

Wzór (47) daje więc w jednej chwili, po podzielenie obu stron przez $t(e^t - 1)$, rozwinięcie na szereg nieskończony

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{B_1 t}{2!} - \frac{B_2 t^2}{4!} + \frac{B_3 t^3}{6!} - \dots, \text{ dla } 0 < |t| < 2\pi,$$

znalezione w § 157 na innej drodze. Dla $|t| \geq 2\pi$, jak to wynika z łatwością ze wzoru (49), otrzymany szereg jest rozbieżny.

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\vartheta}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi\vartheta}{4}, \text{ dla } 0 \leq \vartheta \leq \pi, \text{ zaś } = \frac{\pi\vartheta}{4} - \frac{3\pi^2}{8}, \text{ dla } \pi \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

2) Przyjąć w twierdzeniu 209 $\alpha = 0$, $f(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}$, $q > \frac{m}{2}$, oraz wyprowadzić wzór (dokładny) na sumę $1^m + 2^m + \dots + b^m$.

3) Przyjąć w twierdzeniu 209 $\alpha = 0$, $b = 1$, $f(x) = \sin 2tx$, gdzie $t \neq 0$, i wyprowadzić stąd rozwinięcie funkcji $\operatorname{ctg} t$ na szereg potęgowy.

4) Wyprowadzić przy pomocy tw. 209 rozwinięcie funkcji $F(a) = \sum_{k=1}^a \frac{1}{k^2}$ na szereg asymptotyczny

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} - \frac{B_1}{a^3} + \frac{B_2}{a^5} - \frac{B_3}{a^7} + \dots$$

5) Wychodząc z szeregu na $\operatorname{arctg} x$ (wzór (7) z § 181) i stosując mnożenie Cauchy'ego, wyprowadzić dla $-1 < x < 1$ rozwinięcie

$$(\operatorname{arctg} x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) x^{2n}.$$

6) Opierając się na szeregu dla $\lg(1+x)$ (wzór (4), § 180), wyprowadzić rozwinięcia:

$$\frac{\lg(1+x)}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n, \text{ dla } -1 < x < 1$$

oraz

$$[\lg(1+x)]^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^{n+1}, \text{ dla } 1 < x \leq 1$$

(przypadek szczególny tego ostatniego wzoru dla $x=1$ wyprowadziliśmy już w § 85).

7) Opierając się na wzorze $D \lg \sqrt{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$ oraz na tw. 202, wyprowadzić rozwinięcie

$$\lg \sqrt{1+x^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \dots, \text{ dla } |x| \leq 1.$$

ROZDZIAŁ XXIII.

Wzór Taylora i Maclaurina.

189. Załóżmy, że w całym przedziale (a, b) funkcja $f(x)$ posiada (przy danym naturalnym n) pochodną $f^{(n-1)}(x)$, która jest ciągłą w przedziale (a, b) , oraz, że wewnątrz przedziału (a, b) istnieje wszędzie pochodna $f^{(n)}(x)$. Z istnienia oraz ciągłości pochodnej $f^{(n-1)}(x)$ w przedziale (a, b) wynika oczywiście istnienie oraz ciągłość w całym przedziale (a, b) każdej z pochodnych $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$.

Położmy:

$$F(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \quad (1)$$

— będzie to funkcja ciągła w całym przedziale (a, b) .

Jak łatwo widzieć (stosując twierdzenie o pochodnej sumy oraz iloczynu, oraz wobec założenia, że istnieje pochodna $f^{(n)}(x)$ wewnątrz przedziału (a, b)), funkcja $F(x)$ będzie wewnątrz przedziału (a, b) posiadała wszędzie pochodną

$$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \quad (2)$$

(mamy bowiem dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, rozumiejąc przez $f^{(0)}(x)$ samą funkcję $f(x)$:

$$D \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) = \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x),$$

skąd, sumując te równości dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, wobec (1), otrzymujemy w jednej chwili wzór (2)).

Niech dalej $\varphi(x)$ oznacza dowolną daną funkcję, ciągłą w przedziale (a, b) i posiadającą wszędzie wewnątrz tego przedziału pochodną skończoną, różną od zera, $\varphi'(x)$. Względem funkcji $F(x)$ i $\varphi(x)$ będzie zatem stosowne twierdzenie Cauchy'ego (tw. 200, § 177), i przeto przy pewnym ξ , leżącym wewnątrz przedziału (a, b) , będziemy mieli wzór

$$\frac{F(b) - F(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

¹⁾ Jeżeli $a > b$, to przez przedział (a, b) rozumiemy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , spełniających nierówność $a \geq x \geq b$.

a więc, wobec (2), wzór

$$F(b) - F(a) = [\varphi(b) - \varphi(a)] \frac{(b-a)}{(n-1)}$$

Lecz, wobec (1), mamy

$F(b) = f(b)$, oraz $F(a) =$

21

$$\frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a);$$

wzór (3) do

przeniesieniu $F(a)$

$$f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

gdzie

Jest to

aylora (z wyrazem dopełniającym R_n).

Co

keji $\varphi(x)$, zakładaliśmy jedynie, że jest ciąg

dale (a,

raz że wewnątrz tego przedziału posiad

hodną

zoną i różną od zera. W szczególności

jako

przyjąć, jak łatwo widzieć, funkcję

$$\varphi(x) = \frac{(b-x)^{n-p}}{(n-p)!}$$

g

a dowolną daną liczbę ciągu 0, 1, 2, ...

), będziemy mieli

$$\varphi(b) - \varphi(a) = - \frac{(b-a)^{n-p}}{(n-p)!},$$

oraz (wewnątrz (a, b)):

$$\varphi'(x) = - \frac{(b-x)^{n-p-1}}{(n-p-1)!}$$

wzór (5) przyjmie więc postać:

$$R_n = \frac{(b-a)^{n-p} (b-\xi)^{n-1} (n-p-1)! f^{(n)}(\xi)}{(n-p)! (n-1)! (b-\xi)^{n-p-1}} = \frac{1}{(n-p)!} \frac{(b-\xi)^p}{(b-a)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n-p}$$

Liczba ξ leży między a i b; położmy

$$\frac{\xi-a}{b-a} = \vartheta \quad (7)$$

będzie

$$0 < \vartheta < 1, \quad (8)$$

wobec (8):

$$b - \xi = 1 - \vartheta, \quad \text{oraz} \quad \xi = a + (b-a)\vartheta,$$

i przeto wzór (9) daje

$$R_n = \frac{(b-a)^n (1-\vartheta)^p}{(n-1)! n-p} f^{(n)}(a + (b-a)\vartheta) \quad (9)$$

— jest to t. zw. forma reszty Schlömilca

la w przedziale
prz przedziału (a, b)
iną ciąg, zędu n-go, to p z ciągu 0, 1, 2, ...,
nieje odpowiednie dodatnie przy którym zachodzi
gdzie R_n jest liczbą, określoną przez wzór (9).

