wnątrz uważanego przedziału daje extremum, należy szukać tylko wśród rozwiązań równania $f'(x) = 0$ (t. j. wśród pierwiastków pochodnej). Nie dla każdego jednak pierwiastka pochodnej funkcja daje extremum: np. funkcja $f(x) = x^3$ daje pochodną $f'(0) = 0$, natomiast jest w punkcie 0 rosnącą.

Z drugiej strony funkcja może dawać extremum dla punktów, w których pochodna nie istnieje: np. funkcja $f(x) = |x|$, uważana w przedziale $(-1, 1)$, daje dla punktu 0 minimum właściwe, chociaż nie posiada w tym punkcie pochodnej.

Przypuśćmy teraz, że dla wartości x_0 istnieje pochodna (skończona, lub nieskończona) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, oraz, że

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Zastępując w twierdzeniu 216 $f(x)$ przez $f(x_0 + x)$, otrzymamy stąd w jednej chwili:

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^n} = n!\, f^{(n)}(x_0),$$

skąd wynika, że wyrażenie $f(x_0 + h) - f(x_0)$ ma, dla dostatecznie małych bezwzględnie h, ten sam znak co $h^n f^{(n)}(x_0)$.

Zatem, w razie parzystego n będzie, dla $0 < |h| < \delta$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0, \quad \text{jeżeli} \quad f^{(n)}(x_0) > 0$$

zaś

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0, \quad \text{jeżeli} \quad f^{(n)}(x_0) < 0;$$

w pierwszym przypadku funkcja $f(x)$ będzie więc dawała dla x_0 minimum właściwe, w drugim — maximum właściwe.

Natomiast w razie nieparzystego n różnica $f(x_0 + h) - f(x_0)$ będzie różnego znaku dla $h > 0$ oraz dla $h < 0$: funkcja $f(x)$ nie będzie więc tu dawała dla x_0 ani maximum, ani minimum (będąc rosnącą w punkcie x_0, jeżeli $f^{(n)}(x_0) > 0$, zaś malejącą w tym punkcie, jeżeli $f^{(n)}(x_0) < 0$).

Otrzymujemy w ten sposób następujące prawidło odnajdywania extremów funkcji $f(x)$, leżących wewnątrz przedziału, wewnątrz którego uważana funkcja posiada wszędzie pochodną. Wyznaczamy przedewszystkiem pierwiastki tej pochodnej: niech x_0 oznacza jeden z nich. Podstawiamy wartość x_0 do kolejnych pochodnych funkcji $f(x)$ (o ile istnieją) i odnajdujemy pierwszą, która nie staje się zerem dla $x = x_0$. Jeżeli pochodna ta jest rzędu nieparzystego, funkcja $f(x)$ nie daje extremum dla $x = x_0$; jeżeli zaś

pochodna ta jest rzędu parzystego, to zachodzi maximum właściwe, jeżeli jest ujemną, zaś minimum właściwe, jeżeli jest dodatnią.

Oczywiście nie we wszystkich przypadkach pozwala reguła powyższa na odnajdywanie extremów (nie będąc mianowicie stosowalną w przypadku, gdy pierwiastek pierwszej pochodnej uważanej funkcji jest zarazem pierwiastkiem wszystkich dalszych pochodnych, które istnieją).

Ćwiczenia.

1) Zastosować tw. 211 do otrzymania rozwinięć na szeregi potęgowe funkcji: $f(x) = e^x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \lg(1 + x)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$.

2) Przyjmując w tw. 213 $\mu = \frac{1}{2}$ i pisząc $x^2 - 1$ zamiast x, wyprowadzić wzór Lebesgue'a:

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - x^2) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-3)}{2 \cdot 4 \dots 2k}(1 - x^2)^k, \quad \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

3) Udowodnić wzory

$$\cos(s \arcsin x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{s^2(s^2 - 2^2)(s^2 - 4^2)\dots(s^2 - (2n-2)^2)}{(2n)!} x^{2n},$$

$$\sin(s \arcsin x) = sx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{s(s^2 - 1^2)(s^2 - 3^2)\dots(s^2 - (2n-1)^2)}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

dla $-1 \leq x \leq 1$, przy wszelkiem s. (Zob. np. Stolz-Gmeiner *Einl. in die Funktionenth.* Lipsk 1905, p. 383).

4) Wyznaczyć extrema funkcji $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ i zbadać różne przypadki, w zależności od wartości współczynników a, b, c.

ROZDZIAŁ XXIV.

Ważniejsze wzory i twierdzenia z teorji przyrostów skończonych. Wzory interpolacyjne Lagrange'a i Newtona.

§ 196. Niech h oznacza daną liczbę rzeczywistą, różną od zera. Będziemy, dla każdej funkcji $f(x)$, oznaczali symbolem $\Delta_x f(x)$ wyrażenie

$$\Delta_x f(x) = f(x + h) - f(x) \tag{1}$$

i nazywali je *pierwszą różnicą funkcji* $f(x)$ (względem zmiennej x). Będzie to więc pewna funkcja zmiennej x, zależna od funkcji $f(x)$ i od liczby h. Jeżeli nie może zachodzić wątpliwość co do tego, względem jakiej zmiennej uważamy różnicę, będziemy zamiast $\Delta_x f(x)$ pisali poprostu $\Delta f(x)$.

Niech $f(x)$ będzie daną funkcją zmiennej rzeczywistej: połóżmy

$$\varphi(x) = \Delta f(x); \tag{2}$$

w myśl (1) będzie więc przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$\varphi(x) = f(x+h) - f(x). \tag{3}$$

Pierwszą różnicę funkcji $\varphi(x)$, czyli funkcję

$$\Delta \varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x)$$

będziemy nazywali *drugą różnicą* funkcji $f(x)$ i oznaczali przez $\Delta\Delta f(x)$ lub przez $\Delta^2 f(x)$. Będzie więc

$$\Delta^2 f(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x). \tag{4}$$

Wzór (3) zachodzi przy wszelkiem rzeczywistem x: możemy więc w nim zastąpić x przez $x+h$, co daje

$$\varphi(x+h) = f(x+2h) - f(x+h). \tag{5}$$

Wobec (3) i (5), wzór (4) daje w jednej chwili:

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Ogólnie, przez $\Delta^n f(x)$ będziemy oznaczali pierwszą różnicę funkcji $\Delta^{n-1} f(x)$: będzie więc (dla $n = 2, 3, 4, \dots$)

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)), \tag{6}$$

czyli wyraźniej:

$$\Delta^n f(x) = \Delta f_1(x), \quad \text{gdzie} \quad f_1(x) = \Delta^{n-1} f(x).$$

Będziemy mieli oczywiście, przy wszelkich naturalnych p i q:

$$\Delta^p(\Delta^q f(x)) = \Delta^q(\Delta^p f(x)) = \Delta^{p+q} f(x).$$

Umówimy się rozumieć przez $\Delta^0 f(x)$ (czyli przez różnicę rzędu 0) samą funkcję $f(x)$: wzór (6) będzie więc prawdziwym i dla $n = 1$.

