

3) Udowodnić wzór

$$(-1)^{n-1} B_n = 1 - \frac{\Delta^2 1^{2n}}{2} + \frac{\Delta^4 1^{2n}}{3} - \frac{\Delta^6 1^{2n}}{4} + \frac{\Delta^8 1^{2n}}{5} - \dots \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

gdzie B_n są liczby Bernoulli'ego, zaś $\Delta^k 1^{2n}$ oznacza przez skrócenie liczbę $[\Delta^k x^{2n}]_{x=1}$, przy $\Delta x = 1$.

4) Udowodnić, że dla każdego danego $n-1$ liczb $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ można zawsze dobrać liczby $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, tak, iżbyśmy, oznaczając przez $\varphi(x)$ wyrażenie

$$\varphi(x) = a_1 \sin \pi x + a_2 \sin 2\pi x + \dots + a_{n-1} \sin (n-1)\pi x,$$

mieli

$$\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = A_k, \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, n-1.$$

Od p. Żądane wartości współczynników a_s ($s=1, 2, \dots, n-1$) są

$$a_s = \frac{2}{n} \left[A_1 \sin \frac{s\pi}{n} + A_2 \sin \frac{2s\pi}{n} + \dots + A_{n-1} \sin \frac{(n-1)s\pi}{n} \right].$$

Jest to t. zw. interpolacja trygonometryczna.

ROZDZIAŁ XXIV

Funkcje dwóch zmiennych rzeczywistych.

§ 204. Niech U oznacza jakikolwiek dany zbiór układów (x, y) dwóch liczb rzeczywistych x i y . Jeżeli każdemu układowi (x, y) zbioru U przyporządkowana jest pewna liczba rzeczywista z , to mówimy, że mamy określoną funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych x, y w zbiorze U . Wartość z , odpowiadającą układowi (x, y) oznaczamy przez $f(x, y)$.

Niech (x_0, y_0) oznacza dany układ, należący do zbioru U , czyli, jak będziemy mówili, dany punkt zbioru U , zaś $f(x, y)$ — funkcję, określoną w zbiorze U . Jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego (x_n, y_n) ($n=1, 2, 3, \dots$) układów zbioru U warunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$$

pociągają za sobą zawsze wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0),$$

to mówimy, że funkcja $f(x, y)$ jest w zbiorze U ciągłą dla punktu (x_0, y_0) ze względu na obie zmienne x, y .

Zupełnie taksamo, jak dla funkcji jednej zmiennej, dowodzimy, że na to, iżby funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ była w zbiorze U ciągłą dla punktu (x_0, y_0) względem obu zmiennych, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdej liczby dodatniej ε istniała liczba dodatnia δ , taka, iż nierówności

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

pociągają za sobą nierówność

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

dla każdego punktu (x, y) , należącego do U . Dowód konieczności tego warunku wymaga przytem zastosowania pewnika Zermelo (por. § 54).

Jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego x_n , dla którego układy (x_n, y_0) ($n=1, 2, 3, \dots$) należą do U , warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

pociągają za sobą wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_0) = f(x_0, y_0),$$

to mówimy, że funkcja $f(x, y)$ jest w zbiorze U ciągłą dla punktu (x_0, y_0) ze względu na zmienną x .

Podobnie, jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego y_n , dla którego układy (x_0, y_n) ($n=1, 2, 3, \dots$) należą do U , warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$$

pociągają za sobą wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0, y_n) = f(x_0, y_0),$$

to mówimy, że funkcja $f(x, y)$ jest w zbiorze U ciągłą dla punktu (x_0, y_0) ze względu na y .

Funkcja $f(x, y)$, ciągła w zbiorze U dla punktu (x_0, y_0) ze względu na obie zmienne x, y , jest oczywiście dla tego punktu ciągłą (w zbiorze U) zarówno ze względu na x , jak i ze względu na y , lecz niekoniecznie naodwrot. Funkcja może bowiem być w całym zbiorze U ciągłą zarówno ze względu na x , jak i ze względu na y , a jednak nie być (w pewnym punkcie tego zbioru)

ciągłą ze względu na obie zmienne x, y . Klasyczny przykład na to przedstawia funkcja, określona przez warunki:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{dla } x^2 + y^2 > 0$$

(w zbiorze wszystkich układów dwóch liczb rzeczywistych x, y).

Funkcja ta jest wszędzie ciągła ze względu na każdą ze zmiennych x, y z osobna. (Wątpliwość może zachodzić co najwyżej dla punktu $(0, 0)$, lecz usuwa ją uwaga, że w myśl definicji naszej funkcji, mamy $f(x, 0) = 0$ przy wszelkiem rzeczywistym x , oraz $f(0, y) = 0$ przy wszelkiem rzeczywistym y). Nie jest ona jednak ciągła w punkcie $(0, 0)$ ze względu na obie zmienne (x, y) , gdyż np. dla ciągów $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) zmierzających do zera, mamy $f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), i przeto $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$.

Ciągłość funkcji dwóch zmiennych ze względu na każdą ze zmiennych z osobna nie pociąga więc jeszcze za sobą jej ciągłości ze względu na obie zmienne.

§ 205. Niech $f(x, y)$ oznacza funkcję dwóch zmiennych, określoną w zbiorze układów U , zaś (x_0, y_0) — dany układ zbioru U . Oznaczmy przez X_{x_0} zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których układ (x, y_0) należy do U , zaś przez Y_{y_0} — zbiór wszystkich liczb rzeczywistych y , dla których układ (x_0, y) należy do U .

Ciągłość funkcji $f(x, y)$ ze względu na x dla punktu (x_0, y_0) w zbiorze U jest oczywiście równoważną ciągłości funkcji (jednej tylko zmiennej x) $\varphi(x) = f(x, y_0)$ dla punktu x_0 w zbiorze X_{x_0} . Podobnie ciągłość funkcji $f(x, y)$ ze względu na y dla punktu (x_0, y_0) w zbiorze U jest równoważną ciągłości funkcji $\psi(y) = f(x_0, y)$ dla punktu y_0 w zbiorze Y_{y_0} .