Wjmując, w szczególności, $p=0$, otrzymujemy ze wzoru
ty R_n formę Lagrange'a:

$$\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \text{gdzie } \xi \text{ leży wewnątrz } (a, b), \quad (10)$$

formę Cauchy'ego:

$$R_n = \frac{(b-a)}{(n-1)!} f^{(n)}(a + (b-a)\vartheta) \quad \text{gdzie } 0 < \vartheta < 1. \quad (11)$$

Jeżeli funkcja posiada w przedziale (a, b) pochodne ciągłe każdego naturalnego rzędu, to wzór (11) jest prawdziwym

$$= 0,$$

to mamy rozwinięcie na szereg Taylora

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots$$

Z twierdzenia 210, oraz z formy reszty R_n , otrzymujemy, w szczególności, dla $a=0$, $b=$

Twierdzenie 211. Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w przedziale $(0, x)$ pochodną ciągłą rzędu $n-1$ -go, oraz wewnątrz przedziału $(0, x)$ pochodną rzędu n -go, to mamy wzór:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n, \quad (12)$$

gdzie

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\vartheta x), \quad 0 < \vartheta < 1 \quad (\text{forma Lagrange'a}), \quad (13)$$

jakoteż

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!} (1-\vartheta_1)^{n-1} f^{(n)}(\vartheta_1 x), \quad 0 < \vartheta_1 < 1 \quad (\text{forma Cauchy'ego}). \quad (14)$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w przedziale (a, b) pochodne ciągłe każdego naturalnego rzędu, to wzór (12) zachodzi przy wszelkiem naturalnem n . Jeżeli przytem $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, to mamy rozwinięcie na szereg Maclaurina:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots \quad (15)$$

Zauważymy jednak, że sama zbieżność szeregu (15), nawet przy ciągłości wszystkich pochodnych, nie jest warunkiem wystarczającym dla rozwijalności funkcji $f(x)$ w szereg Maclaurin'a: szereg (15) może bowiem być w pewnym przedziale zbieżnym, a jednak wzór (15) może być fałszywym, jak to udowodnimy na przykładzie.

Określimy funkcję $f(x)$ przez warunki:

$$f(0) = 0, \text{ zaś } f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ dla } x \neq 0.$$

Będziemy tu mieli, jak łatwo widzieć:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0.$$

(gdyż $e^{\frac{1}{h^2}} > \frac{1}{h^2}$, skąd $\left| \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} \right| < |h|$), zaś dla $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

¹⁾ Zauważymy, że funkcję $f(x)$ możemy określić jednym warunkiem:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x^2 + \frac{1}{n}}} \text{ przy wszelkiem rzeczywistym } x.$$

Przez łatwą indukcję sprawdzamy, dalej, iż będzie przy wszelkiem naturalnem n :

$$\left. \begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ dla } x \neq 0, \\ \text{zaś} \quad f^{(n)}(0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

gdzie $P_n(x)$ oznacza wielomian całkowity (stopnia nie wyższego niż $2n-2$). (Jeżeli bowiem wzory (16) zachodzą przy pewnym naturalnem n (co jest prawdą dla $n=1$), to mamy

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{-3nx^2 P_n(x) + x^3 P_n'(x) + 2x P_n(x)}{x^{2n+3}} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ dla } x \neq 0,$$

zaś

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_n(h) \cdot e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^{2n+1}} = 0,$$

gdyż $e^{\frac{1}{h^2}} > \frac{1}{h^{4n}}$, skąd $\left| \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^{2n+1}} \right| < (4n)! h^{n-1}$.

Wszystkie pochodne $f^{(n)}(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) są tu więc ciągłe (w całym zbiorze liczb rzeczywistych), przytem mamy

$$f(0) = 0, \text{ oraz } f^{(n)}(0) = 0, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

i przeto, przy wszelkiem rzeczywistym x :

$$f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots = 0,$$

gdy tymczasem

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} > 0, \text{ dla } x \neq 0.$$

Zauważymy dalej, że szereg Maclaurina może być stale rozbieżny dla $x \neq 0$, pomimo że funkcja $f(x)$ posiada pochodne wszędzie ciągłe każdego rzędu. W samej rzeczy, położmy (dla wszelkich rzeczywistych x):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{a^{-k}}{a^{-2k} + x^2}, \quad (*)$$

gdzie a oznacza liczbę > 1 ¹⁾. Szereg ten jest oczywiście zbieżny przy wszelkiem rzeczywistem x , gdyż składniki jego są odpowiednio nie

większe od składników szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$.

Z tożsamości

$$\frac{a^{-k}}{a^{-2k} + x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{i}{x + a^{-k}i} - \frac{i}{x - a^{-k}i} \right]$$

znajdujemy w jednej chwili (przy naturalnych k oraz n):

$$D^n \frac{a^{-k}}{a^{-2k} + x^2} = \frac{(-1)^n}{2} n! \left[\frac{i}{(x + a^{-k}i)^{n+1}} - \frac{i}{(x - a^{-k}i)^{n+1}} \right], \quad (**)$$

skąd

$$\left| D^n \frac{a^{-k}}{a^{-2k} + x^2} \right| \leq \frac{n!}{(x^2 + a^{-2k})^{\frac{n+1}{2}}} \leq n! a^{(n+1)k}.$$

Składniki szeregu n -tych pochodnych kolejnych składników szeregu (*) są więc bezwzględnie nie większe od składników szeregu zbieżnego $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n! a^{(n+1)k}}{k!} = n! e^{a^{n+1}}$: szereg n -tych pochodnych

szeregu (*) jest więc zbieżny jednostajnie w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, a więc, w myśl twierdzenia 205, przedstawia n -tą pochodną sumy szeregu (*). Funkcja $f(x)$ posiada więc dla każdej wartości rzeczywistej x pochodne skończone każdego rzędu. Nadto, w szczególności, dla $x=0$, ze wzorów (*) i (**) wynika w jednej chwili, że

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-i)^n [1 + (-1)^n] n!}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(n+1)k}}{k!},$$

zatem

$$f^{(2p-1)}(0) = 0, \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, \dots,$$

zaś

$$f^{(2p)}(0) = (-1)^p (2p)! e^{a^{2p+1}}, \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, \dots,$$

i przeto prawa strona wzoru (15) daje tu szereg

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p e^{a^{2p+1}} x^{2p},$$

¹⁾ Por. A. Pringsheim: Sprawozd. Akad. Bawarskiej r. 1892, str. 222.

który, jak łatwo widzieć, jest rozbieżny dla $x \neq 0$ (gdyż $\lim_{p \rightarrow \infty} |e^{a^{2p+1}} x^{2p}| = \infty$, dla $a > 1$, $x \neq 0$).

§ 190. Podamy obecnie pewien warunek konieczny i wystarczający na to, aby dana funkcja rozwijała się w pewnym przedziale na szereg Taylora.

Twierdzenie 212 (Pringsheima)¹⁾: *Na to, żeby funkcja $f(x_0 + h)$ rozwijała się w przedziale $0 \leq h < R$ na szereg Taylora*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^k \quad (17)$$

potrzeba i wystarcza

1° *izby funkcja $f(x)$ posiadała dla $x_0 \leq x < x_0 + R$ pochodną skończoną $f^{(k)}(x)$ każdego rzędu $k = 1, 2, 3, \dots$*

2° *aby dla każdego dodatniego $h < R$ ciąg*

$$R_n(h, \vartheta) = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot (1 - \vartheta)^{n-1} h^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

dla $n = \infty$ zmierzał do zera jednostajnie ze względu na ϑ w przedziale $0 \leq \vartheta \leq 1$.

Dowód. Wystarczalność warunków 1° i 2° wynika natychmiast ze wzoru (4) z formą reszty Cauchy'ego (11) (dla $a = x_0$, $b = x_0 + h$).

Przypuśćmy teraz, że funkcja $f(x_0 + h)$ rozwija się w przedziale $0 \leq h < R$ na szereg (17). Aby prawa strona wzoru (17) miała sens, muszą więc istnieć przedewszystkiem wszystkie pochodne skończone $f^{(k)}(x_0)$, dla $k = 1, 2, 3, \dots$. Dalej, ze wzoru (17) wynika, że szereg potęgowy (17) zmiennej h jest zbieżny dla $0 \leq h < R$, skąd, jak wiemy z teorii szeregów potęgowych, wynika, że jest on zbieżny wewnątrz koła o promieniu R , a więc też posiada wewnątrz tego koła pochodne wszystkich rzędów (tw. 158 i tw. 165). Ponieważ zaś sumą szeregu (17) dla $0 \leq h < R$ jest $f(x_0 + h)$, więc wynika stąd istnienie pochodnych wszystkich rzędów funkcji $f(x_0 + h)$ względem h dla $0 < h < R$, t. j. istnienie pochodnych wszystkich rzędów funkcji $f(x)$ dla $x_0 < x < x_0 + R$. Warunek 1° jest więc konieczny.