Powiadam, że przy wszelkiem naturalnem n zachodzi wzór

$$\Delta^n f(x) = f(x+nh) - \binom{n}{1} f(x+(n-1)h) + \binom{n}{2} f(x+(n-2)h) - \dots + (-1)^n f(x). \tag{7}$$

Wzór (7) jest oczywiście prawdziwy dla $n = 1$. Załóżmy, że jest on prawdziwy przy pewnem naturalnem n i połóżmy

$$\varphi(x) = \Delta^n f(x); \tag{8}$$

w myśl (7) będzie, przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$\varphi(x) = \binom{n}{0} f(x+nh) - \binom{n}{1} f(x+(n-1)h) + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} f(x), \tag{9}$$

skąd, zastępując x przez $x+h$:

$$\varphi(x+h) = \binom{n}{0} f(x+(n+1)h) - \binom{n}{1} f(x+nh) + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} f(x+h). \tag{10}$$

Wobec (8), mamy

$$\Delta^{n+1} f(x) = \Delta(\Delta^n f(x)) = \Delta\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x),$$

skąd, w myśl (9) i (10):

$$\Delta^{n+1} f(x) = \binom{n}{0} f(x+(n+1)h) - \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] f(x+nh) + \dots$$
$$\dots + (-1)^n \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] f(x+h) - (-1)^n \binom{n}{n} f(x),$$

co, z uwagi, że

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

daje w jednej chwili:

$$\Delta^{n+1} f(x) = f(x+(n+1)h) - \binom{n+1}{1} f(x+nh) + \dots + (-1)^{n+1} f(x),$$

co dowodzi, że wzór (7) pozostaje prawdziwym przy zastąpieniu n przez $n+1$. Stąd, przez indukcję, wynika prawdziwość wzoru (7) przy wszelkiem naturalnem n.

Z uwagi, że $\binom{n}{k} = 0$, dla $k > n$, wzór (7) możemy przepisać w postaci

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+(n-k)h). \tag{*}$$

Niech teraz μ oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\mu}{k}$$

jest, jak wiadomo, zbieżny dla $\mu > 0$ (zob. tw. 213), przyczem zbieżność jego jest wówczas bezwzględną, gdyż, jak łatwo widzieć, dla $k > \mu$ liczby $(-1)^k \binom{\mu}{k}$

mają wszystkie ten sam znak. Wnosimy stąd, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczoną w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, to szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\mu}{k}f(x+(n-k)\,h) \qquad (**)$$

jest zbieżny (bezwzględnie). W przypadku $\mu=n$, gdzie n jest liczbą naturalną, sumą szeregu (**) jest w myśl (*), $\Delta^n f(x)$: jeżeli więc położymy dla wszelkich dodatnich μ

$$\Delta^{\mu} f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\mu}{k}f(x+(n-k)\,h),$$

to będzie to uogólnienie μ-tej różnicy na wszelkie dodatnie μ. Każda więc funkcja ograniczona zmiennej rzeczywistej będzie posiadała oznaczone w zupełności różnice każdego dodatniego rzędu[1]).

Udowodnimy teraz, że przy wszelkiem naturalnem n:

$$f(x+nh)=f(x)+\binom{n}{1}\Delta f(x)+\binom{n}{2}\Delta^2 f(x)+\ldots+\Delta^n f(x). \qquad (11)$$

Załóżmy, dla dowodu, że wzór (11) jest prawdziwy przy pewnem naturalnem n. (Jest on oczywiście prawdziwy dla $n=1$, wobec 1. Połóżmy

$$\varphi(x)=f(x)+\binom{n}{1}\Delta f(x)+\binom{n}{2}\Delta^2 f(x)+\ldots+\Delta^n f(x). \qquad (12)$$

Mamy oczywiście, dla każdych dwuch funkcyj $f_1(x)$ oraz $f_2(x)$:

$$\Delta[f_1(x)+f_2(x)]=f_1(x+h)+f_2(x+h)-f_1(x)-f_2(x)=\Delta f_1(x)+\Delta f_2(x),$$

co pozostaje oczywiście prawdziwem dla każdej skończonej liczby składników. Z drugiej strony, jeżeli a oznacza liczbę niezależną od x, to, dla każdej funkcji $\psi(x)$:

$$\Delta\, a\,\psi(x)=a\,\psi(x+h)-a\,\psi(x)=a[\psi(x+h)-\psi(x)]=a\,\Delta\,\psi(x).$$

Na mocy tych dwuch własności różnic skończonych, oraz w myśl (6), otrzymujemy, wobec (12):

$$\Delta\varphi(x)=\Delta f(x)+\binom{n}{1}\Delta^2 f(x)+\binom{n}{2}\Delta^3 f(x)+\ldots+\Delta^{n+1}f(x). \qquad (13)$$

Lecz, wobec (12) oraz założenia, że wzór (11) jest prawdziwy dla liczby n, mamy:

$$\varphi(x)=f(x+nh),$$

[1]) Por. K. Knopp: *Mathemat. Zeitschrift* Bd. 22 (r. 1925), p. 77.

skąd

$$\Delta\varphi(x)=f(x+(n+1)\,h)-f(x+nh),$$

co daje

$$f(x+(n+1)\,h)=f(x+nh)+\Delta f(x),$$

skąd, wobec (11) i (13), oraz uwagi, że $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$, $(k=1,2,\ldots n)$, otrzymujemy natychmiast:

$$f(x+(n+1)h)=f(x)+\binom{n+1}{1}\Delta f(x)+\binom{n+1}{2}\Delta^2 f(x)+\ldots+\Delta^{n+1}f(x),$$

co dowodzi, że wzór (11) pozostaje prawdziwym dla liczby $n+1$. Stąd, przez indukcję, wynika prawdziwość wzoru (11) przy wszelkiem naturalnem n.

