

*Książka ta została wydrukowana
w Szwecji jako dar Rządu Szwedzkiego
dla odbudowy kultury polskiej*

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE
KOMITET REDAKCYJNY:

K. BORSUK, B. KNASTER, K. KURATOWSKI, W. SIERPIŃSKI,
H. STEINHAUS, W. ŚLEBODZIŃSKI i A. ZYGMUND

TOM XIV

DR WACŁAW SIERPIŃSKI

PROFESOR UNIwersYTETU WARSZAWSKIEGO,
CZŁONEK POLSKIEJ AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

POPZEDZONY BADANIEM
FUNKCJI ELEMENTARNYCH

Wydanie drugie niezmienione

Z ZASIĘKIEM WYDZIAŁU NAUKI
MINISTERSTWA OŚWIATY



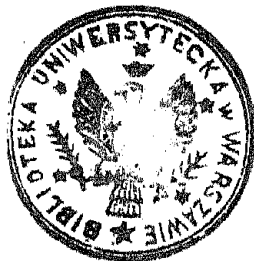
SPÓLDZIELNIA WYDAWNICZA »CZYTELNIK»

1947

Wydanie pierwsze 1925
 Wydanie drugie odbite sposobem
 fotomechanicznym 1947

02338

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE
 All rights reserved



PRINTED IN SWEDEN
 Bengtsons Litografiska AB, Sthlm 1947

St. 1947
 Druk. 1947

PRZEDMOWA

Wydanie tej książki jest jej wydaniem drugim, jako fotomechaniczne odtworzenie książki, która została wydana w r. 1925 w Warszawie z zasiłku Wydziału Nauki Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego pod tytułem: *Analiza*. Tom I. *Część trzecia: Funkcje elementarne* i *Część czwarta: Rachunek różniczkowy*. Jest to dalszy ciąg mej książki, która ukazała się obecnie w trzecim wydaniu pod tytułem *Działania nieskończone*.

Przedmiotem książki jest wykład własności funkcji wykładniczej, funkcji trygonometrycznych i kołowych, oraz logarytmów — zarówno zmiennej rzeczywistej, jak i zespolonej oraz wykład rachunku różniczkowego.

Warszawa, we wrześniu 1947 r.

Wacław Sierpiński

TREŚĆ.

TOM I.

CZĘŚĆ TRZECIA:

Funkcje elementarne.

ROZDZIAŁ XVI.

Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej. Funkcje trygonometryczne oraz ich odwrócenie.

	Str.
§ 133. Rozwinięcie funkcji e^z na szereg potęgowy	1
§ 134. Obliczanie liczby e ; jej niewymierność	3
§ 135. Funkcja e^z dla zespolonych z	6
§ 136. Funkcje $\cos z$ oraz $\sin z$ i ich własności	8
§ 137. Liczba π . Okresowość funkcji trygonometrycznych	11
§ 138. Bieg funkcji $\cos x$ i $\sin x$ dla rzeczywistych x	16
§ 139. Wzór <i>Vieta</i> na liczbę π	17
§ 140. Odwrócenie funkcji trygonometrycznych	21
§ 141. Forma trygonometryczna liczb zespolonych	27
§ 142. Własności charakterystyczne funkcji trygonometrycznych	31
§ 143. Wzory na pierwiastki naturalnego stopnia z liczb zespolonych	36

ROZDZIAŁ XVII.

Logarytmy liczb zespolonych. Potęga ogólna. Funkcje kołowe zmiennej zespolonej.

§ 144. Logarytmy liczb zespolonych	40
§ 145. Logarytm główny i jego własności	41
§ 146. Potęga o wykładniku zespolonym	45
§ 147. Potęga ogólna	48
§ 148. Funkcje kołowe zmiennej zespolonej	51
§ 149. Funkcja $\operatorname{tg} z$ oraz jej odwrócenie	57
§ 150. Związek między funkcją $\operatorname{arctg} z$ a funkcją $\operatorname{lg} z$	63

ROZDZIAŁ XVIII.

Rozwinięcia funkcji trygonometrycznych oraz hyperbolicznych na iloczyn nieskończone.

	Str.
§ 151. Wywód pewnej tożsamości dla $\sin \pi z$	68
§ 152. Rozwinięcie funkcji $\sin \pi z$ na iloczyn nieskończony. Wzór <i>Wallisa</i> na liczbę π	71
§ 153. Rozwinięcie funkcji $\cos \pi z$ na iloczyn nieskończony	76
§ 154. Wzory <i>Eulera</i> na liczbę π^2	78
§ 155. Wzór <i>Stirlinga</i>	80

ROZDZIAŁ XIX.