¹⁾ Sprawozd. Akademii Bawarskiej r. 1912, p. 137—154.

Niech, dalej, h oznacza daną liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność $0 \leq h < R$. Wobec $h < R$ możemy obrać liczbę dodatnią δ , tak iżby było $h + \delta < R$. Wobec założenia, że funkcja $f(x_0 + h)$ daje dla $0 \leq h < R$ rozwinięcie (17), będziemy więc mieli

$$f(x_0 + h + \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (h + \delta)^k.$$

Ze zbieżności szeregu po prawej stronie wynika ograniczoność ciągu jego składników: istnieje więc liczba skończona g , taka, iż

$$\frac{1}{k!} |f^{(k)}(x_0)| (h + \delta)^k < g, \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

W myśl (17) znajdujemy z łatwością, dla $0 \leq \vartheta \leq 1$ (wobec twierdzenia 165):

$$f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k+n)}(x_0) h^k \vartheta^k;$$

skąd, wobec (18) i (19), i uwagi, że (wobec $h \geq 0, \delta > 0$)

$$0 \leq \frac{1 - \vartheta}{1 - \frac{h\vartheta}{h + \delta}} \leq 1, \text{ dla } 0 \leq \vartheta \leq 1,$$

znajdujemy przy wszelkiem naturalnem n , dla $0 \leq \vartheta \leq 1$:

$$\begin{aligned} |R_n(h, \vartheta)| &\leq \frac{ng(1 - \vartheta)^{n-1} h^n}{(h + \delta)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k + n)!}{k! n!} \frac{h^k \vartheta^k}{(h + \delta)^k} = \\ &= \frac{ng(1 - \vartheta)^{n-1} h^n}{(h + \delta)^n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{h\vartheta}{h + \delta}\right)^{n+1}} \leq \frac{ng \left(\frac{h}{h + \delta}\right)^n}{\left(1 - \frac{h\vartheta}{h + \delta}\right)^{n+1}} \leq \frac{ng \left(\frac{h}{h + \delta}\right)^n}{\left(1 - \frac{h}{h + \delta}\right)^{n+1}}. \quad (20) \end{aligned}$$

Lecz, jak wiadomo, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$, dla $|x| < 1$: mamy więc

$$\frac{ng \left(\frac{h}{h + \delta}\right)^n}{\left(1 - \frac{h}{h + \delta}\right)^{n+1}} < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu,$$

gdzie μ nie zależy od ϑ : nierówność (20) daje więc

$$|R_n(h, \vartheta)| < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu = \mu(h), \quad 0 \leq \vartheta \leq 1,$$

co dowodzi (przy wszelkiem danem h z przedziału $0 \leq h < R$) jednostajnej ze względu na ϑ w przedziale $0 \leq \vartheta \leq 1$ zbieżności ciągu $R_n(h, \vartheta)$ ($n = 1, 2, \dots$) do zera. Warunek 2° jest więc również konieczny.

Twierdzenie 212 zostało zatem udowodnione w zupełności.

Zauważymy, że można by z łatwością okazać (i to już na przykładzie funkcji $f(x) = 1/(1 + x)$, dla $x_0 = 0, \vartheta = 1$), że twierdzenie nie byłoby prawdziwem, gdyby w niem resztę Cauchy'ego (18) zastąpić przez resztę Lagrange'a

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot h^n \vartheta^{n-1}.$$

Z innych warunków koniecznych i wystarczających dla rozwijalności funkcji $f(x)$ w przedziale $(x_0, x_0 + R)$ na szereg Taylora (17), wspomniemy tu o warunku S. Bernsteina¹⁾, polegającym na tem, aby funkcja $f(x)$ była różnicą dwóch funkcji, które w przedziale $(x_0, x_0 + R)$ są dodatnie wraz ze wszystkimi swymi pochodnymi.

§ 191. Szereg dwumienny. Zastosujemy teraz wzór Maclaurina do otrzymania rozwinięcia funkcji $(1 + x)^\mu$ na szereg potęgowy. Położmy, przy danem rzeczywistem μ , dla $x > -1$:

$$f(x) = (1 + x)^\mu; \quad (21)$$

przy wszelkiem naturalnem n funkcja $f(x)$ będzie posiadała dla $x > -1$ (w myśl wzoru (96) z § 174) pochodną n -go rzędu

$$f^{(n)}(x) = \mu(\mu - 1)(\mu - 2) \dots (\mu - n + 1) (1 + x)^{\mu - n}, \quad (22)$$

która będzie ciągłą dla $x > -1$. Tembardziej więc pochodne $f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) będą ciągłe w przedziale $(0, x)$ (dla $x > -1$) i przeto, przy wszelkiem naturalnem n będziemy mieli dla $x > -1$ wzór (12), czyli, wobec (21) i (22), wzór

$$(1 + x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1} x + \binom{\mu}{2} x^2 + \dots + \binom{\mu}{n-1} x^{n-1} + R_n, \quad (23)$$

gdzie, w myśl (14) i (22):

$$R_n = n \binom{\mu}{n} x^n (1 + \vartheta_1 x)^{\mu-n} \left(\frac{1 - \vartheta_1}{1 + \vartheta_1 x} \right)^{n-1}, \quad (0 < \vartheta_1 < 1).$$

¹⁾ Zob. A. Pringsheim l. c., p. 153–154.

²⁾ *Mathematische Annalen* 75, p. 449.

W razie całkowitego nieujemnego μ mamy, dla $n = \mu + 1$:
 $\binom{\mu}{n} = 0$, i przeto, w myśl (24), $R_n = 0$: wzór (23) daje więc rozwinięcie potęgi $(1+x)^\mu$ na dwumian Newtona:

$$(1+x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \dots + \binom{\mu}{\mu}x^\mu.$$

Załóżmy więc, dalej, że wykładnik μ nie jest liczbą całkowitą nieujemną.

Dla $-1 < x < 1$ mamy, wobec $0 < \vartheta_1 < 1$:

$$1 + \vartheta_1 x > 1 - \vartheta_1 > 0,$$

skąd

$$0 < \frac{1 - \vartheta_1}{1 + \vartheta_1 x} < 1$$

i przeto, wobec (24):

$$|R_n| < (1 + \vartheta_1 x)^{\mu-1} \cdot n \binom{\mu}{n} |x|^n.$$

czyli

$$|R_n| < (1 + \vartheta_1 x)^{\mu-1} \cdot \mu \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|\mu - k| \cdot |x|}{k}. \quad (25)$$

Oznaczmy przez a liczbę pośrednią między $|x|$ oraz 1; wobec

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\mu - k| \cdot |x|}{k} = |x| < a,$$

będzie, dla dostatecznie wielkich k , np. dla $k > q$:

$$|\mu - k| \cdot |x| < ka$$

i przeto, dla $n > q$:

$$\prod_{k=q}^{n-1} \frac{|\mu - k| \cdot |x|}{k} < a^{n-q},$$

skąd, wobec (25):

$$|R_n| < (1 + \vartheta_1 x)^{\mu-1} \cdot q \binom{\mu}{q} |x|^q \cdot a^{n-q}, \quad \text{dla } n > q \quad (26)$$

$$\left(\text{gdzy } \mu \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|\mu - k| \cdot |x|}{k} = \left| q \binom{\mu}{q} |x|^q \prod_{k=q}^{n-1} \frac{|\mu - k| \cdot |x|}{k} \right) \right).$$

