ROZDZIAŁ I.

CIĄGI I SZEREGI

§ 1. Wstęp

I. Różne rodzaje liczb. Przyjmować będziemy, że pojęcie liczby rzeczywistej, tj. — poglądowo mówiąc — liczby, posiadającej rozwinięcie skończone lub nieskończone na ułamek dziesiętny, jest znane z kursu szkoły średniej[1]. Przypomnimy terminologię i niektóre własności liczb rzeczywistych.

Liczby całkowite dodatnie, tj. liczby 1, 2, 3,..., nazywamy liczbami *naturalnymi*. Liczby 0 nie zaliczamy ani do liczb dodatnich, ani ujemnych. Liczby ułamkowe, tj. liczby postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi, przy czym $q \neq 0$, nazywamy liczbami *wymiernymi*. W obrębie liczb wymiernych wykonalne są zawsze cztery działania arytmetyczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, z wyjątkiem dzielenia przez 0; symbolowi $\frac{p}{0}$ nie przypisujemy żadnej wartości liczbowej. Symbol ∞, którego często używać będziemy, nie oznacza więc żadnej liczby ("nieskończonej").

Geometrycznie można liczby rzeczywiste wyobrażać sobie jako punkty linii prostej, na której zaznaczone zostały punkty 0 i 1. Te dwa punkty pozwalają z łatwością wyznaczyć na tej prostej (którą nazywać będziemy prostą liczbową) wszystkie punkty wymierne. Mianowicie, mając daną liczbę wymierną w, odmierzamy na prawo, wzgl. na lewo od punktu 0, w zależności od znaku liczby w, odcinek długości w. Koniec tego odcinka jest punktem odpowiadającym liczbie w. Jak wiadomo, nie wszystkie punkty linii prostej odpowiadają licz-

[1] W NN° VIII i IX tego paragrafu podajemy szkicowo dwie metody ścisłego wprowadzenia liczby rzeczywistej: jedną aksjomatyczną, drugą sprowadzającą pojęcie liczby rzeczywistej do pojęcia liczby wymiernej.

bom wymiernym. Np. liczba $\sqrt{2}$, tj. długość przekątni kwadratu o boku równym 1, jest liczbą niewymierną.

Zarówno względy natury geometrycznej jak i algebraicznej skłaniają nas do objęcia pojęciem liczby wszystkich liczb rzeczywistych, tj. zarówno wymiernych jak i niewymiernych. Wzrasta przez to zasięg działań algebraicznych: w dziedzinie rzeczywistej wykonalne jest pierwiastkowanie i logarytmowanie liczb dodatnich.

Dodajmy, że i w dziedzinie rzeczywistej nie wszystkie działania są wykonalne, nie jest np. wykonalne wyciąganie pierwiastków kwadratowych z liczb ujemnych, a w konsekwencji nie każde równanie kwadratowe posiada pierwiastki rzeczywiste. Ażeby temu zapobiec, wprowadzamy liczby zespolone. Na razie jednak liczbami zespolonymi zajmować się nie będziemy. Używając wyrazu "liczba", mieć będziemy zawsze na myśli liczby rzeczywiste.

II. Zasada indukcji zupełnej. Spośród własności liczb naturalnych wymienimy jedną, na którą często powoływać się będziemy. Jest to zasada indukcji zupełnej. Orzeka ona co następuje.

Niech dana będzie jakaś własność liczb naturalnych, która czyni zadość dwóm warunkom następującym:

1) liczba 1 tę własność posiada,

2) jeśli liczba n tę własność posiada, to również posiada ją liczba $n+1$.

Zasada indukcji orzeka, że przy tych założeniach każda liczba naturalna tę własność posiada.

Zasada ta odpowiada następującej elementarnej intuicji: skoro rozważaną własność posiada liczba 1, to na mocy warunku drugiego posiada ją również liczba 2; skoro zaś liczba 2 ją posiada, to również na mocy warunku drugiego posiada ją liczba 3; podobnie stąd wnosimy, że liczba 4 ją posiada itd. Rzecz jasna, że do nieskończoności rozumować nie jesteśmy w stanie; zasada indukcji daje wyraz matematyczny naszej intuicji.

Jako przykład na zastosowanie zasady indukcji przytoczymy dowód tzw. *nierówności Bernoulliego*[1]: dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej liczby rzeczywistej $a \geqq -1$ zachodzi wzór

$$(1+a)^n \geqq 1+na. \tag{1}$$

Zauważmy tu ubocznie, że wyrażenie $x \geqq y$ oznacza, że x jest większe lub równe y, czyli że x jest niemniejsze niż y. Zarówno więc jest prawdą, że $3 \geqq 2$, jak i że $3 \geqq 3$.

[1] J. Bernoulli, matematyk szwajcarski pierwszej połowy XVIII wieku (jeden z siedmiu wybitnych matematyków noszących to nazwisko).

Ażeby udowodnić nierówność Bernoulliego, należy w myśl zasady indukcji zupełnej wykazać:

po pierwsze, że do liczb n posiadających własność wyrażoną przez nierówność (1) należy liczba 1; jest to oczywiste, bo podstawiając w nierówności (1) liczbę 1 na miejsce n otrzymujemy nierówność $1+a \geqq 1+a$, która zachodzi dla każdego a;

po wtóre, że ze wzoru (1) wynika wzór, który z niego otrzymamy zastępując w nim n przez $n+1$, tj. wzór

$$(1+a)^{n+1} \geqq 1+(n+1)a. \tag{1'}$$

Ażeby to wykazać, pomnóżmy obie strony nierówności (1) przez $1+a$. Ponieważ z założenia mamy $1+a \geqq 0$, przeto otrzymamy

$$(1+a)^{n+1} \geqq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2.$$

Ponieważ zaś $na^2 \geqq 0$, więc $1+(n+1)a+na^2 \geqq 1+(n+1)a$, skąd wzór (1').

Jako drugi przykład na zastosowanie zasady indukcji podamy dowód następującej zależności trygonometrycznej

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}, \tag{2}$$

spełnionej przez każdą liczbę całkowitą $n \geqq 0$ i każdą liczbę rzeczywistą t nie będącą całkowitą wielokrotnością liczby 2π.

Indukcję rozpoczynamy w tym wypadku nie od 1, lecz od 0.

Dla $n=0$ wzór (2) przekształca się w tożsamość $\frac{1}{2}=\frac{\sin(t/2)}{2\sin(t/2)}=\frac{1}{2}$.

Pozostaje więc do udowodnienia, że ze wzoru (2) wynika wzór (2'), który z niego powstaje przez zastąpienie n przez $n+1$.

Opierając się na wzorze (2), możemy więc wzór (2') zapisać w postaci następującej

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}+\cos(n+1)t = \frac{\sin\frac{2n+3}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}, \tag{2'}$$

czyli (sprowadzając do wspólnego mianownika)

$$\sin\frac{2n+3}{2}t-\sin\frac{2n+1}{2}t = 2\sin\frac{t}{2}\cos(n+1)t.$$

Ponieważ ten ostatni wzór jest prawdziwy (jak wynika ze wzoru na różnicę sinusów), przeto udowodnione jest, że równość (2) po-

ciąga za sobą (2'), a tym samym — w myśl zasady indukcji — że równość (2) zachodzi dla każdego $n \geqq 0$.

III. Dwumian Newtona[1]. Określimy przede wszystkim tzw. współczynniki Newtona wzorem następującym:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}. \tag{3}$$

Jak widać, mianownik jest iloczynem k kolejnych liczb naturalnych od 1 do k, zaś licznik iloczynem k kolejnych malejących liczb od n do $n-k+1$. Zakładamy tu, że n i k są to liczby naturalne, przy czym $n \geqq k$.

Sprawdzamy natychmiast, że $\binom{n}{1} = n$ oraz $\binom{n}{n} = 1$. Rozszerzamy definicję symbolu $\binom{n}{k}$ na wypadek, gdy $k=0$, przyjmując, że $\binom{n}{0} = 1$; czynimy tak ze względu na technikę rachunkową.

Zauważmy wreszcie — choć z tego nie będziemy tu korzystać — że $\binom{n}{k}$ oznacza ilość kombinacji z n elementów po k.

Zachodzi wzór następujący (dla dowolnego k naturalnego):

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}. \tag{4}$$

Istotnie $$\frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot\ldots\cdot(k-1)k} + \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+2)}{1\cdot\ldots\cdot(k-1)}\cdot\frac{k}{k} =$$

$$= \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1+k)}{1\cdot\ldots\cdot(k-1)k} = \binom{n+1}{k}.$$

Rozumowanie powyższe opierało się na wzorze (3), a więc wymagało założenia, że $k-1$ jest liczbą naturalną, tj. że $k>1$. W wypadku jednak, gdy $k=1$, wzór (4) sprawdzamy bezpośrednio, podstawiając $k=1$.

Udowodnimy obecnie dwumian Newtona, tj. wzór następujący:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n. \tag{5}$$

Jak widać, prawa strona jest sumą $n+1$ składników, pierwszym jest a^n, ostatnim b^n, bowiem $\binom{n}{n} = 1$. Wzór ten dla $n=1$ jest oczywisty, dla $n=2$ i dla $n=3$ jest to wzór znany z kursu szkoły średniej.

Ponieważ wzór (5) zachodzi dla $n=1$, należy w myśl zasady indukcji wykazać, opierając się na wzorze (5), że wzór, który z niego powstaje przez zastąpienie wykładnika n wykładnikiem $n+1$, jest prawdziwy. Otóż $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a+b)^n a + (a+b)^n b$, skąd wnosimy, że

$$(a+b)^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \ldots + \binom{n}{n}ab^n +$$

$$+ a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \ldots + \binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^k + \ldots + \binom{n+1}{n}ab^n + b^{n+1},$$

przy czym stosujemy wzór (4). Równość, którą uzyskaliśmy, jest to właśnie równość, która powstaje ze wzoru (5) przez podstawienie $n+1$ na miejsce n. W ten sposób dwumian Newtona został udowodniony.

Zauważmy jeszcze, że dwumian Newtona daje się zapisać w sposób bardziej skondensowany, jak następuje (o ile $a \neq 0 \neq b$):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.^1 \tag{6}$$

Symbol $\sum_{k=0}^{n}$ oznacza, że należy utworzyć sumę $k+1$ składników, które powstają z wyrażenia następującego po tym symbolu przez podstawienie na miejsce k kolejno liczb całkowitych od 0 do n.

Wreszcie współczynniki Newtona zapisać można w sposób następujący. Oznaczmy symbolem $n!$ (czytamy: n silnia) iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n \quad \text{(przy czym niechaj } 0! = 1\text{)}. \tag{7}$$

Jak łatwo sprawdzić, mamy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{8}$$

IV*. Nierówność Schwarza. Posługując się indukcją zupełną, udowodnimy następującą nierówność:

$$(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2). \tag{9}$$

[1]) Newton, 1642—1727, jeden z najznakomitszych uczonych, jakich ludzkość wydała. Jeden z twórców rachunku różniczkowego i całkowego.

[1]) Gdy $a=0$ lub $b=0$, wzór (6) można [stosować z tym jednak zastrzeżeniem, że symbol nieoznaczony 0^0 (który powstaje dla $k=n$, względnie dla $k=0$) zastąpić należy przez 1.

Dla $n=1$ wzór (9) jest oczywisty: $(x_1y_1)^2 \leqq x_1^2 \cdot y_1^2$. Należy więc wzór ten udowodnić dla $n+1$, zakładając jego prawdziwość dla n.

Otóż

$$(10) \qquad (x_1y_1 + \ldots + x_{n+1}y_{n+1})^2 =$$
$$= (x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 + 2(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)x_{n+1}y_{n+1} + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2.$$

Zarazem $2ab \leqq a^2 + b^2$, bo $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqq 0$, więc kładąc $a = x_k y_{n+1}$ oraz $b = x_{n+1} y_k$, mamy

$$2x_k y_k x_{n+1} y_{n+1} \leqq x_k^2 y_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 y_k^2$$

i sumując dla $k = 1,2,\ldots,n$, otrzymujemy

$$2(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)x_{n+1}y_{n+1} \leqq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)y_{n+1}^2 + (y_1^2 + \ldots + y_n^2)x_{n+1}^2.$$

Na mocy (9) i (10), mamy więc

$$(x_1y_1 + \ldots + x_{n+1}y_{n+1})^2 \leqq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) + (x_1^2 + \ldots + x_n^2)y_{n+1}^2 +$$
$$+ (y_1^2 + \ldots + y_n^2)x_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 =$$
$$= (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_{n+1}^2) + (y_1^2 + \ldots + y_{n+1}^2) \cdot x_{n+1}^2 =$$
$$= (x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2)(y_1^2 + \ldots + y_{n+1}^2).$$

W rezultacie

$$(x_1y_1 + \ldots + x_{n+1}y_{n+1})^2 \leqq (x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2)(y_1^2 + \ldots + y_{n+1}^2).$$

Jest to właśnie wzór, który powstaje ze wzoru (9) przez podstawienie $n+1$ na miejsce n. Dowód jest tym samym zakończony.

V. Zasada ciągłości (Dedekinda[1]). Spośród własności zbioru liczb rzeczywistych wymienimy tzw. zasadę ciągłości. Orzeka ona, że jeśli zbiór wszystkich liczb rzeczywistych podzielimy na dwie części A i B w taki sposób, że każda liczba należąca do części A jest mniejsza od każdej liczby należącej do części B, to wówczas zachodzi jedna z dwóch możliwości: albo w zbiorze A istnieje największa liczba, albo w zbiorze B istnieje liczba najmniejsza (zakładamy przy tym, że żaden z tych dwóch zbiorów nie jest pusty). Inaczej mówiąc, jeśli linię prostą podzielimy na dwie części A i B w taki sposób, aby każdy punkt części A leżał na lewo od każdego punktu części B, to albo istnieje ostatni punkt w części A, albo pierwszy w B. Nie może wystąpić "luka" w tym "przekroju", którego dokonaliśmy. Na tym polega ciągłość zbioru liczb rzeczywistych w odróżnieniu od zbioru liczb wymiernych, gdzie tego rodzaju luki występują; jeśli np. podzielić zbiór liczb wymiernych na dwie części, zaliczając do pierwszej liczby $< \sqrt{2}$, zaś do drugiej pozostałe, tj. liczby $> \sqrt{2}$, to jak widać, każda liczba pierwszej części jest mniejsza od każdej liczby

[1]) Dedekind, matematyk niemiecki drugiej połowy XIX wieku.

części drugiej, ale nie istnieje liczba wymierna, która by była największa w pierwszej części lub najmniejsza w drugiej (co wynika z możliwości aproksymowania liczby niewymiernej $\sqrt{2}$ z dowolną dokładnością od dołu i od góry przez liczby wymierne, np. przez rozwinięcia dziesiętne).

VI. Wartość bezwzględna. Wartość bezwzględną liczby a, tj. $|a|$, określamy przez warunki: jeśli $a \geqq 0$, to $|a| = a$; jeśli $a < 0$, to $|a| = -a$. Zachodzą następujące wzory, znane z matematyki elementarnej i których dowód pozostawiamy czytelnikowi.

$$(11) \qquad |a| = |-a| \qquad\qquad (12) \qquad |a+b| \leqq |a| + |b|$$

$$(13) \qquad |a| - |b| \leqq |a-b| \leqq |a| + |b| \qquad (14) \qquad |ab| = |a| \cdot |b|$$

(15) *nierówności* $|a| \leqq c$ *i* $|b| \leqq d$ *pociągają* $|a+b| \leqq c+d$.

Jest to wzór na dodawanie nierówności "pod znakiem bezwzględnej wartości", który często stosować będziemy. Wynika on ze wzoru (12), bowiem $|a+b| \leqq |a| + |b| \leqq c+d$. Wzór ten pozostaje w mocy, jeśli zastąpić znak $\leqq$ przez $<$.

Zauważmy wreszcie, że

(16) *nierówność* $|a| < b$ *jest równoważna podwójnej nierówności* $-b < a < b$, *a więc zespołowi dwóch nierówności:* $a < b$ *i* $-a < b$.