Rozwijanie funkcji trygonometrycznych na ułamki proste.

§ 156. Rozwinięcie funkcji $\operatorname{ctg} \pi z$ na ułamki proste.	84
§ 157. Rozwinięcie funkcji $\operatorname{ctg} z$ na szereg potęgowy. Liczby <i>Bernoulli'ego</i>	88
§ 158. Rozwinięcia funkcji $\operatorname{tg} z$ na szereg potęgowy oraz na ułamki proste	94
§ 159. Rozwinięcie funkcji $\sec z$ oraz $\operatorname{cosec} z$ na szeregi potęgowe oraz na ułamki proste. Liczby <i>Eulera</i>	95
§ 160. Wielomiany <i>Bernoulli'ego</i> ; wzory na sumy potęg kolejnych liczb naturalnych.	100

ROZDZIAŁ XX.

Funkcja Γ Eulera oraz jej ważniejsze własności.

§ 161. Definicja funkcji $\Gamma(z)$ jako granicy pewnego iloczynu	104
§ 162. Własność iloczynu $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$; wnioski	108
§ 163. Twierdzenie <i>Gaussa</i> o mnożeniu funkcji Γ	110

CZEŚĆ CZWARTA:

Rachunek różniczkowy.

ROZDZIAŁ XXI.

Pochodna oraz jej zasadnicze własności.

§ 164. Definicja pochodnej. Warunek konieczny i wystarczający na to, iżby funkcja, ciągła w danym przedziale, posiadała dla danej wartości tego przedziału daną pochodną	113
§ 165. Pochodne nieskończone. Pochodne funkcji elementarnych. Ciągłość funkcji, posiadającej pochodną skończoną	116
§ 166. Granice funkcji. Twierdzenie o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji	124

	Str.
§ 167. Pochodna sumy i różnicy	128
§ 168. Pochodna iloczynu	131
§ 169. Pochodna ilorazu	132
§ 170. Pochodna funkcji funkcji	133
§ 171. Pochodna funkcji odwrotnej	136
§ 172. Przykłady i zastosowania	139
§ 173. Funkcja ciągła, nie posiadająca pochodnej	141
§ 174. Pochodne rzędów wyższych. Wzór <i>Leibniza</i> na n -tą pochodną iloczynu	147

ROZDZIAŁ XXII.

Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a oraz ich zastosowania.

§ 175. Dowód twierdzenia <i>Rolle'a</i>	152
§ 176. Twierdzenie <i>Lagrange'a</i> oraz jego ważniejsze wnioski	154
§ 177. Twierdzenie <i>Cauchy'ego</i>	157
§ 178. Twierdzenie <i>Darboux</i>	158
§ 179. Rozwijanie na szereg potęgowy funkcji, dla których rozwinięcia pochodnych są znane	162
§ 180. Szereg potęgowy na $\lg(1+x)$. Obliczanie logarytmów	163
§ 181. Szereg potęgowy na $\operatorname{arctg} x$. Obliczanie liczby π	165
§ 182. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\theta$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\theta$	168
§ 183. Twierdzenie o rozwijalności funkcji ciągłej okresowej na jednostajnie zbieżny szereg skończonych wyrażeń trygonometrycznych	175
§ 184. Pochodna szeregu funkcji, dla którego szereg pochodnych jest zbieżny jednostajnie.	177
§ 184*. Warunek konieczny i wystarczający na to, aby pochodną szeregu był w danym punkcie szereg pochodnych	182
§ 185. Przejście do funkcji pierwotnych dla szeregu jednostajnie zbieżnego. Istnienie funkcji pierwotnych dla funkcji ciągłych	184
§ 186. Rozwinięcie wielomianów <i>Bernoulli'ego</i> w przedziale $(0, 1)$ na szeregi trygonometryczne	187
§ 187. Wzór sumacyjny <i>Eulera-Maclaurina</i>	191
§ 188. Zastosowanie wzoru sumacyjnego <i>Eulera-Maclaurina</i> . Szeregi asymptotyczne.	193

ROZDZIAŁ XXIII.