Jeżeli funkcja $\varphi(x) = f(x, y)$ posiada w zbiorze X_{x_0} dla punktu x_0 pochodną $\varphi'(x_0)$, to mówimy, że funkcja $f(x, y)$ posiada w zbiorze U dla punktu (x_0, y_0) *pochodną cząstkową względem x* , którą oznaczamy przez $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0, y=y_0}$ lub $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}$ i kładziemy

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} = \varphi'(x_0).$$

Podobnie, jeżeli funkcja $\psi(y) = f(x_0, y)$ posiada w zbiorze Y_{y_0} dla punktu y_0 pochodną $\psi'(y_0)$, to mówimy, że funkcja $f(x_0, y)$ posiada w zbiorze U dla punktu (x_0, y_0) *pochodną cząstkową względem y* ,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} = \psi'(y_0).$$

Zamiast $\frac{\partial f}{\partial x}$ piszemy niekiedy $f'_x(x, y)$ lub $D_x f(x, y)$.

Zauważymy, że istnienie obu pochodnych cząstkowych skończonych nie pociąga za sobą jeszcze ciągłości funkcji względem obu zmiennych. Funkcja $f(x, y)$ może wszędzie posiadać obie pochodne cząstkowe skończone $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, a mimo to w pewnym punkcie nie być ciągłą względem obu zmiennych. Przykładem takiej funkcji jest rozpatrywana już w § 204 funkcja, określona przez warunki $f(0, 0) = 0$, zaś $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ dla $x^2 + y^2 > 0$. Funkcja ta, jak wiemy, nie jest ciągłą względem obu zmiennych w punkcie $(0, 0)$, lecz mimo to posiada dla każdego punktu (x, y) obie pochodne cząstkowe skończone $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$. (Wątpliwość może wchodzić co najwyżej dla punktu $(0, 0)$, lecz usuwa ją uwaga, że $f(x, 0) = 0$ przy wszelkiem rzeczywistym x , skąd $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0,0} = 0$, i podobnie $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{0,0} = 0$).

Z drugiej strony można dowieść, że jeżeli funkcja $f(x, y)$ posiada dla punktu (x_0, y_0) obie pochodne cząstkowe skończone, i jeżeli nadto jedna z pochodnych cząstkowych istnieje i jest ograniczona w otoczeniu punktu (x_0, y_0) , to funkcja $f(x, y)$ jest dla punktu (x_0, y_0) ciągła ze względu na obie zmienne.

W samej rzeczy, założmy, że np. pochodna $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest ograniczona w otoczeniu punktu (x_0, y_0) : istnieje więc takie dodatnie δ oraz takie skończone A , iż

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| < A, \quad \text{dla } |x - x_0| \leq \delta, \quad |y - y_0| < \delta. \quad (1)$$

Niech teraz x_n oraz y_n będą dwa ciągi nieskończone, takie iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Dla $n \geq \mu$ będziemy więc mieli

$$|x_n - x_0| < \delta, \quad \text{oraz } |y_n - y_0| < \delta. \quad (2)$$

Mamy

$$f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0) = f(x_n, y_n) - f(x_0, y_n) + f(x_0, y_n) - f(x_0, y_0). \quad (3)$$

Założmy, że n oznacza wskaźnik $> \mu$. Z założenia co do pochodnej $\frac{\partial f}{\partial x}$ wynika, że istnieje ona dla $y = y_n$ ($n > \mu$) przy wszelkim x należącym do przedziału $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; ponieważ x_n , wobec (2), też jest liczbą tego przedziału, więc, w myśl tw. Lagrange'a (zastosowanego do funkcji $\varphi(x) = f(x, y_n)$, przy danem $n > \mu$) mamy:

$$f(x_n, y_n) - f(x_0, y_n) = (x_n - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\xi, y_n}, \quad (4)$$

gdzie ξ jest liczbą przedziału (x_0, x_n) , a więc, tembardziej, liczbą przedziału $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Wynika stąd, w myśl (1) i (2), że

$$\left| \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\xi, y_n} \right| < A,$$

i przeto, wobec (4):

$$\text{skąd} \quad |f(x_n, y_n) - f(x_0, y_n)| < A |x_n - x_0|,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n, y_n) - f(x_0, y_n)] = 0. \quad (5)$$

Z drugiej strony, wobec założenia, że istnieje pochodna cząstkowa skończona $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}$, mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0, y_n) - f(x_0, y_0)}{y_n - y_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0},$$

skąd (wobec skończoności prawej strony) w jednej chwili:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0, y_n) - f(x_0, y_0)] = 0. \quad (6)$$

Wzory (5) i (6) dają, wobec (3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0),$$

co dowodzi ciągłości funkcji $f(x, y)$ względem obu zmiennych w punkcie x_0, y_0 , c. b. d. o.

Wniosek. Jeżeli obie pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y)$ istnieją i są ograniczone w otoczeniu punktu (x_0, y_0) , to funkcja $f(x, y)$ jest ciągłą względem obu zmiennych w otoczeniu punktu (x_0, y_0) .

Dla dowodu wystarczy zauważyć że, w myśl założenia naszego wniosku, warunki dowiedzionego twierdzenia będą spełnione dla każdego punktu w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) .

§ 206. Funkcje złożone, ich ciągłość i pochodna.

Niech $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ będą dwie dane funkcje zmiennej t , określone w zbiorze (liczb rzeczywistych) T , zaś X i Y odpowiednio zbiory wartości funkcji $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ w zbiorze T . Niech, dalej, $f(x, y)$

oznacza funkcję dwóch zmiennych x, y , określoną w zbiorze U wszystkich układów (x, y) , gdzie x oznacza jakąkolwiek liczbę zbioru X , zaś y — jakąkolwiek liczbę zbioru Y . Funkcja $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ zmiennej t będzie więc określona w zbiorze T : nazywamy ją *funkcją złożoną* zmiennej t .

Np. kładąc w zbiorze liczb rzeczywistych $\varphi(t) = e^t$, $\psi(t) = \sin bt$, zaś, dla rzeczywistych x, y , $f(x, y) = xy$, otrzymamy funkcję złożoną zmiennej t , $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) = e^t \sin bt$, określoną w zbiorze liczb rzeczywistych t .

Podobnie, kładąc w zbiorze liczb dodatnich $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = t$, zaś dla x dodatnich i y rzeczywistych: $f(x, y) = x^y$, otrzymamy funkcję złożoną zmiennej t : $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) = t^t$, określoną dla t dodatnich.