VII. Zbiory ograniczone. Kres górny i dolny zbioru. Mówimy, że zbiór liczb rzeczywistych Z jest *ograniczony*, jeśli istnieją takie dwie liczby m i M, że każda liczba x należąca do zbioru Z czyni zadość podwójnej nierówności $m \leqq x \leqq M$. Jeśli założyć tylko, że istnieje liczba M, spełniająca nierówność $M \geqq x$ dla każdego x, należącego do zbioru Z, to mówimy, że zbiór Z jest *ograniczony z góry*. Podobnie, zbiór Z jest *ograniczony z dołu*, jeśli istnieje liczba m, czyniąca zadość wyżej sformułowanemu warunkowi: $m \leqq x$.

Geometryczny sens tych pojęć jest następujący. Zbiór jest ograniczony, to znaczy, że mieści się on w pewnym odcinku prostej liczbowej. Zbiór jest ograniczony z góry, wzgl. z dołu, gdy mieści się w promieniu nieskończonym skierowanym w lewo, wzgl. w prawo.

Posługując się zasadą ciągłości, udowodnimy twierdzenie następujące.

Jeśli zbiór (niepusty) Z jest ograniczony z góry, to wśród liczb M, czyniących zadość nierówności $M \geqq x$ dla każdego x, należącego do Z,

istnieje liczba najmniejsza. Liczbę tę nazywać będziemy kresem górnym zbioru Z.

Podobnie, *jeśli zbiór Z jest ograniczony z dołu, to wśród liczb m, czyniących zadość nierówności* $m \leqq x$, *istnieje liczba największa, zwana kresem dolnym zbioru Z.*

Dowód. Niech zbiór Z będzie ograniczony z góry. Podzielmy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych na dwie klasy, zaliczając do drugiej wszystkie liczby M, czyniące zadość nierówności $M \geqq x$ dla każdego x należącego do Z. Do klasy pierwszej zaliczamy wszystkie pozostałe liczby rzeczywiste; znaczy to, że do pierwszej klasy należy liczba a, gdy istnieje w zbiorze Z liczba od niej większa. Tak określony podział zbioru liczb rzeczywistych na dwie klasy jest przekrojem, tzn. że każda liczba należąca do pierwszej klasy jest mniejsza od każdej liczby należącej do drugiej klasy. Istotnie, gdyby przypuścić, że jakaś liczba M klasy drugiej jest mniejsza od jakiejś liczby a klasy pierwszej, to ponieważ istnieje w zbiorze Z taka liczba x, że $a < x$, więc mielibyśmy $M < x$, co jednak przeczy definicji klasy drugiej.

Zauważmy ponadto, że żadna z tych dwóch klas nie jest pusta. Jeśli bowiem jakaś liczba z należy do zbioru Z (a taka liczba istnieje, bo z założenia zbiór Z nie jest pusty), to liczba $z-1$ należy do klasy pierwszej. Klasa druga też nie jest pusta, bo zbiór Z jest ograniczony z góry.

Na mocy zasady ciągłości istnieje więc bądź największa liczba w klasie pierwszej, bądź najmniejsza w drugiej. Pierwsza ewentualność jednak zachodzić nie może; jeśli bowiem a należy do klasy pierwszej i $a < x$ (gdzie x należy do Z), to oznaczając przez a' jakąkolwiek liczbę pośrednią między a i x, np. $a' = \frac{a+x}{2}$, mamy również $a' < x$, co świadczy o tym, że a' również należy do klasy pierwszej; do każdej liczby a klasy pierwszej możemy więc znaleźć w tej klasie większą od niej liczbę a'. Znaczy to, że w klasie pierwszej nie ma liczby największej. Istnieje więc w klasie drugiej liczba najmniejsza, tzn. najmniejsza wśród liczb M, spełniających nierówność $M \geqq x$ dla każdego x, należącego do zbioru Z, c.b.d.o.

Dowód istnienia kresu dolnego jest zupełnie analogiczny.

Zauważmy, że kresy górny i dolny zbioru Z nie muszą do tego zbioru należeć. Np. kresami przedziału $a < x < b$ są liczby a i b, które do tego przedziału nie należą.

VIII*. Aksjomatyka liczb rzeczywistych. Pojęcie liczby rzeczywistej — które przyjęliśmy jako znane z kursu szkoły średniej — wprowadzić można w sposób aksjomatyczny jak następuje.

Zakładamy, że w obrębie liczb rzeczywistych wykonalne są dwa działania: *dodawanie* $x+y$ i *mnożenie* xy. Działania te spełniają prawa *przemienności* i *łączności*:

$$x + y = y + x, \quad xy = yx, \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad (xy)z = x(yz).$$

Ponadto mnożenie jest *rozdzielne* względem dodawania:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Dwie (różne) liczby 0 i 1 stanowią *moduły* dodawania i mnożenia, tj.

$$x + 0 = x, \qquad x \cdot 1 = x.$$

Zakładamy dalej, że w obrębie liczb rzeczywistych wykonalne jest zawsze *odejmowanie* i *dzielenie*, z wyjątkiem dzielenia przez 0. Inaczej mówiąc, zakładamy, że dla każdej pary liczb x i y istnieje taka liczba z (zwana różnicą $x-y$), że

$$x = y + z,$$

oraz — w wypadku, gdy $y \neq 0$ — taka liczba w (zwana ilorazem $x : y$), że

$$x = yw.$$

Prócz powyższych aksjomatów, dotyczących działań, przyjmujemy aksjomaty następujące, dotyczące stosunku *mniejszości*: $x < y$. Zakładamy, że każde dwie różne liczby rzeczywiste x i y związane są tym stosunkiem w jednym lub drugim kierunku, tj. że $x < y$ lub $y < x$. Stosunek ten jest *przechodni*, tj.

warunki $x < y$ *i* $y < z$ *pociągają za sobą* $x < z$,

oraz *asymetryczny*, tzn.:

jeśli $x < y$, *to nie zachodzi stosunek* $y < x$.

Stosunek mniejszości związany jest następującymi zależnościami z działaniami:

jeśli $y < z$, *to* $x + y < x + z$ *i jeśli ponadto* $0 < x$, *to* $xy < xz$.

Ostatnim wreszcie aksjomatem teorii liczb rzeczywistych, który przyjmujemy, jest *zasada ciągłości Dedekinda*, sformułowana w N°V.

Wszystkie twierdzenia arytmetyczne i algebraiczne z kursu szkoły średniej dają się z powyższych aksjomatów wyprowadzić.

IX*. Liczby rzeczywiste jako zbiory liczb wymiernych[1]. Pojęcie liczby rzeczywistej można określić na gruncie teorii liczb wymiernych w sposób następujący.

Liczby rzeczywiste uważać można za identyczne ze zbiorami liczb wymiernych R, spełniających warunki następujące:

(i) zbiór R nie zawiera liczby największej, tj. dla każdej liczby należącej do zbioru R istnieje w R liczba od niej większa,

(ii) jeśli liczba x należy do R, to również każda liczba wymierna mniejsza od x należy do R,

(iii) zbiór R nie jest pusty, a przy tym nie jest identyczny ze zbiorem wszystkich liczb wymiernych.

Dla tak zdefiniowanych liczb rzeczywistych określamy przede wszystkim stosunek mniejszości. Mianowicie piszemy $R < R'$, jeśli zbiór R jest częścią zbioru R' (różną od R'); lub — co na jedno wychodzi — jeśli zbiór R' zawiera liczby, które do R nie należą (jak łatwo sprawdzić z dwóch zbiorów, spełniających warunki (i) — (iii), zawsze jeden jest w drugim zawarty).

Konstatujemy z łatwością, że określony w taki sposób stosunek mniejszości spełnia aksjomaty podane w N⁰ VIII; tzn. jest to stosunek przechodni, asymetryczny i zachodzący dla każdej pary różnych zbiorów R i R' w jednym lub drugim kierunku.

Z kolei określamy dodawanie liczb rzeczywistych, tj. dodawanie zbiorów R i R' (czyniących zadość warunkom (i) — (iii)). Mianowicie, przez $R + R'$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb, które stanowią sumę dwóch liczb, z których pierwsza należy do R, a druga do R'. Łatwo sprawdzić, że zbiór $R + R'$ spełnia warunki (i) — (iii). Ponadto spełnione są aksjomaty dotyczące dodawania, jak przemienność, łączność itd. Liczbą rzeczywistą 0 jest zbiór wszystkich liczb wymiernych ujemnych. Podobnie, liczbą rzeczywistą 1 jest zbiór wszystkich liczb wymiernych mniejszych od jedynki wymiernej. Ogólnie, jeśli r jest liczbą wymierną, to przez "liczbę rzeczywistą r" rozumiemy zbiór wszystkich liczb wymiernych mniejszych od liczby r wymiernej (w praktyce liczbę wymierną r i liczbę rzeczywistą r identyfikujemy). $-R$ jest zbiorem wszystkich liczb wymiernych postaci $-x$, gdzie x przebiega zbiór wszystkich liczb nie należących do R; jeśli jednak zbiór ten zawiera najmniejszą liczbę r, to liczby $-r$ do zbioru $-R$ nie zaliczamy (jest to wypadek, gdy R jest "liczbą rzeczywistą r"). Dowodzi się, że $R + (-R) = 0$.

[1] Podajemy tu szkic tzw. teorii Dedekinda liczb rzeczywistych.

Mnożenie liczb rzeczywistych określa się w sposób następujący: jeśli $R \geqq 0$ i $R' \geqq 0$, to RR' jest zbiorem złożonym ze wszystkich liczb wymiernych ujemnych oraz z liczb postaci rr', gdzie r jest liczbą nieujemną należącą do R i podobnie r' jest liczbą nieujemną należącą do R'. Ponadto przyjmujemy, że

$$(-R)(-R') = RR', \quad (-R)R' = -(RR') = R(-R').$$

Dowodzi się, że wszystkie aksjomaty dotyczące mnożenia są spełnione.

Wreszcie aksjomat ciągłości jest spełniony. Niech bowiem A, B oznacza przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych. Oznaczmy przez R zbiór liczb wymiernych o tej własności, że r należy do R wtedy i tylko wtedy, gdy należy do którejś z liczb rzeczywistych, należących do klasy A.

Dowodzi się, że tak określony zbiór R spełnia warunki (i) — (iii), czyli że stanowi liczbę rzeczywistą. Następnie dowodzi się, że R "leży na przekroju A, B", tj. że jest bądź największą liczbą w klasie A, bądź najmniejszą w klasie B.

W ten sposób widzimy, że wszystkie aksjomaty teorii liczb rzeczywistych sformułowane w N⁰ VIII są spełnione, gdy przez liczbę rzeczywistą rozumiemy zbiór liczb wymiernych, czyniący zadość warunkom (i) — (iii).

Dodajmy, że zbiór liczb wymiernych spełnia wszystkie te aksjomaty prócz jednego, mianowicie prócz aksjomatu ciągłości.

Wynika stąd, że aksjomat ciągłości jest niezależny od pozostałych aksjomatów teorii liczb rzeczywistych. Gdyby bowiem był ich konsekwencją (a więc twierdzeniem, a nie aksjomatem), to byłby spełniony w każdym systemie, w którym te aksjomaty są spełnione.

Zadania do § 1

1. Udowodnić, że dla każdego naturalnego n i każdego rzeczywistego $a \geqq -1$ zachodzi następujący wzór (stanowiący uogólnienie wzoru (1) Bernoulliego):

$$(1+a)^n \geqq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3.$$

Dowód przez indukcję zupełną.

BU

2. Udowodnić tożsamości:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

W dowodzie drugiej równości oprzeć się można na tożsamości:

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1.$$

3. Analogicznie: znaleźć wzór na sumę $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

4. Wyprowadzić wzory:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n,$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots\pm\binom{n}{n}=0.$$

Oprzeć się na dwumianie Newtona.

5. Opierając się na zasadzie ciągłości dowieść, że istnieje $\sqrt[n]{a}$ dla każdego naturalnego n i dodatniego a.

6. Dowieść, że $\big|\,|a|-|b|\,\big| \leqq |a-b|$. Dowieść, że równość $|a+b|=|a|+|b|$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $ab \geqq 0$.

7. Oznaczmy przez A średnią arytmetyczną, zaś przez G średnią geometryczną liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$; tj.

$$A=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}, \qquad G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Dowieść, że jeśli liczby $a_1,a_2,\ldots,a_n$ są dodatnie, to $G \leqq A$.

Dowód poprzedzić uwagą, że jeśli $a_1<A<a_2$, to średnią arytmetyczną liczb $A, a_1+a_2-A, a_3, a_4,\ldots,a_n$ jest A, zaś średnia geometryczna tych liczb jest $>G$.

8. Oznaczając przez H średnią harmoniczną rozważanych poprzednio liczb $a_1, a_2,\ldots,a_n$, tj. kładąc

$$H=n:\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right),$$

dowieść, że $H \leqq G$.

§ 2. Ciągi nieskończone

I. Definicja i przykłady. Jeżeli każdej liczbie naturalnej przyporządkowana została jakaś liczba rzeczywista, to mówimy, że został określony ciąg nieskończony.

Np. liczby parzyste dodatnie tworzą ciąg nieskończony $2, 4, 6,\ldots, 2n,\ldots$; mianowicie liczbie 1 przyporządkowana jest liczba 2, liczbie 2 liczba 4, liczbie 3 liczba 6, ogólnie liczbie naturalnej n odpowiada liczba $2n$.

Zazwyczaj ciąg nieskończony zapisujemy w postaci $a_1, a_2,\ldots, a_n,\ldots$ lub $\{a_n\}$. Liczby występujące w ciągu nazywamy *wyrazami* ciągu; a_n nazywamy *ogólnym wyrazem* ciągu. A więc dla ciągu liczb dodatnich parzystych ogólnym wyrazem jest $2n$, dla ciągu liczb nieparzystych jest $2n-1$.

W ciągu nieskończonym niektóre wyrazy mogą się powtarzać. Jeśli np. liczbom naturalnym nieparzystym przyporządkujemy liczbę 0, zaś parzystym liczbę 1, to otrzymamy ciąg nieskończony $0, 1, 0, 1,\ldots$ o dwóch na przemian występujących wyrazach.

W szczególności w ciągu mogą być wszystkie wyrazy identyczne: $c, c, c,\ldots$

Jako przykłady ciągów wymienimy postępy arytmetyczne i geometryczne. Postęp arytmetyczny jest to ciąg postaci $c, c+d, c+2d,\ldots$, tj. ciąg o wyrazie ogólnym $c+(n-1)d$. Podobnie wyrazem ogólnym postępu geometrycznego jest $a_n=cq^{n-1}$.

Często używaną postacią definicji ciągu jest *definicja przez indukcję* (czyli definicja *rekurencyjna*). Polega ona na tym, że definiujemy bezpośrednio wyraz a_1, natomiast a_n określamy za pomocą wyrazów wcześniejszych. Połóżmy np. $a_1=1$ oraz $a_n=2^{a_n-1}$. Pierwszymi wyrazami tego ciągu są: $1, 2, 4, 16, 2^{16},\ldots$

Zauważmy wreszcie, że nie zawsze jest rzeczą możliwą zapisać wyraz ogólny w postaci wzoru. Np. liczby pierwsze tworzą, jak wiadomo z algebry, ciąg nieskończony, nie znamy jednak wzoru matematycznego, który by określał n-tą liczbę pierwszą.

Geometrycznie interpretujemy ciąg nieskończony jako pewien zbiór położony na płaszczyźnie (na której dane są osie odciętych i rzędnych, ob. rys. 1 str. 22). Mianowicie ciąg $a_1, a_2,\ldots, a_n,\ldots$ jest to zbiór punktów $(1, a_1)$, $(2, a_2),\ldots$, $(n, a_n),\ldots$. Np. ciąg liczb naturalnych jest to przecięcie prostej $y=x$ z wiązką prostych równoległych do osi Y i przechodzących przez punkty naturalne osi X. Podobnie ciąg o wy-

razie stałym c jest to przecięcie tej wiązki z prostą równoległą do osi X. Biorąc na prostych tej wiązki na przemian punkty o rzędnej 0 lub 1, otrzymujemy ciąg oscylujący 0,1,0,1,...

Jak z powyższego widać, ciąg nieskończony a zbiór wyrazów tego ciągu są to pojęcia różne: ciąg jest zbiorem punktów płaszczyzny, zaś zbiór wyrazów ciągu jest pewnym zbiorem liczb rzeczywistych, tj. z punktu widzenia geometrycznego zbiorem położonym na prostej. Dwa różne ciągi mogą się składać z tych samych wyrazów: wspomniany już ciąg oscylujący 0,1,0,1,... i ciąg 0,1,1,1,... (mający na pierwszym miejscu 0, a następnie same 1) mają te same wyrazy, choć są to ciągi różne o zasadniczo różnych własnościach.

