ROZDZIAŁ XXII.

Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a oraz ich zastosowania.

§ 175. W rozdziale niniejszym zajmiemy się, w szczególności, pochodnemi funkcyj rzeczywistych zmiennej rzeczywistej. Udowodnimy tu przedewszystkiem

Twierdzenie 198 Rolle'a: *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w całym przedziale (a, b) ciągłą, jeżeli $f(a) = f(b)$, oraz jeżeli istnieje oznaczona pochodna skończona lub nieskończona $f'(x)$ dla każdej wartości x wewnątrz przedziału (a, b), to wewnątrz przedziału (a, b) istnieje liczba ξ, taka, iż $f'(\xi) = 0$.*

Dowód. Twierdzenie nasze byłoby oczywiście prawdziwem, gdybyśmy wewnątrz przedziału (a, b) mieli stale $f(x) = f(a)$, gdyż wówczas byłoby wewnątrz przedziału (a, b) stale $f'(x) = 0$. Możemy więc założyć, dla dowodu naszego twierdzenia, że wewnątrz przedziału (a, b) istnieje conajmniej jedna wartość x, taka, iż $f(x) \neq a$. Wówczas zachodzi conajmniej jeden z dwóch następujących przypadków:

1) Istnieje przynajmniej jedna liczba x wewnątrz przedziału (a, b), taka, iż $f(x) > f(a)$.

2) Istnieje przynajmniej jedna liczba x wewnątrz przedziału (a, b), taka, iż $f(x) < f(a)$.

Załóżmy, że zachodzi przypadek pierwszy. Funkcja $f(x)$ jest, jak zakładamy, w całym przedziale (a, b) ciągłą; niech M oznacza kres górny funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b): w myśl tw. 70, istnieje w przedziale (a, b) wartość ξ, taka, iż $f(\xi) = M$, przyczem liczba M jest skończoną. Gdyby było $M \leq f(a)$, mielibyśmy (wobec definicji kresu górnego) w całym przedziale (a, b) $f(x) \leq f(a)$, wbrew założeniu, że zachodzi przypadek 1): jest więc $M > f(a)$ i przeto też (wobec $f(a) = f(b)$) $M > f(b)$. Wynika stąd, wobec $f(\xi) = M$, iż $f(\xi) > f(a)$, oraz $f(\xi) > f(b)$, skąd $\xi \neq a$, oraz $\xi \neq b$, a że ξ jest liczbą przedziału (a, b), więc mamy stąd: $a < \xi < b$.

Dla punktu ξ, jako leżącego wewnątrz przedziału (a, b), funkcja $f(x)$ posiada, w myśl założenia, pochodną skończoną lub nieskończoną $f'(\xi)$. Obierzmy ciąg nieskończony x_n, taki iż $\xi < x_n < b$ oraz $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \xi$. Będziemy mieli

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} = f'(\xi), \tag{1}$$

a że stale $f(x_n) \leq M = f(\xi)$, zaś $x_n > \xi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, więc

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} \leq 0, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd, wobec (1):

$$f'(\xi) \leq 0. \tag{2}$$

Z drugiej strony, obierzmy jako x_n ciąg nieskończony, taki iż $a < x_n < \xi$, oraz $\lim\limits_{n=\infty} x_n = \xi$. Będziemy mieli znowu wzór (1), a że teraz stale $f(x_n) \leq M = f(\xi)$, zaś $x_n < \xi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, więc mamy

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} \geq 0, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

skąd, wobec (1):

$$f'(\xi) \geq 0. \tag{3}$$

Wzory (2) i (3) dają w jednej chwili:

$$f'(\xi) = 0.$$

Udowodniliśmy więc, że w przypadku 1) twierdzenie Rolle'a jest prawdziwe. Zupełnie taksamo (wprowadzając kres dolny funkcji $f(x)$ zamiast górnego) udowodnilibyśmy tw. Rolle'a w przypadku 2) (lub też wyprowadzilibyśmy je z przypadku 1) przez zmianę znaku funkcji). Możemy więc uważać tw. 198 za dowiedzione w zupełności.

Łatwo widzieć, że warunek, iż funkcja $f(x)$ ma być ciągłą w całym przedziale (a, b), nie wyłączając jego granic a i b, jest dla tw. 198 konieczny. (Natomiast nie jest koniecznem istnienie pochodnych $f'(a)$ oraz $f'(b)$. Podobnież, koniecznym jest warunek istnienia pochodnej $f'(x)$ skończonej lub nieskończonej, dla każdego x *wewnątrz* przedziału (a, b): mianowicie tw. 198 może nie być prawdziwem, jeżeli funkcja $f(x)$ (spełniając wszystkie inne warunki twierdzenia) nie posiada pochodnej (skończonej ani nieskończonej) dla jednej choćby wartości x wewnątrz przedziału (a, b). Prosty przykład na to stanowi funkcja $f(x) = |x|$ w przedziale $(-1, +1)$, która jedynie dla punktu $x = 0$ nie posiada pochodnej, zaś dla $x \neq 0$ daje $|f'(x)| = 1$ (zatem nigdy $f'(x) = 0$).

§ **176.** Jako wniosek z tw. Rolle'a udowodnimy

Twierdzenie 199 Lagrange'a, czyli twierdzenie w przyrostach skończonych. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) oraz posiada oznaczoną pochodną (skończoną lub nieskończoną) wszędzie wewnątrz przedziału (a, b), to istnieje wewnątrz przedziału (a, b) liczba ξ taka, iż*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi). \tag{4}$$

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ spełnia warunki naszego twierdzenia i połóżmy

$$\varphi(x) = (b - a) f(x) - x [f(b) - f(a)]. \tag{5}$$

Funkcja $\varphi(x)$ będzie oczywiście ciągłą w całym przedziale (a, b) i (wobec założenia co do funkcji $f(x)$, oraz tw. o pochodnej sumy) posiadać będzie wszędzie wewnątrz przedziału (a, b) pochodną

$$\varphi'(x) = (b - a) f'(x) - [f(b) - f(a)]. \tag{6}$$

Wobec (5) znajdujemy też w jednej chwili

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

(gdyż obie wartości wynoszą $b f(a) - a f(b)$). Wszystkie warunki tw. Rolle'a są więc przez funkcję $\varphi(x)$ spełnione. Istnieje zatem wewnątrz przedziału (a, b) liczba ξ taka, iż

$$\varphi'(\xi) = 0. \tag{7}$$

Wobec (6) i (7) mamy więc

$$(b - a) f'(\xi) - [f(b) - f(a)] = 0,$$

czyli wzór (4). Udowodniliśmy więc twierdzenie Lagrange'a.

Wyrażenie $f(b) - f(a)$ nazywamy *przyrostem funkcji* $f(x)$ w przedziale (a, b); różnica $b - a$ będzie więc *przyrostem zmiennej* w tym przedziale. Twierdzenie Lagrange'a możemy więc jeszcze wysłowić, mówiąc, że stosunek przyrostu funkcji do przyrostu zmiennej w danym przedziale równy jest jednej z wartości pochodnej wewnątrz uważanego przedziału (naturalnie w razie stosowalności samego twierdzenia).

Wniosek I. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) i wewnątrz tego przedziału posiada pochodną stale równą zeru, to funkcja $f(x)$ jest stała w całym przedziale (a, b).*

Dowód. Niech x_1 oraz $x_2 > x_1$ będą dwie jakiekolwiek liczby przedziału (a, b). Zastosujmy tw. Lagrange'a do funkcji $f(x)$ w przedziale (x_1, x_2). Będziemy mieli

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \quad \text{gdzie} \quad x_1 < \xi < x_2. \tag{8}$$

Ponieważ zaś, dla $a < x < b$, jak zakładamy, mamy stale $f'(x) = 0$, więc będzie też $f'(\xi) = 0$, zatem, wobec (8):

$$f(x_2) - f(x_1) = 0,$$

czyli $f(x_1) = f(x_2)$. Dowiedliśmy więc, że funkcja $f(x)$ posiada w całym przedziale (a, b) stałą wartość, c. b. d. o. (Jasnem jest, że w dowiedzionem twierdzeniu warunek ciągłości funkcji $f(x)$ potrzebnym jest tylko ze względu na granice a i b przedziału (a, b), gdyż ciągłość funkcji $f(x)$ wewnątrz przedziału (a, b) wynika już z istnienia pochodnej $= 0$. Jasnem jest też, że odrzucając warunek ciągłości moglibyśmy wypowiedzieć twierdzenie: Jeżeli wewnątrz przedziału (a, b) funkcja $f(x)$ posiada pochodną stale równą zeru, to $f(x)$ jest stałą wewnątrz przedziału (a, b). Łatwo też widzieć, że jeżeli w całym przedziale (a, b) $f'(x) = 0$, to $f(x)$ jest stałą w całym przedziale (a, b).