Założmy dalej, zachowując powyższe znakowanie, że funkcje $\varphi(t)$ oraz $\psi(t)$ są w zbiorze T ciągłe dla wartości t_0 , zaś funkcja $f(x, y)$ jest w zbiorze U ciągłą w punkcie (x_0, y_0) , gdzie $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, ze względu na obie zmienne x, y . Powiadam, że funkcja zmiennej t , $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$, będzie w zbiorze T ciągłą dla wartości t_0 .

W samej rzeczy, niech t_n ($n = 1, 2, \dots$) oznacza ciąg nieskończony liczb zbioru T , zmierzający do t_0 . Wobec ciągłości funkcji $\varphi(t)$ oraz $\psi(t)$ w zbiorze T , będziemy, kładąc $x_n = \varphi(t_n)$, $y_n = \psi(t_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), mieli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$, przyczem liczby x_n , oraz y_n będą należały odpowiednio do zbiorów X i Y (dla $n = 1, 2, 3, \dots$). Wobec założenia, że funkcja $f(x, y)$ jest w zbiorze U ciągłą dla punktu (x_0, y_0) ze względu na obie zmienne, wnosimy stąd, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$, czyli, wobec $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ oraz $\varphi(t_n) = x_n$, $\psi(t_n) = y_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = F(t_0),$$

co dowodzi ciągłości funkcji $F(t)$ w zbiorze T dla wartości t_0 .

Dowiedzione twierdzenie nazywamy twierdzeniem o ciągłości funkcji złożonej.

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ posiada jakąś własność przynajmniej dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y , które przy danych x_0 i y_0 i pewnym dodatnim δ spełniają nierówność

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta,$$

to mówimy, że funkcja $f(x, y)$ posiada uważaną własność w otoczeniu punktu (x_0, y_0) .

Założmy, że funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są określone w zbiorze T i posiadają w tym zbiorze dla punktu t_0 pochodne skończone $\varphi'(t_0)$ i $\psi'(t_0)$. Założmy, dalej, że funkcja $f(x, y)$ jest określona w otoczeniu punktu (x_0, y_0) , gdzie $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, i posiada dla punktu (x_0, y_0) obie pochodne cząstkowe skończone, a nadto, że jedna przynajmniej z pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}$, np pochodna $\frac{\partial f}{\partial x}$, istnieje w otoczeniu punktu (x_0, y_0) i jest dla tego punktu ciągłą ze względu na obie zmienne x, y . Powiadam, że wówczas funkcja $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ posiada w zbiorze T dla punktu t_0 pochodną

$$F'(t_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} \cdot \varphi'(t_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} \cdot \psi'(t_0). \quad (1)$$

Dowód. Niech t_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) oznacza jakikolwiek ciąg nieskończony liczb zbioru T , różnych od t_0 . Połóżmy $x_n = \varphi(t_n)$, $y_n = \psi(t_n)$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$ Będziemy mieli:

$$\frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \frac{f(x_n, y_n) - f(x_0, y_n)}{t_n - t_0} + \frac{f(x_0, y_n) - f(x_0, y_0)}{t_n - t_0}. \quad (2)$$

Z założenia, że istnieje pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}$ w otoczeniu punktu (x_0, y_0) i jest w tym punkcie ciągłą względem obu zmiennych x, y , wynika, że przy pewnym dodatnim δ pochodna $\frac{\partial f}{\partial x}$ istnieje i jest skończoną dla $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$. Wnosimy stąd natychmiast, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ (gdyż funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$, mając dla punktu t_0 w zbiorze T pochodne skończone, muszą być dla tego punktu ciągłe w zbiorze T), że dla dostatecznie wielkich n istnieje pochodna skończona $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_n, y_n}$ przy wszelkiem rzeczywistym x w przedziale (x_0, x_n) . Lecząc oczywiście, przy danym naturalnym n , $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_n, y_n} = f'_n(x)$, gdzie $f_n(x) = f(x, y_n)$. Ponieważ więc funkcja $f_n(x)$ posiada w przedziale (x_0, x_n) pochodną skończoną, więc mamy w myśl tw. Lagrange'a:

$$f_n(x_n) - f_n(x_0) = (x_n - x_0) f'_n(x_0 + \theta_n(x_n - x_0)), \quad \text{gdzie } 0 < \theta_n < 1,$$

czyli. wobec $f_n(x) = f(x, y_n)$:

$$f(x_n, y_n) - f(x_0, y_n) = (x_n - x_0) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0 + \theta_n(x_n - x_0), y_n}$$

i przeto

$$\frac{f(x_n, y_n) - f(x_0, y_n)}{t_n - t_0} = \frac{x_n - x_0}{t_n - t_0} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0 + \theta_n(x_n - x_0), y_n} \quad (3)$$

Lecz, wobec istnienia pochodnej $\varphi'(t_0)$ oraz założenia, że pochodna $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest ciągłą w otoczeniu punktu (x_0, y_0) względem obu zmiennych x, y (oraz uwagi, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_0 + \theta_n(x_n - x_0)) = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$), mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{t_n - t_0} = \varphi'(t_0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0 + \theta_n(x_n - x_0), y_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0},$$

skąd, wobec (3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n, y_n) - f(x_0, y_n)}{t_n - t_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} \cdot \varphi'(t_0). \quad (4)$$

Aby obliczyć granicę drugiego składnika wzoru (2), połóżmy

$$g(y) = f(x_0, y), \quad G(t) = g(\psi(t)).$$

Będziemy więc, wobec założenia, że istnieje pochodna cząstkowa skończona $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}$, mieli $g'(y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}$, oraz, wobec prawidła wyznaczania pochodnej funkcji g (§ 170):

$$G'(t_0) = g'(y_0) \cdot \psi'(t_0) \quad (\text{w zbiorze } T),$$

i przeto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(t_n) - G(t_0)}{t_n - t_0} = g'(y_0) \psi'(t_0),$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0, y_n) - f(x_0, y_0)}{t_n - t_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} \cdot \psi'(t_0). \quad (5)$$

Wzór (2) daje więc, wobec (4) i (5):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} \cdot \varphi'(t_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} \cdot \psi'(t_0)$$

dla każdego ciągu liczb t_n zbioru T , różnych od t_0 , zmierzającego do t_0 , co dowodzi prawdziwości wzoru (1) (w zbiorze T). Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 225. Jeżeli funkcje $\varphi(t)$ oraz $\psi(t)$ posiadają w zbiorze T dla wartości t_0 pochodne skończone $\varphi'(t_0)$ i $\psi'(t_0)$, jeżeli, dalej, funkcja $f(x, y_0)$ jest określoną w otoczeniu punktu (x_0, y_0) , gdzie $x = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, i posiada dla punktu (x_0, y_0) obie pochodne cząstkowe skończone, i jeżeli nadto jedna przynajmniej z pochodnych cząstkowych $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ lub $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ istnieje w otoczeniu punktu (x_0, y_0) i jest dla tego punktu ciągłą ze względu na obie zmienne x, y , to funkcja $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ posiada w zbiorze T dla punktu t_0 pochodną

$$F'(t_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} \cdot \varphi'(t_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} \cdot \psi'(t_0). \quad (6)$$

Wzór (6) nazywamy wzorem na pochodną funkcji złożonej.

