykładem powyższym ilustruje znaczenie pojęcia jednostajnej zbieżności.

Podobnie jak w wypadku jednostajnej ciągłości funkcji, termin "jednostajność" wskazuje na to, że liczba k dobrana jest do ε niezależnie od x.

Odpowiednikiem warunku Cauchy'ego na zbieżność ciągu jest warunek sformułowany w tw. następującym:

2. *Na to, żeby ciąg funkcji $\{f_n\}$ był zbieżny jednostajnie, potrzeba i wystarcza, aby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniała taka liczba r, że dla każdego $n > r$ zachodzi nierówność*

(6) $$|f_n(x) - f_r(x)| < \varepsilon.$$

Załóżmy najpierw, że ciąg jest zbieżny jednostajnie do funkcji f. Dla danej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje więc takie r, że dla $n \geqq r$ mamy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2, \text{ a więc w szczególności } |f_r(x) - f(x)| < \varepsilon/2.$$

Dodając do siebie te dwie nierówności, otrzymujemy nierówność (6).

Załóżmy z kolei, że ciąg $\{f_n\}$ spełnia warunek sformułowany w twierdzeniu. Wówczas przy ustalonym x ciąg $f_1(x), f_2(x), \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego; jest zatem zbieżny. Inaczej mówiąc, istnieje funkcja $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$. Należy dowieść, że zbieżność jest jednostajna. Niech więc dane będzie $\varepsilon > 0$. Na mocy założenia istnieje takie r, że dla $n > r$ zachodzi nierówność

(7) $$|f_n(x)-f_r(x)|<\varepsilon/2.$$

Udowodnimy, że dla $n>r$ spełniona jest również nierówność (1) (ze znakiem $\leqq$ zamiast $<$).

Zastępując we wzorze (7) zmienną n przez m i dodając do nierówności (7) w ten sposób otrzymaną nierówność $|f_m(x)-f_r(x)|<\varepsilon/2$, otrzymujemy dla $m>r$

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon, \text{ skąd } \lim_{m=\infty}|f_n(x)-f_m(x)|\leqq\varepsilon,$$

tj. $$\left|\lim_{m=\infty}[f_n(x)-f_m(x)]\right|\leqq\varepsilon, \text{ czyli } \left|f_n(x)-\lim_{m=\infty}f_m(x)\right|\leqq\varepsilon,$$

tzn. $$|f_n(x)-f(x)|\leqq\varepsilon.$$

II. Szeregi zbieżne jednostajnie. Niech dany będzie ciąg funkcyj $f_1(x)$, $f_2(x),\ldots$, $f_n(x),\ldots$ określonych na tym samym zbiorze argumentów. Szereg funkcyjny $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$ nazywamy *jednostajnie zbieżnym*, jeśli ciąg jego sum częściowych

$$s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$$

jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli funkcje f_1, $f_2,\ldots$ są ciągłe, to oczywiście ciągłe też są sumy częściowe s_n. Wnosimy stąd na mocy twierdzeń N⁰ I, że

1. *Suma szeregu jednostajnie zbieżnego funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*

2. *Na to, żeby szereg $f_1(x)+f_2(x)+\ldots$ był zbieżny jednostajnie, potrzeba i wystarcza, aby dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istniała taka liczba k, że dla każdego $n>k$ i dla każdego x zachodzi nierówność*

(8) $$|f_k(x)+f_{k+1}(x)+\ldots+f_n(x)|<\varepsilon.$$

Z tw. 2 wynika twierdzenie, które pozwala wyprowadzić zbieżność jednostajną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ przez porównanie jego składników ze składnikami szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

3. *Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ jest zbieżny i jeżeli dla każdego x spełniona jest nierówność $|f_n(x)|\leqq u_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.*

Istotnie, ponieważ szereg $u_1+u_2+\ldots$ jest zbieżny, więc dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje takie k, że dla każdego $n>k$ spełniona jest nierówność $u_k+u_{k+1}+\ldots+u_n<\varepsilon$. Stąd na mocy założenia

$$|f_k(x)+\ldots+f_n(x)|\leqq|f_k(x)|+\ldots+|f_n(x)|\leqq u_k+\ldots+u_n<\varepsilon;$$

a zatem wzór (8) jest spełniony, co zgodnie z tw. 2 pociąga za sobą zbieżność jednostajną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$.