Ciąg nazywamy *rosnącym*, jeśli $a_1 < a_2 < a_3 \ldots$, ogólnie: jeśli $a_n < a_{n+1}$. Podobnie ciąg nazywamy *malejącym*, jeśli $a_n > a_{n+1}$. Jeśli znak $<$ zastąpimy przez $\leqq$ (względnie $>$ przez $\geqq$), otrzymujemy ciągi rosnące (wzgl. malejące) w szerszym sensie, zwane też ciągami niemalejącymi (wzgl. nierosnącymi). Ciągi rosnące i ciągi malejące w szerszym sensie obejmujemy ogólną nazwą ciągów *monotonicznych*.

Ciąg liczb parzystych jest ciągiem rosnącym, ciąg 1, 1, 2, 2, 3, 3,... jest ciągiem rosnącym w szerszym sensie. Ciąg oscylujący 0,1,0,1,... nie jest ani rosnący, ani malejący.

II. Pojęcie granicy. *Liczbę g nazywamy granicą ciągu nieskończonego $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, jeżeli do każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba k, że dla $n > k$ zachodzi nierówność*

$$|a_n - g| < \varepsilon, \tag{1}$$

tj. a_n mieści się między $g - \varepsilon$ a $g + \varepsilon$.

Granicę ciągu oznaczamy symbolem

$$g = \lim_{n=\infty} a_n. \tag{2}$$

Jako przykład ciągu zbieżnego weźmy pod uwagę ciąg o ogólnym wyrazie $a_n = \frac{n+1}{n}$, tj. ciąg $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, \ldots, 1\frac{1}{n}, \ldots$ Udowodnimy, że 1 jest granicą tego ciągu.

Niech więc dana będzie jakaś liczba $\varepsilon > 0$. Należy tak dobrać k, aby dla $n > k$ zachodziła nierówność $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$, tj. aby $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Otóż niechaj k będzie liczbą naturalną większą niż $\frac{1}{\varepsilon}$. Mamy więc $\frac{1}{k} < \varepsilon$, a zatem dla $n > k$ zachodzi podwójna nierówność

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \varepsilon, \text{ skąd } \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ c. b. d. d.}$$

Liczba k, którą dobieramy do ε, zależy od ε. Na ogół, jeżeli ε zmniejszamy, to k winniśmy powiększyć (łatwo to zaobserwować na przykładzie poprzednim).

Wyrażając się bardziej obrazowo, warunek na to, aby liczba g była granicą ciągu $a_1, a_2, \ldots$, można sformułować jak następuje: dla każdego $\varepsilon > 0$ nierówność (1) jest spełniona, o ile tylko n jest *dostatecznie duże*.

Ciąg posiadający granicę nazywamy *zbieżnym*. Ciąg *rozbieżny* jest to ciąg, który granicy nie posiada. Jako przykład ciągu rozbieżnego weźmy pod uwagę ciąg wszystkich liczb naturalnych. Istotnie, przypuśćmy, że g jest granicą ciągu liczb naturalnych. Podstawmy na ε wartość 1. Na mocy (1) mamy więc dla dostatecznie dużych n nierówność $|n - g| < 1$, a zatem $n < g + 1$. Dochodzimy do sprzeczności. Jest bowiem przeciwnie: dla dostatecznie dużych n mamy $n > g + 1$. Sprzeczność ta wykazuje, że przypuszczenie nasze, że ciąg liczb naturalnych posiada granicę, było błędne. Jest to więc ciąg rozbieżny.

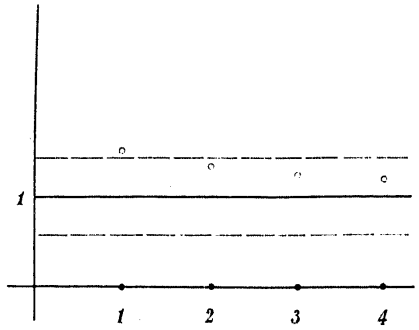
Podobnie można by wykazać, że ciąg oscylujący 0,1,0,1,... jest rozbieżny.

$$\lim_{n=\infty} c = c, \tag{3}$$

tj. ciąg o stałym wyrazie c ma jako granicę c.

Mamy bowiem stale $a_n - c = 0$. Nierówność (1) zachodzi więc dla wszystkich n.

Geometrycznie pojęcie granicy interpretować można w sposób następujący. Niech dany będzie ciąg $a_1, a_2, \ldots$ (np. ciąg o ogólnym wyrazie $\frac{n+1}{n}$). Wyobraźmy sobie, stosownie do N° I, jego interpretację geometryczną na płaszczyźnie. Poprowadźmy przez punkt g osi Y (np. $g = 1$) prostą równoległą do osi X. Poprowadźmy jeszcze jedną równoległą nad tą prostą i jedną pod nią w tej samej od tej prostej odległości. Warunek na to, aby zachodziła równość (2), orzeka, że dla dostatecznie dużych n (tj. dla n większych od pewnego k) wszystkie elementy naszego ciągu mieszczą się w pasie wyznaczonym przez te dwie równoległe.



Rys. 1.

Przejście od warunku analitycznego, sformułowanego w definicj granicy, do powyższego warunku geometrycznego uzyskamy z łat wością, oznaczając przez 2ε szerokość rozważanego pasa.

Inaczej jeszcze mówiąc, warunek na zbieżność ciągu do g daje si sformułować jak następuje: każdy przedział o środku g zawiera wszy stkie wyrazy ciągu, poczynając od pewnego wskaźnika.

Na rozpatrywanych poprzednio przykładach widzieliśmy, że ciąg może nie posiadać granicy (jeśli jest rozbieżny); nasuwa się pytanie czy jeśli granicę posiada (a zatem, jeśli jest zbieżny), to czy posiad tylko jedną granicę? Okażemy, że tak jest istotnie.

Przypuśćmy bowiem, że ciąg $a_1, a_2,\ldots$ posiada dwie różne granice g i g'. Mamy więc $|g-g'|>0$. Niech $\varepsilon=\frac{1}{2}|g-g'|$. Na mocy definicj granicy istnieją dwie takie liczby k i k', że dla $n>k$ zachodzi nie równość

$$|a_n-g|<\varepsilon, \tag{4}$$

zaś dla $n>k'$ nierówność

$$|a_n-g'|<\varepsilon. \tag{5}$$

A zatem, jeśli przez m oznaczymy większą z dwóch liczb k i k' to dla $n>m$ spełnione są obie nierówności (4) i (5) równocześnie Dodajmy je stronami pod znakiem bezwzględnej wartości (por. § 1 (15)) zmieniwszy uprzednio znak pod bezwzględną wartością we wzorz (4). Otrzymamy $|g-g'|<2\varepsilon$, lecz $2\varepsilon=|g-g'|$. Doszliśmy więc d sprzeczności.

Uwaga. Jak łatwo dowieść, pojęcie granicy nie ulegnie zmianie jeżeli w jej definicji zastąpimy znak $>$ przez $\geqq$ lub $<$ przez $\leqq$.

III. Ciągi ograniczone. Ciąg $a_1, a_2,\ldots$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli zbiór jego wyrazów jest ograniczony, tzn. jeśli istnieje taka liczba M, że nierówność $|a_n|<M$ spełniona jest dla wszystkich wartości n. Inaczej mówiąc, nierówność $-M<a_n<M$ spełniona jest przez wszystkie wyrazy ciągu.

W interpretacji geometrycznej warunek ten oznacza, że cały ciąg ten (traktowany jako pewien zbiór położony na płaszczyźnie) mieści się pomiędzy dwiema prostymi $y=M$ i $y=-M$.

Mówimy też, że ciąg dany jest *ograniczony z góry*, jeśli istnieje taka liczba M, że stale mamy $a_n<M$, tj. że ciąg ten znajduje się poniżej prostej $y=M$. Analogicznie określa się pojęcie ciągu ograniczonego z dołu. Rzecz jasna, że ciąg ograniczony z góry i z dołu to po prostu ciąg ograniczony.

Przykłady. Ciąg 0,1,0,1,... jest ograniczony. Ciąg liczb naturalnych jest nieograniczony, jest jednak ograniczony z dołu. Ciąg $1,-1,2,-2,3,-3,\ldots$ nie jest ograniczony ani z dołu, ani z góry.

Twierdzenie. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Istotnie załóżmy, że zachodzi równość (2) i podstawmy na ε wartość 1. Istnieje więc takie k, że dla $n>k$ mamy $|a_n-g|<1$. Ponieważ $|a_n|-|g|\leqq|a_n-g|$ (por. § 1 (13)), przeto $|a_n|<|g|+1$. Oznaczmy przez M liczbę większą od każdej spośród następujących $k+1$ liczb: $|a_1|$, $|a_2|,\ldots,|a_k|,|g|+1$. Ponieważ ta ostatnia jest większa od $|a_{k+1}|$, $|a_{k+2}|$ itd., przeto $M>|a_n|$ dla każdego n. Ciąg jest więc ograniczony.

IV. Działania na ciągach. *Twierdzenie. Przy założeniu, że ciągi $a_1, a_2,\ldots$ i $b_1, b_2,\ldots$ są zbieżne, zachodzą 4 wzory następujące:*[1]

$$\lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n, \tag{6}$$

$$\lim(a_n-b_n)=\lim a_n-\lim b_n, \tag{7}$$

$$\lim(a_n\cdot b_n)=\lim a_n\cdot\lim b_n, \tag{8}$$

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}\ (o\ ile\ \lim b_n\neq 0). \tag{9}$$

Znaczy to, że przy naszych założeniach istnieje granica sumy i równa się sumie granic, istnieje granica różnicy i równa się różnicy granic itp.

Dowód. Położymy $\lim a_n=g$ i $\lim b_n=h$. Niech dana będzie liczba $\varepsilon>0$. Istnieje więc takie k, że dla $n>k$ zachodzą nierówności $|a_n-g|<\varepsilon/2$ oraz $|b_n-h|<\varepsilon/2$. Dodajmy do siebie te dwie nierówności pod znakiem bezwzględnej wartości. Otrzymamy

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon.$$

[1] Aby nie przeładowywać symboliki, opuszczać często będziemy pod znakiem lim równość $n=\infty$.

Znaczy to, że ciąg, którego ogólnym wyrazem jest $c_n = a_n + b_n$, jest zbieżny do granicy $g+h$. Udowodniliśmy więc wzór (6).

W szczególności, jeśli b_n ma wartość stałą: $b_n = c$, otrzymujemy ze wzoru (6) i (3):

(10) $$\lim (a_n + c) = c + \lim a_n$$

Udowodnimy obecnie wzór (8). Należy więc "oszacować" różnicę $|a_n b_n - gh|$. Aby móc korzystać ze zbieżności ciągów $a_1, a_2, \ldots$ i $b_1, b_2, \ldots$, przekształcimy tę różnicę, jak następuje:

$$a_n b_n - gh = a_n b_n - a_n h + a_n h - gh = a_n(b_n - h) + h(a_n - g).$$

Ponieważ ciąg $a_1, a_2, \ldots$ jest ograniczony jako ciąg zbieżny, przeto istnieje takie M, że $|a_n| < M$. Stosując do poprzedniej równości wzory na bezwzględną wartość sumy i iloczynu, otrzymujemy:

$$|a_n b_n - gh| \leqq |a_n(b_n - h)| + |h(a_n - g)| \leqq M \cdot |b_n - h| + |h| \cdot |a_n - g|.$$

Weźmy teraz pod uwagę, niezależnie od liczby ε, jakąś liczbę $\eta > 0$. Istnieje więc takie k, że dla $n > k$ mamy $|a_n - g| < \eta$ oraz $|b_n - h| < \eta$. A zatem $|a_n b_n - gh| < M\eta + |h|\eta = (M + |h|)\eta$.

O liczbie dodatniej η dotychczas nic nie zakładaliśmy. Załóżmy obecnie, że $\eta = \varepsilon/(M + |h|)$. Dochodzimy w ten sposób do wniosku, że dla $n > k$ zachodzi nierówność $|a_n b_n - gh| < \varepsilon$. A zatem udowodniliśmy wzór (8).

W szczególności, kładąc $b_n = c$, otrzymujemy stąd:

(11) $$\lim (c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n,$$ (12) $$\lim (-a_n) = -\lim a_n,$$

przy czym wzór (12) wynika z (11) przez podstawienie $c = -1$.

Wzory (6) i (12) pociągają wzór (7). Bowiem

$$\lim (a_n - b_n) = \lim [a_n + (-b_n)] = \lim a_n + \lim (-b_n) = \lim a_n - \lim b_n.$$

Nim przejdziemy do dowodu wzoru (9), udowodnimy szczególny jego wypadek następujący:

(13) $$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n} \quad (\textit{o ile } \lim b_n \neq 0).$$

Zauważmy najpierw, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $b_n \neq 0$. Udowodnimy nawet przesłankę mocniejszą: dla dostatecznie dużych n mamy $|b_n| > |h|/2$. Istotnie, ponieważ $|h|/2 > 0$, istnieje takie k, że dla $n > k$ jest $|b_n - h| < |h|/2$. Stąd

$$|h| - |b_n| \leqq |h - b_n| < |h|/2, \text{ a zatem } |b_n| > |h|/2.$$

Aby udowodnić wzór (13), należy oszacować różnicę

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| = \left|\frac{h - b_n}{h \cdot b_n}\right| = \frac{|h - b_n|}{|h| \cdot |b_n|}.$$

Otóż dla dostatecznie dużych n mamy

$$|h - b_n| < \eta \text{ oraz } |b_n| > |h|/2, \text{ tj. } 1/|b_n| < 2/|h|.$$

A zatem $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| < \frac{2\eta}{h^2}$. Przyjmując, że $\eta = \frac{\varepsilon h^2}{2}$, otrzymujemy

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| < \varepsilon,$$

skąd wynika wzór (13).

Wzór (9) wynika z (8) i (13):

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \lim a_n \cdot \lim \frac{1}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

Uwagi. 1) Zakładaliśmy, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne. Założenie to jest istotne; może się bowiem zdarzyć, że ciąg $\{a_n + b_n\}$ jest zbieżny, mimo że oba ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są rozbieżne; nie można więc wówczas stosować wzoru (6). Jako przykład może służyć: $a_n = n$, $b_n = -n$.

Jeśli jednak ciąg $\{a_n + b_n\}$ i jeden z dwóch ciągów, np. ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny, to i drugi ciąg jest zbieżny. Bowiem $b_n = (a_n + b_n) - a_n$, a więc ciąg $\{b_n\}$ jako różnica dwóch ciągów zbieżnych jest zbieżny.

Analogiczne uwagi stosują się do wzorów (7) — (9).

2) W definicji ciągu zakładaliśmy, że numeracja elementów zaczyna się od liczby 1. Dogodnie jest tę definicję uogólnić, przyjmując, że numeracja zaczyna się od dowolnej liczby naturalnej (a nawet od dowolnej liczby całkowitej), np. od 2, 3 czy innej liczby naturalnej. Tak jest np. w dowodzie wzoru (13). Udowodniliśmy, że $b_n \neq 0$, poczynając od pewnego k. Ciąg $\frac{1}{b_n}$ jest więc określony dopiero poczynając od tego k (jeśli bowiem $b_n = 0$, to $\frac{1}{b_n}$ żadnej liczby nie oznacza).

Uwaga ta pozostaje w związku z następującą własnością ciągów, łatwą do udowodnienia: *zmiana skończonej ilości wyrazów ciągu nie ma wpływu ani na zbieżność ciągu, ani na jego granicę.* To samo dotyczy *dołączenia* do ciągu, względnie *odrzucenia* z ciągu skończonej ilości wyrazów.

Przykłady. Znaleźć $\lim_{n=\infty} \frac{6n+2}{7n-3}$. Nie możemy tu wprost zastosować wzoru (9), ponieważ ani licznik, ani mianownik nie jest zbieżny, gdy n dąży do ∞. Możemy jednak wyraz ogólny ciągu $a_n = \frac{6n+2}{7n-3}$ tak

przekształcić, aby stał się on ilorazem dwóch wyrażeń, posiadających granice. Wystarczy w tym celu podzielić licznik i mianownik przez n.

Otrzymamy $a_n = \dfrac{6+\frac{2}{n}}{7-\frac{3}{n}}$ i stosujemy wzór (9). Ponieważ $\lim\limits_{n=\infty}(6+\frac{2}{n}) = 6$ oraz $\lim\limits_{n=\infty}(7-\frac{3}{n}) = 7$, więc $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \frac{6}{7}$.