Zauważymy, że samo istnienie pochodnych, wypisanych po prawej stronie wzoru (6), nie wystarcza jeszcze dla prawdziwości tego wzoru. Np. dla $\varphi(t) = \psi(t) = t$, $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ dla $x^2 + y^2 > 0$, $f(0, 0) = 0$, mamy oczywiście $f(x, 0) = 0$, oraz $f(0, y) = 0$ przy wszelkich rzeczywistych x, y , skąd $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0,0} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{0,0} = 0$, a że $\varphi'(t) = \psi'(t) = 1$ (w zbiorze T wszystkich liczb rzeczywistych), więc istnieją wszystkie cztery pochodne, wypisane po prawej stronie wzoru (6), która w uważanym przypadku jest zerem (dla $t_0 = 0$). Natomiast $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$ dla $t \neq 0$, $F(0) = f(0, 0) = 0$, i przeto funkcja $F(t)$ jest dla $t = 0$ nieciągła. Wzór (6) nie jest tu więc prawdziwy.

Wzór (6) może nie być prawdziwy nawet wówczas, kiedy obie jego strony mają oznaczoną, skończoną wartość. Połóżmy np. $\varphi(t) = \psi(t) = t$, $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$, przy wszelkich rzeczywistych t, x i y . Mamy tu oczywiście $f(x, 0) = 0$, oraz $f(0, y) = 0$ przy wszelkich rzeczywistych x i y , skąd, jak w poprzednim przykładzie, wnosimy, że prawa strona wzoru (6) jest dla $t_0 = 0$ zerem. Natomiast lewa strona wzoru (6) jest dla $t_0 = 0$ równą jedności, gdyż $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) = \sqrt[3]{t^3} = t$.

§ 207. Pochodna funkcji uwikłanej.

Twierdzenie 226. Jeżeli funkcja $F(x, y)$ jest określoną w otoczeniu punktu (x_0, y_0) i posiada dla tego punktu obie pochodne cząstkowe skończone, jeżeli nadto pochodna cząstkowa $\frac{\partial F}{\partial y}$ istnieje w otoczeniu punktu (x_0, y_0) i jest dla tego punktu różną od zera, oraz

ciągłą względem obu zmiennych, i jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą dla $x = x_0$ i spełnia w otoczeniu wartości x_0 tożsamościowo równanie

$$F(x, f(x)) = 0,$$

przyczem $f(x_0) = y_0$, to funkcja $f(x)$ posiada dla wartości x_0 pochodną

$$f'(x_0) = - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}}.$$

Dowód. Załóżmy, że warunki naszego twierdzenia są spełnione.

Ponieważ pochodna $\frac{\partial F}{\partial y}$ istnieje, jak zakładamy, w otoczeniu punktu (x_0, y_0) , jest w tym punkcie różną od zera, oraz ciągłą względem obu zmiennych, więc przy pewnym dodatnim δ istnieje pochodna $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x, y} \neq 0$ dla $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$. Z drugiej strony, z założenia, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą dla $x = x_0$, wynika, że przy pewnym dodatnim $\delta_1 < \delta$ będzie

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta, \quad \text{dla} \quad |x - x_0| < \delta_1. \quad (1)$$

Ponieważ, dalej, jak zakładamy, funkcja $f(x)$ spełnia w otoczeniu wartości x_0 równanie $F(x, f(x)) = 0$, więc przy pewnym dodatnim $\delta_0 < \delta_1$ będzie

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \text{dla} \quad |x - x_0| < \delta_0. \quad (2)$$

Założmy teraz, że liczba rzeczywista x spełnia warunek

$$0 < |x - x_0| < \delta_0; \quad (3)$$

połóżmy $y = f(x)$: będzie więc, wobec $y_0 = f(x_0)$, oraz w myśl (1) i (3) (z uwagi, że $\delta_0 < \delta_1$)

$$|y - y_0| < \delta$$

i przeto, w myśl tw. Lagrange'a, będziemy mogli napisać (wobec istnienia pochodnej $\frac{\partial F}{\partial y}$ dla $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$):

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(x_0, y_0) &= F(x, y) - F(x, y_0) + F(x, y_0) - F(x_0, y_0) = \\ &= (y - y_0) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x, y_0 + \theta(y - y_0)} + F(x, y_0) - F(x_0, y_0), \quad \text{gdzie } 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Wobec $|y - y_0| < \delta$ będzie, tembardziej $|\theta(y - y_0)| < \delta$ i przeto (wobec (3) i uwagi, że $\delta_0 < \delta_1 < \delta$):

$$\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)_{x_0, y_0 + \theta(y - y_0)} \neq 0.$$

Wzór (4) daje więc, wobec (2) (z uwagi, że $y_0 = f(x_0)$), oraz że położyliśmy $y = f(x)$, oraz wobec $x \neq x_0$ (w myśl (3)):

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0 + \theta(y - y_0)}}. \quad (5)$$

Załóżmy teraz, że x zmierza do x_0 ciągiem wartości różnych od x_0 . Będzie więc, wobec założenia, że funkcja $y = f(x)$ jest ciągłą dla x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [y_0 + \theta(y - y_0)] = y_0,$$

skąd, wobec ciągłości pochodnej $\frac{\partial F}{\partial y}$ dla punktu (x_0, y_0) względem obu zmiennych:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0 + \theta(y - y_0)} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}, \quad (6)$$

zaś, wobec istnienia pochodnej skończonej $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}$, znajdujemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}. \quad (7)$$

Wzór (5) (który wyprowadziliśmy dla liczb x , spełniających warunek (3)) daje więc, wobec (6) i (7):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}},$$

co, wobec $y = f(x)$, dowodzi, że istnieje pochodna skończona

$$f'(x_0) = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}}; \quad (8)$$

c. b. d. o. Wzór (8) nazywamy *wzorem na pochodną funkcji uwikłanej*.