Jako zastosowanie dowiedzionego twierdzenia, wyznaczymy wszystkie funkcje zmiennej rzeczywistej $f(x)$, spełniające warunek

$$f'(x) = f(x). \tag{9}$$

Niech $f(x)$ oznacza funkcję, spełniającą przy wszelkiem rzeczywistem x warunek (9), i połóżmy $\varphi(x) = e^{-x} f(x)$. Wobec (9), oraz zasadniczych twierdzeń o pochodnych, wnosimy z łatwością, że funkcja $\varphi(x)$ posiada dla każdej wartości rzeczywistej x pochodną

$$\varphi'(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x),$$

zatem, wobec (9), stale $\psi'(x) = 0$, skąd w myśl wniosku I, mamy $\varphi(x) = c$, gdzie c jest liczbą stałą. Jest więc $f(x) = \varphi(x) \cdot e^x = ce^x$.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli funkcja zmiennej rzeczywistej $f(x)$ spełnia równanie (9), to przy pewnem stałem c mamy $f(x) = ce^x$. Z drugiej strony z łatwością sprawdzamy, że przy wszelkiem stałem c funkcja $f(x) = ce^x$ spełnia równanie (9). Wzór $f(x) = ce^x$, gdzie c jest liczbą stałą, daje więc wszystkie rozwiązania równania (9).

Gdybyśmy do warunku (9) dołączyli warunek, że $f(0) = 1$, to otrzymalibyśmy $c = 1$, zatem $f(x) = e^x$. A więc *warunki*

$$f'(x) = f(x) \quad \text{oraz} \quad f(0) = 1$$

są charakterystyczne dla funkcji e^x. Tem, że funkcja e^x może być określoną przez tak proste warunki, objaśnia się jej ważna rola w całej Analizie (Zauważymy, że i funkcja e^z zmiennej zespolonej z jest jedynem rozwiązaniem warunków $f(0)=1$, oraz $f'(z)=f(z)$ dla wszelkich zespolonych z).

Wniosek II: *Jeżeli dwie funkcje* $f_1(x)$ *i* $f_2(x)$ *posiadają w całym przedziale* (a, b) *odpowiednio równe skończone pochodne, to funkcje te różnią się w całym przedziale* (a, b) *tylko o liczbę stałą.*

W samej rzeczy, z założenia, że w całym przedziale (a, b) istnieją pochodne skończone $f_1'(x)$ oraz $f_2'(x)$, tudzież, że $f_1'(x)=f_2'(x)$ dla $a \leq x \leq b$, wynika, że funkcja $\varphi(x)=f_1(x)-f_2(x)$ ma pochodną stale równą zeru w przedziale (a, b), co daje, jak dowiedliśmy, $\varphi(x)=C$, dla $a \leq x \leq b$, gdzie C oznacza liczbę niezależną od x. Mamy więc

$$f_1(x)-f_2(x)=C, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b,$$

c. b. d. o. Łatwo widzieć, że wniosek II pozostanie prawdziwym, jeżeli w nim słowa „w całym przedziale (a, b)" zastąpić przez słowa „wewnątrz przedziału (a, b)".

Zauważymy atoli, że twierdzenie nasze może nie być prawdziwem, jeżeli odrzucimy w niem warunek, że pochodne $f_1'(x)$ oraz $f_2'(x)$ mają być skończone (co dowiódł na przykładzie Hahn w r. 1905[1])).

Dowiedzione twierdzenie odgrywa kapitalną rolę w Rachunku całkowym, jak to zaraz wyjaśnimy.

Niech $f(x)$ oznacza daną funkcję w przedziale (a, b). Każdą funkcję $F(x)$, która spełnia dla $a \leq x \leq b$ warunek

$$F'(x)=f(x), \tag{10}$$

nazywamy *funkcją pierwotną* (fonction primitive) funkcji $f(x)$ (w przedziale (a, b)), albo *całką* (intégrale) funkcji $f(x)$.

[1]) Zob. też S. Ruziewicz: *Fundamenta Mathematicae* t. I (1920) str. 148. Przykłady Hahn'a i Ruziewicza dotyczą funkcyj ciągłych. Jeżeli odrzucić warunek ciągłości, to zbudowanie odnośnego przykładu jest bardzo łatwem. Połóżmy, przy dodatniem a, $f(x)=-a$, dla $x<0$, $f(0)=0$, $f(x)=a$, dla $x>0$. Każda z określonych w ten sposób funkcyj $f(x)$ ma, jak łatwo widzieć, wszędzie tę samą pochodną (skończoną lub nieskończoną), mianowicie $f'(x)=0$ dla $x \neq 0$, zaś $f'(0)=+\infty$. Natomiast żadne dwie z naszych funkcyj (odpowiadających różnym a) nie różnią się w przedziale $(-1, 1)$ o liczbę stałą.

Nie przesądzając narazie, przy jakich warunkach dla danej funkcji istnieją funkcje pierwotne, załóżmy, że istnieje dla danej funkcji $f(x)$ conajmniej jedna funkcja $F_0(x)$, spełniająca w przedziale (a, b) warunek (10), czyli warunek

$$F_0'(x)=f(x), \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b. \tag{11}$$

Jeżeli teraz $F(x)$ oznacza jakąkolwiek funkcję pierwotną dla $f(x)$ w przedziale (a, b), to wobec (10) i (11), będziemy mieli:

$$F'(x)=F_0'(x), \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b,$$

co, w myśl wniosku II, daje

$$F(x)=F_0(x)+C, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b, \tag{12}$$

gdzie C oznacza liczbę niezależną od x.

Każda funkcja pierwotna dla $f(x)$ w przedziale (a, b) musi więc mieć postać (12). Z drugiej strony, wyznaczając przy dowolnej danej wartości na stałą C funkcję $F(x)$ ze wzoru (12), będziemy, wobec (11) (i uwagi, że pochodną stałej jest zero), mieli

$$F'(x)=F_0'(x)=f(x),$$

czyli wzór (10).

Dowiedliśmy więc, że każda funkcja pierwotna dla $f(x)$ (w przedziale (a, b) ma postać (12) i naodwrót. Zatem, jeżeli istnieje conajmniej jedna funkcja pierwotna dla $f(x)$ w przedziale (a, b), to wzorem na wszystkie funkcje pierwotne dla $f(x)$ (w tym przedziale) jest

$$F(x)=F_0(x)+C, \tag{13}$$

gdzie $F_0(x)$ oznacza którąkolwiek daną z nich, zaś C — stałą dowolną.

Każdą z funkcyj (13) oznaczamy symbolem

$$\int f(x)\,dx$$

(lub poprostu $\int f(x)$, jeżeli nie zachodzi potrzeba wyraźnego zaznaczenia, że zmienną, względem której bierzemy funkcję pierwotną, jest x), który nazywamy *całką nieoznaczoną* (intégrale indéfinie) funkcji $f(x)$ (w odróżnieniu od całki oznaczonej, którą określimy później).

§ 177. Twierdzenie 200 Cauchy'ego: *Jeżeli funkcje* $\varphi(x)$ *oraz* $\psi(x)$ *są ciągłe w przedziale* (a, b), *oraz posiadają wszędzie wewnątrz tego przedziału oznaczone pochodne, przyczem pochodna* $\psi'(x)$

jest stale skończoną i różną od zera dla $a < x < b$, to istnieje wewnątrz przedziału (a, b) liczba ξ taka, iż:

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}. \tag{14}$$

Dowód. Połóżmy

$$f(x) = [\psi(b) - \psi(a)]\,\varphi(x) - [\varphi(b) - \varphi(a)]\,\psi(x) \tag{15}$$

— będzie to funkcja ciągła w całym przedziale (a, b), przyczem będzie $f(b) = f(a)$, gdyż, wobec (15), obie wartości wynoszą $\varphi(a)\,\psi(b) - \psi(a)\,\varphi(b)$.