Wzór (11) napisać możemy w postaci symbolicznej

$$f(x+nh)=(1+\Delta)^n f(x).$$

§ 197. Załóżmy teraz, że funkcja $f(x)$ posiada w całym przedziale $(a, a+nh)$ ciągłą pochodną $n-1$-go rzędu, oraz wewnątrz przedziału $(a, a+nh)$ oznaczoną (skończoną lub nieskończoną) pochodną n-go rzędu. Powiadam, że będzie

$$[\Delta^n f(x)]_{x=a}=h^n f^{(n)}(a+\theta nh), \quad \text{gdzie} \quad 0<\theta<1, \qquad (14)$$

gdzie lewa strona oznacza wartość wyrażenia $\Delta^n f(x)$ dla $x=a$.

Dowód. Twierdzenie nasze jest prawdziwe dla $n=1$, gdyż staje się wówczas twierdzeniem Lagrange'a. Załóżmy, że jest ono prawdziwe przy pewnem naturalnem n i niech $f(x)$ będzie funkcją, posiadającą w całym przedziale $(a, a+(n+1)\,h)$ ciągłą pochodną n-go rzędu, zaś wewnątrz tego przedziału oznaczoną pochodną $n+1$-go rzędu. Połóżmy

$$\varphi(x)=f(x+h)-f(x). \qquad (15)$$

Funkcja $\varphi(x)$ będzie oczywiście posiadała w całym przedziale $(a, a+nh)$ pochodną ciągłą n-go rzędu

$$\varphi^{(n)}(x)=f^{(n)}(x+h)-f^{(n)}(x); \qquad (16)$$

a więc, tembardziej, pochodną ciągłą $n-1$-go rzędu, i przeto, w myśl założenia, że twierdzenie nasze jest prawdziwe dla liczby n, będziemy mogli napisać:

$$[\Delta^n\varphi(x)]_{x=a}=h^n\varphi^{(n)}(a+\theta_1 nh), \qquad (17)$$

gdzie θ_1 jest pewną liczbą rzeczywistą, spełniającą nierówności

$$0 < \theta_1 < 1. \tag{18}$$

Z drugiej strony, funkcja $\psi(x) = f^{(n)}(x)$ będzie w przedziale $(a, a + (n+1)h)$ ciągłą, zaś wewnątrz przedziału $(a, a + (n+1)h)$ będzie posiadała oznaczoną pochodną (gdyż, jak zakładamy, funkcja $f(x)$ posiada w tym przedziale pochodną ciągłą n-go rzędu, zaś wewnątrz niego oznaczoną pochodną $n+1$-go rzędu): ponieważ zaś liczby $a + \theta_1 nh$ oraz $a + h + \theta_1 nh$ są, wobec (18), obie liczbami przedziału $(a, a + (n+1)h)$, więc, w myśl tw. Lagrange'a, będziemy mieli:

$$\psi(a + h + \theta_1 nh) - \psi(a + \theta_1 nh) = h\psi'(a + \theta_1 nh + \theta_2 h),$$

czyli

$$f^{(n)}(a + h + \theta_1 nh) - f^{(n)}(a + \theta_1 nh) = hf^{(n+1)}(a + \theta_1 nh + \theta_2 h), \tag{19}$$

gdzie

$$0 < \theta_2 < 1. \tag{20}$$

Wobec (17), (16) i (19) będziemy mieli:

$$[\Delta^n \varphi(x)]_{x=a} = h^{n+1} f^{(n+1)}(a + \theta_1 nh + \theta_2 h). \tag{21}$$

Połóżmy

$$\frac{\theta_1 n + \theta_2}{n+1} = \theta: \tag{22}$$

wobec (18) i (20) będzie

$$0 < \theta < 1,$$

zaś wzór (21), wobec (15) i (22), będziemy mogli napisać w postaci

$$[\Delta^{n+1} f(x)]_{x=a} = h^{n+1} f^{(n+1)}(a + \theta(n+1)h), \quad \text{gdzie} \quad 0 < \theta < 1.$$

Dowiedliśmy więc prawdziwości naszego twierdzenia dla liczby $n+1$, skąd, przez indukcję, wynika jego prawdziwość przy wszelkiem naturalnem n.

Znakowanie (1), które przyjęliśmy dla każdej funkcji $f(x)$, daje, w szczególności, dla funkcji $f(x) = x$:

$$\Delta x = h,$$

wobec czego wzór (1) możemy napisać w postaci:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Umówmy się pisać przez skrócenie Δx^n zamiast $(\Delta x)^n$.

Udowodnione przed chwilą twierdzenie będziemy mogli wyrazić jak następuje:

Twierdzenie 221. *Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w całym przedziale $(x, x + n\Delta x)$ pochodną ciągłą rzędu $n-1$-go, zaś wewnątrz tego przedziału oznaczoną pochodną (skończoną lub nieskończoną) rzędu n-go, to mamy wzór:*

$$\Delta^n f(x) = \Delta x^n \,.\, f(x + \theta n \Delta x), \quad \text{gdzie} \quad 0 < \theta < 1. \tag{23}$$

W twierdzeniu tem liczby x oraz Δx są oczywiście dwiema danemi, zresztą jakiemikolwiek liczbami rzeczywistemi.