W związku z dowiedzionem twierdzeniem godnem uwagi jest następujące

Twierdzenie 227. Jeżeli funkcja $F(x, y)$ jest ciągłą względem obu zmiennych w otoczeniu danego punktu (x_0, y_0) , jeżeli $F(x_0, y_0) = 0$ i jeżeli istnieje oznaczona, różna od zera pochodna cząstkowa $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}$, to istnieje conajmniej jedna funkcja $y = f(x)$, która w otoczeniu wartości x_0 spełnia tożsamościowe równanie

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Dowód. Załóżmy, że $F(x, y)$ jest funkcją ciągłą względem obu zmiennych w otoczeniu punktu (x_0, y_0) , że $F(x_0, y_0) = 0$, oraz że pochodna cząstkowa $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}$ ma oznaczoną (skończoną lub nieskończoną) wartość, różną od zera. Powiadam przedewszystkiem, że istnieje liczba dodatnia taka, iż przy wszelkiem dodatnim $\delta < \delta_0$ liczby

$$F(x_0, y_0 - \delta) \text{ oraz } F(x_0, y_0 + \delta)$$

będą różnych znaków.

W samej rzeczy, wobec założenia, że pochodna $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}$ ma oznaczoną, różną od zera wartość, wnosimy, że pochodna ta jest > 0 lub też < 0 : załóżmy np. że jest ona > 0 . Będzie więc

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y_0 + \delta) - F(x_0, y_0)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y_0 - \delta) - F(x_0, y_0)}{-\delta} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} > 0,$$

czyli, wobec $F(x_0, y_0) = 0$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y_0 + \delta)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y_0 - \delta)}{-\delta} > 0,$$

co dowodzi, że przy pewnym dodatnim δ_0 , dla $0 < \delta < \delta_0$ musi być

$$F(x_0, y_0 + \delta) > 0, \text{ zaś } F(x_0, y_0 - \delta) < 0.$$

Podobnie, gdyby było $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} < 0$, musiałoby, przy pewnym dodatnim δ_0 , być dla $0 < \delta < \delta_0$

$$F(x_0, y_0 + \delta) < 0, \text{ zaś } F(x_0, y_0 - \delta) > 0.$$

Możemy więc założyć, że liczby

$$F(x_0, y_0 - \delta) \text{ oraz } F(x_0, y_0 + \delta),$$

są dla $0 < \delta < \delta_0$ zawsze różnych znaków.

Ponieważ, dalej, jak zakładamy, funkcja $F(x, y)$ jest w otoczeniu punktu (x_0, y_0) ciągłą względem obu zmiennych x, y , więc przy pewnym dodatnim $\delta_1 < \delta_0$ funkcja $F(x, y)$ będzie ciągłą względem obu zmiennych dla

$$x_0 - \delta_1 \leq x \leq x_0 + \delta_1, \quad y_0 - \delta_1 \leq y \leq y_0 + \delta_1; \quad (9)$$

będzie ona więc też ciągłą (względem obu zmiennych) w punktach

$$(x_0, y_0 - \delta_1) \text{ oraz } (x_0, y_0 + \delta_1).$$

Wnosimy stąd w jednej chwili, że przy pewnym dodatnim $\delta_2 < \delta_1$, dla $|x - x_0| < \delta_2$ liczby $F(x, y_0 - \delta_1)$ oraz $F(x, y_0 + \delta_1)$ z jednej strony, zaś liczby $F(x, y_0 + \delta_1)$ oraz $F(x, y_0 - \delta_1)$ z drugiej strony, będą odpowiednio tych samych znaków.

Liczy

$$F(x, y_0 - \delta_1) \text{ oraz } F(x, y_0 + \delta_1) \quad (10)$$

będą więc dla $|x - x_0| < \delta_2$ różnych znaków. Wobec ciągłości funkcji $F(x, y)$ względem obu zmiennych dla x, y , spełniających warunki (9) i, tembardziej dla

$$x_0 - \delta_2 < x < x_0 + \delta_2, \quad y_0 - \delta_1 \leq y \leq y_0 + \delta_1,$$

funkcja $F(x, y)$ będzie przy każdym danym x , spełniającym warunek $|x - x_0| < \delta_2$, ciągłą względem y dla $y_0 - \delta_1 \leq y \leq y_0 + \delta_1$, i przeto, z uwagi, że liczby (10) są różnych znaków, wnosimy, że wewnątrz przedziału $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1)$ będzie (przy każdym danym x , gdzie $|x - x_0| < \delta_2$) istniała co najmniej jedna liczba y (zależna od x), taka, iż $F(x, y) = 0$.

Przyporządkowując każdej wartości na x wewnątrz przedziału $(x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ jedną z wartości y , spełniających równanie $F(x, y) = 0$ (np. najmniejszą z wartości $y \geq y_0$, spełniających równanie $F(x, y) = 0$, lub, jeżeli takich niema, największą z wartości $y < y_0$, spełniających równanie $F(x, y) = 0$), otrzymamy funkcję $y = f(x)$, taką, iż

$$F(x, f(x)) = 0, \text{ dla } |x - x_0| < \delta_2,$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia. Można by nadto dowieść, że funkcja $f(x)$ (określona jak wyżej) jest ciągłą dla wartości x_0 .

§ 208. Pochodne cząstkowe rzędu drugiego.

Założmy, że dla danej funkcji $f(x, y)$ pochodna $\frac{\partial f}{\partial x}$ istnieje w otoczeniu punktu (x_0, y_0) : kładąc $\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi(x, y)$ będziemy więc mieli

funkcję dwóch zmiennych x, y , określoną w otoczeniu punktu (x_0, y_0) . Jeżeli istnieją pochodne $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}$ oraz $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}$ (lub jedna z nich), to

oznaczamy je odpowiednio przez $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0}$, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{x_0, y_0}$ i nazywamy odpowiednio: drugą pochodną cząstkową funkcji $f(x, y)$ względem x , oraz drugą pochodną cząstkową funkcji $f(x, y)$ najpierw względem x , później względem y . Podobnie, jeżeli istnieją dla punktu (x_0, y_0)

pochodne funkcji $\psi(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$, to kładziemy:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \text{ oraz } \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Zamiast $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ piszemy też niekiedy $f''_{xx}(x, y)$ lub $D^2_{xx}f$, zamiast $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, piszemy $f''_{xy}(x, y)$ lub $D^2_{xy}f$ i t. p.