Druga część powyższej podwójnej nierówności dowodzi równocześnie, że szereg jest zbieżny bezwzględnie.

Przykład. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale $-a\leqq x\leqq a$. Bo $\left|\frac{x^n}{n!}\right|\leqq\frac{a^n}{n!}$, zaś szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ jest zbieżny dla każdego a (§ 3, VI).

Wiele przykładów szeregów jednostajnie zbieżnych poznamy w N⁰ III.

III. Szeregi potęgowe. Szereg postaci

(9) $$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ ^{1}$$

nazywamy szeregiem potęgowym.

Jak widać, szereg potęgowy jest naturalnym uogólnieniem pojęcia wielomianu n-tego stopnia. Znaczenie szeregów potęgowych pochodzi również stąd, że przedstawienie funkcji danej w postaci szeregu potęgowego daje duże korzyści rachunkowe.

Weźmy pod uwagę następujące 3 przykłady szeregów potęgowych:

$$1^0\quad 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,\qquad 2^0\quad 1+x+x^2+x^3+\ldots,$$

$$3^0\quad 1+1!\,x+2!\,x^2+3!\,x^3+\ldots$$

Pierwszy z tych szeregów jest, jak wiemy, zbieżny dla każdego x. Drugi jest zbieżny dla $|x|<1$; suma jego $=\frac{1}{1-x}$; dla innych x szereg ten jest rozbieżny. Wreszcie trzeci szereg jest rozbieżny dla każdego $x\neq 0$.

[1] Ściśle biorąc, należy dla $x=0$ symbol $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ (który w tym wypadku jest nieoznaczony) zastąpić przez a_0 (por. odsyłacz do wzoru (6) § 1).

W celu sformułowania ogólnego twierdzenia o zbieżności szeregów potęgowych, wprowadzimy pojęcia "*promienia zbieżności*" szeregu potęgowego. Mianowicie, promieniem zbieżności szeregu potęgowego $S(x)$ nazywamy kres górny zbioru bezwzględnych wartości x-ów, dla których szereg ten jest zbieżny. W szczególności, jeżeli zbiór ten jest nieograniczony, to promieniem zbieżności jest ∞.

Np. promieniami zbieżności szeregów 1⁰, 2⁰ i 3⁰ są odpowiednio ∞, 1 i 0.

Przedział $-r<x<r$, gdzie r oznacza promień zbieżności danego szeregu potęgowego, nazywamy jego przedziałem zbieżności. W wypadku, gdy $r=\infty$, przedział zbieżności pokrywa się ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. Terminologia ta pozostaje w związku z twierdzeniem następującym:

1. *W każdym przedziale domkniętym położonym wewnątrz przedziału zbieżności szereg jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie.*

Wystarczy udowodnić nasze twierdzenie dla przedziałów postaci $-c\leqq x\leqq c$, gdzie $c<r$ (bo każdy przedział domknięty położony wewnątrz przedziału zbieżności zawarty jest w przedziale takim o środku 0). Ponieważ r jako promień zbieżności jest kresem górnym zbioru bezwzględnych wartości punktów zbieżności szeregu $S(x)$, więc istnieje punkt $b>c$ taki, że szereg $S(b)$ lub $S(-b)$ jest zbieżny. Ze zbieżności szeregu $S(\pm b)$ wynika, że składniki jego tworzą ciąg ograniczony. Niech więc $M>|a_n b^n|$ dla każdego n. Wnosimy stąd, że dla $|x|\leqq c$ mamy

$$\left|a_n x^n\right|=\left|a_n b^n\right|\cdot\left|\frac{x}{b}\right|^n\leqq M\left(\frac{c}{b}\right)^n.$$

Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{c}{b}\right)^n$ jako szereg geometryczny o ilorazie <1 jest zbieżny, więc na mocy tw. II, 3, szereg $S(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w przedziale $-c\leqq x\leqq c$.