Wobec $0 < \vartheta_1 < 1$, $-1 < x < 1$, mamy

$$1 + |x| \geq 1 + \vartheta_1 x \geq 1 - |x|,$$

i przeto

$$(1 + \vartheta_1 x)^{\mu-1} \leq (1 + |x|)^{\mu-1}, \quad \text{dla } \mu \geq 1,$$

zaś

$$(1 + \vartheta_1 x)^{\mu-1} \leq (1 - |x|)^{\mu-1}, \quad \text{dla } \mu < 1;$$

w każdym więc razie, oznaczając przez A liczbę większą od $(1+x)^{\mu-1}$, oraz od $(1-x)^{\mu-1}$, będziemy mieli

$$(1 + \vartheta_1 x)^{\mu-1} < A = A(\mu, x),$$

i przeto wzór (26) dowodzi, wobec $0 < a < 1$, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0. \quad (27)$$

Udowodniliśmy więc, że dla $-1 < x < 1$ mamy, wzór (27): ze wzoru (23) wynika więc dla $-1 < x < 1$ rozwinięcie:

$$(1+x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \binom{\mu}{3}x^3 + \dots \quad (28)$$

Zbadamy obecnie przypadki $x = +1$, oraz $x = -1$. W myśl tw. Abela (tw. 162), wobec ciągłości funkcji $(1+x)^\mu$, wzór (28) będzie, przy danym μ , prawdziwy dla $x = 1$, jeżeli prawa jego strona będzie szeregiem zbieżnym dla $x = 1$. Zbadamy więc, dla jakich rzeczywistych μ zbieżnym jest szereg

$$1 + \binom{\mu}{1} + \binom{\mu}{2} + \binom{\mu}{3} + \dots \quad (29)$$

Możemy oczywiście napisać przy wszelkiem naturalnem n :

$$\binom{\mu}{n} = (-1)^n \left(1 - \frac{\mu+1}{1}\right) \left(1 - \frac{\mu+1}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\mu+1}{n}\right), \quad (30)$$

skąd widać, że dla $\mu \leq -1$ jest stale

$$\left| \binom{\mu}{n} \right| \geq 1$$

i przeto szereg (29) nie jest zbieżny dla $\mu \leq -1$.

Załóżmy więc, dalej, że $\mu > -1$. Gdyby μ było jedną z liczb $0, 1, 2, 3, \dots$, szereg (29) byłby oczywiście skończony. Przypuśćmy więc, że μ nie jest żadną z tych liczb. Połóżmy $q = E\mu + 1$; dla $n > q$ będziemy mieli:

$$\binom{\mu}{n} = (-1)^{n-q} \binom{\mu}{q} \left(1 - \frac{\mu+1}{q+1}\right) \left(1 - \frac{\mu+1}{q+2}\right) \dots \left(1 - \frac{\mu+1}{n}\right), \quad (31)$$

przyczem, wobec $q + 1 = E\mu + 2 > \mu + 1 > 0$, czynniki

$$1 - \frac{\mu+1}{q+1}, 1 - \frac{\mu+1}{q+2}, \dots, 1 - \frac{\mu+1}{n}$$

będą wszystkie dodatnie, mniejsze od jedności: składniki (31) będą więc dla $n > q$ naprzemiennie dodatnie i ujemne i przytem będą malały bezwzględnie. Z uwagi, że, dla $\mu + 1 > 0$, wartością iloczynu nieskończonego

$$\left(1 - \frac{\mu+1}{1}\right) \left(1 - \frac{\mu+1}{2}\right) \left(1 - \frac{\mu+1}{3}\right) \dots$$

jest zero (gdyż szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu+1}{n}$ jest rozbieżny), wnosimy, dalej,

że wyrazy (30) zmierzają do zera (dla $n = \infty$). W myśl tw. 105 o szeregach naprzemiennych, wnosimy więc o zbieżności szeregu (29) w uważanym przypadku.

Szereg (29) jest więc zbieżny dla $\mu > -1$ i rozbieżny dla $\mu \leq -1$. W myśl tw. Abela wnosimy więc, że wzór (29) jest prawdziwy dla $x = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu > -1$.

Dla $x = -1$ prawa strona wzoru (28) daje szereg

$$1 - \binom{\mu}{1} + \binom{\mu}{2} - \binom{\mu}{3} + \dots \quad (32)$$

Przez łatwą indukcję sprawdzamy, iż (dla $n = 1, 2, 3, \dots$)

$$1 - \binom{\mu}{1} + \binom{\mu}{2} - \dots + (-1)^n \binom{\mu}{n} = (-1)^n \binom{\mu-1}{n}, \quad (33)$$

a że oczywiście

$$(-1)^n \binom{\mu-1}{n} = \left(1 - \frac{\mu}{1}\right) \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\mu}{n}\right),$$

więc, wobec rozbieżności szeregu $\frac{\mu}{1} + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{3} + \dots$, dla $\mu \neq 0$, wnosimy natychmiast (w myśl tw. 118 i tw. 119), że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \binom{\mu-1}{n} = 0, \quad \text{dla } \mu > 0,$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{\mu-1}{n} = \infty, \quad \text{dla } \mu < 0.$$

Wobec (33), szereg (32) jest więc zbieżny dla $\mu > 0$, dając sumę 0, zaś rozbieżny dla $\mu < 0$. Dla $\mu = 0$ szereg (32) jest oczywiście zbieżny, dając sumę 1, lecz wówczas lewa jego strona nie ma oznaczonej wartości, dając 0^0 . Wzór (28) jest zatem prawdziwy dla $x = -1$ tylko, jeżeli $\mu > 0$.

Zestawiając otrzymane wyniki, możemy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 213. Dla $-1 < x < 1$ zachodzi przy wszelkiem rzeczywistym μ rozwinięcie

$$(1+x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \binom{\mu}{3}x^3 + \dots \quad (34)$$

Wzór ten pozostaje prawdziwym dla $x = 1$, jeżeli $\mu > -1$, oraz dla $x = -1$, jeżeli $\mu > 0$. Dla $x = 1$, $\mu \leq -1$, oraz dla $x = -1$, $\mu < 0$ szereg (34) nie jest zbieżny.

§ 192. W szczególności, w myśl tw. 213, wzór (34) będzie prawdziwy dla $\mu = -\frac{1}{2}$, $-1 < x \leq 1$: mamy więc rozwinięcie

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}x + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3 + \dots, \quad \text{dla } -1 < x \leq 1.$$

Kładąc $x = -t^2$, otrzymujemy stąd rozwinięcie:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1}t^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2}t^4 - \binom{-\frac{1}{2}}{3}t^6 + \dots, \quad \text{dla } -1 < t < 1. \quad (35)$$

Wewnątrz przedziału $(-1, 1)$ mamy, jak wiadomo (§ 172):

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = D \arcsin t. \quad (36)$$

Wobec (35) i (36), w myśl tw. 202, z uwagi, że $\arcsin 0 = 0$, otrzymujemy więc rozwinięcie

$$\arcsin t = t - \binom{-\frac{1}{2}}{1} \frac{t^3}{3} + \binom{-\frac{1}{2}}{2} \frac{t^5}{5} - \dots, \quad \text{dla } -1 < t < 1. \quad (37)$$

Zważywszy, dalej, że

$$\frac{(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}}{2n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1},$$

znajdujemy, wobec (37), rozwinięcie

$$\arcsin t = t + \frac{1}{2} \frac{t^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} \frac{t^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{t^7}{7} + \dots, \quad \text{dla } -1 < t < 1. \quad (38)$$

Szereg (38) jest zbieżny i dla $t = 1$: w samej rzeczy, z uwagi, że

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}},$$

sprawdzamy przez łatwą indukcję, iż

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad \text{dla } n=1, 2, 3, \dots,$$

i przeto składniki szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{1}{2n+1}$$

są odpowiednio mniejsze od składników szeregu zbieżnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n+1)^3}}.$$

Szereg (38) jest więc też zbieżny i dla $t=-1$. W myśl tw. Abela wnosimy więc, wobec ciągłości funkcji $\arcsin t$ w przedziale $(-1, 1)$, że wzór (38) pozostaje prawdziwym dla $t=1$, oraz dla $t=-1$. Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 214. *Funkcja $\arcsin x$ rozwija się na szereg potęgowy*

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{dla } -1 \leq x \leq 1. \quad (39)$$

Dla $|x| > 1$ szereg (39) jest rozbieżny, co sprawdzamy z łatwością, stosując np. kryterjum d'Alembert'a.