Podobnie $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1} = \lim\limits_{n=\infty}\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$, bo $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

V. Dalsze własności rachunkowe granicy. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie zbieżny. Wówczas zbieżny jest ciąg $\{|a_n|\}$ i

(14) $$\lim |a_n| = |\lim a_n|.$$

Niech bowiem $\lim a_n = g$. Mamy więc $|a_n - g| < \varepsilon$ dla dostatecznie dużych n. A zatem

$$|a_n| - |g| \leqq |a_n - g| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad |g| - |a_n| \leqq |g - a_n| < \varepsilon,$$

skąd (por. § 1 (16)): $||a_n| - |g|| < \varepsilon$. Wzór (14) jest więc udowodniony.

Przy założeniu, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne, zachodzi zależność następująca:

(15) *nierówność $a_n \leqq b_n$ pociąga za sobą* $\lim a_n \leqq \lim b_n$.

W szczególności, jeśli ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny, to

(16) *warunek $c_n \geqq 0$ pociąga za sobą* $\lim c_n \geqq 0$.

Udowodnimy najpierw wzór ostatni. Niech więc $\lim c_n = h$. Przypuśćmy, że $h < 0$, tj. że $-h > 0$. Mamy więc dla dostatecznie dużych n $|c_n - h| < -h$, a zatem $c_n - h < -h$, skąd $c_n < 0$, wbrew założeniu.

Opierając się na wzorze (16) udowodnimy obecnie wzór (15).

Położmy $b_n - a_n = c_n$. Ponieważ $a_n \leqq b_n$, przeto $c_n \geqq 0$, a więc w granicy $\lim c_n \geqq 0$. Zarazem na mocy (7): $\lim c_n = \lim b_n - \lim a_n$, a zatem $\lim b_n - \lim a_n \geqq 0$, czyli $\lim a_n \leqq \lim b_n$.

Uwaga. W sformułowaniu zależności (16) nie można zastąpić nierówności $\geqq$ przez $>$ (podobnie w (15) nie można zastąpić $\leqq$ przez $<$). Np. ciąg $c_n = 1/n$ spełnia nierówność $c_n > 0$, zaś $\lim c_n = 0$.

Widzimy więc, że stosunek $\leqq$ i $\geqq$ "przechodzi do granicy", natomiast stosunki $<$ i $>$ tej własności nie mają.

Wzór na podwójną nierówność:

(17) *Jeśli $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ i $\lim a_n = \lim b_n$, to ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny, przy czym $\lim c_n = \lim a_n = \lim b_n$.*

Niech bowiem $\lim a_n = g = \lim b_n$. Niech $\varepsilon > 0$. Mamy więc dla dostatecznie dużych n: $|a_n - g| < \varepsilon$ oraz $|b_n - g| < \varepsilon$. Na mocy założenia:

$$a_n - g \leqq c_n - g \leqq b_n - g, \text{ zaś } -\varepsilon < a_n - g \text{ i } b_n - g < \varepsilon,$$

a zatem $-\varepsilon < c_n - g < \varepsilon$, tj. $|c_n - g| < \varepsilon$, skąd $\lim c_n = g$.

(17′) *Jeśli $\lim |a_n| = 0$, to ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny i $\lim a_n = 0$.*

Bo $-|a_n| \leqq a_n \leqq |a_n|$ i $\lim(-|a_n|) = 0 = \lim |a_n|$.

VI. Podciągi. Niech dany będzie ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ oraz ciąg rosnący liczb naturalnych $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ Ciąg

$$b_1 = a_{m_1},\ b_2 = a_{m_2}, \ldots,\ b_n = a_{m_n}, \ldots$$

nazywamy *podciągiem ciągu* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Np. ciąg $a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots$ jest podciągiem ciągu $a_1, a_2, \ldots$ Natomiast ciąg $a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots$ nie jest jego podciągiem, ponieważ wskaźniki nie tworzą tu ciągu rosnącego.

W myśl naszej definicji każdy ciąg jest swoim własnym podciągiem. Ogólnie powiedzieć możemy, że podciąg powstaje z ciągu przez opuszczenie pewnej ilości jego elementów (skończonej, nieskończonej lub zerowej).

Twierdzenie 1. Podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy, co ciąg dany. Inaczej mówiąc:

(18) *jeśli* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = g$ *oraz* $m_1 < m_2 < \ldots$, *to* $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n} = g$.

Zauważmy przede wszystkim, że dla każdego n

(19) $$m_n \geqq n.$$

Jest tak oczywiście dla $n = 1$, tj. $m_1 \geqq 1$ (bo m_1 jest liczbą naturalną). Stosując indukcję załóżmy, że dla danego n zachodzi wzór (19). Mamy wówczas $m_{n+1} > m_n \geqq n$, a zatem $m_{n+1} \geqq n+1$. Otrzymaliśmy w ten sposób wzór (19) dla $n+1$. Wzór ten jest więc ogólnie prawdziwy dla każdego n.

Niech dane będzie $\varepsilon > 0$. Istnieje więc takie k, że dla $n > k$ spełniona jest nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. Na mocy wzoru (19) $m_n \geqq n > k$. A zatem $|a_{m_n} - g| < \varepsilon$. Wynika stąd, że $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n} = g$.

Twierdzenie 2 (Bolzano-Weierstrassa[1]*). Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.*

Dowód. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie ograniczony. Istnieje więc takie M, że dla każdego n zachodzi nierówność $-M<a_n<M$.

Zastosujemy obecnie zasadę ciągłości Dedekinda. Podzielimy mianowicie zbiór wszystkich liczb rzeczywistych na dwie części, zaliczając do pierwszej części liczbę x wtedy, gdy dla nieskończenie wielu n spełniona jest nierówność $x<a_n$. Do drugiej części zaliczamy wszystkie liczby pozostałe; jeżeli więc y należy do części drugiej, to znaczy to, że albo w ogóle w naszym ciągu nie ma wyrazów większych od y, albo tylko dla skończonej ilości wskaźników zachodzi nierówność $y<a_n$. Zauważmy, że do pierwszej części naszego podziału należy $-M$, zaś do drugiej M. Podział ten stanowi przekrój (w sensie ustalonym w § 1, V). Znaczy to, że jeśli x należy do pierwszej części, zaś y do drugiej, to $x<y$. Istotnie, gdyby przypuścić, że $y\leqq x$, to ponieważ nierówność $x<a_n$ jest spełniona przez nieskończenie wiele n, to i nierówność $y<a_n$ byłaby przez nieskończenie wiele n spełniona; ale to przeczy definicji naszego podziału.

Na mocy zasady ciągłości istnieje więc liczba g, która bądź jest największą w pierwszej części, bądź najmniejszą w drugiej[2]. A zatem, jeśli $\varepsilon>0$, to $g-\varepsilon$ należy do pierwszej części, zaś $g+\varepsilon$ do drugiej.

Wykażemy obecnie, że g jest granicą pewnego podciągu ciągu $\{a_n\}$. Należy więc określić ciąg liczb naturalnych $m_1<m_2<m_3<\ldots$ w taki sposób, aby $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n}=g$.

W tym celu podstawmy najpierw na miejsce ε wartość 1. Istnieje więc nieskończenie wiele takich n, że $g-1<a_n$, a wśród nich tylko skończona (lub nawet zerowa) ilość takich, że $g+1<a_n$. Inaczej mówiąc, istnieje nieskończenie wiele n takich, że

$$g-1<a_n\leqq g+1.$$

Oznaczmy przez m_1 którekolwiek z tych n. Mamy więc

$$g-1<a_{m_1}\leqq g+1.$$

Podstawmy z kolei $\varepsilon=1/2$. Istnieje zatem nieskończenie wiele n takich, że $g-1/2<a_n\leqq g+1/2$. Wśród tych n istnieją więc liczby $>m_1$; oznaczmy którąkolwiek z nich przez m_2. Mamy więc

[1] Matematycy XIX wieku. Znakomity matematyk K. Weierstrass (1815—1897) jest jednym z twórców teorii funkcji analitycznych.

[2] Aby zdefiniować liczbę g, można zamiast posługiwać się zasadą ciągłości, odwołać się do tw. VII, § 1. Mianowicie g można określić jako kres górny pierwszego ze zbiorów rozpatrywanego przekroju.

$$g-1/2<a_{m_2}\leqq g+1/2,\quad m_1<m_2.$$

Podobnie znajdziemy m_3 takie, że

$$g-1/3<a_{m_3}\leqq g+1/3,\quad m_2<m_3.$$

Ogólnie, mając określone m_n, określamy m_{n+1} w taki sposób, aby

$$g-1/(n+1)<a_{m_{n+1}}\leqq g+1/(n+1),\quad m_n<m_{n+1}. \tag{20}$$

Zastosujemy wzór (17) na podwójną nierówność. Ponieważ $\lim 1/n=0$, przeto $\lim(g-1/n)=g=\lim(g+1/n)$. Wnosimy więc ze wzoru (20) (w którym oczywiście zastąpić można $n+1$ przez n), że $\lim\limits_{n=\infty} a_{m_n}=g$. Wreszcie z nierówności $m_n<m_{n+1}$ wynika, że ciąg $a_{m_1}, a_{m_2},\ldots$ jest podciągiem ciągu $a_1, a_2,\ldots$ Twierdzenie jest zatem udowodnione.

Jako wniosek z powyższego twierdzenia, wyprowadzimy

Twierdzenie 3. Każdy ciąg monotoniczny ograniczony jest zbieżny. Przy tym, jeżeli $a_1\leqq a_2\leqq\ldots$, to $a_n\leqq\lim a_n$; jeżeli $a_1\geqq a_2\geqq\ldots$, to $a_n\geqq\lim a_n$.

Udowodnimy najpierw drugą część twierdzenia. Załóżmy więc, że $a_1\leqq a_2\leqq\ldots$ oraz że $\lim a_n=g$. Weźmy pod uwagę jakąś ustaloną liczbę naturalną n_0; należy dowieść, że $a_{n_0}\leqq g$. Otóż z założenia:

$$a_{n_0}\leqq a_{n_0+1},\quad a_{n_0}\leqq a_{n_0+2},\ldots,\quad a_{n_0}\leqq a_{n_0+k},\ldots.$$

A zatem na mocy (15): $a_{n_0}\leqq\lim\limits_{k=\infty} a_{n_0+k}=g$.

Przejdźmy obecnie do właściwego dowodu. Niech więc ciąg $\{a_n\}$ będzie ograniczony i rosnący w szerszym sensie (nie zakładamy jednak, że jest zbieżny; to właśnie mamy udowodnić). Jako ciąg ograniczony, ciąg ten zawiera podciąg zbieżny (na mocy tw. Bolzano-Weierstrassa). Niech więc

$$\lim_{n=\infty} a_{m_n}=g,\quad m_1<m_2<\ldots$$

Ponieważ ciąg $\{a_{m_n}\}$ jest również rosnący w szerszym sensie, a zatem, jak przed chwilą dowiedliśmy, $a_{m_n}\leqq g$. Niech dane będzie $\varepsilon>0$. Istnieje więc takie k, że dla $n\geqq k$ mamy $|a_{m_n}-g|<\varepsilon$. Udowodnimy, że dla $n>m_k$ jest $|a_n-g|<\varepsilon$, a tym samym, że $\lim\limits_{n=\infty} a_n=g$.

Otóż zgodnie ze wzorem (19) $n\leqq m_n$, skąd $a_n\leqq a_{m_n}\leqq g$, tj. $g-a_n\geqq 0$. Zarazem nierówność $n>m_k$ pociąga za sobą $a_n\geqq a_{m_k}$, skąd wynika $g-a_n\leqq g-a_{m_k}<\varepsilon$, a więc $|g-a_n|<\varepsilon$, bo $g-a_n\geqq 0>-\varepsilon$.

Tw. 3 jest więc udowodnione dla ciągów niemalejących. Dowód dla ciągów nierosnących jest analogiczny.

Jak wynika z tw. 1, ciąg zbieżny nie może zawierać dwóch podciągów zbieżnych do różnych granic (skąd w szczególności wynika, że ciąg $0, 1, 0, 1, \ldots$ jest rozbieżny). W obrębie ciągów ograniczonych twierdzenie to daje się odwrócić. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 4. Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i jeżeli wszystkie jego podciągi zbieżne są zbieżne do tej samej granicy g, to również ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do granicy g.

Inaczej mówiąc, *każdy ciąg ograniczony rozbieżny zawiera dwa podciągi zbieżne do różnych granic.*

Dowód. Przypuśćmy, że g nie jest granicą ciągu $\{a_n\}$. Istnieje wówczas takie $\varepsilon>0$, że dla każdego k istnieje $n>k$, czyniące zadość nierówności $|a_n-g|\geqq\varepsilon$. Wnioskujemy stąd, że istnieje podciąg $\{a_{m_n}\}$ taki, że przy każdym n mamy $|a_{m_n}-g|\geqq\varepsilon$. Podstawiając bowiem na k wartość 1 wnosimy, że istnieje $m_1>1$ takie, że $|a_{m_1}-g|\geqq\varepsilon$. Podstawiając z kolei $k=m_1$, wnosimy, że istnieje $m_2>m_1$, dla którego $|a_{m_2}-g|\geqq\varepsilon$. Podobnie istnieje $m_3>m_2$ takie, że $|a_{m_3}-g|\geqq\varepsilon$ itd.

Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, więc i ciąg $\{a_{m_n}\}$ jest ograniczony. Ten ostatni zawiera więc na podstawie tw. Bolzano-Weierstrassa podciąg zbieżny. Oznaczmy ten podciąg przez $\{a_{m_{r_n}}\}$. Ponieważ jest to równocześnie podciąg ciągu $\{a_n\}$, więc z założenia

$$\lim_{n=\infty} a_{m_{r_n}}=g, \text{ tj. } \lim_{n=\infty}(a_{m_{r_n}}-g)=0.$$

Z drugiej jednak strony, ponieważ liczby m_{r_1}, m_{r_2},... należą do ciągu m_1, m_2,..., więc z nierówności $|a_{m_n}-g|\geqq\varepsilon$ wnosimy, że dla każdego n zachodzi nierówność $|a_{m_{r_n}}-g|\geqq\varepsilon$. Stąd sprzeczność.

Dowiedliśmy więc przez sprowadzenie do niedorzeczności, że $\lim_{n=\infty} a_n=g$.

VII. Twierdzenie Cauchy'ego[1]. *Na to, żeby ciąg $\{a_n\}$ był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon>0$ istniała taka liczba r, że dla $n>r$ zachodzi nierówność*

$$|a_n-a_r|<\varepsilon. \tag{21}$$

Dowód składa się z dwóch części. W pierwszej części udowodnimy, że jeżeli ciąg jest zbieżny, to warunek sformułowany w twierdzeniu,

[1] Augustin Cauchy, 1789—1857, jeden z najwybitniejszych matematyków francuskich. Ustalenie podstawowych pojęć i twierdzeń teorii ciągów i szeregów oraz teorii funkcji ciągłych jest w znacznym stopniu jego dziełem.

tzw. "warunek Cauchy'ego", jest spełniony; czyli że warunek ten jest warunkiem *koniecznym* zbieżności ciągu. W drugiej części dowodu wykażemy, że jeśli warunek Cauchy'ego jest spełniony, to ciąg jest zbieżny; czyli że warunek ten jest *wystarczający* dla zbieżności ciągu.

1) Niech więc $\lim a_n=g$. Niech dane będzie $\varepsilon>0$. Istnieje więc takie r, że dla $n\geqq r$ zachodzi $|a_n-g|<\varepsilon/2$. Nierówność ta zachodzi w szczególności dla $n=r$, tj. $|a_r-g|<\varepsilon/2$. Dodając te dwie nierówności pod znakiem bezwzględnej wartości, otrzymujemy wzór (21).

2) Załóżmy teraz, że warunek Cauchy'ego jest spełniony. Należy dowieść, że ciąg jest zbieżny. Udowodnimy przede wszystkim, że jest to ciąg ograniczony. Dowód przeprowadzimy analogicznie do dowodu z N° III. Podstawmy mianowicie $\varepsilon=1$. Istnieje więc takie r, że dla $n>r$ mamy $|a_n-a_r|<1$. Stąd $|a_n|-|a_r|\leqq|a_n-a_r|<1$, a więc $|a_n|<|a_r|+1$. Oznaczmy przez M liczbę większą od każdej spośród r liczb następujących: $|a_1|, |a_2|,\ldots,|a_{r-1}|, |a_r|+1$. Mamy więc $M>|a_n|$ dla każdego n. Oznacza to, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony.