Wzór Taylora i Maclaurina

§ 189. Wywód wzorów <i>Taylora</i> i <i>Maclaurina</i> . Forma reszty <i>Schlömilcha</i> , <i>Lagrange'a</i> i <i>Cauchy'ego</i>	199
§ 190. Warunek konieczny i wystarczający dla rozwijalności funkcji na szereg <i>Taylora</i> w pewnym przedziale	205
§ 191. Szereg dwumienny	207
§ 192. Rozwinięcie funkcji $\arcsin x$ na szereg potęgowy	211

	Str.
§ 193. Wzór na $\lg(1+x)$ oraz jego zastosowanie do dowodu pewnego twierdzenia z teorii iloczynów nieskończonych	212
§ 194. Pewne wnioski ze wzoru <i>Taylora</i> . Druga pochodna uogólniona. Twierdzenie <i>Schwarza</i>	214
§ 195. Maxima i minima funkcji; ich własności oraz wyznaczanie	217

ROZDZIAŁ XXIV.

Ważniejsze wzory i twierdzenia z teorii przyrostów skończonych.
Wzory interpolacyjne *Lagrange'a* i *Newtona*.

§ 196. Wzór ogólny na n -tą różnicę funkcji	223
§ 197. Uogólnienie twierdzenia o przyrostach skończonych	227
§ 198. Związek między n -tą pochodną funkcji, a granicą wyrażenia $\Delta^n f(x)/\Delta x^n$, dla $\Delta x = 0$	229
§ 199. Wielomian <i>Lagrange'a</i>	233
§ 200. Uogólnienie twierdzenia <i>Rolle'a</i>	234
§ 201. Wzór interpolacyjny <i>Lagrange'a</i> z resztą w formie <i>Cauchy'ego</i>	235
§ 202. Wzór interpolacyjny <i>Newtona</i>	237
§ 203. Wywód wzoru <i>Taylora</i> ze wzoru interpolacyjnego <i>Newtona</i>	238

ROZDZIAŁ XXV.

Funkcje dwóch zmiennych rzeczywistych.

§ 204. Funkcja dwóch zmiennych rzeczywistych; jej ciągłość	240
§ 205. Pochodne cząstkowe; związek między ich istnieniem a ciągłością funkcji	242
§ 206. Funkcje złożone; ich ciągłość i pochodna	244
§ 207. Pochodna funkcji uwikłanej	248
§ 208. Pochodne cząstkowe rzędu drugiego. Zmiana porządku różniczkowania	252
§ 209. Pochodne cząstkowe rzędów wyższych	258
§ 210. Wzór <i>Taylora</i> dla funkcji dwóch zmiennych	260

CZĘŚĆ TRZECIA.

Funkcje elementarne.

ROZDZIAŁ XVI.

Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej. Funkcje trygonometryczne oraz ich odwrócenie.

§ 133. Niech z oznacza daną liczbę zespoloną, zaś n — daną liczbę naturalną. Weźmy pod rozwagę wyrażenie

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Mamy, rozwijając według dwumianu *Newtona* (§ 62):

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}. \quad (1)$$

Dla $k = 2, 3, \dots, n$ mamy oczywiście:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{z^k}{n^k} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{n^k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Lecz, w myśl lematu z § 93, mamy dla $k = 2, 3, \dots, n$

$$\begin{aligned} 1 &\geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq \\ &\geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}, \end{aligned}$$

skąd

$$\left| \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) - 1 \right| \leq \frac{k(k-1)}{2n}$$

pochodną ciągłą rzędu n -go w całym przedziale $(0, 1)$, skąd, w myśl tw. 211, znajdujemy:

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!},$$

gdzie $0 < \theta < 1$.

Wobec (3) i (4) możemy więc napisać:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} + \dots + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(x, y) \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} + \frac{1}{n!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) \right]_{\substack{x=a+\theta h \\ y=b+\theta k}} \end{aligned}$$

gdzie $0 < \theta < 1$.

Jest to wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych.

Symbolicznie wzór Taylora można, jak to wskazał Lagrange, przedstawić w postaci

$$f(x+h, y+k, \dots) - f(x, y, \dots) = e^{h'x + k'y + \dots} - 1,$$

gdzie, po rozwinięciu prawej strony (w myśl wzoru na e^x) należy $f^{(p)}$ zastąpić przez $f^{(p)}$.

KONIEC TOMU PIERWSZEGO.