§ **198.** Załóżmy teraz, że funkcja $f(x)$ posiada dla danej wartości x_0 oznaczoną *skończoną* pochodną n-go rzędu $f^{(n)}(x_0)$. Z założenia tego wynika, że, przy dostatecznie małem dodatniem δ, funkcja $f(x)$ posiada w przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ oznaczoną skończoną pochodną rzędu $n-2$-go. Wynika stąd, dalej, że dla $|h| < \delta/n$ funkcja

$$\varphi(x) = f(x+h) - f(x) \tag{24}$$

będzie posiadała w przedziale $(x_0, x_0 + (n-1)h)$ pochodną ciągłą rzędu $n-2$-go, oraz oznaczoną pochodną rzędu $n-1$-go. W myśl tw. 221 będzie więc (dla $|h| < \delta/n$)

$$[\Delta^{n-1} \varphi(x)]_{x=x_0} = h^{n-1} \varphi^{(n-1)}(x_0 + \theta(n-1)h), \quad \text{gdzie} \quad 0 < \theta < 1, \tag{25}$$

czyli, wobec (24):

$$[\Delta^n f(x)]_{x=x_0} = h^{n-1}[f^{(n-1)}(x_0 + h + \theta(n-1)h) - f^{(n-1)}(x_0 + \theta(n-1)h)],$$

skąd

$$\frac{[\Delta^n f(x)]_{x=x_0}}{h^n} = \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h + \theta(n-1)h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h + \theta(n-1)h} + \tag{26}$$

$$+\theta(n-1)\left[\frac{f^{(n-1)}(x_0+h+\theta(n-1)h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h+\theta(n-1)h} - \frac{f^{(n-1)}(x_0+\theta(n-1)h) - f^{(n-1)}(x_0)}{\theta(n-1)h}\right].$$

Załóżmy teraz, że h zmierza do zera ciągiem wartości różnych od zera. Liczba θ, figurująca we wzorze (26), będzie funkcją zmiennej h, ale w każdym razie będzie spełniała nierówność $0 < \theta < 1$. Będzie więc

$$\lim_{h=0} [h + \theta(n-1)h] = 0, \quad \text{oraz} \quad \lim_{h=0} [\theta(n-1)h] = 0,$$

i przeto, wobec założenia, że istnieje pochodna (skończona) $f^{(n)}(x_0)$:

$$\lim_{h=0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h+\theta(n-1)h)-f^{(n)}(x_0)}{h+\theta(n-1)h}=f^{(n)}(x_0),$$

oraz

$$\lim_{h=0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+\theta(n-1)h)-f^{(n)}(x_0)}{\theta(n-1)h}=f^{(n)}(x_0),$$

wobec czego wzór (26) daje w jednej chwili:

$$\lim_{h=0} \frac{[\Delta^n f(x)]_{x=x_0}}{h^n}=f^{(n)}(x_0),$$

co możemy jeszcze napisać w postaci:

$$\lim_{\Delta x=0} \left(\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}\right)_{x=x_0}=f^{(n)}(x_0).$$

Udowodniliśmy więc następujące

Twierdzenie 222. *Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada dla wartości x_0 pochodną skończoną rzędu n-go, to mamy wzór:*

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x=0} \left(\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}\right)_{x=x_0}. \tag{27}$$

Innemi słowy: jeżeli dla danej funkcji $f(x)$ i danej wartości $x=x_0$ lewa strona wzoru (27) posiada oznaczoną skończoną wartość, to tę samą wartość posiada prawa strona tego wzoru. Zauważymy jednak, że prawa strona wzoru (27) może posiadać oznaczoną wartość, pomimo, że nie istnieje pochodna $f^{(n)}(x_0)$. Np. dla funkcji

$$f(x)=|x|$$

mamy oczywiście

$$[\Delta^2 f(x)]_{x=0}=f(2\Delta x)-2f(\Delta x)=|2\Delta x|-2|\Delta x|=0,$$

i, tembardziej:

$$\lim_{\Delta x=0} \left(\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}\right)_{x=0}=0, \tag{28}$$

gdy tymczasem nie istnieje już nawet $f'(0)$.

Podobnież dla funkcji $f(x)$, określonej przez warunki

$$f(0)=0,\quad f(x)=x^3\sin\frac{1}{x},\quad \text{dla}\quad x\neq 0$$

zachodzi wzór (28), natomiast nie istnieje $f''(0)$. Mamy tu bowiem $f'(0)=0$, $f'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\sin\frac{1}{x}$, dla $x\neq 0$, i przeto, dla $h\neq 0$:

$$\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=3h\sin\frac{1}{h}-\sin\frac{1}{h},$$

skąd widać, że granica $\lim_{h=0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}$, czyli pochodna $f''(0)$, nie istnieje.

Funkcja $f(x)$ może nawet nie być ciągłą dla wartości x_0, pomimo, że istnieje granica skończona $\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}\right)_{x=x_0}$. Aby dać przykład takiej właśnie funkcji, połóżmy:

$$f(x)=3^{-2l}x,\quad \text{dla}\quad |x|=2^k.3^l,\quad \text{gdzie } k \text{ i } l \text{ są całkowite},$$

oraz

$$f(x)=0,\quad \text{dla}\quad |x|\neq 2^k.3^l\quad (k,l=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

(Jasnem jest, że wartość funkcji $f(x)$ będzie przez powyższe warunki wyznaczone jednoznacznie przy wszelkiem rzeczywistem x, gdyż każda liczba rzeczywista daje się conajwyżej w jeden tylko sposob przedstawić w postaci $2^k.3^l$ przy całkowitych k i l).

Będziemy mieli, jak łatwo widzieć, przy wszelkiem rzeczywistem h:

$$f(2h)=2f(h),$$

i przeto

$$[\Delta^2 f(x)]_{x=0}=0,$$

skąd, tembardziej, wynika wzór (28), natomiast

$$f(0)=0,\quad f\left(\frac{1}{3^n}\right)=3^n,\quad \text{dla}\quad n=1,2,3,\ldots,$$

co dowodzi, że funkcja $f(x)$ nie jest ciągłą dla wartości 0 (a nawet nie jest ograniczoną w otoczeniu punktu 0)[1].

Zauważymy, że możnaby nawet zbudować funkcję $f(x)$, dla której istnieje każda z granic

$$\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta^p f(x)}{\Delta x^p}\right)_{x=x_0},$$

pomimo, że funkcja $f(x)$ jest nieciągłą dla $x=x_0$ [1]).