Dla $x=1$ wzór (39) daje:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{1}{2n+1},$$

dla $x=1/2$, z uwagi, że $\arcsin 1/2 = \pi/6$, otrzymujemy ze wzoru (39):

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}.$$

193. Zastosujemy teraz tw. 211, kładąc $f(x) = \lg(1+x)$, $n=2$.

W myśl (12) i (13) otrzymamy, dla $-1 < x < 1$:

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\vartheta x)^3}, \quad \text{gdzie } 0 < \vartheta < 1. \quad (40)$$

Jako zastosowanie wzoru (40) udowodnimy następujące

Twierdzenie 215¹⁾. *Jeżeli szereg nieskończony*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (41)$$

gdzie $u_n > -1$ ($n=1, 2, 3, \dots$), jest zbieżny, to iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) \quad (42)$$

jest zbieżny, lub daje wartość 0, zależnie od tego, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \quad (43)$$

jest zbieżny, czy też rozbieżny.

Dowód. Wobec zbieżności szeregu (41), mamy

$$|u_n| < \frac{1}{2}, \quad \text{dla } n > \mu, \quad (44)$$

i przeto, w myśl (40), dla $n > \mu$:

$$\lg(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2(1+\vartheta_n u_n)^2}, \quad \text{gdzie } 0 < \vartheta_n < 1. \quad (45)$$

Wobec (44), oraz $0 < \vartheta_n < 1$, mamy

$$\frac{3}{2} > 1 + \vartheta_n u_n > \frac{1}{2},$$

zatem; wobec (45), dla $n > \mu$:

$$u_n - 2u_n^2 < \lg(1+u_n) < u_n - \frac{2}{3}u_n^2, \quad (46)$$

skąd, dla $n > \mu$:

$$\lg(1+u_n) = u_n - 2\eta_n u_n^2, \quad \text{gdzie } 0 < \eta_n < 1. \quad (47)$$

Wzór (47) dowodzi w jednej chwili, że w razie zbieżności szeregów (41) i (43) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \lg(1+u_n)$ jest zbieżny, co, jak wiemy (tw. 121), pociąga za sobą zbieżność iloczynu (42).

Jeżeli zaś szereg (41) jest zbieżny, zaś szereg (43) jest rozbieżny (oczywiście, dając sumę $+\infty$), to prawa strona nierówności (46) dowodzi, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lg(1+u_n) = -\infty,$$

co dowodzi, że wartością iloczynu nieskończonego (42) jest 0. Udowodniliśmy więc nasze twierdzenie.

¹⁾ Por. tw. 120 oraz uwagi końcowe § 94.

§ 194. **Twierdzenie 216¹⁾.** Jeżeli dla funkcji $f(x)$, określonej w przedziale $(-\delta, \delta)$ (gdzie $\delta > 0$) istnieje pochodna $f^{(n)}(0)$ (skończona lub nieskończona), to

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0) - \frac{h}{1!} f'(0) - \frac{h^2}{2!} f''(0) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)}{\frac{h^n}{n!}} = f^{(n)}(0). \quad (1)$$

Dowód. Załóżmy najprzód, że $f^{(n)}(0)$ jest liczbą skończoną. Połóżmy

$$g(h) = f(h) - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(0); \quad (2)$$

będzie, jak łatwo widzieć

$$g^{(n)}(0) = 0, \quad (3)$$

skąd wynika, że dla dostatecznie małych bezwzględnie h istnieje pochodna skończona $g^{(n-1)}(h)$, a więc pochodna ciągła $g^{(n-2)}(h)$. W myśl tw. 211 mamy więc dla dostatecznie małych bezwzględnie h wzór

$$g(h) = g(0) + \frac{h}{1!} g'(0) + \frac{h^2}{2!} g''(0) + \dots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} g^{(n-2)}(0) + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(\vartheta h), \quad (4)$$

gdzie $0 < \vartheta < 1$.

Lecz, wobec (2), mamy $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$: wzór (4) daje więc, wobec (2):

$$\begin{aligned} \frac{f(h) - f(0) - \frac{h}{1!} f'(0) - \frac{h^2}{2!} f''(0) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)}{\frac{h^n}{n!}} = \\ = n \frac{g^{(n-1)}(\vartheta h) - g^{(n-1)}(0)}{h} + f^{(n)}(0) = n \vartheta \frac{g^{(n-1)}(\vartheta h) - g^{(n-1)}(0)}{\vartheta h} + f^{(n)}(0). \end{aligned} \quad (5)$$

Lecz, wobec (3) i z uwagi, że $0 < \vartheta < 1$, mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{(n-1)}(\vartheta h) - g^{(n-1)}(0)}{\vartheta h} = 0; \quad (6)$$

wzór (5) dowodzi więc, wobec (6), prawdziwości wzoru (1).

Założmy teraz, że $f^{(n)}(0) = +\infty$. Niech A oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Połóżmy

$$g(h) = f(h) - \frac{h^n}{n!} A. \quad (7)$$

Założenie, że istnieje oznaczona pochodna $f^{(n)}(0)$, pociąga za sobą oczywiście istnienie pochodnej skończonej $f^{(n-1)}(h)$, dla dostatecznie małych bezwzględnie h , skąd, jak wyżej, znajdujemy wzór (4). Lecz, wobec (7), mamy $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$, dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$: wzór (4) daje więc, wobec (7):

$$\frac{f(h) - f(0) - \frac{h}{1!} f'(0) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)}{\frac{h^n}{n!}} = n \vartheta \frac{g^{(n-1)}(\vartheta h) - g^{(n-1)}(0)}{\vartheta h} + A. \quad (8)$$

Lecz, wobec (7): $g^{(n-1)}(\vartheta h) = f^{(n-1)}(\vartheta h) - \vartheta h A$, $g^{(n-1)}(0) = f^{(n-1)}(0)$ zatem

$$\frac{g^{(n-1)}(\vartheta h) - g^{(n-1)}(0)}{\vartheta h} = \frac{f^{(n-1)}(\vartheta h) - f^{(n-1)}(0)}{\vartheta h} - A.$$

co, wobec $f^{(n)}(0) = +\infty$ (oraz z uwagi, że $0 < \vartheta < 1$), jest liczbą dodatnią, dla dostatecznie małych bezwzględnie h .

Prawa strona wzoru (8) jest więc (wobec $\vartheta > 0$) większą od A dla dostatecznie małych bezwzględnie h . Wobec dowolności liczby dodatniej A , wnosimy stąd, że granicą lewej strony wzoru (8) dla $h \rightarrow 0$ jest $+\infty$, czyli $f^{(n)}(0)$, co dowodzi prawdziwości wzoru (1).