SKOROWIDZ NAZW¹⁾

Liczby rzymskie oznaczają części książki, liczby arabskie oznaczają strony

- Amplituda** liczby zespolonej, III 29.
Argument liczby zespolonej, III 29.
- Całka** nieoznaczona, IV 157.
Cecha d'Alemberta, II 32;
 Cauchy'ego, II 32;
 Kummera, II 36;
 Raabego, II 37.
 (P. także: **Prawidło i Kryterium**.)
- Ciało** liczbowe, I 175.
- Ciąg** funkcji zbieżny jednostajnie, II 191;
 funkcji zbieżny quasihjednostajnie, II 198;
 malejący, I 23;
 monotoniczny, I 23;
 niemalejący, I 22;
 nierosnący, I 23;
 nieskończony o wyrazach rzeczywistych, I 13;
 nieskończony o wyrazach zespolonych, I 221;
 nieskończony funkcji, II 190;
 ograniczony, I 57;
 ograniczony z góry [z dołu], I 57;
 ograniczony liczb zespolonych, I 223;
 podwójny, II 76;
 podwójny zbieżny [rozbieżny], II 92;
 potęgowy, I 82;
 rosnący, I 23;
 zbieżny liczb rzeczywistych, I 16;
 zbieżny liczb zespolonych, I 221.
- Ciągłość** funkcji według definicji Cauchy'ego, I 102, 160;
 funkcji według definicji Heinego, I 104, 160.
- Część** klasy [właściwa], I 5;
 rzeczywista [urojona] liczby zespolonej, I 184;
 zbioru [właściwa], I 169.
- Dodawanie** szeregów, II 46.
- Dostawa**, III 8.
- Dwumian** Newtona, I 187.
- Element** funkcji analitycznej, II 270;
 najmniejszy [pierwszy] klasy, I 1;
 największy [ostatni] klasy, I 1.
- Entier** x , I 27.
- Extremum** [właściwe, niewłaściwe], IV 218.
- Funkcja** analityczna, II 270;
 analityczna jednowartościowa [wielowartościowa], II 270;
 arcus cosinus (arc cos), III 21, 55;
 Arc cos, III 54;
 arcus sinus (arc sin), III 23, 57;
 Arc sin, III 57;
 arcus tangens (arc tg), III 61, 66;
 Arc tg, III 65;
 całkowita, II 245;
 ciągła jednostajnie [niejednostajnie], II 178;
 cosinus (cos), III 8;
 cos hyp, III 76;
 cotangens (ctg), III 67;

¹⁾ Skorowidz nazw, nazwisk i znaków obejmuje zarówno Działania nieskończone, jak i Rachunek różniczkowy.

dwu zmiennych ciągu ze względu na jedną zmienną, IV 241;
 dwu zmiennych ciągła ze względu na obie zmienne, IV 240;
 dwu zmiennych rzeczywistych, IV 240;
 funkcji, II 183;
 «Gamma» (Γ) Eulera, III 107;
 holomorficzna, II 269;
 iterowana, II 185;
 logarytm główny (lg), III 41;
 logarytm zmiennej rzeczywistej (gl), I 140;
 logarytm zmiennej zespolonej (Lg), III 41;
 nieciągła dla danej wartości, I 103;
 odwracalna, II 186;
 odwrotna, II 186;
 okresowa, III 15;
 sinus (sin), III 8;
 sin hyp, III 75;
 tangens (tg), III 57;
 uwikłana, IV 248;
 wykładnicza zmiennej rzeczywistej (e^x), I 133;
 wykładnicza zmiennej zespolonej (e^z), III 7;
 wymierna, I 218;
 złożona, IV 245;
 zmiennej rzeczywistej, I 102;
 zmiennej rzeczywistej ciągła w zbiorze [dla danej wartości] według definicji Cauchy'ego, I 102;
 zmiennej rzeczywistej ciągła w zbiorze [dla danej wartości] według definicji Heinego, I 104, 160;
 zmiennej zespolonej, II 174;
 zmiennej zespolonej ciągła dla punktu danego [w zbiorze], II 176.
Funkcje kołowe, III 51;
 przemienne, II 185.

Granica ciągu liczb rzeczywistych, I 16;
 ciągu liczb zespolonych, I 221;
 ciągu podwójnego, II 91;
 funkcji w punkcie, IV 124;
 górna [dolna], I 16;
 górna [dolna] ciągu podwójnego, II 95;
 podwójna [iterowana], II 94.

Iloczyn cząstkowy iloczynu nieskończonego, II 102;
 liczb rzeczywistych, I 63, 67;
 liczb zespolonych, I 178;
 nieskończony, II 102;
 rozbieżny do zera, II 103;
 szeregów nieskończonych, II 75;
 zbieżny [rozbieżny], II 103;
 zbieżny warunkowo [bezwzględnie], II 121;
 zbieżny bezwzględnie, II 123.
Horaz liczb rzeczywistych, I 75;
 liczb zespolonych, I 178.
Indukcja wsteczna, I 93.
Interpolacja, I 153.
Iteracja funkcji, II 185;
 rzędu nieskończonego [pozaskończonego], II 185.
Izomorfizm, I 177.

Jednostka urojona, I 184.