Zauważymy, że wzór (27) może nie być prawdziwy nawet wówczas, kiedy pochodna $f^{(n)}(x)$ istnieje, ale jest nieskończoną. Oto przykład: połóżmy

$$f(0)=0,\quad f(x)=x\sqrt[3]{x}\left(3+\sin\frac{\pi\lg x^2}{4\lg 2}\right),\quad \text{dla}\quad x\neq 0. \tag{29}$$

Mamy tu oczywiście

$$f'(0)=\lim_{x=0}\frac{f(x)}{x}=0,$$

[1]) Zob. *Prace mat.-fiz.* t. 26, str. 123.

zaś

$$f'(x) = \sqrt[3]{x}\left(4 + \frac{4}{3}\sin\frac{\pi \lg x^2}{4\lg 2} + \frac{\pi}{2\lg 2}\cos\frac{\pi\lg x^2}{4\lg 2}\right), \quad \text{dla} \quad x \neq 0. \tag{30}$$

Z nierówności

$$e^2 < (2,8)^2 < 8 = 2^3$$

znajdujemy

$$2 < 3\lg 2,$$

skąd

$$\lg 2 > \frac{2}{3}$$

i przeto

$$\frac{16\lg 2}{3} > \frac{32}{9} > 3,5 > \pi$$

co daje

$$\frac{\pi}{2\lg 2} < \frac{8}{3},$$

oraz

$$4 - \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2\lg 2} = \delta > 0.$$

Jest więc, wobec (30), z uwagi, że $\sin t \geq -1$, $\cos t \geq -1$:

$$\frac{f'(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\left(4 + \frac{4}{3}\sin\frac{\pi\lg x^2}{4\lg 2} + \frac{\pi}{2\lg 2}\cos\frac{\pi\lg x^2}{4\lg 2}\right) \geq \frac{\delta}{\sqrt[3]{x^2}},$$

skąd

$$\lim_{x=0}\frac{f'(x)}{x} = +\infty,$$

i przeto, wobec $f'(0) = 0$:

$$f''(0) = +\infty.$$

Obliczmy teraz $[\Delta^2 f(x)]_{x=0}$. Mamy wobec (29):

$$f(2h) - 2f(h) = 2h\sqrt[3]{h}\left(3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}\sin\frac{\pi\lg 4h^2}{4\lg 2} - 3 - \sin\frac{\pi\lg h^2}{4\lg 2}\right). \tag{31}$$

Połóżmy

$$h_k = \frac{1}{2^{4k+2}}; \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

będziemy tu mieli

$$4h_k^2 = \frac{1}{2^{8k+2}}, \quad \lg 4h_k^2 = -(8k+2)\lg 2, \quad \frac{\pi\lg 4h^2}{4\lg 2} = -(2k+\tfrac{1}{2})\pi,$$

$$h_k^2 = \frac{1}{2^{8k+4}}, \quad \lg h_k^2 = -(8k+4)\lg 2, \quad \frac{\pi\lg h_k^2}{4\lg 2} = -(2k+1)\pi,$$

skąd:

$$\sin\frac{\pi\lg 4h_k^2}{4\lg 2} = -1, \quad \sin\frac{\pi\lg h_k^2}{4\lg 2} = 0$$

i przeto, wobec (31):

$$\frac{f(2h_k) - 2f(h_k)}{h_k^2} = \frac{2}{\sqrt[3]{h_k^2}}(3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} - 3) = -2\frac{3 - 2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{h_k^2}},$$

a że $3 - 2\sqrt[3]{2} > 0$, więc mamy stąd

$$\lim_{k=0}\frac{f(2h_k) - 2f(h_k)}{h_k^2} = -\infty,$$

co, wobec $f(0) = 0$, dowodzi, że nie może być

$$\lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}\right)_{x=0} = +\infty.$$

Zauważymy wreszcie, że wzór (27) mógłby być punktem wyjścia dla określenia pochodnych $f^{\mu}(x)$ przy wszelkiem dodatniem μ (gdyż w § 196 określiliśmy dla takich μ różnice $\Delta^{\mu} f(x)$).

§ 199. Załóżmy, że dla n różnych wartości zmiennej

$$x = a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{1}$$

dane są wartości funkcji $f(x)$,

$$f(a_1) = A_1, \; f(a_2) = A_2, \ldots, \; f(a_n) = A_n. \tag{2}$$

Powiadam, że możemy zawsze wyznaczyć i przytem jeden tylko wielomian całkowity $P(x)$, stopnia niższego od n, któryby dla wartości (1) zmiennej x przyjmował odpowiednio te same wartości co i funkcja $f(x)$, mianowicie

$$P(a_1) = A_1, \; P(a_2) = A_2, \ldots, \; P(a_n) = A_n. \tag{3}$$

Dla dowodu zauważymy przedewszystkiem, że wielomian stopnia $n-1$-go

$$P_1(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}$$

staje się jednością dla $x = a_1$, zaś zerem dla $x = a_2, a_3, \ldots, a_n$. Podobnież możemy zbudować wielomian $P_k(x)$ stopnia $n-1$-go, który staje się jednością dla $x = a_k$, zaś zerem dla pozostałych $n-1$ wyrazów ciągu (1).

Wielomian

$$P(x) = A_1 P_1(x) + A_2 P_2(x) + \ldots + A_n P_n(x) \tag{4}$$

będzie oczywiście stopnia conajwyżej $n-1$-go (może być ewentualnie niższego, jeżeli zajdą redukcje) i będzie się stawał liczbą A_k

dla $x = a_k$ (gdyż dla $x = a_k$ z n jego składników tylko składnik $A_k P_k(a_k) = A_k$ będzie różnym od zera). Będzie to oczywiście wielomian żądany.

Łatwo, dalej, dowieść, że nie istnieją dwa różne wielomiany stopnia niższego niż n, spełniające nasze warunki. W samej rzeczy, gdybyśmy założyli, że prócz wielomianu $P(x)$ istnieje jeszcze wielomian $Q(x)$, również stopnia niższego niż n, i taki, iż

$$Q(a_k) = A_k, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

to, wobec (3), różnica $R(x) = P(x) - Q(x)$ byłaby wielomianem stopnia conajwyżej $n - 1$-go, który staje się zerem dla n różnych wartości x (mianowicie liczb (1)).

Wielomian taki musiałby, w myśl tw. 73, być tożsamościowo zerem, skąd mielibyśmy tożsamościowo $P(x) = Q(x)$. Dowiedliśmy więc, że istnieje jeden i tylko jeden wielomian całkowity $P(x)$ stopnia niższego niż n, spełniający warunki (3): jest to wielomian (4), czyli, wyraźnie, wielomian

$$P(x) = A_1 \frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} + A_2 \frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)} +$$
$$+ \ldots + A_n \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}, \tag{5}$$

który nosi nazwę *wielomianu* Lagrange'a.