Analogicznie dowodzimy wzoru (1) w przypadku $f^{(n)}(0) = -\infty$. Twierdzenie 216 udowodniliśmy zatem w zupełności.

Przypuśćmy teraz, że funkcja $f(x)$ (określona w otoczeniu punktu x_0) posiada w punkcie x_0 pochodną $f''(x_0)$ (skończoną lub nieskończoną). Połóżmy $\varphi(h) = f(x_0 + h)$: będzie więc istniała pochodna $\varphi''(0)$ i przeto, w myśl tw. 216, będziemy mieli:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0) - h\varphi'(0)}{h^2/2} = \varphi''(0),$$

czyli

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h^2} = \frac{1}{2} f''(x_0). \quad (9)$$

Zastępując we wzorze (9) h przez $-h$, otrzymujemy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0) + hf'(x_0)}{h^2} = \frac{1}{2} f''(x_0). \quad (10)$$

¹⁾ Por. Ch. de la Vallée Poussin: *Cours d'Analyse infinitésimale* T. I, wydanie 4-te, Paryż 1921, p. 77—78. Prof. A. Hoborski (*Wyższa matematyka*, Kraków 1923, str. 590) nazywa to tw. twierdzeniem Peany.

Dodając stronami wzory (9) i (10), znajdujemy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0). \quad (11)$$

Dowiedliśmy więc, że jeżeli istnieje pochodna $f''(x_0)$ (skończona lub nieskończona), to zachodzi wzór (11).

Lewa strona wzoru (11) może jednak posiadać oznaczoną wartość i wtedy, kiedy pochodna $f''(x_0)$ nie istnieje: wartość tę nazywamy uogólnioną drugą pochodną funkcji $f(x)$ dla wartości x_0 . (Lewa strona wzoru (11) może mieć oznaczoną, skończoną wartość nawet dla punktów x_0 , w których funkcja $f(x)$ nie jest ciągłą, np. dla funkcji $f(x)$, określonej przez warunki: $f(x) = 1$ dla $x > 0$, $f(x) = -1$ dla $x < 0$, $f(0) = 0$, lewa strona wzoru (11) jest w punkcie $x_0 = 0$ zerem, zaś funkcja $f(x)$ jest nieciągłą).

Twierdzenie 217 Schwarz'a: Jeżeli druga pochodna uogólniona funkcji $f(x)$ ciągłej w przedziale (a, b) jest wewnątrz tego przedziału stale zerem, to i $f'(x) = 0$ dla $a < x < b$ (t. j. funkcja $f(x)$ jest wewnątrz przedziału (a, b) linjową).

Dowód. Wystarczy oczywiście okazać, że jeżeli

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = 0, \quad \text{dla } a < x < b \quad (12)$$

to

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a} [f(b) - f(a)] = 0, \quad \text{dla } a < x < b. \quad (13)$$

Załóżmy więc, dla dowodu, że przy pewnym x_0 wewnątrz przedziału (a, b) mamy $\varphi(x_0) \neq 0$. Połóżmy $p = |\varphi(x_0)|$ i obierzmy liczbę q taką, iż

$$0 < q < \frac{4p}{(a-b)^2}. \quad (14)$$

Położmy, dalej

$$g(x) = \pm \varphi(x) + q(x-a)(x-b), \quad (15)$$

biorąc znak górny, jeżeli $\varphi(x_0) > 0$, zaś dolny, jeżeli $\varphi(x_0) < 0$.

Będzie więc w każdym razie $\pm \varphi(x_0) = |\varphi(x_0)| = p$, zatem, wobec (15) oraz (14):

$$g(x_0) = p + q(x_0 - a)(x_0 - b) = p + q \left[\left(x_0 - \frac{a+b}{2} \right)^2 - \frac{(a-b)^2}{4} \right] \geq p - q \frac{(a-b)^2}{4} > 0,$$

czyli $g(x_0) > 0$.

Wobec (15), (13), oraz założenia, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) , wnosimy, że funkcja $g(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) . Istnieje więc w tym przedziale wartość x_1 , dla której $g(x)$ osiąga swego górnego kresu w przedziale (a, b) , przyczem, wobec $g(x_0) > 0$ i uwagi, że $g(a) = g(b) = 0$, wnosimy, że $x_1 \neq a$ oraz $x_1 \neq b$, zatem $a < x_1 < b$.

Z definicji górnego kresu wynika, dalej, że (dla liczb h , dla których $x_1 + h$ oraz $x_1 - h$ leżą w przedziale (a, b) , t. j. dla dostatecznie małych bezwzględnie h):

$$g(x_1 + h) - g(x_1) \leq 0, \quad \text{oraz } g(x_1 - h) - g(x_1) \leq 0,$$

skąd

$$g(x_1 + h) - 2g(x_1) + g(x_1 - h) \leq 0$$

dla dostatecznie małych bezwzględnie h , co daje

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_1 + h) - 2g(x_1) + g(x_1 - h)}{h^2} \leq 0. \quad (16)$$

Lecz z drugiej strony, wobec (15), (13) i (12) znajdujemy w jednej chwili (przy każdym ze znaków $\pm$ we wzorze (15)):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = q > 0, \quad \text{dla } a < x < b,$$

wbrew (16) (gdyż $a < x_1 < b$).

Założenie, że wzór (13) nie jest prawdziwy, doprowadza więc do sprzeczności. Udowodniliśmy więc twierdzenie 217.

Z dowiedzonego twierdzenia wynika z łatwością, że dwie funkcje ciągłe, które wewnątrz pewnego przedziału posiadają wszędzie odpowiednio równe, skończone drugie pochodne uogólnione, różnią się co najwyżej o funkcję linjową. Ustala to stopień nieoznaczoności zagadnienia, polegającego na znajdowaniu funkcji ciągłej, której druga uogólniona pochodna jest daną: zagadnienie to odgrywa ważną rolę w teorii szeregów trygonometrycznych.

Co do twierdzenia 217, to zauważymy jeszcze, że istnieją funkcje nieciągłe, których druga uogólniona pochodna jest wszędzie zerem (np. funkcja $f(x) = \operatorname{sgn} x$).

Zauważymy wreszcie, że istnienie granicy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

nie pociąga za sobą wogóle istnienia granicy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2}$$

ani też naodwrot. (Np. dla $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$, istnieje pierwsza z uważanych granic, lecz nie istnieje druga, natomiast dla $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, istnieje druga, lecz nie istnieje pierwsza). Można by atoli dowieść, że jeżeli dla danej funkcji $f(x)$ i danej wartości x_0 istnieją obie uważane granice, to są one sobie równe¹⁾.

§ 195. Niech $f(x)$ oznacza dowolną daną funkcję zmiennej rzeczywistej, określoną w przedziale (a, b) . Mówimy, że dla wartości x_0 , leżącej wewnątrz przedziału (a, b) , funkcja $f(x)$ daje *maximum właściwe*, jeżeli przy pewnym dodatnim δ mamy

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{dla } 0 < |x - x_0| < \delta;$$

¹⁾ Zob. *Prace mat.-fiz.* t. 26 (r. 1913), str. 127.

jeżeli zaś istnieje tylko takie $\delta > 0$, iż

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{dla} \quad 0 < |x - x_0| < \delta,$$

to mówimy, że funkcja $f(x)$ daje dla wartości x_0 *maximum niewłaściwe*.

Podobnie mówimy, że dla x_0 (gdzie $a < x_0 < b$) funkcja $f(x)$ daje *minimum właściwe*, jeżeli przy pewnym $\delta > 0$ mamy

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{dla} \quad 0 < |x - x_0| < \delta;$$

jeżeli zaś istnieje tylko takie $\delta > 0$, iż

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{dla} \quad 0 < |x - x_0| < \delta,$$

to mówimy że dla x_0 funkcja $f(x)$ daje *minimum niewłaściwe*.