Klasa górna [dolna] przekroju, I 1.
Kolumna ciągu podwójnego, II 77.
Koło zbieżności szeregu potęgowego, II 247.

Kongruencja, III 44.
Kres górny [dolny] funkcji, I 168;
 górny [dolny] zbioru, I 156.
Krotność pierwiastka równania algebraicznego, I 210.
Kryterium d'Alemberta, II 30, 31;
 Cauchy'ego, II 32, 36;
 logarytmiczne, II 42.
 (P. także: Cecha i Prawidło.)

Liczba e, I 138, III 3;
 nieskończenie mała, I 17;
 niewymierna, I 2;
 obliczalna, I 53;
 porządkowa, II 185;
 rzeczywista, I 2;
 rzeczywista dodatnia [ujemna], I 49;
 rzeczywista nieskończona dodatnia [ujemna], I 12;
 rzeczywista skończona, I 12;
 urojona, I 184;
 zespolona, I 178;
 π , II 53, III 13.
Liczy Bernoulliego, III 91;
 Eulera, III 99;
 zespolone sprzężone, I 184.
Licznik cząstkowy ułamka nieskończonego, II 132.
Limes superior [inferior], I 16.

Logarytm dziesiętny [Brigga], IV 164;
 główny liczb zespolonej, III 41;
 liczb dodatniej, I 140;
 naturalny [neperowski] liczby rzeczywistej, I 146;
 naturalny liczby zespolonej, III 41.
Ludolfina, III 35.
Luka, I 2.

Maximum funkcji właściwe, IV 217;
 niewłaściwe, IV 218.
Mianownik cząstkowy ułamka łańcuchowego, II 132.
Minimum właściwe [niewłaściwe] funkcji, IV 218.
Mnożenie szeregów Cauchy'ego [Dirichleta], II 75.
Moduł liczby rzeczywistej, I 49;
 liczby zespolonej, I 183.

Nierówność Cauchy'ego, I 95, 98.
Nieskończoność, I 17.
Nieskończoność, I 17;
 aktualna [potencjalna], I 17;
 właściwa [niewłaściwa], I 17.
Norma liczby zespolonej, I 185.

Obszar istnienia funkcji analitycznej, II 269.
Odwrotność liczby zespolonej, I 75.
Ogniwo ułamka łańcuchowego, II 131.
Otoczenie punktu, II 269.

Pewnik Zermelo, I 161.
Pierwiastek arytmetyczny z liczby rzeczywistej, I 85;
 główny z liczby zespolonej, III 47;
 kwadratowy z liczby zespolonej, I 189;
 m -tego stopnia z liczby zespolonej, I 193, III 36;
 [pierwotny] m -tego stopnia z jedności, III 39;
 równania algebraicznego, I 174;
 rzeczywisty z liczby rzeczywistej, I 87;
 zwykły [wielokrotny] równania algebraicznego, I 210.
Pochodna cząstkowa, IV 242;
 cząstkowa drugiego rzędu, IV 252;
 cząstkowa n -go rzędu, IV 258;
 druga uogólniona, IV 216;
 funkcji, II 265, IV 113;

funkcji druga [drugiego rzędu], II 267;
 funkcji funkcji, IV 134;
 funkcji n -go rzędu, II 267, IV 147;
 funkcji odwrotnej, IV 136;
 funkcji w zbiorze danym, IV 113;
 logarytmiczna, IV 140;
 nieskończona dodatnia [ujemna], IV 116;
 uogólniona, IV 151;
 zbioru, II 170.
Podstawa potęgi liczby rzeczywistej, I 81;
 potęgi liczby zespolonej, III 45.
Potęga liczby rzeczywistej o wykładniku naturalnym, I 81;
 liczby rzeczywistej o wykładniku rzeczywistym, I 120;
 liczby rzeczywistej o wykładniku wymiernym, I 106;
 naturalna o podstawie i wykładniku zespolonym, III 45;
 ogólna o podstawie i wykładniku zespolonym, III 48.
Prawidło Raabego, III 37.
Promień zbieżności szeregu potęgowego, II 247.
Przedłużanie analityczne [bezpośrednie] szeregu potęgowego, II 269.
Przedział, I 158.
Przekątna główna ciągu podwójnego, II 77.
Przekrój niewłaściwy, I 12;
 właściwy [istotny], I 12;
 zbioru liczb rzeczywistych, I 9;
 zbioru liczb wymiernych, I 1.
Przekształcenie Clausena, II 88.
Przyspieszenie zbieżności szeregów metodą Eulera, II 48;
 zbieżności szeregów metodą Kummera-Knoppa, II 58;
 zbieżności szeregów metodą Markowa-Knoppa, II 59.
Punkt skupienia, II 167;
 stałości funkcji, IV 220;
 wewnętrzny, II 269.
Redukt rozwinięcia liczby rzeczywistej na ułamek nieskończony przy zasadzie g , I 30;
 ułamka łańcuchowego, II 133.
Reszta szeregu nieskończonego, II 6;
 we wzorze Taylora w formie Schlömilcha, IV 201;