Wnosimy stąd na mocy tw. Bolzano-Weierstrassa, że ciąg ten zawiera podciąg zbieżny. Niech więc $\lim_{n=\infty} a_{m_n}=g$, przy czym $m_1<m_2<\ldots$ Udowodnimy, że $g=\lim_{n=\infty} a_n$.

Niech więc dane będzie $\varepsilon>0$. Na mocy warunku Cauchy'ego istnieje takie r, że dla $n>r$ spełniona jest nierówność

$$|a_n-a_r|<\varepsilon/3. \tag{22}$$

Na mocy równości $\lim_{n=\infty} a_{m_n}=g$ istnieje takie k, że dla $n>k$ mamy

$$|a_{m_n}-g|<\varepsilon/3. \tag{23}$$

Rzecz jasna, że można było dobrać k w taki sposób, aby $k>r$. Wówczas dla $n>k$ obie nierówności (22) i (23) są spełnione równocześnie.

Ponadto, ponieważ $m_n\geqq n>r$ (por. (19)), można więc we wzorze (22) zastąpić n przez m_n. Daje to

$$|a_{m_n}-a_r|<\varepsilon/3. \tag{24}$$

Dodając do siebie nierówności (22)—(24), zmieniwszy uprzednio znak pod znakiem bezwzględnej wartości w nierówności (24), otrzymujemy nierówność $|a_n-g|<\varepsilon$, która jest spełniona dla każdego $n>k$. Oznacza to, że $\lim a_n=g$.

Uwagi. 1) W tw. Cauchy'ego, podobnie jak w definicji granicy, zastąpić można znak $>$ w nierówności $n>k$, jak również znak $<$ we wzorze (21), odpowiednio przez $\geqq$ i $\leqq$.

2) Warunek Cauchy'ego można również w taki sposób sformułować: *dla każdego* $\varepsilon>0$ *istnieje takie* r, *że warunki* $n>r$ *i* $n'>r$ *pociągają za sobą* $|a_n-a_{n'}|<\varepsilon$.

Z war. Cauchy'ego wynika bowiem, że istnieje takie r, że dla $n>r$ i $n'>r$ zachodzą nierówności $|a_n-a_r|<\varepsilon/2$ i $|a_{n'}-a_r|<\varepsilon/2$. Dodając je otrzymujemy $|a_n-a_{n'}|<\varepsilon$.

VIII. Rozbieżność do ∞. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do ∞, jeśli do każdej liczby r istnieje takie k, że dla $n>k$ jest $a_n>r$. Zapisujemy to symbolicznie w postaci równości: $\lim\limits_{n=\infty} a_n=\infty$. Ciąg rozbieżny do ∞ jest to więc ciąg, którego wyrazy o dostatecznie dużych wskaźnikach stają się dowolnie wielkie.

Analogicznie określamy znaczenie wyrażenia $\lim\limits_{n=\infty} a_n=-\infty$. Oznacza ono, że dla każdej liczby r istnieje takie k, że dla $n>k$ jest $a_n<r$.

O ciągach rozbieżnych do ∞ lub do $-\infty$ mówimy, że posiadają granice *niewłaściwe*.

Przykłady: $\lim\limits_{n=\infty} n=\infty$, $\lim\limits_{n=\infty}(-n)=-\infty$.

1. *Ciąg rosnący (w szerszym sensie) nieograniczony z góry jest rozbieżny do* ∞.

Istotnie, ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony z góry, więc dla każdej liczby r istnieje takie k, że $a_k>r$. Ponieważ zaś jest to ciąg rosnący w szerszym sensie, więc dla $n>k$ mamy $a_n\geqq a_k$, skąd $a_n>r$. A zatem $\lim\limits_{n=\infty} a_n=\infty$.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla ciągów malejących.

Zestawiając to twierdzenie z tw. 3, N° VI, wnosimy, że *każdy ciąg monotoniczny posiada granicę właściwą lub niewłaściwą* (w zależności od tego, czy jest ograniczony czy nieograniczony).

2. *Jeśli* $\lim\limits_{n=\infty} a_n=\pm\infty$, *to* $\lim\limits_{n=\infty}(1/a_n)=0$.

Niech bowiem $\lim a_n=\infty$ i niech $\varepsilon>0$. Kładąc $r=1/\varepsilon$, wnosimy, że istnieje takie k, że dla $n>k$ zachodzi $a_n>1/\varepsilon$, tj. $1/a_n<\varepsilon$, co oznacza, że $\lim(1/a_n)=0$.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe: ciąg $1,-1/2,1/3,-1/4,\ldots$ jest zbieżny do 0, lecz ciąg jego odwrotności $1,-2,3,-4,\ldots$ nie jest rozbieżny ani do $+\infty$, ani do $-\infty$.

Odnośnie działań na ciągach rozbieżnych do nieskończoności wymienimy tw. następujące: *suma i iloczyn dwóch ciągów rozbieżnych do* $+\infty$ *są rozbieżne do* $+\infty$. Udowodnimy to twierdzenie w następującej, nieco zaostrzonej postaci.

3. *Jeśli* $\lim a_n=\infty$, *zaś ciąg* $\{b_n\}$ *jest ograniczony z dołu, to* $\lim(a_n+b_n)=\infty$.

Niech bowiem $M<b_n$. Ponieważ $\lim a_n=\infty$, istnieje więc dla danego r taka liczba k, że dla $n>k$ zachodzi $a_n>r-M$. A zatem $a_n+b_n>r$, skąd wnosimy, że $\lim(a_n+b_n)=\infty$.

4. *Jeśli* $\lim a_n=\infty$ *oraz stale* $b_n\geqq c$, *przy czym* $c>0$, *to* $\lim(a_n\cdot b_n)=\infty$.

Niech bowiem dana będzie liczba $r>0$. Z założenia istnieje takie k, że dla $n>k$ mamy $a_n>(r/c)$. Mnożąc tę nierówność przez nierówność $b_n\geqq c$, otrzymujemy $a_nb_n>r$. Stąd $\lim(a_n\cdot b_n)=\infty$.

Odpowiednikiem tw. (15) jest tw. następujące:

5. *Jeśli* $\lim a_n=\infty$ *oraz* $a_n\leqq b_n$, *to* $\lim b_n=\infty$.

Jeśli bowiem $a_n>r$, to tym bardziej $b_n>r$.

IX. Przykłady. 1) *Jeśli* $c>0$, *to* $\lim\limits_{n=\infty} nc=\infty$.

Wynika natychmiast z 4.

2) *Jeśli* $a>1$, *to* $\lim\limits_{n=\infty} a^n=\infty$.

Kładąc bowiem $c=a-1$, mamy $c>0$, skąd $\lim\limits_{n=\infty} nc=\infty$. Zarazem na mocy nierówności Bernoulliego (§ 1 (1)):

$$a^n=(1+c)^n\geqq 1+nc, \text{ skąd } \lim_{n=\infty} a^n=\infty$$

na mocy 5.

3) *Jeśli* $|q|<1$, *to* $\lim q^n=0$.

Załóżmy najpierw, że $0<q<1$. Wówczas $1/q>1$, a więc $\lim\limits_{n=\infty}(1/q^n)=\infty$. Stąd na mocy tw. 2: $\lim\limits_{n=\infty} q^n=0$.

Wynika stąd, że w ogólnym wypadku, gdy zakładamy jedynie, że $|q|<1$, spełniona jest równość $\lim\limits_{n=\infty}|q|^n=0$, tj. $\lim\limits_{n=\infty}|q^n|=0$. Lecz ta ostatnia równość pociąga $\lim\limits_{n=\infty} q^n=0$ (por. (17)).

4) *Jeśli* $a>0$, *to* $\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Załóżmy najpierw, że $a>1$. Położymy $u_n=\sqrt[n]{a}$. Udowodnimy, że ciąg $\{u_n\}$ jest malejący. Istotnie, ponieważ $a>1$, więc $a^n<a^{n+1}$. Biorąc pierwiastek stopnia $n(n+1)$ obu stron, otrzymamy $\sqrt[n+1]{a}<\sqrt[n]{a}$, tj. $u_n>u_{n+1}$. Zarazem ciąg ten jest ograniczony, ponieważ $u_n>1$. Wnosimy stąd, że jest to ciąg zbieżny (por. VI, tw. 3). Należy dowieść, że granicą tego ciągu jest 1. Położymy $\lim u_n=1+h$. Ponieważ $u_n>1$, więc $h\geqq 0$ (na mocy cytowanego twierdzenia). Udowodnimy, że przypuszczenie, że $h>0$, prowadzi do sprzeczności.

Istotnie nierówność $1+h<\sqrt[n]{a}$ daje $(1+h)^n<a$. Ponieważ zaś $(1+h)^n>1+nh$, dochodzimy do wniosku, że dla każdego n mamy $1+nh<a$, co wobec tego, że $\lim_{n=\infty} nh=\infty$, jest niemożliwe.

Udowodniliśmy więc, że jeśli $a>1$, to $\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a}=1$. Jeśli zaś $0<a\leqq 1$, to $1/a\geqq 1$, a zatem $\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{1/a}=1$, tj. $\lim_{n=\infty}(1/\sqrt[n]{a})=1$. Stąd $1/\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a}=1$, tj. $\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

5) *Jeśli* $|q|<1$, *to* $\lim_{n=\infty} a(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})=\frac{a}{1-q}$.

Jest to wyrażenie na sumę postępu geometrycznego o ilorazie bezwzględnie mniejszym od jedności.

Mamy bowiem $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$ oraz $\lim q^n=0$ (por. 3).

6) *Jeśli* $a>0$ *i jeśli* $\{r_n\}$ *jest ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do* 0, *to* $\lim_{n=\infty} a^{r_n}=1$.

Jest to uogólnienie wzoru 4, które łatwo z niego wyprowadzić.

X. Liczba e. Udowodnimy istnienie $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Granicę tę oznaczać będziemy symbolem e.

Położymy $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Mamy więc $a_1=2$, $a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, $a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}=2\frac{10}{27}$. Udowodnimy, że ciąg ten jest rosnący. Zastosujmy w tym celu wzór na dwumian Newtona (§ 1, III):

$$a_n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}+\ldots+\frac{(1-\frac{1}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{n-1}{n})}{n!},$$

stąd $a_{n+1}=$

$$=1+1+\frac{1-\frac{1}{n+1}}{2!}+\frac{(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})}{3!}+\ldots+\frac{(1-\frac{1}{n+1})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{n-1}{n+1})}{n!}+$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{n+1})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{n}{n+1})}{(n+1)!}.$$

Widzimy więc, że składniki sumy tworzącej a_n są $\leqq$ odpowiednio od pierwszych $n+1$ składników tworzących a_{n+1}. Stąd $a_n<a_{n+1}$.

Ciąg jest więc rosnący. Jest przy tym ograniczony, bowiem

$$a_n<2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

ponieważ (por. IX, 5)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Ciąg $\{a_n\}$, jako rosnący ograniczony, jest zbieżny. Istnienie więc liczby e zostało udowodnione. W przybliżeniu $e=2{,}718\ldots$ Można też dowieść (jak okażemy później), że

$$e=\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right).$$

Liczba e odgrywa dużą rolę w analizie. W szczególności służy ona jako podstawa logarytmów (tzw. naturalnych).

Udowodnimy jeszcze, że

$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}. \tag{25}$$

Istotnie, mamy $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$, a więc

$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e},$$

bo $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=1$.

XI*. Ciągi średnich arytmetycznych i średnich geometrycznych danego ciągu. Mając dany ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, weźmy pod uwagę ciąg średnich arytmetycznych:

$$a_1, \quad \frac{a_1+a_2}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}, \ldots$$

1. *Jeśli* $\lim_{n=\infty} a_n = g$, *to* $\lim_{n=\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = g$. *Przy tym twierdzenie to zachodzi również dla* $g = \pm\infty$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że g jest liczbą skończoną. Dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje więc takie k, że dla każdego $n > k$ spełnione są nierówności:

$$g-\varepsilon < a_{k+1} < g+\varepsilon, \quad g-\varepsilon < a_{k+2} < g+\varepsilon, \ldots, \quad g-\varepsilon < a_n < g+\varepsilon.$$

Dodając stronami układ tych $n-k$ nierówności, otrzymujemy:

$$g-\varepsilon < \frac{a_{k+1}+\ldots+a_n}{n-k} < g+\varepsilon, \text{ tj. } (g-\varepsilon)\frac{n-k}{n} < \frac{a_{k+1}+\ldots+a_n}{n} < (g+\varepsilon)\frac{n-k}{n}.$$

Zarazem $\lim_{n=\infty} \frac{a_1+\ldots+a_k}{n} = 0$, a więc $-\varepsilon < \frac{a_1+\ldots+a_k}{n} < \varepsilon$ dla dostatecznie dużych n. Stąd

$$(g-\varepsilon)\frac{n-k}{n} - \varepsilon < \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} < (g+\varepsilon)\frac{n-k}{n} + \varepsilon.$$

Ponieważ zaś $\lim_{n=\infty} \frac{n-k}{n} = 1$, więc dla dostatecznie dużych n mamy

$$g-3\varepsilon < \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} < g+3\varepsilon.$$

Oznacza to, że $\lim_{n=\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = g$.

Załóżmy obecnie, że $g=\infty$ (dowód dla $g=-\infty$ jest analogiczny). Dla danej liczby $r>0$ istnieje więc takie k, że $a_{k+1} > r$, $a_{k+2} > r, \ldots$ A zatem dla każdego $n > k$ mamy $a_{k+1}+\ldots+a_n > (n-k)r$, skąd

$$\frac{a_{k+1}+\ldots+a_n}{n} > \frac{n-k}{n} r.$$

Ponieważ zaś dla dużych n jest $\frac{a_1+\ldots+a_k}{n} > -\frac{r}{2}$, więc

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} > \frac{n-k}{n} r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} - \frac{k}{n} r,$$

skąd dla dostatecznie dużych n otrzymujemy $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} > \frac{r}{3}$. Wnosimy stąd, że $\lim_{n=\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = \infty$.

Uwaga. Tw. odwrotne nie jest prawdziwe: ciąg może być rozbieżny, a ciąg jego średnich arytmetycznych zbieżny. Np. ciąg 1,0,1,0,... jest rozbieżny, a ciąg jego średnich arytmetycznych jest zbieżny do 1/2.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla średnich geometrycznych:

2. *Jeśli* $a_n > 0$ *i* $\lim_{n=\infty} a_n = g$ (*g skończone lub nieskończone*), *to*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = g.$$

Dowód tego twierdzenia przeprowadzić można w sposób zupełnie podobny do dowodu tw. 1. Można również tw. 2 wyprowadzić z tw. 1 przez logarytmowanie (opierając się na ciągłości funkcji $\log x$, ob.§ 5, V).

3. *Jeśli* $\lim_{n=\infty} (a_{n+1}-a_n) = g$, *to* $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = g$.

Istotnie połóżmy $b_n = a_n - a_{n-1}$ dla $n>1$ oraz $b_1 = a_1$. Mamy więc

$$\lim_{n=\infty} b_n = g \text{ oraz } \frac{b_1+\ldots+b_n}{n} = \frac{a_n}{n}.$$

Stąd $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = g$ na mocy tw. 1.

4. *Jeśli* $a_n > 0$ *i* $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, *to* $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

Twierdzenie to otrzymujemy z tw. 2, kładąc $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ dla $n>1$ oraz $b_1 = a_1$. Bowiem $\sqrt[n]{b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n} = \sqrt[n]{a_n}$.

Przykłady. 1) Kładąc $a_n = n$, mamy $\lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Stąd $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2) $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, bo $\lim_{n=\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n=\infty} (n+1) = \infty$.

3) Przykład ciągu 1, 1, 1/2, 1/2, 1/4, 1/4,... wykazuje, że może istnieć granica $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n}$, mimo że nie istnieje granica $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Zadania do § 2.