Uwaga. Z twierdzenia powyższego wnosimy, że wewnątrz przedziału zbieżności szereg jest zbieżny, zaś zewnątrz rozbieżny (to ostatnie wynika z definicji promienia zbieżności). Natomiast na krańcach przedziału zbieżności szereg może być zbieżny lub rozbieżny. Świadczą o tym przykłady następujące: szereg 2⁰ jest rozbieżny na krańcach przedziału zbieżności, mianowicie, $S(1)=\infty$, szereg $S(-1)=1-1+1-1+\ldots$ nie posiada ani skończonej, ani nieskończonej granicy; szereg

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

(przedstawiający $\log(1+x)$) jest zbieżny dla $x=1$, jest rozbieżny do $-\infty$ dla $x=-1$.

Twierdzenie poprzednie w zestawieniu z tw. II, 1 pociąga za sobą

2. *Szereg potęgowy $S(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale otwartym $-r<x<r$, tj. wewnątrz przedziału zbieżności.*

Istotnie do każdego x leżącego między $-r$ a r można dobrać przedział domknięty o środku x położony wewnątrz przedziału zbieżności. Ponieważ zaś w tym przedziale domkniętym szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie, więc na mocy tw. II, 1 przedstawia on funkcję ciągłą.

Opierając się na tw. Abela z teorii szeregów nieskończonych (§ 3, III, tw. 2), uzupełnimy to twierdzenie odnośnie ciągłości szeregu potęgowego na krańcach przedziału zbieżności.

3. *(Tw. Abela) Szereg potęgowy zbieżny w jednym z krańców przedziału zbieżności stanowi w tym punkcie funkcję ciągłą (jednostronnie).*

Ściślej mówiąc, jeśli szereg $S(r)$ (wzgl. $S(-r)$) jest zbieżny, to szereg $S(x)$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $0\leqq x\leqq r$ (wzgl. w przedziale $-r\leqq x\leqq 0$).

Załóżmy, że szereg $S(r)$ jest zbieżny. Oznaczmy przez R_n n-tą resztę tego szeregu, tj.

$$R_n=a_{n+1}r^{n+1}+a_{n+2}r^{n+2}+\ldots$$

Mamy więc $\lim\limits_{n=\infty} R_n=0$. Niech dane będzie $\varepsilon>0$. Istnieje zatem takie k, że dla $i>n>k$ mamy

$$|a_{n+1}r^{n+1}+\ldots+a_i r^i|<\varepsilon.$$

Oznaczmy ogólnie przez $R_n(x)$ n-tą resztę szeregu $S(x)$:

$$R_n(x)=a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\ldots$$

W szczególności więc $R_n(r)=R_n$. Zauważmy, że

$$R_n(x)=a_{n+1}r^{n+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}+a_{n+2}r^{n+2}\left(\frac{x}{r}\right)^{n+2}+\ldots$$

i zastosujmy tw. Abela (§ 3, III, 2 i uwaga 1), zastępując w nim ciąg $\{a_n\}$ przez ciąg $\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}, \left(\frac{x}{r}\right)^{n+2},\ldots$ oraz szereg $b_1+b_2+\ldots$ przez szereg R_n.

Ponieważ szereg ten jest ograniczony przez liczbę ε i ponieważ

$$1>\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}>\left(\frac{x}{r}\right)^{n+2}>\ldots \quad \text{i} \quad \lim_{m=\infty}\left(\frac{x}{r}\right)^m=0 \text{ dla } 0\leqq x<r,$$

wnosimy, że $|R_n(x)| < 2\varepsilon$. Nierówność ta spełniona jest też dla $x = r$. Doszliśmy więc do wniosku, że jeśli $n > k$, to nierówność

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m - \sum_{m=0}^{n} a_m x^m \right| < 2\varepsilon$$

jest spełniona przez każde x takie, że $0 \leqq x \leqq r$. Oznacza to, że szereg $S(x)$ jest w tym przedziale jednostajnie zbieżny.

W wypadku, gdy szereg $S(-r)$ jest zbieżny, rozumowanie jest analogiczne.