w formie Cauchy'ego, IV 201;
w formie Lagrange'a, IV 201.
Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste, I 218;
wielomianu na czynniki liniowe, I 207.
Rozwinięcie liczby rzeczywistej na ułamek nieskończony przy zasadzie g , I 30;
normalne przy zasadzie g , I 31.
Różnica funkcji dowolnego rzędu dodatniego, IV 226;
funkcji n -ta, IV 224;
funkcji pierwsza, IV 223;
liczb rzeczywistych, I 46;
liczb zespolonych, I 180;
logarytmów, I 154.

Signum (sgn), I 71.
Składnik szeregu nieskończonego, II 1.
Skok zbioru, I 10.
Stała Eulera (γ), I 151.
Suma cząstkowa, II 1;
szeregu nieskończonego, II 1, 2;
szeregu podwójnego, II 96.
Szereg anharmoniczny, I 152, II 21;
asymptotyczny, IV 197;
bezw warunkowo zbieżny, II 10;
bezwzględnie zbieżny, II 10;
dwumienny; IV 206;
funkcji, II 202;
funkcji zbieżny jednostajnie [quasi-jednostajnie], II 202;
harmoniczny, I 152, II 3;
iterowany, II 77;
Leibniza, II 53;
Lucasa, II 57;
Maclaurina, IV 202;
naprzemienny, II 45;
nieskończony, II 1;
normalny, II 228;
ograniczony, II 1;
podwójny, II 77, 96;
podwójny zbieżny bezwzględnie, II 99;
potęgowy, II 228;
potęgowy bezustannie zbieżny, II 245;
potęgowy pochodny, II 266;
rozbieżny, II 2;
rozbieżny bezw warunkowo, II 25;
Ruziewicza, II 251;
Stirlinga, IV 196;
Taylora, IV 201;

warunkowo zbieżny, II 18;
zbieżny, II 1.
Szeregi Dirichleta, II 76.
Średnia arytmetyczna, I 93;
arytmetyczna druga, I 100;
geometryczna, I 93;
harmoniczna, I 95.
Tożsamość Dirichleta, II 24.
Twierdzenie Abela o iloczynnie dwóch szeregów, II 68;
Abela o szeregach potęgowych, II 259;
Abela o zbieżności szeregów, II 43;
Arzela o zbieżności quasi-jednostajnej, II 202;
Bolzano-Weierstrassa, II 173;
Cauchy'ego o iloczynnie dwóch szeregów, II 71;
Cauchy'ego o wartości pośredniej, IV 157;
Cauchy'ego o współczynnikach szeregu potęgowego, II 271;
Cauchy'ego-Hadamarda o promieniu zbieżności szeregu potęgowego, II 248;
Cesàro o iloczynnie dwóch szeregów, II 63;
Darboux o pochodnej funkcji, IV 158;
Diriego, II 41;
Diriego o szeregach pochodnych, IV 183;
Gaussa o mnożeniu funkcji F Eulera, III 110;
Hardy-Landaua, I 98;
Lagrange'a o wartości pośredniej, IV 154;
o dodawaniu dla funkcji trygonometrycznych, III 31;
o wartości bezwzględnej iloczynu liczb rzeczywistych, I 71;
o wartości bezwzględnej iloczynu liczb zespolonych, I 185;
o wartości bezwzględnej sumy [różnicy] liczb rzeczywistych, I 51;
o wartości bezwzględnej sumy [różnicy] liczb zespolonych, I 186;
Pringsheima o rozwijaniu funkcji ciągłej na szereg potęgowy, IV 205;
Pringsheima o szeregach podwójnych i iterowanych, II 101;