Wobec (15) oraz założeń naszego twierdzenia wnosimy dalej, że funkcja $f(x)$ posiada wszędzie wewnątrz przedziału (a, b) pochodną

$$f'(x) = [\psi(b) - \psi(a)]\,\varphi'(x) - [\varphi(b) - \varphi(a)]\,\psi'(x). \tag{16}$$

Funkcja $f(x)$ spełnia więc wszystkie warunki twierdzenia Rolle'go: w myśl tego ostatniego istnieje więc wewnątrz przedziału (a, b) liczba ξ, taka, iż

$$f'(\xi) = 0,$$

czyli, w myśl (16):

$$[\psi(b) - \psi(a)]\,\varphi'(\xi) - [\varphi(b) - \varphi(a)]\,\psi'(\xi) = 0. \tag{17}$$

Gdyby było $\psi(b) = \psi(a)$, mielibyśmy, stosując tw. Rolle'go względem funkcji $\psi(x)$, przy pewnem η wewnątrz przedziału (a, b): $\psi'(\eta) = 0$, wbrew założeniu, że $\psi'(x) \neq 0$ dla $a < x < b$. Z tego ostatniego wynika też, że $\psi'(\xi) \neq 0$. Jest więc

$$\psi(b) \neq \psi(a), \quad \text{oraz} \quad \psi'(\xi) \neq 0,$$

i przeto możemy podzielić obie strony wzoru (17) przez liczbę $[\psi(b) - \psi(a)]\,\psi'(\xi)$, co daje natychmiast wzór (14), *c. b. d. o.*

(Twierdzenie Lagrange'a możemy oczywiście uważać jako przypadek szczególny twierdzenia Cauchy'ego, gdy $\psi(x) = x$).

§ 178. Twierdzenie 201 Darboux: *Jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest w przedziale (a, b) pochodną (skończoną lub nieskończoną) pewnej funkcji ciągłej $f(x)$, to funkcja $\varphi(x)$ przechodzi w przedziale (a, b) od jednej wartości do drugiej nie inaczej, jak przechodząc (conajmniej raz) przez każdą wartość pośrednią.*

Dowód. Załóżmy przedewszystkiem, że funkcja $F(x)$ jest ciągła dla $a \leq x \leq b$ i posiada w całym przedziale (a, b) pochodną skończoną lub nieskończoną $F'(x)$, oraz że $F'(a) > 0$, $F'(b) < 0$: okażemy, że istnieje wewnątrz przedziału (a, b) liczba ξ, taka iż $F'(\xi) = 0$.

Gdyby było stale $F(x) \leq F(a)$, dla $a < x < b$, mielibyśmy oczywiście $F'(a) \leq 0$, wbrew założeniu. Istnieje więc liczba α, taka iż $a < \alpha < b$, oraz $F(\alpha) > F(a)$. Gdyby było stale $F(x) \leq F(b)$ dla $a < x < b$, mielibyśmy $F'(b) \geq 0$, wbrew założeniu. Istnieje więc liczba β, taka, $a < \beta < b$, oraz $F(\beta) > F(b)$.

Jeżeli $F(b) \geq F(a)$, to, wobec $F(a) \leq F(b) < F(\beta)$, oraz z uwagi, że funkcja $F(x)$ jest ciągłą, wnosimy, że funkcja $F(x)$ przyjmie w przedziale (a, β) conajmniej raz wartość $F(b)$. Jeżeli zaś $F(b) < F(a)$, to, wobec $F(\alpha) > F(a) > F(b)$ wnosimy, że funkcja $F(x)$, jako ciągła, przyjmie w przedziale (α, b) conajmniej raz wartość $F(a)$. Wynika stąd natychmiast, że w każdym razie w przedziale (a, b) istnieją dwie różne wartości x_1 i x_2, takie iż $F(x_1) = F(x_2)$. Stosując do funkcji $F(x)$ w przedziale (x_1, x_2) twierdzenie Rolle'a, wnosimy, że istnieje wewnątrz przedziału (x_1, x_2), a więc, tembardziej, wewnątrz przedziału (a, b), liczba ξ, taka, iż $F'(\xi) = 0$, *c. b. d. o.*

Niech teraz $\varphi(x)$ oznacza jakąkolwiek funkcję, będącą w przedziale (a, b) pochodną (skończoną lub nieskończoną) pewnej funkcji ciągłej $f(x)$ i niech A oznacza dowolną daną liczbę, pośrednią między $\varphi(a)$ oraz $\varphi(b)$: jest więc albo $\varphi(a) > A > \varphi(b)$, albo $\varphi(a) < A < \varphi(b)$.

W pierwszym przypadku połóżmy $F(x) = f(x) - Ax$: będzie to funkcja ciągła, przyczem

$$F'(x) = f'(x) - A = \varphi(x) - A \quad (\text{dla } a \leq x \leq b) \tag{18}$$

i przytem $F'(a) = \varphi(a) - A > 0$, $F'(b) = \varphi(b) - A < 0$, skąd, wobec dowiedzionego wyżej, wnosimy o istnieniu wewnątrz przedziału (a, b) liczby ξ takiej, iż $F'(\xi) = 0$, czyli, wobec (18): $\varphi(\xi) = A$.

W drugim przypadku połóżmy $F(x) = Ax - f(x)$: będzie to funkcja ciągła, oraz

$$F'(x) = A - f'(x) = A - \varphi(x), \quad (\text{dla } a \leq x \leq b) \tag{19}$$

i przeto $F'(a) = A - \varphi(a) > 0$, $F'(b) = A - \varphi(b) < 0$, skąd, jak wyżej, wnosimy o istnieniu wewnątrz przedziału (a, b) liczby ξ, takiej, iż $F'(\xi) = 0$, czyli, wobec (19): $\varphi(\xi) = A$.

W każdym więc razie, jeżeli A oznacza liczbę pośrednią między $\varphi(a)$ i $\varphi(b)$, to istnieje wewnątrz przedziału (a, b) liczba ξ, taka, iż $\varphi(\xi) = A$. Funkcja $\varphi(x)$, przechodząc od wartości $\varphi(a)$ do wartości $\varphi(b)$ w przedziale (a, b), musi więc przejść przez każdą wartość pośrednią między $\varphi(a)$ i $\varphi(b)$. Udowodniliśmy więc twierdzenie Darboux.

Z tw. Darboux wynika też natychmiast, że jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest wewnątrz przedziału (a, b) pochodną funkcji ciągłej i jeżeli liczby g i G oznaczają odpowiednio dolny i górny kres funkcji $\varphi(x)$ dla $a < x < b$, to wewnątrz (a, b) funkcja $\varphi(x)$ przyjmuje każdą wartość, leżącą wewnątrz przedziału (g, G)

Pochodne (funkcyj ciągłych) posiadają więc z funkcjami ciągłemi tę własność wspólną, że jak jedne, tak i drugie, przechodząc od jednej wartości do drugiej, muszą zawsze przejść przez wszystkie wartości pośrednie (zob. tw. 69). Własność ta, jak tego dowiedliśmy w § 55, nie jest jednak cechą charakterystyczną funkcyj ciągłych.

Że pochodna, nawet o ile istnieje wszędzie w pewnym przedziale i jest skończoną, może nie być funkcją ciągłą, możemy okazać na łatwym przykładzie. Połóżmy w tym celu

$$f(x) = x\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{x}, \quad \text{dla } x \neq 0, \tag{20}$$

zaś

$$f(0) = 0. \tag{21}$$

Dla $x \neq 0$, wobec (20), stosując twierdzenia o pochodnej iloczynu, oraz funkcji funkcji, znajdujemy z łatwością:

$$f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cos\frac{1}{x}. \tag{22}$$

Aby wyznaczyć pochodną dla $x = 0$, oznaczmy przez x_n ciąg liczb różnych od zera, zmierzających do zera. Będzie, wobec (20) i (21)

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \sqrt[3]{x_n}\sin\frac{1}{x_n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

skąd, w jednej chwili (z uwagi, że $\left|\sin\frac{1}{x_n}\right| \leq 1$):

$$\lim_{n=\infty}\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = 0$$

i przeto $f'(0) = 0$.