Twierdzenia 2 i 3 możemy jeszcze wypowiedzieć w sposób następujący: *każdy punkt zbieżności szeregu potęgowego jest zarazem jego punktem ciągłości.*

Kryteria zbieżności d'Alemberta i Cauchy'ego pozwalają niekiedy na łatwe obliczenie promienia zbieżności. Mianowicie:

4. *Jeśli* $\lim\limits_{n=\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$, *to promień zbieżności szeregu potęgowego* $S(x)$ *jest* $r = 1/g$ (przy tym, jeśli $g = 0$, to $r = \infty$; jeśli $g = \infty$, to $r = 0$).

Analogicznie, jeśli istnieje $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, to $r = \dfrac{1}{\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Istotnie, niech $x > 0$. Otrzymujemy

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = x \cdot \lim_{n=\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = xg. \tag{10}$$

Jeśli więc $x < \frac{1}{g}$, to rozważana granica jest < 1, a zatem szereg $S(x)$ jest zbieżny (bezwzględnie). Stąd $r \geqq \frac{1}{g}$. Gdyby przypuścić, że $r > \frac{1}{g}$, to dla $\frac{1}{g} < x < r$ szereg $S(x)$ byłby bezwzględnie zbieżny, co jednak jest niemożliwe ze względu na to, że granica rozpatrywana we wzorze (10) byłaby > 1.

Rozumowanie powyższe obejmuje również wypadek, kiedy $g = 0$ lub ∞.

Dowód odnoszący się do kryterium Cauchy'ego jest analogiczny.

IV. Aproksymowanie funkcji ciągłych przez funkcje przedziałami liniowe. Funkcję $f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, nazywamy *przedziałami liniową*, jeśli przedział ab można podzielić na skończoną ilość mniejszych przedziałów w taki sposób, aby funkcja była liniowa w każdym z tych przedziałów z osobna. Znaczy to, że istnieje taki układ $n+1$ punktów

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_n, \text{ gdzie } a_0 = a,\ a_n = b, \tag{11}$$

oraz takie dwa układy liczb rzeczywistych $c_1, c_2, \ldots, c_n$ i $d_1, d_2, \ldots, d_n$, że

$$f(x) = c_k x + d_k, \text{ dla } a_{k-1} \leqq x \leqq a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Np. funkcja $f(x) = |x|$ jest w przedziale $-1 \leqq x \leqq 1$ przedziałami liniowa; bowiem $f(x) = -x$ w przedziale $-1, 0$ oraz $f(x) = x$ w przedziale $0, 1$.

Wykresem funkcji przedziałami liniowej jest linia *łamana*. Odwrotnie, jeśli linia łamana stanowi wykres funkcji, to funkcja ta jest przedziałami liniowa.

Niejednokrotnie mamy do czynienia z aproksymowaniem krzywych przez łamane (np. w geometrii elementarnej aproksymujemy łuk koła przez łamane wpisane i opisane przy obliczaniu długości tego łuku).

Następujące twierdzenie daje wyraz analityczny aproksymacji krzywych, danych przez funkcje ciągłe, z pomocą łamanych (danych przez funkcje przedziałami liniowe).

Twierdzenie. Każda funkcja ciągła f w przedziale $a \leqq x \leqq b$ jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji przedziałami liniowych.

Przy każdym n rozważamy podział odcinka ab na n równych odcinków: $a a_1$, $a_1 a_2, \ldots, a_{n-1} b$ (mamy więc ogólnie $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$). Przez punkty $[a, f(a)]$, $[a_1, f(a_1)], \ldots, [a_n, f(a_n)]$ przeciągamy łamaną. Łamana ta jest wykresem pewnej funkcji przedziałami liniowej f_n. Udowodnimy, że ciąg funkcji f_n jest zbieżny jednostajnie do funkcji f.