Riemanna o szeregach warunkowo zbieżnych, II 21;
Rolle'a, IV 152;
Schwarza o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, IV 253;
Schwarza o pochodnej uogólnionej, IV 216;
Taubera, II 261;
Weierstrassa o rozwijaniu funkcji ciągłej na szereg wielomianów, II 220;
Weierstrassa o rozwijaniu funkcji ciągłej na szereg wyrażen trygonometrycznych, IV 175;
Weierstrassa o sumach szeregów potęgowych, II 275;
zasadnicze algebry, I 197;
(P. także: Wzór.)
Ułamek łańcuchowy arytmetyczny [zwykły], II 147;
łańcuchowy nieskończony, II 141;
łańcuchowy normalny, II 153;
łańcuchowy [ciągły] skończony, II 131;
łańcuchowy właściwy [niewłaściwy], II 136;
łańcuchowy zbieżny [rozbieżny], II 141;
łańcuchowy zbieżny [rozbieżny] doskonale, II 143;
nieskończony przy zasadzie g , I 30;
prosty, I 218;
właściwy, I 218.
Wartość asymptotyczna ciągu, III 83;
bezwzględna liczby rzeczywistej, I 49;
bezwzględna liczby zespolonej, I 183;
główna funkcji Arc cos , III 55;
główna funkcji Arc sin , III 57;
iloczynu nieskończonego, II 103;
ułamka łańcuchowego, II 141.
Wielomian całkowity, I 173;
Lagrange'a, IV 234.
Wielomiany Bernoulliego, III 102.
Wiersz ciągu podwójnego, II 77.
Wstawa, III 8;
hiperboliczna, III 75.
Wykładnik potęgowy, I 81, III 45.
Wyraz ciągu, I 13;
ciągu dostatecznie daleki, I 19;
początkowy ułamka łańcuchowego, II 132.

Wyrażenie trygonometryczne skończone, IV 175.
Wzór asymptotyczny dla liczb Bernoulliego, III 93;
Eulera na przekształcenie szeregu potęgowego, II 50;
Eulera na przekształcenie szeregów na ułamki łańcuchowe, II 138;
Eulera na związek między funkcją wykładniczą a funkcjami trygonometrycznymi, III 9;
interpolacyjny Bernsteina, II 221;
interpolacyjny Borela, II 219;
interpolacyjny Lagrange'a, IV 237;
interpolacyjny Newtona, IV 238;
Lamberta, II 88;
Lebesgue'a na funkcję $|x|$, IV 223;
Legendre'a dla funkcji F Eulera, III 111;
Leibniza o pochodnej iloczynu funkcji, IV 149;
Maclaurina o szeregach potęgowych, II 268;
Moivre'a, III 10;
na pochodną funkcji uwikłanej, IV 250;
na pochodną funkcji złożonej, IV 248;
Stirlinga, III 83;
sumacyjny Eulera-Maclaurina, IV 193;
Taylora, IV 200;
Taylora dla funkcji dwu zmiennych, IV 262;
Vieta, III 20;
Wallisa, III 75;
(P. także: Nierówność i Twierdzenie.)

Zasada dodawnicza, II 185;
logarytmu, I 140;
mnożnicza, II 185;
rozwinięcia liczby rzeczywistej na ułamek nieskończony, I 29.
Zbieżność jednostajna ciągu funkcji, II 191;
quasi-jednostajna, II 198;
(P. także: Ciąg i Szereg.)
Zbiór ciągły, I 11;
ograniczony, I 157;
ograniczony z góry [z dołu], I 157;
przeliczalny [nieprzeliczalny], I 15;
zamknięty, II 169.

SKOROWIDZ NAZWISK

Liczby rzymskie oznaczają części książki, liczby arabskie oznaczają strony.