Otrzymany wielomian $P(x)$ przedstawia zatem dokładnie funkcję $f(x)$ dla każdej z liczb (1). Zbadamy obecnie z jaką dokładnością wielomian $P(x)$ przedstawia funkcję $f(x)$ dla wartości x, nie należących do ciągu (1). W tym celu wyprowadzimy przedewszystkiem pewne uogólnienie twierdzenia Rolle'a (§ 175).

§ **200.** Załóżmy, że funkcja $F(u)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) i posiada wewnątrz przedziału (a, b) pochodną ciągłą rzędu $n - 1$-go oraz oznaczoną pochodną rzędu n-go (skończoną lub nieskończoną). Funkcja $F(u)$ będzie więc posiadała pochodne ciągłe wszystkich rzędów niższych od n wewnątrz przedziału (a, b). Załóżmy dalej, że dla $n + 1$ różnych liczb

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1},$$

należących do przedziału (a, b), mamy

$$F(u_1) = F(u_2) = \ldots = F(u_n) = F(u_{n+1}) = 0.$$

Możemy więc zastosować twierdzenie Rolle'a względem każdego z n przedziałów

$$(u_1, u_2), (u_2, u_3), \ldots, (u_n, u_{n+1}). \tag{6}$$

W myśl tego twierdzenia będą wewnątrz odpowiednich przedziałów (6) istniały liczby

$$u_1', u_2', \ldots, u_n' \tag{7}$$

(gdzie $u_k < u_k' < u_{k+1}$, dla $k = 1, 2, \ldots, n$), takie, iż

$$F'(u_1') = F'(u_2') = \ldots = F'(u_n') = 0.$$

Wszystkie liczby (7), leżąc wewnątrz odpowiednich przedziałów (6), leżą oczywiście wewnątrz przedziału (a, b). W każdym przedziale

$$(u_k', u_{k+1}') \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{8}$$

funkcja $F_1(u) = F'(u)$ jest więc (w razie $n > 1$) ciągłą i posiada oznaczoną pochodną $F_1'(u) = F''(u)$ (gdyż funkcja $F(u)$ posiada wewnątrz przedziału (a, b) pochodne ciągłe aż do rzędu $n - 1$-go, oraz oznaczoną pochodną rzędu n-go). Względem funkcji $F_1(u) = F'(u)$, oraz względem każdego z przedziałów (8) możemy wiec zastosować tw. Rolle'a, skąd wnosimy, że istnieją liczby

$$u_1'' < u_2'' < \ldots < u_{n-1}'', \quad (u_k' < u_k'' < u_{k+1}', \ k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

takie, iż

$$F''(u_1'') = F''(u_2'') = \ldots = F''(u_{n-1}'') = 0.$$

Powtórzywszy podobne rozumowanie jeszcze $n - 2$ razy, dojdziemy do wniosku, że istnieje wewnątrz przedziału (a, b) liczba $u_1^{(n)}$, taka, iż

$$F^{(n)}(u_1^{(n)}) = 0.$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 223. *Jeżeli funkcja $F(u)$ jest ciągła w przedziale (a, b) i posiada wewnątrz tego przedziału pochodną ciągłą rzędu $n - 1$-go oraz oznaczoną pochodną rzędu n-go, i jeżeli uważana funkcja staje się zerem dla $n + 1$ różnych liczb przedziału (a, b), to istnieje wewnątrz przedziału (a, b) liczba ξ taka, iż*

$$F^{(n)}(\xi) = 0$$

§ **201.** Załóżmy, że funkcja $f(u)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) i wewnątrz tego przedziału posiada pochodną ciągłą rzędu $n - 1$-go oraz oznaczoną pochodną rzędu n-go, i niech $a_1, a_2, \dots a_n$ będą różne liczby przedziału (a, b). Połóżmy (przy wszelkiem rzeczywistem u)

$$P(u)=f(a_1)\frac{(u-a_2)(u-a_3)\dots(u-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)}+f(a_2)\frac{(u-a_1)(u-a_3)\dots(u-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)}+$$
$$+\dots+f(a_n)\frac{(u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})} \tag{9}$$

— będzie to więc wielomian Lagrange'a (odpowiadający funkcji $f(x)$ i wartościom $a_1, a_2, \dots, a_n$).

Niech, dalej, x oznacza jakąkolwiek, ale daną wartość przedziału (a, b), różną od każdej z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$. Połóżmy

$$\frac{n!\,[f(x)-P(x)]}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}=C \tag{10}$$

— będzie to oznaczona w zupełności liczba (zależna od funkcji f, od wartości x, oraz od liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$, ale nie zależna od zmiennej u). Połóżmy wreszcie, dla $a \leq u \leq b$:

$$F(u)=f(u)-P(u)-C\frac{(u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_n)}{n!}. \tag{11}$$

Wobec (11) sprawdzamy w jednej chwili, że funkcja $F(u)$ spełnia wszystkie warunki uogólnionego tw. Rolle'a (tw. 223): w myśl bowiem założeń co do funkcji $f(u)$, funkcja $F(u)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), posiada wewnątrz tego przedziału pochodną ciągłą rzędu $n-1$-go, oraz oznaczoną pochodną rzędu n-go, wreszcie $F(u)$ staje się zerem dla $n+1$ różnych wartości przedziału (a, b), mianowicie (jak to widzimy natychmiast ze wzoru (11), wobec (9)), dla $u=a_1, a_2, \dots, a_n$, oraz (wobec (10)) dla $u=x$.

Istnieje więc, w myśl tw. 223, wewnątrz przedziału (a, b) liczba ξ, taka, iż

$$F^{(n)}(\xi)=0. \tag{12}$$

Lecz ze wzoru (11) i uwagi że $P(u)$ jest (w myśl (9)) wielomianem całkowitym stopnia conajwyżej $n-1$-go, wynika natychmiast, że (wewnątrz przedziału (a, b)):

$$F^{(n)}(u)=f^{(n)}(u)-C.$$

Stąd, w szczególności, dla $u=\xi$, wobec (12):

$$f^{(n)}(\xi)-C=0,$$

czyli

$$C=f^{(n)}(\xi). \tag{13}$$

Wobec (10) i (13) możemy więc napisać

$$f(x)=P(x)+\frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi), \text{ gdzie } a<\xi<b. \tag{14}$$

Dowiedliśmy więc, że przy uczynionych wyżej założeniach co do funkcji $f(x)$, oraz przy podanej wyżej definicji wielomianu $P(x)$, dla każdej danej wartości x przedziału (a, b), różnej od $a_1, a_2, \dots, a_n$, istnieje wewnątrz (a, b) liczba ξ, przy której zachodzi wzór (14).