Jeżeli dla wartości x_0 funkcja $f(x)$ daje maximum lub minimum (właściwe, względnie niewłaściwe), to mówimy, że dla wartości x_0 funkcja $f(x)$ daje *extremum* (właściwe, względnie niewłaściwe).

Twierdzenie 218. *Zbiór wszystkich ekstremów właściwych funkcji zmiennej rzeczywistej jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. Załóżmy, że dla danej wartości x_0 zachodzi maximum właściwe funkcji $f(x)$. Istnieje więc liczba $\delta > 0$, taka iż

$$f(x) < f(x_0), \quad \text{dla} \quad 0 < |x - x_0| < \delta. \quad (1)$$

Oznaczmy przez u liczbę wymierną, zawartą między $x_0 - \delta$ oraz x_0 , zaś przez v liczbę wymierną, zawartą między x_0 oraz $x_0 + \delta$: wobec (1), będzie tembardziej

$$f(x) < f(x_0), \quad \text{dla} \quad u < x < v, \quad x \neq x_0.$$

przytem $u < x_0 < v$. Istnieje więc przedział o wymiernych końcach, otaczający x_0 , wewnątrz którego dla x_0 wartość funkcji jest większą niż dla każdego innego x .

Zbiór wszystkich przedziałów o wymiernych końcach można, jak wiadomo, ustawić w pewien ciąg nieskończony (§ 65):

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), \dots \quad (2)$$

Niech (u_n, v_n) oznacza pierwszy przedział ciągu (2), otaczający x_0 i taki, iż wewnątrz niego stale

$$f(x) < f(x_0), \quad \text{dla} \quad x \neq x_0.$$

(Przedział taki, jak dowiedliśmy przed chwilą, istnieje). Punkтови x_0 przyporządkujemy numer n .

Wedle powyższej umowy, każdemu punktowi x_0 , dla którego funkcja $f(x)$ daje maximum właściwe, będzie przyporządkowany oznaczony w zupełności numer. Powiadam, że różnym punktom będą przyporządkowane różne numery.

Założmy, dla dowodu, że punktom x_0 i $x_1 \neq x_0$, dla których funkcja $f(x)$ daje maximum właściwe, odpowiada ten sam numer n . Byłoby więc

$$u_n < x_0 < v_n, \quad (3)$$

$$u_n < x_1 < v_n, \quad (4)$$

$$f(x) < f(x_0), \quad \text{dla} \quad u_n < x < v_n, \quad x \neq x_0 \quad (5)$$

$$f(x) < f(x_1), \quad \text{dla} \quad u_n < x < v_n, \quad x \neq x_1. \quad (6)$$

Mielibyśmy zatem, wobec (4) i (5):

$$f(x_1) < f(x_0),$$

zaś, wobec (3) i (6):

$$f(x_0) < f(x_1),$$

co doprowadza do sprzeczności.

Określiśmy więc dla każdej funkcji zmiennej rzeczywistej $f(x)$ prawo, wedle którego każdej wartości x_0 , dla której $f(x)$ daje maximum właściwe, przyporządkowaną jest pewna liczba naturalna $n = n(x_0)$, przytem różnym punktom x_0 , są przyporządkowane różne liczby $n(x_0)$. Wszystkie wartości x_0 , dla których funkcja $f(x)$ daje maximum właściwe, możemy więc ustawić w oznaczony w zupełności ciąg (skończony lub nieskończony), wedle rosnących wielkości odpowiednich liczb $n(x_0)$. Dowodzi to, że zbiór wszystkich maximów właściwych funkcji $f(x)$ jest co najwyżej przeliczalny. Analogiczny dowód moglibyśmy przeprowadzić dla minimów właściwych, skąd już natychmiast wynika prawdziwość twierdzenia 218.

Twierdzenie 219. *Zbiór wszystkich różnych wartości, jakie przybiera funkcja zmiennej rzeczywistej w punktach, dla których daje extremum (właściwe lub niewłaściwe) jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. Niech M oznacza zbiór wszystkich różnych wartości, jakie przyjmuje dana funkcja $f(x)$ zmiennej rzeczywistej w punktach, dla których daje maximum (właściwe lub niewłaściwe), i niech m oznacza daną liczbę zbioru M .

Istnieje więc, jak łatwo widzieć, taka wartość x_0 i taki przedział o wymiernych końcach (u, v) , iż

$$u < x_0 < v, \quad \text{zaś} \quad f(x) \leq f(x_0) = m, \quad \text{dla} \quad u < x < v. \quad (7)$$

Przyporządkujmy liczbie m najmniejszy wskaźnik ν , przy którym przedział $(u, v) = (u_\nu, v_\nu)$ ciągu (2) spełnia warunki (7). Aby dowieść, że zbiór M jest co najwyżej przeliczalny, wystarczy okazać, że różnym elementom m zbioru M będą przyporządkowane według powyższej umowy różne wskaźniki $\nu = \nu(m)$.

Założmy więc, że dwóm różnym elementom m i m_1 zbioru M odpowiada ten sam wskaźnik ν . Mielibyśmy więc, przy pewnym x_0

$$u_\nu < x_0 < v_\nu \quad (8)$$

oraz

$$f(x) \leq f(x_0) = m, \quad \text{dla} \quad u_\nu < x < v_\nu, \quad (9)$$

jakoteż przy pewnym x_1

$$u_\nu < x_1 < v_\nu \quad (10)$$

oraz

$$f(x) \leq f(x_1) = m_1, \text{ dla } u_v < x < v_v. \quad (11)$$

Wobec (9) i (10) mieliśmy

$$f(x_1) \leq f(x_0),$$

zaś wobec (8) i (11)

$$f(x_0) \leq f(x_1),$$

zatem $f(x_0) = f(x_1)$, oraz $m = m_1$, wbrew założeniu.

Dowiedliśmy więc, że zbiór M jest co najwyżej przeliczalny. Podobnie dowiedlibyśmy, że zbiór wszystkich różnych wartości, jakie przyjmuje funkcja $f(x)$ w punktach, dla których daje minimum (właściwe lub niewłaściwe), jest co najwyżej przeliczalny. Stąd już natychmiast wynika prawdziwość twierdzenia 219.

Zauważymy, że funkcja ciągła zmiennej rzeczywistej może posiadać nieskończenie wiele maximów i minimów właściwych w każdym przedziale. Taką jest np. funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^n x)}{3^n},$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza różnicę bezwzględną między liczbą x a najbliższą ($>$, $=$ lub $<$) całością¹⁾. (Natomiast funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}$$

posiada w każdym przedziale nieskończenie wiele minimów właściwych, lecz nie daje żadnego maximum właściwego).

Godnem uwagi jest, że różnica dwóch funkcji ciągłych, rosnących, może posiadać nieskończenie wiele maximów właściwych w każdym przedziale²⁾.

Jeżeli dla wartości x_0 mamy przy pewnym dodatnim δ

$$f(x) = f(x_0), \text{ dla } |x - x_0| < \delta,$$

to mówimy, że x_0 jest *punktem stałości* funkcji $f(x)$.

Godnem uwagi jest, że istnieją funkcje ciągle zmiennej rzeczywistej, które nie są stałymi, ale które posiadają nieskończenie wiele punktów stałości wewnątrz każdego przedziału. [Taką jest np. funkcja ciągła, określona w przedziale (0, 1)

przez układ trzech równań funkcyjnych:

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}f(x), \quad f\left(\frac{x+1}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{x+2}{3}\right) = \frac{1}{2} + f(x) \quad ^3).$$

¹⁾ Zob. *Prace matematyczno-fizyczne* t. XXII, str. 103—111.