Twierdzenie 228 (Schwarz'a): Jeżeli w otoczeniu punktu (x_0, y_0) istnieją pochodne $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, i jeżeli pochodna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ jest ciągła w punkcie (x_0, y_0) ze względu na obie zmienne, to w punkcie (x_0, y_0) istnieje również pochodna $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, przyczem

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{x_0, y_0}. \quad (1)$$

Dowód. Załóżmy, że pochodne $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ istnieją dla

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta. \quad (2)$$

Położmy, przy danym k , gdzie $|k| < \delta$:

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0). \quad (3)$$

Ponieważ pochodna $\frac{\partial f}{\partial x}$ w myśl naszego założenia istnieje przy warunkach (2), więc dla $|x - x_0| < \delta, |k| < \delta$ istnieje pochodna

$$\varphi'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x, y_0+k} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x, y_0}, \quad (4)$$

oraz, w myśl tw. Lagrange'a, mamy, dla $|h| < \delta$:

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h \varphi'(x_0 + \theta h), \text{ gdzie } 0 < \theta < 1,$$

czyli, wobec (4):

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0+\theta h, y_0+k} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0+\theta h, y_0} \right] \quad (5)$$

Położmy przy danym h oraz danym θ (gdzie $|h| < \delta, 0 < \theta < 1$), dla $|y - y_0| < \delta$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0+\theta h, y} = \psi(y). \quad (6)$$

Z założenia, że pochodna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ istnieje przy warunkach (2), wynika, że dla $|y - y_0| < \delta$ istnieje pochodna

$$\psi'(y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{x_0+\theta h, y} \quad (7)$$

i przeto, w myśl tw. Lagrange'a:

$$\psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_1 k), \quad \text{gdzie } 0 < \theta_1 < 1,$$

skąd, wobec (5), (6) i (7):

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h[\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)] = hk \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k}, \quad (8)$$

gdzie $0 < \theta < 1$, $0 < \theta_1 < 1$.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec założenia, że pochodna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ jest ciągła w punkcie (x_0, y_0) ze względu na obie zmienne, dla liczby ε będzie istniała liczba dodatnia $\delta_0 < \delta$, taka, iż

$$\left| \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x, y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x_0, y_0} \right| < \varepsilon, \quad \text{dla } |x - x_0| < \delta_0, |y - y_0| < \delta_0.$$

Stąd, dla $|h| < \delta_0$, $|k| < \delta_0$, $0 < \theta < 1$, $0 < \theta_1 < 1$:

$$\left| \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x_0, y_0} \right| < \varepsilon$$

i przeto, wobec (3) i (8), dla $0 < |h| < \delta_0$, $0 < |k| < \delta_0$:

$$\left| \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x_0, y_0} \right| < \varepsilon,$$

skąd, w granicy dla $k = 0$, z uwagi, że, wobec istnienia pochodnej

$\frac{\partial f}{\partial y}$ w punktach (x, y) , spełniających warunki (2),

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0 + h, y_0},$$

oraz

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0},$$

otrzymujemy w jednej chwili:

$$\left| \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0 + h, y_0} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}}{h} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x_0, y_0} \right| \leq \varepsilon, \quad \text{dla } |h| < \delta_0,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0 + h, y_0} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0}}{h} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x_0, y_0},$$

czyli, że zachodzi wzór (1), c. b. d. o. Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

Zauważymy jednak, że samo istnienie pochodnych

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x_0, y_0} \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)_{x_0, y_0} \quad (9)$$

nie jest warunkiem wystarczającym dla ich równości, jak tego dowodzą następujące przykłady.

1) Określmy funkcję $f(x, y)$ przez warunki:

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \text{dla } x \neq 0,$$

$$f(0, y) = 0 \quad \text{przy wszelkim rzeczywistym } y.$$

Mamy tu, jak łatwo widzieć:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad \text{dla } x \neq 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{0, y} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, \quad \text{dla } x \neq 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{0, y} = 0,$$

skąd, w jednej chwili:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{0, 0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)_{0, 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x, 0} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{0, 0}}{x} = \frac{x - 0}{x} = 1,$$

i przeto

$$0 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{0, 0} \neq \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)_{0, 0} = 1.$$

2) Połóżmy

$$f(x, y) = (y - x)^2 \quad \text{dla } |y| < |x|,$$

oraz

$$f(x, y) = 0, \quad \text{dla } |y| \geq |x|.$$

Będzie tu, jak łatwo widzieć:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{0, y} = 0 \quad \text{przy wszelkim rzeczywistym } y,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x, 0} = -2x \quad \text{przy wszelkim rzeczywistym } x,$$

skąd

$$0 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{0, 0} \neq \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)_{0, 0} = -2.$$

3) Połóżmy

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ dla } x^2 + y^2 > 0; f(0, 0) = 0.$$

Mamy tu, jak łatwo widzieć:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0, y} = -y \text{ przy wszelkiem rzeczywistem } y,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x, 0} = x \text{ przy wszelkiem rzeczywistem } x,$$

skąd

$$-1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{0,0} \neq \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{0,0} = 1.$$

Może się też zdarzyć, że jedna z pochodnych (9) ma oznaczoną, skończoną wartość, a druga nie istnieje. Np. dla funkcji $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$ mamy, jak łatwo widzieć:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ dla } x^2 + y^2 \neq 0, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0,0} = 0,$$

i przeto

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{0, y} = 0, \text{ przy wszelkiem rzeczywistem } y,$$

skąd

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{0,0} = 0,$$

natomiast

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ dla } x^2 + y^2 \neq 0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{0,0} = 0,$$

i przeto

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,0} = |x| \text{ przy wszelkiem rzeczywistem } x,$$

skąd widać, że pochodna $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{0,0}$ nie istnieje.