W razie, kiedy x jest którąkolwiek z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$, wzór (14) jest oczywiście prawdziwy dla każdej liczby ξ wewnątrz przedziału (a, b), dla której pochodna $f^{(n)}(\xi)$ jest skończoną. (Liczby takie istnieją, w myśl wniosku III z tw. Lagrange'a (§ 176), oraz wobec uwagi, że — w myśl założeń co do funkcji $f(x)$ — funkcja $f^{(n-1)}(x)$ jest w przedziale (a, b) ciągłą i posiada wszędzie wewnątrz przedziału (a, b) oznaczoną pochodną). Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 224. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale (a, b) i wewnątrz tego przedziału posiada pochodną ciągłą rzędu $n-1$-go oraz oznaczoną pochodną rzędu n-go, i jeżeli $a_1, a_2, \dots, a_n$ są różne liczby przedziału (a, b), to dla każdej liczby x przedziału (a, b) istnieje wewnątrz tego przedziału liczba ξ, dla której zachodzi wzór* (14).

Jest to *wzór interpolacyjny* Lagrange'a *z resztą* w formie Cauchy'ego.

§ **202.** Zajmiemy się obecnie wywodem wzoru interpolacyjnego Newtona. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) i wewnątrz tego przedziału posiada pochodną ciągłą rzędu $n-1$-go, oraz oznaczoną pochodną rzędu n-go, i niech t oznacza *daną* (zresztą jakąkolwiek) liczbę przedziału (a, b), zaś h — liczbę rzeczywistą różną od zera, taką, iż $t+(n-1)h$ należy jeszcze do przedziału (a, b). Każda z liczb

$$a_1=t,\ a_2=t+h,\ a_3=t+2h, \dots,\ a_n=t+(n-1)h \tag{15}$$

będzie więc leżała w przedziale (a, b).

Połóżmy (przy rzeczywistem u):

$$P(u)=f(t)+\frac{u-t}{1!}\frac{\Delta f(t)}{h}+\frac{(u-t)(u-t-h)}{2!}\frac{\Delta^2 f(t)}{h^2}+\dots$$
$$\dots+\frac{(u-t)(u-t-h)\dots(u-t-(n-2)h)}{(n-1)!}\frac{\Delta^{n-1}f(t)}{h^{n-1}}. \tag{16}$$

Wzór (16) daje w jednej chwili dla $k=0,1,2,\ldots,n-1$:

$$P(t+kh)=f(t)+\frac{k}{1}\Delta f(t)+\frac{k(k-1)}{1.2}\Delta^2 f(t)+\ldots+\frac{k(k-1)\ldots 1}{1.2\ldots k}\Delta^k f(t),$$

skąd, wobec wzoru (11) z § 196:

$$P(t+kh)=f(t+kh), \quad \text{dla} \quad k=0,1,2,\ldots,n-1,$$

czyli, wobec (15):

$$P(a_1)=f(a_1),\ P(a_2)=f(a_2),\ldots,\ P(a_n)=f(a_n).$$

Wielomian $P(u)$ przyjmuje więc dla n różnych liczb (15) odpowiednio te same wartości co i funkcja $f(u)$, a że jest oczywiście wielomianem stopnia $<n$, więc musi, jak wiemy (§ 199), być wielomianem Lagrange'a (odpowiadającym funkcji $f(u)$ i wartościom (15)). Mamy więc dla wielomianu $P(u)$ wzór (9), który (przy naszych założeniach co do funkcji $f(u)$), w myśl tw. 224, pociąga za sobą wzór (14), dla każdej liczby x przedziału (a, b). Wzór (14), wobec (16) i (15), możemy jeszcze, pisząc Δt zamiast h, napisać w postaci:

$$f(x)=f(t)+\frac{x-t}{1!}\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}+\frac{(x-t)(x-t-\Delta t)}{2!}\frac{\Delta^2 f(t)}{\Delta t^2}+$$
$$+\ldots+\frac{(x-t)(x-t-\Delta t)\ldots(x-t-(n-2)\Delta t)}{(n-1)!}\frac{\Delta^{n-1}f(t)}{\Delta t^{n-1}}+ \tag{17}$$
$$+\frac{(x-t)(x-t-\Delta t)\ldots(x-t-(n-1)\Delta t)}{n!}f^{(n)}(\xi), \quad \text{gdzie } a<\xi<b.$$

Jest to właśnie *wzór interpolacyjny* Newtona. Wzór ten wyprowadziliśmy w założeniu, że x i t są jakiekolwiek dane liczby przedziału (a, b), zaś Δt jest jakąkolwiek liczbą różną od zera, i taką, iż $t+(n-1)\Delta t$ należy jeszcze do przedziału (a, b).

§ **203.** Załóżmy, dalej, że pochodna $f^{(n)}(u)$ jest ciągła w przedziale (a, b). Przyjmijmy $t=a$, $x=b$. Przy dostatecznie małem dodatniem Δt liczba $t+(n-1)\Delta t=a+(n-1)\Delta t$ będzie należała do przedziału (a, b) i przeto będzie zachodził wzór (17), gdzie ξ oznacza liczbę zależną od x, t, oraz Δt. Przejdźmy teraz w tym wzorze do granicy, gdy Δt zmierza do zera jakimkolwiek ciągiem liczb dodatnich. W myśl tw. 222, będziemy mieli:

$$\lim_{\Delta t=0}\left(\frac{\Delta^k f(t)}{\Delta t^k}\right)_{t=a}=f^{(k)}(a), \quad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots,n-1,$$

a że oczywiście

$$\lim_{\Delta t=0}(x-t)(x-t-\Delta t)\ldots(x-t-(k-1)\Delta t)=(x-t)^k,$$

dla $k=1,2,\ldots,n-1$, więc wzór (17), po podzieleniu przez $(x-t)^n/n!$ i uwzględnieniu, że $t=a$, $x=b$, daje, w granicy dla $\Delta t=0$:

$$\lim_{\Delta t=0}f^{(n)}(\xi)=\frac{n!}{(b-a)^n}\Big[f(b)-f(a)-\frac{b-a}{1!}f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)-\ldots$$
$$\ldots-\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)\Big]. \tag{18}$$