Funkcja $f(x)$ posiada więc w całym zbiorze liczb rzeczywistych oznaczoną skończoną pochodną, określoną wzorem (22) dla $x \neq 0$ i równą zeru

dla $x = 0$. Pochodna ta nie jest jednak w punkcie $x = 0$ ciągłą. W samej rzeczy, kładąc $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, będziemy mieli $\lim_{n=\infty} x_n = 0$, zaś, wobec (22) (z uwagi, że $\sin\frac{1}{x_n} = \sin 2\pi n = 0$, $\cos\frac{1}{x_n} = \cos 2\pi n = 1$) $f'(x_n) = -\sqrt[3]{4\pi^2 n^2}$, co daje $\lim_{n=\infty} f'(x_n) = -\infty$. Funkcja $f'(x)$ nie tylko więc nie jest ciągłą dla $x = 0$, ale nadto nie jest ograniczoną (w żadnym przedziale, zawierającym punkt 0).

Damy też przykład funkcji, której pochodna istnieje wszędzie w pewnym przedziale i jest ograniczona, ale nie jest ciągła. Połóżmy w tym celu

$$f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}, \quad \text{dla } x \neq 0$$

oraz

$$f(0) = 0.$$

Z łatwością znajdziemy stąd:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, \quad \text{dla } x \neq 0 \tag{23}$$

oraz

$$f'(0) = 0. \tag{24}$$

Wobec (23) i (24), z uwagi że $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$, oraz $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 1$, mamy, dla $-1 \leq x \leq 1$:

$$|f'(x)| \leq 3$$

— funkcja nasza posiada więc w całym przedziale $(-1, 1)$ pochodną ograniczoną $f'(x)$. Pochodna ta nie jest jednak ciągłą dla $x = 0$, gdyż, kładąc $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, otrzymujemy, wobec (23): $f'(x_n) = -1$, i przeto $\lim_{n=\infty} x_n = 0$, $\lim_{n=\infty} f'(x_n) = -1$, gdy tymczasem, wobec (24), $f'(0) = 0$.

Z twierdzenia Darboux wynika, że nie każda funkcja posiada funkcję pierwotną. W samej rzeczy; weźmy np. funkcję $\varphi(x) = \mathrm{E}x$: gdyby funkcja ta była, np. w przedziale $(-1, +1)$ pochodną funkcji $f(x)$, to $f(x)$, jako funkcja mająca pochodną skończoną w przedziale $(-1, 1)$, musiałaby być w tym przedziale ciągłą, i przeto do funkcji $\varphi(x)$ byłoby stosowalnem tw. Darboux: przechodząc od wartości $\varphi(-1) = \mathrm{E}(-1) = -1$ do wartości $\varphi(1) = \mathrm{E}1 = 1$, funkcja $\varphi(x) = \mathrm{E}x$ musiałaby przejść przez wszystkie wartości pośrednie, gdy tymczasem funkcja $\mathrm{E}x$ przyjmuje tylko wartości całkowite. Funkcja $\varphi(x) = \mathrm{E}x$ nie posiada więc w przedziale $(-1, 1)$ funkcji pierwotnej.

Zauważymy, że w twierdzeniu 201 warunek ciągłości funkcji $f(x)$ jest istotny. W samej rzeczy, funkcja $f(x)$, określona przez warunki: $f(x) = -1$ dla $x < 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ dla $x > 0$, jak łatwo widzieć, posiada wszędzie oznaczoną pochodną (skończoną lub nieskończoną), mianowicie $f'(x) = 0$ dla $x \neq 0$, zaś $f'(0) = +\infty$, pochodna ta jednak nie spełnia twierdzenia Darboux.

Co się tyczy pochodnych nieskończonych funkcyj ciągłych, to zauważymy jeszcze następujący wniosek z tw. Lagrange'a:

Wniosek III. *Nie istnieje funkcja ciągła w przedziale* (a, b), *która wewnątrz tego przedziału posiada wszędzie oznaczoną, ale nieskończoną pochodną.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest w przedziale (a, b) ciągłą i wewnątrz tego przedziału posiada wszędzie oznaczoną pochodną (skończoną lub nieskończoną). W myśl tw. Lagrange'a istnieje wewnątrz przedziału (a, b) liczba ξ, taka, iż

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi),$$

skąd wnosimy natychmiast, że liczba $f'(\xi)$ jest skończoną, co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

§ **179.** Zajmiemy się obecnie zastosowaniem wniosku II z § 176.

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ posiada dla $-R < x < R$ pochodną $f'(x)$, która się rozwija na szereg potęgowy

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \quad \text{dla } -R < x < R. \tag{1}$$

Szereg (1) jest oczywiście (§ 129) szeregiem pochodnym dla szeregu potęgowego

$$F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_3}{4} x^4 + \ldots \tag{2}$$

Szereg pochodny i szereg dany mają, w myśl tw. 165, to samo koło zbieżności, przyczem wewnątrz koła szereg pochodny przedstawia wszędzie pochodną szeregu danego. Ponieważ zaś szereg

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

będąc zbieżnym dla $-R < x < R$, jest zbieżny przy wszelkiem zespolonem x, dla którego $|x| < R$ (co wynika natychmiast z tw. 158), więc szereg (2) jest zbieżny dla $|x| < R$, przyczem mamy

$$F'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \quad \text{dla } |x| < R.$$

Wobec (1) mamy więc

$$F'(x) = f'(x), \quad \text{dla } -R < x < R,$$

skąd, w myśl wniosku II z § 176:

$$f(x) = F(x) + C, \quad \text{dla } -R < x < R, \tag{3}$$

gdzie C oznacza liczbę, niezależną od x.

Wobec (2) i (3) mamy więc dla funkcji $f(x)$ rozwinięcie:

$$f(x) = C + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots, \quad \text{dla } -R < x < R.$$

Kładąc $x = 0$, otrzymujemy stąd $f(0) = C$. Stąd

Twierdzenie 202: *Jeżeli funkcja* $f(x)$ *posiada dla* $-R < x < R$ *pochodną* $f'(x)$, *rozwijającą się na szereg potęgowy*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \quad \text{dla } -R < x < R,$$

to funkcja $f(x)$ *sama rozwija się dla* $-R < x < R$ *na szereg potęgowy*

$$f(x) = f(0) + \frac{a_0}{1} x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_3}{4} x^4 + \ldots$$

§ **180.** Połóżmy, w szczególności, $f(x) = \lg(1+x)$, $R = 1$. Funkcja $f(x) = \lg(1+x)$ posiada oczywiście dla $x > -1$ pochodną

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},$$

która rozwija się dla $-1 < x < 1$ na szereg geometryczny

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

W myśl tw. 202, oraz wobec $\lg 1 = 0$, funkcja $f(x) = \lg(1+x)$ rozwija się więc na szereg potęgowy

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad \text{dla } -1 < x < 1, \tag{4}$$

przyczem rozwinięcie to pozostaje prawdziwem i dla $x = 1$, wobec wzoru na $\lg 2$, znalezionego w § 51. (Dla $x = -1$, oraz $|x| \geq 1$ szereg (4) jest rozbieżny). Wzór (4) znalazł Mercator w r. 1669.

Zastępując we wzorze (5) x przez $-x$, otrzymujemy rozwinięcie

$$\lg(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots, \quad \text{dla } -1<x<1,$$

skąd, wobec (4), z uwagi, że $\lg\frac{1+x}{1-x} = \lg(1+x) - \lg(1-x)$:

$$\lg\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots\right], \quad \text{dla } -1<x<1. \tag{5}$$

Niech teraz p i q będą dwie liczby dodatnie: połóżmy $x=\frac{p-q}{p+q}$; będziemy mieli, jak łatwo widzieć (wobec $p>0$, $q>0$): $-1<x<1$, i przeto, w myśl (5):

$$\lg\frac{p}{q} = 2\left[\frac{p-q}{p+q}+\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5+\dots\right], \quad \text{dla } p>0,\ q>0. \tag{6}$$

Wzór ten (znaleziony przez Gregory'ego w r. 1668) służy do obliczania logarytmów liczb dodatnich, gdyż dla każdej danej liczby dodatniej t możemy zawsze dobrać liczby dodatnie p, q, których iloraz daje t, tak, iżby szereg (6) był szybko zbieżny.

Np. dla $p=2$, $q=1$, wzór (6) daje

$$\lg 2 = 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\dots\right];$$

zatrzymując w tym szeregu n pierwszych składników, popełnimy, jak łatwo widzieć, błąd mniejszy od $\frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}}$: więc, np. dla $n=5$ otrzymamy $\lg 2$ z dokładnością pięciu znaków dziesiętnych.

Dla $p=3$, $q=2$, wzór (6) daje

$$\lg 3 = \lg 2 + 2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}+\dots\right],$$

skąd, mając $\lg 2$, obliczamy z łatwością $\lg 3$.