Zauważymy też, że istnienie w pewnym punkcie choćby nawet wszystkich czterech pochodnych drugiego rzędu nie pociąga za sobą jeszcze ciągłości funkcji w tym punkcie (ze względu na obie zmienne). Np. dla funkcji $f(x, y)$, określonej przez warunki

$$f(x, y) = 0, \text{ dla } x \neq y; f(0, 0) = 0; f(x, y) = 1, \text{ dla } x = y \neq 0,$$

mamy, jak łatwo widzieć:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x,y} = 0, \text{ oraz } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,y} = 0$$

dla $x \neq y$, oraz dla $x = y = 0$, skąd w jednej chwili:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{0,0} = 0, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{0,0} = 0, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{0,0} = 0, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{0,0} = 0,$$

natomiast funkcja nasza nie jest oczywiście ciągła w punkcie (0, 0) ze względu na obie zmienne x, y .

Powiemy jeszcze parę słów o związku między istnieniem drugich pochodnych, a istnieniem granicy

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta^2 f(x, y)}{\Delta x \Delta y},$$

gdzie

$$\Delta^2 f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y).$$

Zauważymy, że mogą tu zachodzić przypadki następujące:

1) Może istnieć w każdym punkcie (x, y) każda z granic (skończonych)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 f(x, y)}{\Delta x \Delta y} \right), \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 f(x, y)}{\Delta x \Delta y} \right), \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 f(x, y)}{\Delta x \Delta y},$$

a mimo to funkcja może być wszędzie nieciągła¹⁾. Przykładem takiej funkcji jest, jak łatwo widzieć, funkcja

$$f(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

gdzie $\varphi(u)$ oznacza jedność dla u wymiernych, zaś zero dla u niewymiernych. Dla funkcji tej mamy stale

$$\Delta^2 f(x, y) = 0$$

i przeto wszystkie trzy wypisane granice są równe zeru, natomiast funkcja nasza jest oczywiście nieciągła (nawet ze względu na każdą z zmiennych z osobna) w każdym punkcie (x, y) .

2) Mogą istnieć w pewnym punkcie (x_0, y_0) obie pochodne

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{x_0, y_0} \text{ oraz } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{x_0, y_0}, \quad (10)$$

lecz może nie istnieć granica

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{\Delta^2 f(x, y)}{\Delta x \Delta y} \right)_{x_0, y_0}. \quad (11)$$

¹⁾ Jeżeli $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{x_0, y_0}$ ma oznaczoną wartość, to, jak łatwo widzieć

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{x_0, y_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 f(x, y)}{\Delta x \Delta y} \right)_{x_0, y_0}, \text{ natomiast istnienie granicy po prawej}$$

stronie nie pociąga za sobą jeszcze istnienia pochodnej $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{x_0, y_0}$

Np. dla funkcji, określonej przez warunki

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, \text{ dla } x^2 + y^2 > 0; f(0, 0) = 0,$$

mamy, jak łatwo obliczyć:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{0,0} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)_{0,0} = 0,$$

natomiast

$$\left(\frac{\Delta^2 f(x, y)}{\Delta x \Delta y} \right)_{0,0} = \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (12)$$

i przeto granica (10) nie istnieje. (Gdyż np. dla $\Delta x = \Delta y$ wyrażenie (12) jest stale $= 1/2$, zaś dla $\Delta y = (\Delta x)^3$ jest ono bezwzględnie mniejsze od Δx^2).

Istnienie granicy (11) nie jest więc ani konieczne, ani wystarczające dla istnienia pochodnych (10).

Możnaby atoli dowieść, że jeżeli istnieje jedna z pochodnych (10) oraz granica (11), to wartości ich muszą być równe.

§ 209. Pochodne cząstkowe rzędów wyższych.

Jeżeli w otoczeniu punktu (x_0, y_0) istnieje dla funkcji $f(x, y)$ pochodna $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, to jest ona wogóle funkcją dwóch zmiennych x, y . Funkcja ta może posiadać w punkcie (x_0, y_0) pochodne cząstkowe względem x oraz względem y , które oznaczamy odpowiednio przez

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_{x_0, y_0}, \text{ oraz } \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right)_{x_0, y_0}.$$

Podobnie pochodne cząstkowe względem x oraz względem y funkcji $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ w punkcie (x_0, y_0) (o ile istnieją) oznaczamy odpowiednio przez

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \right)_{x_0, y_0} \text{ oraz } \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right)_{x_0, y_0}$$

i t. d. Wszystkich możliwych pochodnych cząstkowych trzeciego rzędu (dla funkcji dwóch zmiennych) mamy więc 8, a mianowicie

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}. \quad (1)$$

Pochodne (1) są więc określone jako odpowiednie pierwsze pochodne cząstkowe drugich pochodnych cząstkowych np.:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^1, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)$$

i t. d. Można je jednak też uważać jako odpowiednie drugie pochodne cząstkowe pierwszych pochodnych cząstkowych, mianowicie, jak łatwo widzieć, mamy zawsze (o ile odpowiednie pochodne istnieją):

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \text{ i t. d.}$$

Udowodnimy np. drugą z tych równości. Mamy, w myśl definicji drugiej i trzeciej pochodnej cząstkowej:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \text{ c. b. d. o.}$$

Okazemy obecnie, że jeżeli wszystkie pochodne rzędu trzeciego funkcji $f(x, y)$ są ciągłe względem obu zmiennych w punkcie (x_0, y_0) , to mamy wzory

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \right)_{x_0, y_0} \quad (2)$$

i podobnie

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} \right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \right)_{x_0, y_0} \quad (3)$$

Dla dowodu zauważymy przedewszystkiem, że z ciągłości ze względu na obie zmienne pochodnych cząstkowych trzeciego rzędu w punkcie (x_0, y_0) wynika ich ograniczoność w otoczeniu tego punktu, skąd, w myśl wniosku końcowego z § 205, wynika ciągłość względem obu zmiennych wszystkich pochodnych cząstkowych rzędu drugiego w otoczeniu punktu (x_0, y_0) , i, tembardziej, istnienie ich w tem otoczeniu. Biorąc to pod uwagę i stosując tw. 228 względem

funkcji $\frac{\partial f}{\partial x}$ zamiast $f(x, y)$, wnosimy w jednej chwili o równości

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right)_{x_0, y_0} \quad (4)$$

¹⁾ Piszemy tak zamiast $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)$.

²⁾ Warunek ciągłości, a nawet istnienia wszystkich trzecich pochodnych cząstkowych funkcji f nie jest tu koniecznym dla prawdziwości wzorów (2) i (3): ma on jednak znaczenie, jako prosty i łatwy do spamiętania warunek wystarczający, pozostający wystarczającym przy uogólnieniu naszego twierdzenia na n -te pochodne cząstkowe.