²⁾ Zob. Sprawozd. z pos. Tow. Nauk. Warsz. t. IV (1911), str. 302—307.

³⁾ Zob. Rozprawy Wyd. mat.-przyr. Akad. Um. w Krakowie t. 52 (r. 1912), Ser. A, str. 2—15.

Twierdzenie 220. Jeżeli funkcja $f(x)$, określona wewnątrz przedziału (a, b) , daje ekstremum (właściwe lub nie) dla wartości x_0 , leżącej wewnątrz tego przedziału, i jeżeli istnieje pochodna (skończona lub nieskończona) $f'(x_0)$, to $f'(x_0) = 0$.

Dowód. Załóżmy, że w punkcie x_0 istnieje pochodna (skończona lub nieskończona) $f'(x_0) \neq 0$. Ponieważ wyrażenie

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

zmierza do $f'(x_0)$ gdy h zmierza do zera, więc, dla dostatecznie małych bezwzględnie h , np. dla $|h| < \delta$, będzie ono miało ten sam znak co $f'(x_0)$. Zatem, w przypadku $f'(x_0) > 0$ będzie

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0, \text{ dla } 0 < |h| < \delta,$$

czyli

$$f(x_0 + h) < f(x_0), \text{ dla } -\delta < h < 0,$$

zaś

$$f(x_0 + h) > f(x_0), \text{ dla } 0 < h < \delta:$$

mówimy w tym przypadku, że funkcja $f(x)$ jest w punkcie x_0 rosnącą.

Natomiast w przypadku $f'(x_0) < 0$ będzie

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0, \text{ dla } 0 < |h| < \delta,$$

czyli

$$f(x_0 + h) > f(x_0), \text{ dla } -\delta < h < 0,$$

zaś

$$f(x_0 + h) < f(x_0), \text{ dla } 0 < h < \delta:$$

w przypadku tym mówimy, że funkcja $f(x)$ jest w punkcie x_0 malejącą.

Jasne jest, że ani w jednym, ani w drugim przypadku funkcja $f(x)$ nie daje dla x_0 ani maximum, ani minimum (właściwego lub niewłaściwego). Wynika stąd, że jeżeli funkcja $f(x)$ daje dla x_0 ekstremum (właściwe lub niewłaściwe), i jeżeli istnieje pochodna $f'(x_0)$, to musi być $f'(x_0) = 0$, c. b. d. o.

Z twierdzenia naszego wynika natychmiast, że jeżeli funkcja $f(x)$ posiada wszędzie wewnątrz przedziału (a, b) oznaczoną pochodną (skończoną lub nieskończoną), to punktów, dla których $f(x)$ we-

wewnątrz uważanego przedziału daje ekstremum, należy szukać tylko wśród rozwiązań równania $f'(x) = 0$ (t. j. wśród pierwiastków pochodnej). Nie dla każdego jednak pierwiastka pochodnej funkcja daje ekstremum: np. funkcja $f(x) = x^3$ daje pochodną $f'(0) = 0$, natomiast jest w punkcie 0 rosnącą.

Z drugiej strony funkcja może dawać ekstremum dla punktów, w których pochodna nie istnieje: np. funkcja $f(x) = |x|$, uważana w przedziale $(-1, 1)$, daje dla punktu 0 minimum właściwe, chociaż nie posiada w tym punkcie pochodnej.

Przypuśćmy teraz, że dla wartości x_0 istnieje pochodna (skończona, lub nieskończona) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, oraz, że

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Zastępując w twierdzeniu 216 $f(x)$ przez $f(x_0 + x)$, otrzymamy stąd w jednej chwili:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

skąd wynika, że wyrażenie $f(x_0 + h) - f(x_0)$ ma, dla dostatecznie małych bezwzględnie h , ten sam znak co $h^n f^{(n)}(x_0)$.

Zatem, w razie parzystego n będzie, dla $0 < |h| < \delta$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0, \text{ jeżeli } f^{(n)}(x_0) > 0$$

zaś

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0, \text{ jeżeli } f^{(n)}(x_0) < 0;$$

w pierwszym przypadku funkcja $f(x)$ będzie więc dawała dla x_0 minimum właściwe, w drugim — maximum właściwe.

Natomiast w razie nieparzystego n różnica $f(x_0 + h) - f(x_0)$ będzie różnego znaku dla $h > 0$ oraz dla $h < 0$: funkcja $f(x)$ nie będzie więc tu dawała dla x_0 ani maximum, ani minimum (będąc rosnącą w punkcie x_0 , jeżeli $f^{(n)}(x_0) > 0$, zaś malejącą w tym punkcie, jeżeli $f^{(n)}(x_0) < 0$).

Otrzymujemy w ten sposób następujące правило odnajdywania ekstremów funkcji $f(x)$, leżących wewnątrz przedziału, wewnątrz którego uważana funkcja posiada wszędzie pochodną. Wyznaczamy przedewszystkiem pierwiastki tej pochodnej: niech x_0 oznacza jeden z nich. Podstawiamy wartość x_0 do kolejnych pochodnych funkcji $f(x)$ (o ile istnieją) i odnajdujemy pierwszą, która nie staje się zerem dla $x = x_0$. Jeżeli pochodna ta jest rzędu nieparzystego, funkcja $f(x)$ nie daje ekstremum dla $x = x_0$; jeżeli zaś

pochodna ta jest rzędu parzystego, to zachodzi maximum właściwe, jeżeli jest ujemną, zaś minimum właściwe, jeżeli jest dodatnią.

Oczywiście nie we wszystkich przypadkach pozwala reguła powyższa na odnajdywanie ekstremów (nie będąc mianowicie stosowną w przypadku, gdy pierwiastek pierwszej pochodnej uważanej funkcji jest zarazem pierwiastkiem wszystkich dalszych pochodnych, które istnieją).

Ćwiczenia.

1) Zastosować tw. 211 do otrzymania rozwinięć na szeregi potęgowe funkcji: $f(x) = e^x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \lg(1+x)$, $f(x) = \arctg x$, $f(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$.

2) Przyjmując w tw. 213 $\mu = \frac{1}{2}$ i pisząc $x^2 - 1$ zamiast x , wyprowadzić wzór Lebesgue'a:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-x^2) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} (1-x^2)^k, \quad \text{dla } -1 \leq x \leq 1.$$

3) Udowodnić wzory

$$\cos(s \arcsin x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{s^2(s^2-2^2)(s^2-4^2)\dots(s^2-(2n-2)^2)}{(2n)!} x^{2n},$$

$$\sin(s \arcsin x) = sx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{s(s^2-1^2)(s^2-3^2)\dots(s^2-(2n-1)^2)}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

dla $-1 \leq x \leq 1$, przy wszelkiem s . (Zob. np. Stolz-Gmeiner *Einkl. in die Funktionenlehre*. Lipsk 1905, p. 383).

4) Wyznaczyć extrema funkcji $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ i zbadać różne przypadki, w zależności od wartości współczynników a, b, c .

ROZDZIAŁ XXIV.

Ważniejsze wzory i twierdzenia z teorii przyrostów skończonych. Wzory interpolacyjne Lagrange'a i Newtona.

§ 196. Niech h oznacza daną liczbę rzeczywistą, różną od zera. Będziemy, dla każdej funkcji $f(x)$, oznaczali symbolem $\Delta_x f(x)$ wyrażenie

$$\Delta_x f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (1)$$

i nazywali je *pierwszą różnicą funkcji $f(x)$* (względem zmiennej x). Będzie to więc pewna funkcja zmiennej x , zależna od funkcji $f(x)$ i od liczby h . Jeżeli nie może zachodzić wątpliwość co do tego,