Kładąc we wzorze (6) $p=5$, $q=4$, otrzymujemy

$$\lg 5 = 2\lg 2 + 2\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5}+\dots\right],$$

skąd, mając $\lg 2$, możemy z łatwością obliczyć $\lg 5$, jakoteż $\lg 10 = \lg 2 + \lg 5$, a więc i liczbę $M=\frac{1}{\lg 10}$, przez którą należy mnożyć logarytmy naturalne (Nepera) dla otrzymania logarytmów dziesiętnych (Brigga) (por. § 52).

Dla sporządzenia tablicy logarytmów, należy obliczyć tylko logarytmy liczb pierwszych, logarytmy zaś liczb złożonych znajdujemy na mocy twierdzenia o logarytmie iloczynu, np. $\lg 4 = 2\lg 2$, $\lg 6 = \lg 2 + \lg 3$, $\lg 8 = 3\lg 2$, $\lg 9 = 2\lg 3$ i t. p.

Przy obliczaniu logarytmów kolejnych liczb naturalnych możemy się też posługiwać wzorem

$$\lg(q+1) = \lg q + 2\left[\frac{1}{2q+1}+\frac{1}{3(2q+1)^3}+\frac{1}{5(2q+1)^5}+\dots\right],$$

wynikającym w jednej chwili ze wzoru (6) dla $p=q+1$.

Dla otrzymania szybko zbieżnego szeregu na $\lg 2$ można też, jak to czyni Adams, wyjść z tożsamości $\lg 2 = -7\lg\frac{9}{10}+2\lg\frac{96}{100}+3\lg\frac{81}{80}$, oraz względem $\lg\frac{9}{10}=\lg\left(1-\frac{1}{10}\right)$, $\lg\frac{96}{100}=\lg\left(1-\frac{4}{100}\right)$, $\lg\frac{81}{80}=\lg\left(1+\frac{1}{80}\right)$ zastosować rozwinięcie (4), co daje szeregi szybko zbieżne i łatwe do obliczania, dzięki potęgom liczby 10 w mianownikach. Podobnież do obliczenia $\lg 3$ oraz $\lg 5$ mogą służyć wzory $\lg 3 = -11\lg\frac{9}{10}+3\lg\frac{96}{100}+5\lg\frac{81}{80}$ oraz $\lg 5 = -16\lg\frac{9}{10}+4\lg\frac{96}{100}+7\lg\frac{81}{80}$.

§ 181. Jako drugi przykład zastosowania tw. 202, przyjmijmy: $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $R=1$. Funkcja $\operatorname{arctg} x$ posiada, jak wiemy, przy wszelkiem rzeczywistem x pochodną $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, która, dla $-1<x<1$ rozwija się na szereg potęgowy

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\dots$$

W myśl tw. 202, oraz wobec $\operatorname{arctg} 0 = 0$, znajdujemy w jednej chwili rozwinięcie

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots, \quad \text{dla } -1<x<1, \tag{7}$$

które pozostaje prawdziwem dla $x=1$, oraz $x=-1$, wobec wzoru Leibniza na liczbę $\pi/4$ (§ 159), i uwagi, że $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, zaś $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\pi/4$. Dla $|x|\geq 1$ szereg (7) jest, jak łatwo widzieć, rozbieżny.

Ze wzoru (7) otrzymać możemy różne wzory do obliczania liczby π. Połóżmy w tym celu

$$\varphi = \operatorname{arctg}\tfrac{1}{2},\quad \psi = \operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}; \tag{8}$$

będzie, z uwagi, że $\operatorname{arctg} x$ wzrasta w przedziale (0,1):

$$0<\operatorname{arctg}\tfrac{1}{2}<\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}, \quad \text{oraz } 0<\operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}<\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4},$$

czyli

$$0<\varphi<\frac{\pi}{4}, \quad \text{oraz} \quad 0<\psi<\frac{\pi}{4},$$

skąd

$$0<\varphi+\psi<\frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Z drugiej strony, wobec (8), mamy $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\psi=\frac{1}{3}$, i przeto

$$\operatorname{tg}(\varphi+\psi)=\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}\varphi\,.\operatorname{tg}\psi}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1,$$

skąd, wobec (9):

$$\varphi+\psi=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},$$

co daje, w myśl (8), wzór

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\tfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}.$$

Wobec (7) mamy więc na liczbę $\frac{\pi}{4}$ wzór Eulera:

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right)-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}\right)+\dots$$

Szereg ten jest naprzemiennym i przeto suma cząstkowa daje jego sumę z błędem bezwzględnie mniejszym od pierwszego odrzuconego składnika.

Dogodniejszym do rachunku jest wzór Vegi. Dla otrzymania go połóżmy

$$\varphi=\operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}, \quad \psi=\operatorname{arctg}\tfrac{1}{7}. \tag{10}$$

Wobec (10) będzie $0<\varphi<\pi/4$, skąd

$$0<2\varphi<\frac{\pi}{2}; \tag{11}$$

z drugiej zaś strony

$$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\tfrac{3}{4}, \quad \text{czyli} \quad \operatorname{tg}2\varphi=\tfrac{3}{4}, \tag{12}$$

skąd, wobec (11):

$$2\varphi=\operatorname{arctg}\tfrac{3}{4}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},$$

i przeto, wobec $\psi=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}<\frac{\pi}{4}$:

$$2\varphi+\psi<\frac{\pi}{2}, \tag{13}$$

a że, wobec (10) i (12),

$$\operatorname{tg}(2\varphi+\psi)=\frac{\operatorname{tg}2\varphi+\operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}2\varphi\operatorname{tg}\psi}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}=1,$$

więc, wobec (13), mamy

$$2\varphi+\psi=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},$$

co daje, w myśl (10), wzór Vegi

$$\frac{\pi}{4}=2\operatorname{arctg}\tfrac{1}{3}+\operatorname{arctg}\tfrac{1}{7}.$$

Najdogodniejszym jednak do rachunku jest wzór Machin'a. Dla otrzymania go połóżmy

$$\varphi=\operatorname{arctg}\tfrac{1}{5}. \tag{14}$$

Wobec (7), będzie $0<\varphi<\frac{1}{5}$, skąd:

$$0<4\varphi<1<\frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

Wobec (14) mamy, dalej:

$$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5^2}}=\frac{5}{12},$$

skąd

$$\operatorname{tg}4\varphi=\frac{2\operatorname{tg}2\varphi}{1-\operatorname{tg}^2 2\varphi}=\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-(\frac{5}{12})^2}=\tfrac{120}{119},$$

co daje wobec (15):

$$\frac{\pi}{2}>4\varphi=\operatorname{arctg}\frac{120}{119}>\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},$$

oraz

$$0<4\varphi-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}, \tag{16}$$

a że

$$\operatorname{tg}\left(4\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}4\varphi-1}{1+\operatorname{tg}4\varphi},$$

więc, wobec (16)

$$4\varphi-\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

czyli, wobec (14):

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

co przedstawia właśnie wzór Machin'a.

Zatrzymując z szeregu na $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ kilkanaście, zaś z szeregu na $\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ kilka pierwszych składników, moglibyśmy już otrzymać wartość liczby π z kilkudziesięciu znakami dziesiętnymi. Shanks obliczył ze wzoru Machina liczbę π z 707 znakami dziesiętnymi.

Wspomnimy jeszcze o wzorze Dahse'go, z którego ten ostatni obliczył wartość π z dwustu znakami dziesiętnymi. Dla otrzymania go połóżmy

$$\varphi=\operatorname{arctg}\tfrac{1}{2}, \quad \psi=\operatorname{arctg}\tfrac{1}{5}, \quad \vartheta=\operatorname{arctg}\tfrac{1}{8}. \tag{17}$$

Jak wyżej, znajdziemy $0<\varphi+\psi<\pi/2$, skąd, wobec

$$\operatorname{tg}(\varphi+\psi)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}=\tfrac{7}{9},$$

znajdujemy: $0<\chi=\varphi+\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}<\frac{\pi}{4}$, oraz $0<\chi+\vartheta<\frac{\pi}{2}$, skąd, wobec

$$\operatorname{tg}(\chi+\vartheta)=\frac{\operatorname{tg}\chi+\operatorname{tg}\vartheta}{1-\operatorname{tg}\chi\operatorname{tg}\vartheta}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}}=1,$$

znajdujemy $\chi+\vartheta=\operatorname{arctg}1=\pi/4$, czyli $\varphi+\varphi+\vartheta=\pi/4$, co daje, wobec (17) wzór Dahse'go:

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}.$$

§ 182. Jako inny przykład zastosowania twierdzenia 202, połóżmy

$$f(x)=-\tfrac{1}{2}\lg(1-2x\cos\vartheta+x^2),\quad \text{dla}\quad -1<x<1, \tag{18}$$

gdzie ϑ oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą (niezależną od x).