Z drugiej strony, z ciągłości względem obu zmiennych drugich pochodnych cząstkowych funkcji f w otoczeniu punktu (x_0, y_0) wynika, w myśl tw. 228, że w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) zachodzi równość

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

skaąd, biorąc po obu stronach pochodne względem x dla punktu (x_0, y_0) (które istnieją, gdyż, jak zakładamy, istnieją w punkcie (x_0, y_0) trzecie pochodne cząstkowe naszej funkcji), otrzymujemy w jednej chwili:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \right]_{x_0, y_0} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \right]_{x_0, y_0},$$

czyli

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \right)_{x_0, y_0}. \quad (5)$$

Wzory (4) i (5) dają wzór (2). Podobnie udowodnilibyśmy wzór (3). Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie. Dowiedzione twierdzenie daje się uogólnić na pochodne cząstkowe n -go rzędu ($n = 2, 3, 4, \dots$) i brzmi jak następuje:

Jeżeli wszystkie pochodne cząstkowe rzędu n -go (gdzie n oznacza daną liczbę naturalną > 1) funkcji $f(x, y)$ są dla punktu (x_0, y_0) ciągłe ze względu na obie zmienne, to przy wszelkich naturalnych p i q , których suma wynosi n , mamy wzory

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\beta_1} \partial x^{\alpha_2} \dots \partial x^{\alpha_k} \partial y^{\beta_k}} \right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^q} \right)_{x_0, y_0},$$

dla wszelkich całkowitych nieujemnych α_1 i β_1 , oraz naturalnych $\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}, \alpha_k$, dla których

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \dots + \alpha_k + \beta_k = n.$$

Dowód tego twierdzenia może być przeprowadzony drogą łatwej indukcji, czego bliższe rozpatrzenie pozostawiamy czytelnikowi.

Jeżeli więc wszystkie pochodne cząstkowe n -go rzędu funkcji $f(x, y)$ (których jest 2^n) są ciągłe (względem obu zmiennych) dla punktu (x_0, y_0) , to różnych z pośród nich mamy conajwyżej $n + 1$, mianowicie

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{x_0, y_0}, \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} \right)_{x_0, y_0}, \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} \right)_{x_0, y_0}, \dots, \left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right)_{x_0, y_0}$$

§ 210. Wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych.

Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ posiada dla

$$|x - a| < \delta, \quad |y - b| < \delta \quad (1)$$

(gdzie a i b są dane liczby rzeczywiste) wszystkie pochodne cząstkowe rzędu n -go, ciągłe ze względu na obie zmienne, i niech h oraz k będą dane liczby rzeczywiste, spełniające nierówności

$$|h| < \delta, \quad \text{oraz} \quad |k| < \delta. \quad (2)$$

Istnieje więc liczba dodatnia $\delta_0 < \delta$, taka, iż $|h| < \delta_0$, oraz $|k| < \delta_0$. Połóżmy

$$F(t) = f(a + ht, b + kt). \quad (3)$$

W myśl tw. 225 (gdzie jako zbiór T należy przyjąć zbiór wszystkich liczb, spełniających nierówność $|t| < \frac{\delta}{\delta_0}$ i położywszy $\varphi(t) = a + ht$, $\psi(t) = b + kt$), oraz wobec założeń co do funkcji $f(x, y)$, funkcja $F(t)$ będzie posiadała dla każdej wartości t , takiej iż $|t| < \delta/\delta_0$, pochodną

$$F'(t) = \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{a+ht, b+kt} = \left[f_1(x, y) \right]_{a+ht, b+kt}.$$

Z założeń co do funkcji $f(x, y)$ wynika, dalej, natychmiast (w razie $n > 1$), w myśl tw. 225, oraz tw. 228, że funkcja $F''(t) = f_1(a + ht, b + kt)$ posiada dla każdej wartości t , gdzie $|t| < \delta/\delta_0$, pochodną

$$F''(t) = \left[h \frac{\partial f_1}{\partial x} + k \frac{\partial f_1}{\partial y} \right]_{a+ht, b+kt} = \left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{a+ht, b+kt}.$$

Ogólnie, udowodnilibyśmy drogą łatwej indukcji, że dla każdej wartości t , gdzie $|t| < \delta/\delta_0$, mamy, dla $p = 1, 2, 3, \dots, n$:

$$F^{(p)}(t) = \left[h^p \frac{\partial^p f}{\partial x^p} + \binom{p}{1} h^{p-1} k \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1} \partial y} + \dots + k^p \frac{\partial^p f}{\partial y^p} \right]_{a+ht, b+kt},$$

co piszemy w formie symbolicznej:

$$F^{(p)}(t) = \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x, y) \right]_{a+ht, b+kt} \quad (4)$$

(symbol $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f$ ma oznaczać wyrażenie, które otrzymamy, rozwijając wypisaną potęgę według dwumianu Newtona, tak, jak gdyby symbole ∂ , ∂x , ∂y oraz f były liczbami).

Funkcja $F(t)$ posiada więc dla $|t| < \delta/\delta_0$ pochodną ciągłą rzędu n -go: tembardziej więc, wobec $\delta_0 < \delta$, funkcja $F(t)$ posiada

pochoďną ciagłą rzędu n -go w całym przedziale $(0, 1)$, skąd, w myśl tw. 211, znajdujemy:

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!},$$

gdzie $0 < \theta < 1$.

Wobec (3) i (4) możemy więc napisać:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = & f(a, b) + \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} + \\ & + \frac{1}{2!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} + \dots + \\ & + \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(x, y) \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} + \frac{1}{n!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) \right]_{\substack{x=a+\theta h \\ y=b+\theta k}} \end{aligned}$$

gdzie $0 < \theta < 1$.

Jest to wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych.

Symbolicznie wzór Taylora można, jak to wskazał Lagrange, przedstawić w postaci

$$f(x+h, y+k, \dots) = f(x, y, \dots) = e^{h f'_x + k f'_y + \dots} f(x, y, \dots),$$

gdzie, po rozwinięciu prawej strony (w myśl wzoru na e^x) należy $f_u^{(p)}$ zastąpić przez $f_u^{(p)}$.

KONIEC TOMU PIERWSZEGO.