1. Obliczyć granice:

$$\lim_{n=\infty}\frac{n}{n+1},\quad \lim_{n=\infty}\frac{5n+1}{7n-2},\quad \lim_{n=\infty}\frac{2n^2+5}{3n^3-1},\quad \lim_{n=\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}.$$

2. Niech dany będzie ciąg $\{a_n\}$ zbieżny. Udowodnić, że jeśli w tym ciągu dokonać zamiany skończonej ilości wyrazów przez inne, to ciąg w ten sposób otrzymany jest również zbieżny i do tej samej granicy, co ciąg dany.

Podobnie: skreślenie lub dołączenie do ciągu skończonej ilości wyrazów nie ma wpływu ani na zbieżność ciągu, ani na wartość jego granicy.

3. Dowieść, że jeśli $\lim_{n=\infty} a_n = 0$ i jeśli ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, to $\lim_{n=\infty} a_n b_n = 0$.

4. Dowieść, że jeśli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy, to i ciąg $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ jest zbieżny do tej granicy.

5. Udowodnić następujące uogólnienie twierdzenia o granicy podciągów (VI, 1): jeśli $\lim_{n=\infty} a_n = g$ (przy czym g ma wartość skończoną lub nieskończoną) oraz $\lim_{n=\infty} m_n = \infty$, to $\lim_{n=\infty} a_{m_n} = g$.

6. Obliczyć $\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$.

7. Określamy ciąg $\{a_n\}$ indukcyjnie jak następuje:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}.$$

Dowieść, że $\lim_{n=\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

8. Niech dany będzie ciąg ograniczony $\{a_n\}$. Udowodnić, że wśród liczb, stanowiących granice podciągów zbieżnych tego ciągu, istnieje liczba największa oraz liczba najmniejsza (liczby te noszą nazwę *limes superior* oraz *limes inferior* ciągu $\{a_n\}$, czyli granica górna wzgl. dolna ciągu $\{a_n\}$).

Udowodnić, że na to, aby ciąg był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby jego granica górna równała się granicy dolnej.

Dowieść, że jeśli $c = \limsup a_n$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że dla $n > k$ zachodzi nierówność $a_n < c + \varepsilon$ i że przy tym dla nieskończenie wielu wskaźników m zachodzi nierówność $a_m > c - \varepsilon$.

9. Udowodnić, że dla każdego ciągu przedziałów domkniętych, z których każdy następny jest zawarty w poprzednim, istnieje przynajmniej jeden punkt wspólny (twierdz. Ascoliego).

W twierdzeniu powyższym rozważa się przedziały domknięte, tj. przedziały wraz z końcami; wykazać na przykładzie, że twierdzenie to nie zachodzi dla przedziałów otwartych (tj. przedziałów, do których końce nie są zaliczone).

10. Znaleźć granicę ciągu $\{a_n\}$ określonego przez indukcję:

$$a_1 = \sqrt{c},\quad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}.$$

11. Dowieść, że jeśli $\lim_{n=\infty} a_n = g$ oraz $\lim_{n=\infty}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \infty$, przy czym stale $b_n \geqq 0$, to

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = g.$$

12. Dowieść, że jeśli $\lim_{n=\infty}\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = g$ oraz $\lim_{n=\infty} v_n = \infty$, przy czym ciąg $\{v_n\}$ jest rosnący, to $\lim_{n=\infty}\frac{u_n}{v_n} = g$.

(Podstawić w zadaniu poprzednim: $a_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}}$, $b_n = v_n - v_{n-1}$)

13. *Trójkąt Pascala* [1]. Rozważamy następującą tablicę (czyli ciąg podwójny $\{a_{nk}\}$):

1 1 1 1 1 ...
1 2 3 4 5 ...
1 3 6 10 15 ...
1 4 10 20 35 ...
1 5 15 35 70 ...
.....

[1] B. Pascal, matematyk francuski, 1623—1662, znany z prac, które zapoczątkowały Rachunek Prawdopodobieństwa. Poprzednik Newtona w niektórych zagadnieniach Analizy.

Tablica ta jest określona jak następuje: pierwszy wiersz składa się z samych jedynek, tj. $a_{1,k}=1$; k-ty wyraz n-tego wiersza jest sumą pierwszych k wyrazów $n-1$-ego wiersza, tj.

$$a_{nk}=a_{n-1,1}+a_{n-1,2}+\ldots+a_{n-1,k}.$$

Dowieść, że

$$a_{nk}=\frac{(k+n-2)!}{(k-1)!\,(n-1)!}$$

oraz że wyrazy $a_{n,1}$, $a_{n-1,2},\ldots,a_{1,n}$ stanowią kolejne współczynniki rozwinięcia Newtona wyrażenia $(a+b)^{n-1}$ (są to, jak widać, wyrazy tablicy położone na prostej łączącej n-ty wyraz pierwszego wiersza z pierwszym wyrazem n-tego wiersza).

14. Dowieść, że $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

15. Dowieść, że jeśli ciąg liczb wymiernych $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ (gdzie p_n i q_n są liczbami naturalnymi) zmierza do liczby niewymiernej, to

$$\lim_{n=\infty}p_n=\infty=\lim_{n=\infty}q_n.$$

§ 3. Szeregi nieskończone

I. Definicje i przykłady. Utwórzmy dla danego ciągu nieskończonego $a_1, a_2,\ldots, a_n,\ldots$, następujący ciąg nieskończony:

(1) $$s_1=a_1,\ s_2=a_1+a_2,\ldots,\ s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\ldots$$

Jeśli ciąg $s_1, s_2,\ldots, s_n,\ldots$ posiada granicę, to granicę tę oznaczamy symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n=\infty}s_n$$

i nazywamy ją *sumą szeregu nieskończonego* $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$

W tym wypadku mówimy też, że *szereg jest zbieżny*. Jeśli granica ta nie istnieje, to szereg nazywamy *rozbieżnym*.

W wypadku, gdy wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$, poczynając od pewnego k, są $=0$, mamy do czynienia ze zwykłą sumą skończonej ilości składników. Suma szeregu nieskończonego jest więc uogólnieniem dodawania na nieskończoną ilość składników (co uwydatnione jest w znakowaniu). W odróżnieniu jednak od dodawania skończonej ilości składników, dodawanie nieskończonej ilości składników nie zawsze jest wykonalne, tj. ciąg (1) nie zawsze jest zbieżny (nawet gdy uwzględniać granice nieskończone).

Podamy w tym celu parę przykładów.

Szereg geometryczny $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$ o ilorazie czyniącym zadość nierówności $|q|<1$ jest zbieżny. Mianowicie (§ 2, IX, 5):

$$a+aq+aq^2+\ldots=\frac{a}{1-q}.$$

Szereg $1+1+1+\ldots$ jest rozbieżny do ∞, bowiem $s_n=n$.

Szereg $1-1+1-1+\ldots$ nie posiada ani właściwej, ani niewłaściwej granicy, ciąg (1) w tym wypadku bowiem jest to ciąg: $1, 0, 1, 0,\ldots$

Ciąg $\{s_n\}$ nazywać będziemy ciągiem *sum częściowych* danego szeregu nieskończonego.

Przez *n-tą resztę* szeregu $a_1+a_2+\ldots$ rozumiemy szereg

(2) $$r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots=\sum_{m=n+1}^{\infty}a_m.$$

Jeśli szereg $a_1+a_2+\ldots$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n=\infty}r_n=0$.

Zauważmy przede wszystkim, że jeśli szereg $a_1+a_2+\ldots$ jest zbieżny, to i szereg (2) jest zbieżny przy każdej wartości n. Bowiem

$$r_n=\lim_{k=\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k})=\lim_{k=\infty}s_{n+k}-s_n=\sum_{m=1}^{\infty}a_m-s_n,$$

skąd $\lim\limits_{n=\infty}r_n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m-\lim\limits_{n=\infty}s_n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m-\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m=0.$

II. Ogólne własności szeregów. Podamy obecnie kilka własności szeregów nieskończonych, które są bezpośrednimi konsekwencjami odpowiednich własności ciągów nieskończonych.

1. *Warunek Cauchy'ego. Na to, żeby szereg* $a_1+a_2+\ldots$ *był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby dla każdej liczby* $\varepsilon>0$ *istniała taka liczba* k, *że dla każdego* m *spełniona jest nierówność*

(3) $$|a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+m}|<\varepsilon.$$

Zbieżność szeregu danego oznacza bowiem to samo, co zbieżność ciągu jego sum częściowych $s_1, s_2, \ldots$, na mocy zaś tw. Cauchy'ego (§ 2, VII) na to, żeby ten ciąg był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego $\varepsilon > 0$ istniało takie k, żeby dla każdego m spełniona była nierówność $|s_{k+m} - s_k| < \varepsilon$, tj. żeby spełniona była nierówność (3).

2. *Jeśli szereg* $a_1 + a_2 + \ldots$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n=\infty} a_n = 0$.

Bowiem $a_n = s_{n+1} - s_n$. Więc $\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} s_{n+1} - \lim_{n=\infty} s_n = 0$, ponieważ $\lim_{n=\infty} s_{n+1} = \lim_{n=\infty} s_n$.

Uwaga. Tw. 2 nie daje się odwrócić. *Istnieją bowiem szeregi rozbieżne o składniku dążącym do* 0. Takim jest szereg harmoniczny

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Istotnie $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2}$,

tj. $s_{2n+1} - s_{2n} > \frac{1}{2}$. Stąd $s_{2n} > \frac{n}{2}$. A zatem $\lim_{n=\infty} s_{2n} = \infty$, skąd wnosimy, że ciąg sum częściowych szeregu harmonicznego, a zatem sam szereg — jest rozbieżny. Jest to szereg rozbieżny do ∞.

Szereg nazywamy *ograniczonym*, jeśli ciąg jego sum częściowych jest ograniczony, tj. jeśli istnieje liczba M taka, że $M > |s_n|$ dla każdego n.

3. *Każdy szereg zbieżny jest ograniczony.*

Jest to natychmiastowa konsekwencja tw. § 2, III.

Odnośnie działań na szeregach podamy obecnie dwa twierdzenia:

4. *Jeśli szeregi* $a_1 + a_2 + \ldots$ *i* $b_1 + b_2 + \ldots$ *są zbieżne, to*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Bowiem $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n=\infty}(a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n) =$

$$= \lim_{n=\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \lim_{n=\infty}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dowód dla różnicy jest analogiczny.

5. *Jeśli szereg* $a_1 + a_2 + \ldots$ *jest zbieżny, to* $\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

W szczególności $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bowiem $\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = \lim_{n=\infty}(c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \ldots + c \cdot a_n) =$

$$= c \cdot \lim_{n=\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

III. Szeregi naprzemienne. Twierdzenie Abela. Szeregiem naprzemiennym nazywamy szereg postaci

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots, \text{ gdzie } a_n \geqq 0. \tag{4}$$

Tw. 1. Szereg naprzemienny (4), spełniający warunki

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots \text{ oraz } \lim_{n=\infty} a_n = 0, \tag{5}$$

jest zbieżny. Przy tym sumy częściowe $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \pm a_n$ *czynią zadość nierówności*

$$s_{2n} \leqq a_1 - a_2 + a_3 - \ldots \leqq s_{2n+1}. \tag{6}$$

Istotnie ciąg sum częściowych o wskaźnikach parzystych jest rosnący (w szerszym sensie), bowiem

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}), \text{ zaś } a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqq 0.$$

Zarazem jest to ciąg ograniczony, bo

$$s_{2n} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + a_{2n}] \leqq a_1.$$

A zatem jest to ciąg zbieżny. Niech więc $\lim_{n=\infty} s_{2n} = g$. Aby dowieść, że szereg (4) jest zbieżny, wystarczy wykazać, że $\lim_{n=\infty} s_{2n+1} = g$.

Otóż $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, skąd $\lim_{n=\infty} s_{2n+1} = \lim_{n=\infty} s_{2n} + \lim_{n=\infty} a_{2n+1} = g$, bo $\lim_{n=\infty} a_{2n+1} = 0$, w myśl (5).

Wreszcie podwójna nierówność (6) wynika stąd, że ciąg $\{s_{2n}\}$ jest rosnący, a ciąg $\{s_{2n+1}\}$ malejący (por. § 2, VI, tw. 3).

Przykłady. Szereg (anharmoniczny)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \tag{7}$$

jest zbieżny. Sumą jego jest, jak później okażemy, $\log_e 2$.

Zbieżny jest również szereg (którego sumą jest $\frac{\pi}{4}$):

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \tag{8}$$

Tw. 2 (Abela[1]). Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ *spełnia warunki (5), szereg zaś (zbieżny lub rozbieżny)* $b_1+b_2+\ldots$ *jest ograniczony, to szereg*

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n+\ldots \tag{9}$$

jest zbieżny.

Położymy $s_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$. Na mocy założenia istnieje takie M, że $|s_n|<M$.

Aby dowieść, że szereg (9) jest zbieżny, należy oszacować sumę

$$a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1}+\ldots+a_nb_n$$

dla $n>k$. Zauważmy w tym celu przede wszystkim, że

$$-2M<b_m+b_{m+1}+\ldots+b_n<2M \tag{10}$$

dla każdego m i $n\geqq m$. Bo

$$|b_m+\ldots+b_n|=|s_n-s_{m-1}|\leqq|s_n|+|s_{m-1}|<2M.$$

Otóż

$$\begin{aligned}a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1}+\ldots+a_nb_n &= a_k(b_k+\ldots+b_n)-a_k(b_{k+1}+\ldots+b_n)+\\ &+a_{k+1}(b_{k+1}+\ldots+b_n)-a_{k+1}(b_{k+2}+\ldots+b_n)+\ldots+a_nb_n=\\ &=a_k(b_k+\ldots+b_n)+(a_{k+1}-a_k)(b_{k+1}+\ldots+b_n)+\ldots+(a_n-a_{n-1})b_n.\end{aligned} \tag{11}$$

Stąd na mocy (10)

$$a_kb_k+\ldots+a_nb_n\leqq 2M[a_k+(a_{k+1}-a_k)+\ldots+(a_n-a_{n-1})]=2M\cdot a_n\leqq 2M\cdot a_k.$$

Analogicznie $a_kb_k+\ldots+a_nb_n\geqq -2M\cdot a_k$, a zatem

$$|a_kb_k+\ldots+a_nb_n|\leqq 2M\cdot a_k. \tag{12}$$

Niech więc dane będzie $\varepsilon>0$. Na mocy równości (5) istnieje takie k, że $a_k<\frac{\varepsilon}{2M}$. Jak udowodniliśmy, dla każdego $n>k$ zachodzi nierówność (12), tj. $|a_kb_k+\ldots+a_nb_n|<\varepsilon$. Zgodnie z tw. Cauchy'ego (N° II, tw. 1) oznacza to, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ jest zbieżny.

Uwagi. 1) Ze wzoru (12) wynika, że

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\right|\leqq 2M\cdot a_1. \tag{13}$$

Na mocy bowiem wzoru (12) nierówność $|a_1b_1+\ldots+a_nb_n|\leqq 2M\cdot a_1$ zachodzi dla każdego n.

2) Tw. 1 jest szczególnym przypadkiem tw. 2. Mianowicie, gdy za ciąg $\{b_n\}$ przyjmujemy ciąg 1, −1, 1, −1,...

[1] Abel (1802—1829) — słynny algebraik norweski.

3) We wzorze (11) zastosowaliśmy tzw. *przekształcenie Abela*. Zapisać je można też w sposób następujący:

$$\begin{aligned}&u_1v_1+\ldots+u_mv_m=\\ &u_1(v_1-v_2)+(u_1+u_2)(v_2-v_3)+\ldots+(u_1+\ldots+u_{m-1})(v_{m-1}-v_m)+\\ &+(u_1+\ldots+u_m)v_m.\end{aligned}$$

IV. Szeregi o składnikach dodatnich. Kryteria zbieżności d'Alemberta i Cauchy'ego. Przy założeniu, że wszystkie składniki szeregu $a_1+a_2+\ldots$ są dodatnie, ciąg jego sum częściowych jest rosnący. Stąd wynika natychmiast:

1. Szereg o składnikach dodatnich jest bądź zbieżny, bądź rozbieżny do ∞.

2. Twierdzenie o porównywaniu szeregów. Jeśli stale $0\leqq b_n\leqq a_n$ *i jeśli szereg* $a_1+a_2+\ldots$ *jest zbieżny, to również zbieżny jest szereg* $b_1+b_2+\ldots$ *Przy tym* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\leqq\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Niech $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $t_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$. Mamy więc $t_n\leqq s_n$. Ponieważ zaś (por. § 2, VI, 3) $s_n\leqq\lim_{n=\infty}s_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, więc $t_n\leqq\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Nierówność ta z jednej strony świadczy o tym, że szereg $b_1+b_2+\ldots$ jest ograniczony, a więc zbieżny (na mocy tw. 1); z drugiej strony pociąga ona nierówność $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\leqq\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (na mocy § 2, VI, 3).