Mamy oczywistą tożsamość

$$1-2x\cos\vartheta+x^2=(1-x\cos\vartheta)^2+x^2\sin^2\vartheta,$$

skąd wynika, że dla $-1<x<1$ mamy $1-2x\cos\vartheta+x^2>0$ (gdyż wówczas $|x\cos\vartheta|<1$, zatem $(1-x\cos\vartheta)^2>0$). Jest więc, wobec (18):

$$f'(x)=\frac{\cos\vartheta-x}{1-2x\cos\vartheta+x^2},\quad \text{dla}\quad -1<x<1. \tag{19}$$

Dla funkcji (19) możemy (dla $|x|<1$) z łatwością podać rozwinięcie na szereg potęgowy. W tym celu wyjdziemy z tożsamości

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots,\quad \text{dla}\quad |z|<1.$$

Kładąc w tej tożsamości $z=x(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$, otrzymujemy, w myśl wzoru Moivre'a (§ 141), dla $|x|<1$ (przy wszelkiem rzeczywistem ϑ):

$$\frac{1}{1-x\cos\vartheta-ix\sin\vartheta}=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta).$$

Przez porównanie po obu stronach części rzeczywistych, oraz współczynników przy i, otrzymujemy stąd w jednej chwili:

$$\frac{1-x\cos\vartheta}{1-2x\cos\vartheta+x^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\vartheta,\quad \text{dla}\quad -1<x<1, \tag{20}$$

oraz

$$\frac{x\sin\vartheta}{1-2x\cos\vartheta+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\vartheta,\quad \text{dla}\quad -1<x<1. \tag{21}$$

Wobec (20), mamy, odejmując 1:

$$\frac{x\cos\vartheta-x^2}{1-2x\cos\vartheta+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\vartheta,\quad \text{dla}\quad -1<x<1.$$

skąd, w razie $x\neq 0$, dzieląc przez x:

$$\frac{\cos\vartheta-x}{1-2x\cos\vartheta+x^2}=\cos\vartheta+x\cos 2\vartheta+x^2\cos 3\vartheta+\ldots, \tag{22}$$

co pozostaje oczywiście prawdziwem i dla $x=0$. Wzór (22) jest więc prawdziwy dla $-1<x<1$ i przeto wobec (19), mamy rozwinięcie:

$$f'(x)=\cos\vartheta+x\cos 2\vartheta+x^2\cos 3\vartheta+\ldots,\quad \text{dla}\quad -1<x<1.$$

W myśl twierdzenia 202, i z uwagi, że $\lg 1=0$, funkcja (18) rozwija się więc dla $-1<x<1$ (przy wszelkiem rzeczywistem ϑ) na szereg potęgowy

$$-\tfrac{1}{2}\lg(1-2x\cos\vartheta+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos n\vartheta}{n},\quad \text{dla}\quad -1<x<1. \tag{23}$$

Jako ostatni przykład zastosowania twierdzenia 202, połóżmy (przy dowolnem danem rzeczywistem ϑ):

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x\sin\vartheta}{1-x\cos\vartheta},\quad \text{dla}\quad -1<x<1. \tag{24}$$

Dla $-1<x<1$ będzie oczywiście $1-x\cos\vartheta>0$, i przeto funkcja $f(x)$ będzie miała oznaczoną wartość, przyczem będzie, jak łatwo widzieć:

$$f'(x)=\frac{\sin\vartheta}{1-2x\cos\vartheta+x^2},$$

i przeto, wobec (21), dla $-1<x<1$, w razie $x\neq 0$:

$$f'(x)=\sin\vartheta+x\sin 2\vartheta+x^2\sin 3\vartheta+\ldots, \tag{25}$$

co, jak łatwo widzieć, pozostaje prawdziwem i dla $x=0$.

Rozwinięcie (25) zachodzi więc dla $-1<x<1$, skąd, w myśl tw. 202, i wobec $\operatorname{arctg} 0=0$, znajdujemy dla funkcji (24) przy wszelkiem rzeczywistem ϑ rozwinięcie

$$\operatorname{arctg}\frac{x\sin\vartheta}{1-x\cos\vartheta}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\sin n\vartheta}{n},\quad \text{dla}\quad -1<x<1. \qquad (26)$$

Wyprowadzimy jeszcze pewne wnioski ze wzorów (23) i (26).

Powiadam, że szeregi (23) i (26) są, przy $\vartheta\neq 2k\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2,\dots$) zbieżne i dla $x=1$. W samej rzeczy, kładąc $z=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$, dla $\vartheta\neq 2k\pi$ mamy

$$z\neq 1,\quad |z|=1,\quad \sin\frac{\vartheta}{2}\neq 0,$$

$$|1-z|=\sqrt{(1-\cos\vartheta)^2+\sin^2\vartheta}=\sqrt{2-2\cos\vartheta}=\sqrt{4\sin^2\frac{\vartheta}{2}}=2\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right|,$$

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right|\leq\frac{2}{|1-z|}=\frac{1}{\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right|},$$

i, wobec tożsamości

$$1+z+z^2+z^3+\dots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z},$$

oraz wzoru Moivre'a, wnosimy, że sumy cząstkowe szeregów $\Sigma\cos n\vartheta$ oraz $\Sigma\sin n\vartheta$ są ograniczone, skąd, w myśl tw. 104, wynika, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\vartheta}{n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\vartheta}{n}$ są zbieżne. W myśl twierdzenia 162 (Abela), szeregi potęgowe (23) i (26) (gdzie ϑ oznacza liczbę rzeczywistą $\neq 2k\pi$), będąc zbieżne dla $x=1$, są zbieżne jednostajnie dla $0\leq x\leq 1$, i przeto przedstawiają w całym przedziale (0, 1) funkcję ciągłą.

Lecz, jeżeli ϑ oznacza daną liczbę rzeczywistą $\neq 2k\pi$, to funkcje $\lg(1-2x\cos\vartheta+x^2)$ oraz $\operatorname{arctg}\frac{x\sin\vartheta}{1-x\cos\vartheta}$ są dla $0\leq x\leq 1$ ciągłe (względem x) (w myśl twierdzenia o ciągłości funkcji funkcji i uwagi, że dla $\vartheta\neq 2k\pi$, $0\leq x\leq 1$, mamy $1-x\cos\vartheta>0$, $1-2x\cos\vartheta+x^2\geq(1-x\cos\vartheta)^2>0$). Obie strony wzoru (23), jakoteż obie strony wzoru (26) są więc (przy danem $\vartheta\neq 2k\pi$) ciągłe względem x w całym przedziale (0, 1), a ponieważ są one

odpowiednio równe dla $0\leq x\leq 1$, więc (wobec ciągłości) muszą być też równe dla $x=1$. Wzory (23) i (26) są więc prawdziwe i dla $x=1$ (w razie $\vartheta\neq 2k\pi$), co daje, z uwagi, że, dla $\vartheta\neq 2k\pi$ mamy $\frac{1}{2}\lg(1-2\cos\vartheta+1)=\lg\left(2\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right|\right)$:

$$-\lg\left(2\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right|\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\vartheta}{n},\ \text{dla}\ \vartheta\neq 2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2\dots) \qquad (27)$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\vartheta}{n},\ \text{dla}\ \vartheta\neq 2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\dots). \qquad (28)$$

Dla $0<\vartheta<\pi$ mamy, kładąc $\xi=\frac{\pi}{2}-\frac{\vartheta}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2}<\xi<\frac{\pi}{2},\ \text{oraz}\ \operatorname{tg}\xi=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\vartheta}{2}\right)=\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}=\frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta},$$

skąd wynika, że

$$\xi=\operatorname{arctg}\frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta}.$$

Mamy więc, dla $0<\vartheta<\pi$:

$$\operatorname{arctg}\frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta}=\frac{\pi}{2}-\frac{\vartheta}{2}$$

i przeto, wobec (28), mamy wzór

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\vartheta}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\vartheta}{n},\quad \text{dla}\quad 0<\vartheta<\pi. \qquad (29)$$

Powiadam, że wzór (29) pozostaje prawdziwym dla $\pi<\vartheta<2\pi$.