- Abel, II 43, 68, 259.
 Adams, I 155, III 92, IV 165.
 d'Adhémar, II 228.
 d'Alembert, II 30.
 Arzelà, II 202.
 Bernouilli, III 91, 102.
 Bernstein, II 221, 228, IV 207.
 Bolzano, II 173.
 Borel, I 53, II 198, 219, 270, IV 197.
 Cantor, I 17.
 Cauchy, I 93, 98, 102, 160, 161, II 32,
 35, 67, 71, 77, 248, 271, III 42, 48,
 IV 157, 201.
 Cesàro, II 63.
 Clausen, II 88.
 Czebyszew, II 232.
 Dahse, IV 167.
 Darboux, IV 158.
 Dedekind, I 1, 3.
 Dini, II 41, IV 182.
 Dirichlet, II 24, 75, 76.
 Euler, I 13, 151, II 48, 125, 138, III
 9, 77, 79, 99, 104, IV 166, 193.
 Faber, IV 141.
 Fejér, II 255, 256.
 Fréchet, I 187, II 231.
 Gauss, III 110.
 Gmeiner, II 136, IV 223.
 Gregory, IV 223.
 Hadamard, II 248.
 Hahn, IV 156.
 Hardy, I 98, II 256.
 Heine, I 104, 160, 161.
 Hoborski, IV 214.
 Hobson, I 90.
 Joffe, III 100.
 Knopp, II 58, 59, 90, IV 226.
 Kochański, III 80.
 Kommerell, III 20.
 Kummer, II 36, 58.
 Lagrange, IV 154, 201, 234, 237.
 Lambert, II 88, 158.
 Landau, I 98, II 66, 75, 252, 256, 261,
 274.
 Lauer, I 99.
 Lebesgue, IV 175, 223.
 Legendre, I 27, III 111.
 Leibniz, II 53, IV 149.
 Lévy, II 26.
 Loewy, II 108.
 Lucas, II 57.
 Machin, IV 167.
 Maclaurin, II 268, IV 193, 202.
 Markow, II 59.
 Mercator, IV 163.
 Moivre, III 10.
 Newton, I 187, IV 238.
 Peano, IV 214.
 Pringsheim, I 17, II 101, 119, 143,
 256, IV 205, 207.
 Raabe, II 37.
 Rajchman, I 99.
 Riemann, II 18, 21, 76.
 Rolle, IV 152.
 Ruziewicz, II 79, 251, IV 156.
 Schaffler, II 186.
 Schlömilch, IV 201.
 Schwarz, IV 216, 253.
 Schwatt, III 91, 99, 101.
 Serebrennikow, III 92.
 Shanks, IV 167.
 Steinhaus, II 252, 256, IV 151.
 Stern, II 166, III 78.
 Stieltjes, III 91.
 Stirling, III 83, IV 196.
 Stolz, II 136, IV 223.
 Sylvester, III 100.
 Tauber, II 261.
 Taylor, IV 200, 201, 262.
 de la Vallée Poussin, IV 214.
 Vega, IV 166.
 Vieta, III 20.
 Wallis, I 12, III 75.
 Weierstrass, II 173, 210, 220, 270,
 275, III 42 IV 175.
 Zermelo, I 161, 172.

SKOROWIDZ ZNAKÓW

Liczby rzymskie oznaczają części książki, liczby arabskie oznaczają strony.

$[A, B]$	I 1;	$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$	II 190;
$(u_n), \{u_n\}$	I 13;	$((z))^m$	III 48;
$u_n \rightarrow g$	I 16;	arc sin	III 23, 57;
sgn	I 71;	arc tg	III 61, 66;
γ	I 151;	sin hyp	III 75;
i	I 176, 182;	$f'(z)$	IV 113;
$\sum_{n=1}^{\infty}$	II 1;	$\Delta f(x)$	IV 224;
$u_{k,l} \left(\begin{smallmatrix} k=1,2,\dots \\ l=1,2,\dots \end{smallmatrix} \right)$	II 76;	$f'_x(x, y)$	IV 243;
$\prod_{k,l=1}^{\infty}$	II 104;	$f''_{xx}(x, y), f''_{xy}(x, y)$	IV 253;
$b_0 + \frac{a_1}{ b_1 } + \frac{a_2}{ b_2 } + \dots$	II 141;	$\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q}$	IV 260;
z^m	III 45;	∞	I 12;
arc cos	III 21, 55;	lim	I 16, 221;
tg	III 57;	$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_0, c_1, \dots, c_n)_g$	I 30;
ctg	III 67;	lg	I 143, 146, III 42;
Γ	III 107;	(a, b)	I 158, 178;
$D^n f(x)$	IV 148;	$\binom{\mu}{k}$	I 187;
$\frac{\partial f}{\partial x}, \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_0}$	IV 242;	$\Delta^k a_n$	II 49;
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	IV 253;	$\prod_{n=1}^{\infty}$	II 102;
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	IV 258, 259;	Δ_k	II 137;
$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$	I 9;	$a \equiv b \pmod{m}$	III 44;
$\lim_{n \rightarrow \infty}, \lim_{n \rightarrow \infty}$	I 16;	Arc cos y	III 54;
E_x	I 27;	Arc sin	III 57;
\lg_a	I 140;	Arc tg	III 65;
Lg	I 154, III 41;	cos hyp	III 77;
z'	I 184;	$Df(x)$	IV 139;
Δa_n	II 48;	$\Delta^n f(x)$	IV 224, 226;
$\lim_{k,l \rightarrow \infty} u_{k,l}$	II 91;	$D_x f(x, y)$	IV 243;
$b_0 + \frac{a_1}{ b_1 } + \dots + \frac{a_n}{ b_n }$	II 132;	$D_{xy}^2 f(x, y), D_{xy}^3 f(x, y)$	IV 253;
		$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x, y)$	IV 261.