Tw. 2 daje często możność dowodzenia w sposób prosty zbieżności szeregu przez porównanie go z szeregiem, którego zbieżność jest wiadoma. Np. aby dowieść, że szereg

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots \tag{14}$$

jest zbieżny, porównywamy go z szeregiem

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots \tag{15}$$

Mamy bowiem $\frac{1}{2^2}\leqq\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{3^2}\leqq\frac{1}{2\cdot 3}$, ..., $\frac{1}{(n+1)^2}\leqq\frac{1}{n(n+1)}$.

Zarazem zbieżność szeregu (15) wynika natychmiast z tożsamości:

[1] Okażemy później (§ 11, (42′)), że $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n},$$

skąd $\lim_{n=\infty} s_n=1$.

Na porównaniu szeregu danego z szeregiem geometrycznym oparte są dwa następujące kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich.

3. *Kryterium d'Alemberta*[1]. *Szereg* $a_1+a_2+\ldots$ *o składnikach dodatnich, czyniących zadość warunkowi*

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1, \tag{16}$$

jest zbieżny.

Niech bowiem h spełnia nierówność $\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<h<1$. A zatem istnieje k takie, że dla $n\geqq k$ mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n}<h$, czyli $a_{n+1}<a_n\cdot h$.

A więc szereg $a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots$ ma składniki odpowiednio $\leqq$ od składników szeregu geometrycznego $a_k+a_k\cdot h+a_k\cdot h^2+\ldots$ Ten ostatni jest zbieżny, bo $0<h<1$. Na mocy tw. 2 jest więc zbieżny szereg $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, a zatem i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. *Kryterium Cauchy'ego. Szereg* $a_1+a_2+\ldots$ *o składnikach dodatnich, czyniących zadość warunkowi*

$$\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}<1, \tag{17}$$

jest zbieżny.

Podobnie jak poprzednio, istnieje takie $h<1$ i takie k, że dla $n\geqq k$ zachodzi $\sqrt[n]{a_n}<h$, tj. $a_n<h^n$. Porównując szereg $a_k+a_{k+1}+\ldots$ z szeregiem geometrycznym $h^k+h^{k+1}+\ldots$, wnosimy ze zbieżności drugiego o zbieżności pierwszego.

5. *Kryteria rozbieżności. Jeśli szereg* $a_1+a_2+\ldots$ *o składnikach dodatnich czyni zadość jednej z dwóch nierówności*

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \quad \textit{lub} \quad \lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}>1, \tag{18}$$

to szereg jest rozbieżny.

Jeśli bowiem pierwsza z nierówności (18) ma miejsce, to dla dostatecznie dużych n mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, tj. $a_{n+1}>a_n$, więc ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do 0, a co za tym idzie — szereg $a_1+a_2+\ldots$ jest rozbieżny. Jeśli druga nierówność (18) zachodzi, to dla dostatecznie dużych n mamy $\sqrt[n]{a_n}>1$, tj. $a_n>1$ i również ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do 0.

[1] D'Alembert (1717—1783) — słynny matematyk i encyklopedysta francuski.

Uwaga. Zdarzyć się może, że $\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1=\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{a_n}$. Kryteria nasze nie dają wówczas możności rozstrzygnięcia, czy szereg dany jest zbieżny czy rozbieżny. Mamy wówczas do czynienia z tzw. wypadkiem "wątpliwym"; mówimy też, że szereg nie reaguje na powyższe kryteria.

V. Zastosowania i przykłady. 1. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{n!}$ *dla* $c>0$ *jest zbieżny.*

Istotnie $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{c^{n+1}}{c^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{c}{n+1}$, skąd $\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$. Na mocy kryterium d'Alemberta wnioskujemy, że szereg dany jest zbieżny.

2. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ *jest zbieżny.*

Niech $a_n=\frac{n!}{n^n}$. Stąd $\frac{a_{n+1}}{a_n}=(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$. A zatem

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\lim_{n=\infty}(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1.$$

3. $\lim_{n=\infty}\frac{c^n}{n!}=0=\lim_{n=\infty}\frac{n!}{n^n}$.

Bo ogólny składnik a_n szeregu zbieżnego jest zbieżny do 0.

Przyjmując jako definicję, że ciąg $\{a_n\}$ rozbieżny do ∞ "*szybciej dąży do* ∞" niż ciąg $\{b_n\}$, gdy $\lim_{n=\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$, możemy wzór 3 wysłowić w taki sposób: $n!$ szybciej dąży do ∞ niż c^n, zaś n^n szybciej niż silnia.

4. *Szereg harmoniczny* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ *nie reaguje na kryterium d'Alemberta. To samo dotyczy szeregu* (14).

Bowiem $\lim_{n=\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n=\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})}=1$.

Jak wiemy, pierwszy z wymienionych szeregów jest rozbieżny, a drugi zbieżny.

5. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)|}{n!} c^n$ *jest zbieżny dla* $0<c<1$.

Bo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x-n|}{n+1} c = \frac{\left|\frac{x}{n}-1\right|}{1+\frac{1}{n}} c$. Stąd $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$.

Ze zbieżności powyższego szeregu wnosimy, że

6, $\lim_{n=\infty} \frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!} c^n = 0$ *dla* $|c|<1$.

7. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{c^n}$ *jest zbieżny dla* $c>1$ (p całkowite). *Stąd* $\lim_{n=\infty} \frac{n^p}{c^n} = 0$.

Bowiem $\lim_{n=\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \cdot \frac{c^n}{c^{n+1}} = \frac{1}{c} < 1$.

8. Z rozbieżności szeregu harmonicznego i z kryterium Cauchy'ego wynika z łatwością, że $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Ciąg $\sqrt[n]{n}$ jest bowiem dla dostatecznie dużych n malejący i złożony z wyrazów >1. Istnieje więc $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} \geqq 1$. Gdyby przypuścić, że $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} > 1$, to $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{1/n} < 1$ i na mocy kryterium Cauchy'ego wynikałoby, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest zbieżny.

*Uwaga.** Kryterium Cauchy'ego jest mocniejsze niż kryterium d'Alemberta. Jeśli bowiem istnieje granica $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, to istnieje również granica $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n}$ (i te granice są sobie równe, ob. § 2, XI, 4). Może jednak istnieć ta ostatnia granica, mimo że pierwsza nie istnieje.

V'*. Inne kryteria zbieżności. *Twierdzenie Kummera*[1]. *Na to, żeby szereg* $a_1+a_2+\ldots$ *o składnikach dodatnich był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby istniał taki ciąg liczb dodatnich* $b_1, b_2, \ldots$, *że*

(18') $$\lim_{n=\infty} \left(b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}\right) > 0.$$

[1] Kummer — matematyk niemiecki XIX wieku, wybitny badacz w dziedzinie Teorii liczb.

Aby dowieść, że warunek sformułowany w twierdzeniu jest konieczny, załóżmy, że szereg nasz jest zbieżny i położymy $b_n = \frac{s-s_n}{a_n}$, gdzie s oznacza sumę szeregu, zaś s_n jego n-tą sumę częściową. Wówczas

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{s-s_n}{a_{n+1}} - \frac{s-s_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1.$$

A zatem warunek (18') jest spełniony.

Udowodnimy obecnie, że warunek ten jest dostateczny. Załóżmy w tym celu, że nierówność (18') zachodzi. Istnieje więc takie $h>0$ i taki wskaźnik k, że dla $n \geqq k$ spełniona jest nierówność

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > h.$$

Mamy więc

$$\begin{cases} h \cdot a_{k+1} < b_k a_k - b_{k+1} a_{k+1} \\ h \cdot a_{k+2} < b_{k+1} a_{k+1} - b_{k+2} a_{k+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h \cdot a_n < b_{n-1} a_{n-1} - b_n a_n. \end{cases}$$

Dodając stronami, otrzymujemy

$$h(s_n - s_k) < b_k a_k - b_n a_n < b_k a_k, \quad \text{skąd} \quad s_n < s_k + \frac{b_k a_k}{h}.$$

Ostatnia nierówność dowodzi, że szereg $a_1+a_2+\ldots$ jest ograniczony. Szereg ten jest więc zbieżny jako szereg ograniczony o składnikach dodatnich.

Jako wniosek z tw. Kummera, otrzymujemy następujące *kryterium Raabego: szereg* $a_1+a_2+\ldots$ *o składnikach dodatnich, czyniących zadość warunkowi*

(18'') $$\lim_{n=\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1,$$

jest zbieżny.

Istotnie, połóżmy $b_n = n$. Należy dowieść, że warunek (18'') pociąga za sobą (18'). Otóż

$$\lim_{n=\infty} \left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}\right) = \lim_{n=\infty} \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1\right) = \lim_{n=\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 > 0.$$

VI. Szeregi bezwzględnie zbieżne. Szereg $a_1+a_2+\ldots$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym, jeżeli szereg $|a_1|+|a_2|+\ldots$ jest zbieżny. Szereg zbieżny, ale nie bezwzględnie zbieżny, nazywamy *warunkowo* zbieżnym.

1. *Jeśli szereg* $a_1+a_2+\ldots$ *jest zbieżny bezwzględnie, to jest też zbieżny w zwykłym tego słowa znaczeniu.* Ponadto

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{19}$$

Zgodnie z tw. Cauchy'ego (II, 1) należy oszacować wyrażenie $a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n$. Otóż

$$|a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n| \leqq |a_k|+|a_{k+1}|+\ldots+|a_n| \leqq \sum_{i=k}^{\infty} |a_i|.$$

Ostatnia zaś suma jako reszta r_{k-1} szeregu zbieżnego dąży do 0, gdy k dąży do ∞ (por. N⁰ I). A zatem dla $\varepsilon>0$ istnieje takie k, że $r_{k-1}<\varepsilon$, skąd $|a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n|<\varepsilon$ dla każdego $n>k$.

Zbieżność szeregu $a_1+a_2+\ldots$ jest więc udowodniona. Zarazem kładąc $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ oraz $t_n=|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$, mamy $|s_n|\leqq t_n$, skąd, przechodząc do granicy, otrzymujemy $|\lim s_n|=\lim|s_n|\leqq\lim t_n$, tj. wzór (19).

Przykłady. Szereg geometryczny $a+aq+aq^2+\ldots$, gdzie $|q|<1$, jest zbieżny bezwzględnie, bowiem szereg $|a|+|aq|+|aq^2|+\ldots$ jest zbieżny (ob. N⁰ I).

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdego x (por. V, 1; jak okażemy później, jego suma $=e^x$).

Szereg anharmoniczny (7) jest zbieżny warunkowo, bowiem szereg bezwzględnych wartości jego składników jest rozbieżny (jest to szereg harmoniczny, ob. N⁰ II).

Zajmiemy się obecnie zagadnieniem *przemienności* szeregów nieskończonych. Jak wiadomo, suma skończonej ilości składników jest przemienna, tj. nie zależy od porządku składników. Okażemy, że własność ta przenosi się również na szeregi bezwzględnie zbieżne; natomiast nie przenosi się na szeregi warunkowo zbieżne. Wymaga to jednak uprzedniego sprecyzowania, co należy rozumieć przez zmianę porządku składników, gdy ilość tych składników jest nieskończona (biorąc pod uwagę, że niektóre składniki mogą się powtarzać dowolną ilość razy).

Przez *permutację* ciągu liczb naturalnych rozumiemy taki ciąg liczb naturalnych $m_1, m_2,\ldots$, w którym każda liczba naturalna występuje dokładnie jeden raz. Jeśli $m_1, m_2,\ldots$ jest permutacją ciągu liczb naturalnych, to mówimy, że szereg $a_{m_1}+a_{m_2}+\ldots+a_{m_n}+\ldots$ powstał z szeregu $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ przez zmianę porządku jego składników.

2. *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest przemienny.*

Inaczej mówiąc, *jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest bezwzględnie zbieżny i jeśli* $m_1, m_2,\ldots$ *jest permutacją ciągu liczb naturalnych, to*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{20}$$

Niech $\varepsilon>0$. Wobec zbieżności szeregu $|a_1|+|a_2|+\ldots$, istnieje takie k, że

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon. \tag{21}$$

Ponieważ ciąg $\{m_n\}$ zawiera wszystkie liczby naturalne, więc istnieje takie r, że wśród liczb $m_1, m_2,\ldots, m_r$ występują liczby 1, 2, 3,... aż do k. Ponieważ zaś każda liczba naturalna tylko raz występuje w ciągu $\{m_n\}$, przeto dla każdego $s>r$ mamy $m_s>k$. Jeśli więc przy danym $n>r$ z układu $m_1, m_2,\ldots, m_r,\ldots, m_n$ skreślimy liczby $1, 2,\ldots, k$, to pozostaną w nim wyłącznie liczby $>k$ (przy tym różne między sobą). A zatem, kładąc $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ i $t_n=a_{m_1}+a_{m_2}+\ldots+a_{m_n}$ i znosząc w różnicy t_n-s_n składniki o równych wskaźnikach, otrzymamy jako składniki pozostałe jedynie takie składniki, których wskaźniki są $>k$. Wynika stąd (i ze wzoru na bezwzględną wartość sumy), że

$$|t_n-s_n| \leqq \sum_{i=k+1}^{\infty} |a_i|, \text{ skąd } |t_n-s_n|<\varepsilon \text{ na mocy (21).}$$

Ponieważ ta ostatnia nierówność zachodzi dla każdego $n>r$, przeto $\lim_{n=\infty} t_n = \lim_{n=\infty} s_n$. Jest to równoznaczne ze wzorem (20).

Uwaga. Twierdzenie poprzednie nie daje się rozciągnąć na dowolne szeregi zbieżne. Np. w szeregu $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ przestawmy składniki w następujący sposób:

$$1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2k_1-1}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2k_1+1}+\frac{1}{2k_1+3}+\ldots+\frac{1}{2k_2-1}\right)-\frac{1}{6}+\ldots, \tag{22}$$

gdzie liczby $k_1, k_2,\ldots$ są tak dobrane, aby

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2k_1-1}>1,\ldots,\frac{1}{2k_n+1}+\frac{1}{2k_n+3}+\ldots+\frac{1}{2k_{n+1}-1}>1,\ldots$$

Wówczas, jak widać natychmiast, szereg (22) jest rozbieżny do ∞.

Kładąc $c=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$ (jak wiadomo, $c=\log 2$), można łatwo dowieść, że

$$\frac{3}{2}c=c+\frac{1}{2}c=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots$$

Widzimy więc, że przez zmianę porządku składników możemy z szeregu anharmonicznego uzyskać szereg rozbieżny lub też szereg zbieżny do innej granicy. Zachodzi ogólne twierdzenie (Riemanna[1]), którego tu dowodzić nie będziemy, że mając dany szereg zbieżny warunkowo, można przez zmianę porządku jego składników uzyskać szereg rozbieżny lub zbieżny do z góry danej granicy (skończonej lub nieskończonej).

VII. Mnożenie szeregów. *Twierdzenie (Cauchy'ego). Przy założeniu, że szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są bezwzględnie zbieżne, mamy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{23}$$

gdzie

$$\begin{cases} c_1 = a_1 b_1 \\ c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_n b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{24}$$

(tj. suma wskaźników każdego składnika w wierszu n jest $n+1$).