W samej rzeczy, zakładając, że $\pi<\vartheta<2\pi$, połóżmy $\vartheta_1=2\pi-\vartheta$: będzie więc $0<\vartheta_1<\pi$ i przeto, wobec (29):

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\vartheta_1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\vartheta_1}{n},$$

skąd, z uwagi, że $\frac{\pi}{2}-\frac{\vartheta_1}{2}=\frac{\vartheta}{2}-\frac{\pi}{2}$, zaś $\sin n\vartheta_1=\sin(2n\pi-n\vartheta)=-\sin n\vartheta$, wnosimy w jednej chwili o prawdziwości wzoru (29) dla $\pi<\vartheta<2\pi$.

Wreszcie, dla $\vartheta = \pi$ wzór (29) jest prawdziwy oczywiście (gdyż obie jego strony są wówczas równe zeru). Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 203. *Mamy wzór*

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n}, \quad \text{dla} \quad 0 < \vartheta < 2\pi. \tag{30}$$

Dla $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ze wzoru tego otrzymujemy w jednej chwili wzór Leibniza

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

znaleziony w § 159 na innej drodze.

Wzór (30) przedstawia ciekawy przykład szeregu, którego suma (jako funkcja zmiennej ϑ) posiada wszędzie wewnątrz przedziału $(0, 2\pi)$ pochodną $(= -{}^1/_2)$, ale dla którego szereg pochodnych kolejnych składników jest wszędzie rozbieżny. W samej rzeczy, szeregiem pochodnych jest tu szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\vartheta, \tag{31}$$

który jest rozbieżny przy wszelkiem rzeczywistem ϑ. Jeżeli bowiem $\frac{\vartheta}{2\pi}$ jest liczbą wymierną: $\frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{p}{q}$, to dla $n = kq$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ będziemy mieli $\cos n\vartheta = \cos 2kp\pi = 1$ i szereg (31) jest rozbieżny. Jeżeli zaś $\frac{\vartheta}{2\pi}$ jest liczbą niewymierną, to, rozwijając ją na ułamek łańcuchowy i oznaczając przez $\frac{P_k}{Q_k}$ kolejne redukty, będziemy mieli, jak wiadomo (tw. 126): $\frac{\vartheta}{2\pi} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{\varepsilon_k}{Q_k^2}$, gdzie $|\varepsilon_k| < 1$, co daje $Q_k\vartheta = 2P_k\pi + \frac{2\pi\varepsilon_k}{Q_k}$, skąd $\cos Q_k\vartheta = \cos\frac{2\pi\varepsilon_k}{Q_k}$, i przeto, wobec $\lim\limits_{k=\infty} \frac{\varepsilon_k}{Q_k} = 0$, mamy $\lim\limits_{k=\infty} \cos Q_k\vartheta = 1$, skąd znowu wynika rozbieżność szeregu (31).

Ze wzoru (30) możemy otrzymać rozwinięcie funkcji $\mathrm{E}x$ dla niecałkowitych x. Załóżmy w tym celu, że x oznacza liczbę rzeczywistą $\neq k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, i połóżmy

$$2\pi(x - \mathrm{E}x) = \vartheta: \tag{32}$$

będzie więc $0 < x - \mathrm{E}x < 1$, oraz $0 < \vartheta < 2\pi$, i przeto będziemy mieli wzór (30), skąd, wobec (32), z uwagi, że $\sin n\vartheta = \sin(2\pi nx - 2\pi n\mathrm{E}x) = \sin 2\pi nx$, znajdujemy w jednej chwili:

$$\mathrm{E}x = x - \tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{\pi n} \tag{33}$$

przy wszelkiem niecałkowitem x. (Dla całkowitych x wzór (33) nie zachodzi, gdyż wówczas lewa jego strona wynosi x, zaś prawa $x - \frac{1}{2}$)

Ze wzoru (30) otrzymujemy natychmiast, zastępując w nim ϑ przez 2ϑ:

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\vartheta}{n}, \quad \text{dla} \quad 0 < \vartheta < \pi. \tag{34}$$

Dla $0 < \vartheta < \pi$ zachodzą więc jednocześnie wzory (30) i (34), skąd, dzieląc (34) przez 2 i odejmując od (30):

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\vartheta}{2n-1}, \quad \text{dla} \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

Zastępując w tym wzorze ϑ przez $-\vartheta$, z uwagi, że $\sin(-x) = -\sin x$, otrzymujemy natychmiast:

$$-\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\vartheta}{2n-1}, \quad \text{dla} \quad -\pi < \vartheta < 0.$$

Suma szeregu

$$\frac{\sin\vartheta}{1} + \frac{\sin 3\vartheta}{3} + \frac{\sin 5\vartheta}{5} + \ldots$$

ma więc wartość $-\frac{\pi}{4}$ dla $-\pi < \vartheta < 0$, wartość 0 dla $\vartheta = 0$, oraz wartość $\frac{\pi}{4}$ dla $0 < \vartheta < \pi$. Ogólnie mamy, jak łatwo widzieć, przy wszelkiem rzeczywistem ϑ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\vartheta}{2n-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{dla } \sin\vartheta > 0 \\ 0 & \text{dla } \sin\vartheta = 0 \\ -\frac{\pi}{4} & \text{dla } \sin\vartheta < 0. \end{cases} \tag{35}$$

Jest to ciekawy przykład funkcji nieciągłej, będącej sumą szeregu funkcyj ciągłych.

Niech ξ i η będą dwie dane liczby rzeczywiste, takie, iż $0<\eta<\xi<\pi$: będzie więc $0<\xi+\eta<2\pi$, oraz $0<\xi-\eta<2\pi$, i przeto dla $\vartheta=\xi+\eta$, jakoteż dla $\vartheta=\xi-\eta$ będzie stosowalny wzór (30). Dodając, względnie odejmując odnośne rozwinięcia, i zważywszy, że $\sin n(\xi+\eta)+\sin n(\xi-\eta)=2\sin n\xi\cos n\eta$, $\sin n(\xi+\eta)-\sin n(\xi-\eta)=2\cos n\xi\sin n\eta$, znajdujemy z łatwością:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\xi\,.\cos n\eta}{n}=\frac{\pi}{2}-\frac{\xi}{2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\xi\,.\sin n\eta}{n}=-\frac{\eta}{2},\quad \text{dla}\quad 0<\eta<\xi<\pi.$$

W razie $0<\xi=\eta<\pi$, mamy $0<2\xi<\pi$, oraz $\sin 2n\xi=2\sin n\xi\cos n\eta$, i wzór (30) daje w jednej chwili:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\xi\cos n\eta}{n}=\frac{\pi}{4}-\frac{\xi}{2}\quad \text{dla}\quad 0<\xi=\eta<\pi.$$

Możemy więc powiedzieć, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\xi\cos n\eta}{n}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\xi}{2}, & \text{dla}\quad 0<\eta<\xi<\pi\\[2mm] \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\xi}{2}, & \text{dla}\quad 0<\eta=\xi<\pi,\\[2mm] -\dfrac{\xi}{2}, & \text{dla}\quad 0<\xi<\eta<\pi.\end{cases}$$

Ćwiczenia.

1) Ze wzoru na $\operatorname{arctg} x$ wyprowadzić wzór

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}}=1-\frac{1}{3\,.\,3}+\frac{1}{5\,.\,3^2}-\frac{1}{7\,.\,3^3}+\frac{1}{9\,.\,3^4}-\ldots$$

2) Ze wzoru (35) (dla $\vartheta=\pi/4$) otrzymać wzór

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots$$

oraz (dla $\vartheta=\pi/3$) wzór

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{23}+\ldots$$

3) Wychodząc ze wzoru (27), udowodnić wzory

$$\lg\left(2\left|\cos\frac{\vartheta}{2}\right|\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos n\vartheta}{n},\quad \text{dla}\quad \vartheta\neq(2k-1)\pi,$$

$$-\frac{1}{2}\lg\left(2\left|\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right|\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\vartheta}{2n-1},\quad \text{dla}\quad \vartheta\neq k\pi.$$

4) Wychodząc ze wzoru (35) obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(2n-1)\vartheta}{2n-1}.$$

przy wszelkich rzeczywistych ϑ. (Okazać, że jest ona równą $\pi/4$ dla $\cos\vartheta>0$, 0 dla $\cos\vartheta=0$, oraz $-\pi/4$ dla $\cos\vartheta<0$).