Ponieważ, jak zakładamy, funkcja $f(u)$ jest w przedziale (a, b) ciągłą, więc zbiór jej wartości w tym przedziale jest zamknięty: liczba $\lim\limits_{\Delta t=0} f^{(n)}(\xi)$, jako granica ciągu wartości funkcji $f^{(n)}(u)$ w przedziale (a, b), jest więc jedną z wartości tejże funkcji w uważanym przedziale; innemi słowy, istnieje w przedziale (a, b) takie η, iż

$$f^{(n)}(\eta)=\lim_{\Delta t=0}f^{(n)}(\xi). \tag{19}$$

Wobec (18) i (19) znajdujemy:

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(\eta),$$

gdzie $a\leq\eta\leq b$. Jest to wzór Taylora z resztą w formie Lagrange'a. (Por. § 189).

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że dla funkcji ograniczonej $f(x)$ warunek $\lim\limits_{\Delta x=0}(\Delta^2 f(x))_{x=x_0}=0$ pociąga za sobą ciągłość funkcji $f(x)$ w punkcie x_0. (Zob. *Prace mat.-fiz.* t. 26, str. 125).

2) Udowodnić, że funkcja $f(x)$, określona przez warunki

$$f(x)=\cos\left(\alpha k+\frac{\alpha+\pi}{2}n\right), \quad \text{gdzie} \quad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{6}$$

dla liczb x formy $2^k.3^n$ (k, n całkowite $>, =, <0$), zaś

$$f(x)=0 \text{ dla pozostałych } x,$$

jest ograniczoną, nieciągłą dla $x=0$ i spełnia warunek $\lim\limits_{\Delta x=0}(\Delta^2 f(x))_{x=0}=0$ (Zob. *Prace mat.-fiz.* t. 26, str. 215).

3) Udowodnić wzór

$$(-1)^{n-1}B_n = 1 - \frac{\Delta 1^{2n}}{2} + \frac{\Delta^2 1^{2n}}{3} - \frac{\Delta^3 1^{2n}}{4} + \frac{\Delta^4 1^{2n}}{5} - \ldots \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

gdzie B_n są liczby Bernoulli'ego, zaś $\Delta^k 1^{2n}$ oznacza przez skrócenie liczbę $[\Delta^k x^{2n}]_{x=1}$, przy $\Delta x = 1$.

4) Udowodnić, że dla każdych danych $n-1$ liczb $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ można zawsze dobrać liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, tak, iżbyśmy, oznaczając przez $\varphi(x)$ wyrażenie

$$\varphi(x) = a_1 \sin \pi x + a_2 \sin 2\pi x + \ldots + a_{n-1} \sin (n-1)\pi x,$$

mieli

$$\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = A_k, \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Odp. Żądane wartości współczynników a_s $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$ są

$$a_s = \frac{2}{n}\left[A_1 \sin \frac{s\pi}{n} + A_2 \sin \frac{2s\pi}{n} + \ldots + A_{n-1} \sin \frac{(n-1)s\pi}{n}\right].$$

Jest to t. zw. interpolacja trygonometryczna.

ROZDZIAŁ XXIV

Funkcje dwuch zmiennych rzeczywistych.

§ 204. Niech U oznacza jakikolwiek dany zbiór układów (x, y) dwuch liczb rzeczywistych x i y. Jeżeli każdemu układowi (x, y) zbioru U przyporządkowana jest pewna liczba rzeczywista z, to mówimy, że mamy określoną funkcję dwuch zmiennych rzeczywistych x, y w zbiorze U. Wartość z, odpowiadającą układowi (x, y) oznaczamy przez $f(x, y)$.

Niech (x_0, y_0) oznacza dany układ, należący do zbioru U, czyli, jak będziemy mówili, dany punkt zbioru U, zaś $f(x, y)$ — funkcję, określoną w zbiorze U. Jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego (x_n, y_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ układów zbioru U warunki

$$\lim_{n=\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n=\infty} y_n = y_0$$

pociągają za sobą zawsze wzór

$$\lim_{n=\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0),$$

to mówimy, że funkcja $f(x, y)$ jest w zbiorze U *ciągłą* dla punktu (x_0, y_0) *ze względu na obie zmienne* x, y.

Zupełnie taksamo, jak dla funkcji jednej zmiennej, dowodzimy, że na to, iżby funkcja dwuch zmiennych $f(x, y)$ była w zbiorze U ciągłą dla punktu (x_0, y_0) względem obu zmiennych, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdej liczby dodatniej ε istniała liczba dodatnia δ, taka, iż nierówności

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

pociągają za sobą nierówność

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

dla każdego punktu (x, y), należącego do U. Dowód konieczności tego warunku wymaga przytem zastosowania pewnika Zermelo (por. § 54).

Jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego x_n, dla którego układy (x_n, y_0) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ należą do U, warunek

$$\lim_{n=\infty} x_n = x_0$$

pociąga za sobą wzór

$$\lim_{n=\infty} f(x_n, y_0) = f(x_0, y_0),$$

to mówimy, że funkcja $f(x, y)$ jest w zbiorze U *ciągłą* dla punktu (x_0, y_0) *ze względu na zmienną* x.

Podobnież, jeżeli dla każdego ciągu nieskończonego y_n, dla którego układy (x_0, y_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ należą do U, warunek

$$\lim_{n=\infty} y_n = y_0$$

pociąga za sobą wzór

$$\lim_{n=\infty} f(x_0, y_n) = f(x_0, y_0),$$

to mówimy, że funkcja $f(x, y)$ jest w zbiorze U *ciągła* dla punktu (x_0, y_0) *ze względu na* y.

Funkcja $f(x, y)$, ciągła w zbiorze U dla punktu (x_0, y_0) ze względu na obie zmienne x, y, jest oczywiście dla tego punktu ciągłą (w zbiorze U) zarówno ze względu na x, jak i ze względu na y, lecz niekoniecznie naodwrót. Funkcja może bowiem być w całym zbiorze U ciągłą zarówno ze względu na x, jak i ze względu na y, a jednak nie być (w pewnym punkcie tego zbioru)