Do danego $\varepsilon > 0$ możemy dobrać — ze względu na jednostajną ciągłość funkcji f w przedziale ab — takie $\delta > 0$, że nierówność $|x - x'| < \delta$ pociąga za sobą $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Niech $m > \frac{b-a}{\delta}$. Udowodnimy, że dla $n > m$ zachodzi nierówność

$$|f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon \text{ dla każdego } x \text{ przedziału } ab. \tag{13}$$

Istotnie, niech dane będzie x i $n > m$ i niech punkt x należy do przedziału $a_{k-1} a_k$ (n-tego podziału). Ponieważ długość tego przedziału jest $< \delta$, przeto

$$|f(a_{k-1}) - f(a_k)| < \varepsilon \text{ i } |f(x) - f(a_k)| < \varepsilon. \tag{14}$$

Przypuśćmy, że $f(a_{k-1}) \leqq f(a_k)$ (jeśli $f(a_{k-1}) \geqq f(a_k)$, rozumowanie jest analogiczne). Wówczas w przedziale $a_{k-1} a_k$ funkcja f_n jako funkcja liniowa jest niemalejąca. A zatem

(15) $$f_n(a_{k-1}) \leqq f_n(x) \leqq f_n(a_k).$$

Ponieważ zaś w myśl definicji funkcji f_n mamy $f_n(a_{k-1}) = f(a_{k-1})$ oraz $f_n(a_k) = f(a_k)$, przeto $f(a_{k-1}) \leqq f_n(x) \leqq f(a_k)$, co wobec pierwszej z nierówności (14) daje $|f_n(x) - f(a_k)| < \varepsilon$. Zestawiając tę nierówność z drugą nierównością (14), otrzymujemy wzór (13).

Oznacza to, że zbieżność funkcyj f_n do funkcji f jest jednostajna.

Zadania do § 6

1. Udowodnić, że suma ciągów jednostajnie zbieżnych jest jednostajnie zbieżna. Udowodnić to samo dla iloczynu.

2. Udowodnić, że promień zbieżności r szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ spełnia wzór (Cauchy-Hadamarda):

$$\frac{1}{r} = \lim \sup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

3. Niech dany będzie ciąg funkcji ciągłych $f_1(x), f_2(x), \ldots, a \leqq x \leqq b$. Udowodnić, że na to, aby ten ciąg był zbieżny jednostajnie do funkcji $f(x)$, potrzeba i wystarcza, aby warunek $\lim_{n=\infty} x_n = x_0$ pociągał za sobą $\lim_{n=\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

4. Zbadać jednostajność zbieżności ciągów funkcyj

$$f_n(x) = x^n(1-x^n), \quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad \text{oraz} \quad f_n(x) = \frac{1}{nx}, \quad 0 < x \leqq 1.$$

5. Udowodnić, że szereg

$$S(x) = x(1-x) - x(1-x) + \ldots + x^n(1-x) - x^n(1-x) + \ldots$$

jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w przedziale $0 \leqq x \leqq 1$.

Przestawić tak wyrazy tego szeregu, aby otrzymać szereg zbieżny niejednostajnie w tym przedziale.

ROZDZIAŁ III

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY JEDNEJ ZMIENNEJ

§ 7. Pochodne rzędu pierwszego

I. Definicje [1]. Niech funkcja f dana będzie w pewnym przedziale otwartym, zawierającym punkt a. *Pochodną funkcji f w punkcie a* nazywamy granicę

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Funkcję $g(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, której granicę rozpatrujemy dla h dążącego do 0, nazywamy *ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie a dla przyrostu h*.

Pochodną zapisujemy symbolicznie jak następuje:

(1) $$\left[\frac{d\,f(x)}{dx}\right]_{x=a} = \lim_{h=0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

lub krócej $f'(a)$. Krócej jeszcze, kładąc $y = f(x)$, oznaczamy pochodną funkcji f w dowolnym punkcie x przez $\dfrac{dy}{dx}$ (pochodna "dy po dx"). Przy tej symbolice (pochodzącej od Leibniza) pochodna przedstawiona jest jako iloraz dwóch różniczek dy i dx (por. N⁰ XIII). Można jednak symbol $\dfrac{dy}{dx}$ traktować jako jedną całość, nie przypisując różniczkom znaczenia wielkości matematycznych.

Geometrycznie interpretuje się pochodną jak następuje. Niech dana będzie krzywa $y = f(x)$. Przeprowadźmy prostą przez punkty

[1] Rachunek różniczkowy i całkowy został stworzony przez Newtona i Leibniza pod koniec XVII wieku.