Położmy $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, $t_n = b_1 + \ldots + b_n$, $u_n = c_1 + \ldots + c_n$, tj.

$$u_n = a_1 t_n + a_2 t_{n-1} + a_3 t_{n-2} + \ldots + a_n t_1.$$

Należy oszacować różnicę

$$\begin{aligned} s_n t_n - u_n &= a_1 t_n + a_2 t_n + \ldots + a_n t_n - u_n = \\ &= a_2(t_n - t_{n-1}) + a_3(t_n - t_{n-2}) + \ldots + a_n(t_n - t_1). \end{aligned} \tag{25}$$

Ponieważ szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ są zbieżne, a więc ograniczone, istnieje taka liczba M, że dla każdego j:

$$|t_j| < M \text{ oraz } |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_j| < M. \tag{26}$$

Zarazem dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że warunek $n > m > k$ pociąga za sobą (por. § 2, VII, uw. 2):

[1] Riemann (1826—1866) — słynny z prac z dziedziny geometrii, teorii funkcji analitycznych i teorii liczb.

$$|t_n - t_m| < \varepsilon \text{ oraz } |a_{k+1}| + |a_{k+2}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon. \tag{27}$$

Niech w dalszym ciągu $n > 2k$. Na mocy (25) mamy więc

$$\begin{aligned} |s_n t_n - u_n| \leqq &\left(|a_2| \cdot |t_n - t_{n-1}| + \ldots + |a_k| \cdot |t_n - t_{n-k+1}|\right) + \\ &+ \left(|a_{k+1}| \cdot |t_n - t_{n-k}| + \ldots + |a_n| \cdot |t_n - t_1|\right). \end{aligned}$$

Stosując do pierwszego nawiasu wzór (27), a do drugiego wzór (26), otrzymujemy (biorąc pod uwagę, że $n-k+1 > k$ i $|t_n - t_j| \leqq |t_n| + |t_j| < 2M$):

$$|s_n t_n - u_n| \leqq [|a_2| + \ldots + |a_k|]\varepsilon + [|a_{k+1}| + \ldots + |a_n|] \cdot 2M < M\varepsilon + \varepsilon \cdot 2M,$$

przy czym ostatnia nierówność jest konsekwencją drugich części wzorów (26) i (27).

Udowodniliśmy więc, że nierówność $|s_n t_n - u_n| < 3M\varepsilon$ zachodzi dla każdego $n > 2k$. Oznacza to, że $\lim (s_n t_n - u_n) = 0$. Ponieważ zaś ciągi $\{s_n\}$ i $\{t_n\}$ są zbieżne, przeto $\lim s_n t_n = \lim s_n \cdot \lim t_n$, skąd otrzymujemy $\lim s_n \cdot \lim t_n = \lim s_n t_n = \lim u_n$, tj. wzór (23).

Przykład. Udowodnimy, że $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$.

Ponieważ oba szeregi są bezwzględnie zbieżne, możemy stosować wzór (23). Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 \cdot \frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot 1\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(y^n + \frac{n}{1!} x y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 y^{n-2} + \ldots + x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y+x)^n}{n!} \end{aligned}$$

na mocy dwumianu Newtona.

Dodajmy, że wzór, który udowodniliśmy, wynika też z równości $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ (por. N° VI).

Uwaga. Twierdzenie jest prawdziwe przy założeniu słabszym, mianowicie, że oba szeregi są zbieżne i że jeden z nich (ale niekoniecznie oba) jest zbieżny bezwzględnie. Istotnie w dowodzie naszym jedynie bezwzględna zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ interweniowała.

Jeżeli natomiast oba szeregi są warunkowo zbieżne, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ może być rozbieżny. Świadczy o tym przykład następujący:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = b_n;$$

szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne, natomiast, jak łatwo się przekonać, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest rozbieżny.

Dodajmy (bez dowodu)[1], że jeśli oba szeregi są warunkowo zbieżne, to iloczyn ich otrzymuje się, sumując szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ metodą "pierwszych średnich"; ściślej mówiąc, zachodzi następujące twierdzenie (Cesàro): jeżeli szeregi $a_1+a_2+\ldots$ i $b_1+b_2+\ldots$ są zbieżne, to kładąc $s_n = c_1+c_2+\ldots+c_n$, mamy

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

VIII.* Iloczyny nieskończone. Obok teorii szeregów nieskończonych, stanowiących uogólnienie dodawania na nieskończoną ilość składników, rozważa się jako drugie działanie nieskończone — iloczyny nieskończone. Ograniczymy się tu do podania ich definicji i kilku ważniejszych własności.

Niech dany będzie ciąg nieskończony liczb rzeczywistych różnych od 0: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Utwórzmy ciąg iloczynów:

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = a_1 a_2, \ldots, \quad p_n = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n, \ldots \tag{28}$$

Jeżeli ciąg (28) jest zbieżny, to granicę jego oznaczamy symbolem

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n=\infty} p_n$$

i nazywamy ją iloczynem nieskończonym. Jeżeli ta granica jest różna od 0 (i skończona), to mówimy, że rozważany iloczyn nieskończony jest *zbieżny*.

Czynnikami iloczynu nieskończonego $a_1 a_2 \cdot \ldots$ nazywamy liczby $a_1, a_2, \ldots$ *Iloczynami częściowymi* nazywamy wyrazy ciągu (28).

Przykłady. 1) Iloczyn nieskończony

$$(1+\frac{1}{1})\,(1-\frac{1}{2})\,(1+\frac{1}{3})\,(1-\frac{1}{4})\cdot\ldots$$

jest zbieżny do 1. Istotnie

$$p_{2n} = \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n} = 1, \quad p_{2n+1} = p_{2n}\cdot\frac{2n+2}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}.$$

A zatem $\lim_{n=\infty} p_n = 1$.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n}) = \infty, \tag{2}$$

tzn. rozważany iloczyn nieskończony jest rozbieżny do ∞. Bowiem

[1] Ob. Sierpiński *Analiza* § 84.

$$p_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n} = n+1, \text{ skąd } \lim_{n=\infty} p_n = \infty.$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n}) = 0, \tag{3}$$

tzn. iloczyn nieskończony jest rozbieżny do 0. Bowiem $p_n = \frac{1}{n}$.

4) Iloczyn nieskończony $(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots$ jest rozbieżny, przy tym nie jest rozbieżny ani do 0, ani do nieskończoności. W tym wypadku ciąg iloczynów częściowych oscyluje, przybierając na przemian wartości -1 i $+1$.

1. *Warunek Cauchy'ego. Na to, żeby iloczyn nieskończony* $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots$ *(gdzie* $a_n \neq 0$*) był zbieżny, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istniała taka liczba* k*, że dla każdego* $n > k$ *zachodzi nierówność*

$$|a_k \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_n - 1| < \varepsilon. \tag{29}$$

Aby udowodnić, że warunek Cauchy'ego jest konieczny, załóżmy, że rozważany iloczyn nieskończony jest zbieżny, tj. że

$$\lim_{m=\infty} p_m = p \neq 0. \tag{30}$$

Niech $c = \frac{1}{2}|p|$. Istnieje więc takie j, że dla $m > j$ jest $|p_m| > c$.

Niech dana będzie liczba $\varepsilon > 0$. Na mocy (30) istnieje takie k, że dla $n > k$ mamy $|p_n - p_{k-1}| < c\varepsilon$. Można przy tym założyć, że $k-1 > j$, a zatem, że $|p_{k-1}| > c$. Otrzymujemy więc

$$\left|\frac{p_n}{p_{k-1}} - 1\right| < \frac{c\,\varepsilon}{|p_{k-1}|} < \varepsilon,$$

tj, nierówność (29).

Udowodniliśmy w ten sposób, że warunek Cauchy'ego jest koniecznym warunkiem zbieżności rozważanego iloczynu nieskończonego. Udowodnimy obecnie, że jest on również dostateczny.

Załóżmy więc, że warunek ten jest spełniony. Udowodnimy przede wszystkim, że ciąg $\{p_n\}$ jest ograniczony.

Podstawiając w warunku Cauchy'ego $\varepsilon = 1$, wnosimy, że istnieje taka liczba r, że dla $n > r$ mamy

$$|a_{r+1} \cdot a_{r+2} \cdot \ldots \cdot a_n - 1| < 1, \text{ tj. } \left|\frac{p_n}{p_r} - 1\right| < 1,$$

a więc $|p_n - p_r| < |p_r|$, skąd $|p_n| - |p_r| \leqq |p_n - p_r| < |p_r|$, a zatem $|p_n| < 2|p_r|$. Stąd wnosimy, że ciąg (28) jest ograniczony.

Niech więc M oznacza liczbę spełniającą warunek $M>|p_n|$ dla każdej liczby naturalnej n. Na mocy (29) do danej liczby $\varepsilon>0$ istnieje takie k, że dla $n>k$

$$\left|\frac{p_n}{p_{k-1}}-1\right|<\varepsilon, \tag{31}$$

skąd $|p_n-p_{k-1}|<\varepsilon|p_{k-1}|<\varepsilon M$. Ciąg $\{p_n\}$ jest więc zbieżny. Pozostaje do udowodnienia, że granica jego jest $\neq 0$.

Otóż przypuszczając, że $\lim\limits_{n=\infty} p_n=0$, otrzymalibyśmy ze wzoru (31) (przy stałym k) nierówność $1\leqq\varepsilon$, wbrew założeniu, że ε jest dowolną liczbą dodatnią.

2. *Jeśli iloczyn nieskończony $a_1 a_2\cdot\ldots$ jest zbieżny, to*

$$\lim_{n=\infty} a_n=1.$$

Załóżmy bowiem, że $\lim\limits_{n=\infty} p_n=p\neq 0$. Mamy więc $\lim\limits_{n=\infty} p_{n-1}=p$ i dzieląc przez siebie obie równości otrzymujemy

$$\lim_{n=\infty} a_n=\lim_{n=\infty}\frac{p_n}{p_{n-1}}=\frac{\lim\limits_{n=\infty} p_n}{\lim\limits_{n=\infty} p_{n-1}}=1.$$

Zauważmy, że równość $\lim\limits_{n=\infty} a_n=1$, która, jak dowiedliśmy, jest warunkiem koniecznym zbieżności iloczynu $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, nie jest jednak warunkiem dostatecznym. Świadczą o tym przykłady 2 i 3.

Ze względu na tw. 2 jest rzeczą celową zapisywać czynniki iloczynu nieskończonego w postaci $a_n=1+b_n$. Pozwala to na proste sformułowanie zależności między zbieżnością iloczynu $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ a zbieżnością szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Zachodzi mianowicie twierdzenie następujące:

3. *Przy założeniu, że $b_n>0$ dla każdego n, iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, kiedy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. To samo dotyczy iloczynu $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ (przy założeniu, że $b_n<1$).*

Prosty dowód tego twierdzenia otrzymuje się, opierając się na własnościach funkcji wykładniczej, w szczególności na nierówności $e^x\geqq 1+x$, którą udowodnimy w § 8 (wzór (13′)). Nierówność ta daje natychmiast

$$p_n\leqq e^{s_n},\ \text{gdzie}\ p_n=(1+b_1)\cdot\ldots\cdot(1+b_n),\ s_n=b_1+\ldots+b_n.$$

Ponieważ z drugiej strony, jak widać natychmiast, $1+s_n\leqq p_n$, wnosimy, że ciągi $\{p_n\}$ i $\{s_n\}$ są bądź oba ograniczone, bądź oba nieograniczone. Ponieważ zaś są to ciągi rosnące, przeto bądź oba są zbieżne, bądź oba rozbieżne. Wreszcie ciąg $\{p_n\}$ nie może być zbieżny do 0, bo $p_n>1$.

Pierwsza część naszego twierdzenia jest więc udowodniona.

Nim przejdziemy do dowodu drugiej części, zauważmy, że jeśli iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ jest zbieżny, to zbieżny jest również iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$.

Niech bowiem dane będzie $\varepsilon>0$ i niech k będzie — zgodnie z tw. 1—tak dobrane, aby $(1+|u_k|)(1+|u_{k+1}|)\cdot\ldots\cdot(1+|u_n|)-1<\varepsilon$ dla $n>k$. Ponieważ, jak łatwo sprawdzić,

$$|(1+u_k)\cdot\ldots\cdot(1+u_n)-1|\leqq(1+|u_k|)\cdot\ldots\cdot(1+|u_n|)-1,$$

wnosimy na mocy tw. 1, że iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ jest zbieżny.

Załóżmy teraz, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny. Na mocy pierwszej części naszego twierdzenia zbieżny jest też iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$, a zatem na mocy przed chwilą udowodnionej uwagi, zbieżny jest również iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$.

Pozostaje do udowodnienia, że zbieżność iloczynu $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ pociąga za sobą zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Niech $q_n=(1-b_1)\cdot\ldots\cdot(1-b_n)$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} q_n=q>0$. Ponieważ $q\leqq q_n\leqq e^{-s_n}$, tj. $e^{s_n}\leqq\frac{1}{q}$, przeto ciąg $\{s_n\}$ jest ograniczony, a więc zbieżny.

Iloczyn nieskończony postaci $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ nazywamy *bezwzględnie zbieżnym*, gdy zbieżny jest iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$. Jak przed chwilą dowiedliśmy, zbieżność bezwzględna pociąga za sobą zbieżność w zwykłym sensie. Dowodzi się też, że—podobnie jak dla szeregów — *wartość iloczynu bezwzględnie zbieżnego nie zależy od porządku czynników.*

Zadania do § 3

1. Udowodnić prawo łączności dla szeregów nieskończonych zbieżnych. Podać przykład szeregu rozbieżnego $a_1+a_2+a_3+\ldots$ takiego, że szereg $(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\ldots$ jest zbieżny.

2. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,n!}{n^n}$ jest zbieżny, zaś szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\,n!}{n^n}$ jest rozbieżny.

3. Podać przykład szeregu naprzemiennego rozbieżnego o składniku ogólnym dążącym do 0.

4. Podać przykład szeregu $a_1+a_2+\ldots$ zbieżnego o składnikach dodatnich, dla którego nie istnieje $\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

5. Dowieść, że jeśli szereg $a_1+a_2+\ldots$ o składnikach dodatnich malejących jest zbieżny, to $\lim_{n=\infty} na_n=0$.

6. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ jest zbieżny dla $s>1$, zaś rozbieżny dla $s\leqq 1$.
(Zastosować kryterium Raabego).

7. Dowieść, że jeśli szereg o wyrazach dodatnich $a_1+a_2+\ldots$ jest zbieżny, to zbieżne są również szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n} \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[k]{a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot\ldots\cdot a_{n+k}}.$$

8. Dowieść, że jeśli szereg $a_1+a_2+\ldots$ o wyrazach dodatnich malejących jest zbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ jest zbieżny (tw. o zagęszczaniu Cauchy'ego).

9. Przyjmując wzory

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots \text{ oraz } \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots,$$

sprawdzić wzór $\sin(x+y)=\sin x\,\cos y+\sin y\,\cos x$, stosując twierdzenie o mnożeniu szeregów.

10. Obliczyć iloczyny nieskończone

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right),\quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right).$$

11. Zbadać zbieżność iloczynu $\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})$.

ROZDZIAŁ II

FUNKCJE

§ 4. Funkcje i ich granice

I. Definicje. Jeżeli każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowana jest jakaś liczba $y=f(x)$, to mówimy, że określona jest funkcja f na zbiorze liczb rzeczywistych.

Np. przyporządkowując liczbie x jej kwadrat $y=x^2$, określiliśmy funkcję: $f(x)=x^2$. Podobnie równość $y=\sin x$ definiuje pewną funkcję na zbiorze liczb rzeczywistych.

Nie każda funkcja określona jest na całym zbiorze liczb rzeczywistych. Np. równość $y=1/x$ określa funkcję na całym zbiorze liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczby 0; liczbie 0 bowiem równość ta żadnej liczby rzeczywistej nie przyporządkowuje. Podobnie funkcja $\sqrt{x}$ określona jest tylko dla $x\geqq 0$; funkcja $\operatorname{tg} x$ określona jest dla wszystkich liczb rzeczywistych różnych od nieparzystych wielokrotności $\pi/2$.

Ogólnie: jeśli każdemu x należącemu do pewnego zbioru przyporządkowana jest liczba $y=f(x)$, to mamy do czynienia z funkcją określoną na tym zbiorze. Zbiór ten nazywamy zbiorem *argumentów* funkcji f. Liczby y postaci $y=f(x)$ nazywamy *wartościami* funkcji f. Np. dla funkcji $\sqrt{x}$ zbiorem argumentów jest zbiór liczb $\geqq 0$; zbiorem wartości tej funkcji jest również zbiór wszystkich liczb $\geqq 0$ (dodajmy przy tej okazji, że symbol $\pm\sqrt{x}$ nie określa jako symbol wieloznaczny żadnej funkcji; funkcja jest w myśl przyjętej przez nas definicji zawsze jednoznaczna).

Często mówić będziemy o funkcjach określonych na *przedziale* o końcach a i b. Rozróżniać przy tym będziemy przedział *domknięty*, tj. przedział wraz z końcami, czyli zbiór x-ów, czyniących zadość warunkowi $a\leqq x\leqq b$, od przedziału *otwartego*, tj. przedziału bez końców, czyli zbioru x-ów takich, że $a<x<b$.