5) Wychodząc ze wzoru (36) z § 158 i stosując twierdzenie 202, wyprowadzić wzór

$$\lg\cos x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{n}\cdot\frac{(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_n\,x^{2n-1},\quad \text{dla}\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$$

§ 183. W poprzednim § spotkaliśmy się z t. zw. szeregami trygonometrycznemi. Nazywać będziemy *skończonem wyrażeniem trygonometrycznem* (względem x) sumę typu

$$a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_1\sin x+b_2\sin 2x+\ldots+b_n\sin nx,$$

gdzie n jest daną liczbą naturalną, zaś $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są dane współczynniki, niezależne od x. Każde takie wyrażenie jest oczywiście funkcją okresową zmiennej x, o okresie 2π.

Opierając się na tożsamościach

$$2\cos px\cos qx=\cos(p+q)x+\cos(p-q)x,$$
$$2\cos px\sin qx=\sin(p+q)x-\sin(p-q)x,$$
$$2\sin px\sin qx=\cos(p-q)x-\cos(p+q)x,$$

dowodzimy z łatwością, że iloczyn dwuch (lub ogólniej, dowolnej skończonej liczby) skończonych wyrażeń trygonometrycznych jest znowu skończonem wyrażeniem trygonometrycznem. (Dla sumy i różnicy analogiczna własność jest oczywistą).

Godnem uwagi jest następujące twierdzenie Weierstrass'a analogiczne do jego twierdzenia o rozwijalności funkcji ciągłej na szereg wielomianów, mianowicie:

Twierdzenie 204. *Każda funkcja ciągła zmiennej rzeczywistej, o okresie 2π, rozwija się na jednostajnie zbieżny (w przedziale $(-\infty, +\infty)$) szereg skończonych wyrażeń trygonometrycznych.*

Dowód naszego twierdzenia przeprowadzimy według Lebesgue'a. Niech $f(x)$ będzie daną funkcją ciągłą o okresie 2π, ε — dowolną daną liczbą dodatnią. Połóżmy, przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$g(x)=f(x)+f(-x),\quad h(x)=[f(x)-f(-x)]\sin x \tag{1}$$

— będą to oczywiście funkcje ciągłe, parzyste (t. j. $g(-x)=g(x)$, $h(-x)=h(x)$), o okresie 2π. Połóżmy, dalej,

$$g(\arccos t)=\varphi(t),\quad h(\arccos t)=\psi(t),\quad \text{dla}\quad -1\leq t\leq 1 \tag{2}$$

— będą to funkcje ciągłe zmiennej t w przedziale $(-1, 1)$, i przeto, w myśl tw. 151, istnieć będą dla liczby dodatniej ε wielomiany $P(t)$ i $Q(t)$, takie, iż, kładąc

$$\varphi(t) = P(t) + \varphi_1(t), \quad \psi(t) = Q(t) + \psi_1(t), \tag{3}$$

będziemy mieli

$$|\varphi_1(t)| < \varepsilon, \quad \text{oraz} \quad |\psi_1(t)| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad -1 \leq t \leq 1. \tag{4}$$

Niech x oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą, taką, iż $0 \leq x \leq \pi$: kładąc $t = \cos x$, będziemy mieli oczywiście $-1 \leq t \leq 1$, zatem wzory (2), skąd, z uwagi, że dla $0 \leq x \leq \pi$ ze wzoru $t = \cos x$ wynika $\operatorname{arc\,cos} t = x$:

$$g(x) = \varphi(\cos x), \quad h(x) = \psi(\cos x), \tag{5}$$

dla $0 \leq x \leq \pi$. Wobec parzystości funkcyj $g(x)$, $h(x)$ i $\cos x$, oraz ich okresowości (o okresie 2π), wnosimy stąd natychmiast, że wzory (5) zachodzą przy wszelkiem rzeczywistem x.

Wobec (1), (5) i (3), mamy (przy wszelkiem rzeczywistem x):

$$[f(x) + f(-x)] \sin^2 x = P(\cos x) \sin^2 x + \varphi_1(\cos x) \sin^2 x,$$
$$[f(x) - f(-x)] \sin^2 x = Q(\cos x) \sin x + \psi_1(\cos x) \sin x,$$

skąd:

$$2f(x) \sin^2 x = P(\cos x) \sin^2 x + Q(\cos x) \sin x + \varrho(x), \tag{6}$$

gdzie

$$\varrho(x) = \varphi_1(\cos x) \sin^2 x + \psi_1(\cos x) \sin x,$$

i przeto, wobec (4):

$$|\varrho(x)| < 2\varepsilon. \tag{7}$$

Funkcja $f_1(x) = f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, podobnie jak funkcja $f(x)$, jest ciągłą i ma okres 2π; podobnież jak dla funkcji, $f(x)$, znaleźlibyśmy więc dla niej:

$$2f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin^2 x = P_1(\cos x) \sin^2 x + Q_1(\cos x) \sin x + \varrho_1(x), \tag{8}$$

gdzie $P_1(t)$ i $Q_1(t)$ są wielomiany, zaś $\varrho_1(x)$ oznacza funkcję, spełniającą przy wszelkiem rzeczywistem x nierówność

$$|\varrho_1(x)| < 2\varepsilon. \tag{9}$$

Zastępując w (8) x przez $x - \dfrac{\pi}{2}$, otrzymujemy:

$$2f(x) \cos^2 x = P_1(\sin x) \cos^2 x - Q_1(\sin x) \cos x + \varrho_1\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \tag{10}$$

Dodając (6) i (10), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2f(x) &= P(\cos x) \sin^2 x + Q(\cos x) \sin x + \\ &+ P_1(\sin x) \cos^2 x - Q_1(\sin x) \cos x + r(x) = \\ &= W(x) + r(x), \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie $r(x) = \varrho(x) + \varrho_1\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, zatem, wobec (7) i (9):

$$|r(x)| < 4\varepsilon. \tag{12}$$

Ponieważ P, Q, P_1 i Q_1 są wielomiany, więc $W(x)$, jak to wynika z łatwością ze wzoru (11), jest skończonem wyrażeniem trygonometrycznem [1]). Wzory (11) i (12) dowodzą, że każda funkcja ciągła o okresie 2π daje się z dowolną dokładnością przybliżyć zapomocą skończonego wyrażenia trygonometrycznego, skąd z łatwością już wynika prawdziwość twierdzenia 204.

§ 184. Twierdzenie 205. *Jeżeli w przedziale* (a, b) *mamy*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots, \tag{1}$$

jeżeli każda z funkcyj $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *posiada w przedziale* (a, b) *pochodną* $f_n'(x)$, *i jeżeli szereg pochodnych*

$$S(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) \ldots \tag{2}$$

jest w przedziale (a, b) *zbieżny jednostajnie, to mamy w tym przedziale*

$$f'(x) = S(x). \tag{3}$$

Dowód. Udowodnimy przedewszystkiem następujący

Lemmat: *Jeżeli szereg funkcyj* $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots$ *jest w zbiorze* X *zbieżny jednostajnie, to istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników* k_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *taki, iż przy wszelkiem* x, *należącem do zbioru* X:

$$|\varphi_{k_n+1}(x) + \varphi_{k_n+2}(x) + \ldots + \varphi_{k_{n+1}}(x)| < \frac{1}{2^n}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

W samej rzeczy, oznaczmy przez k_1 najmniejszy wskaźnik k, taki, iż przy wszelkiem x w zbiorze X:

$$|\varphi_{k+1}(x) + \varphi_{k+2}(x) + \ldots + \varphi_{k+q}(x)| < \frac{1}{2}, \quad \text{dla} \quad q = 1, 2, 3, \ldots;$$

wskaźnik taki istnieje, wobec zbieżności jednostajnej szeregu $\Sigma\varphi_k(x)$ w zbiorze X.

[1]) Dla dowodu wystarczy się oprzeć na uwadze, że iloczyn skończonej liczby skończonych wyrażeń trygonometrycznych jest skończonem wyrażeniem trygonometrycznem.

Niech teraz n oznacza daną liczbę naturalną > 1, i przypuśćmy, żeśmy już określili wskaźnik k_{n-1}. Wobec zbieżności jednostajnej szeregu $\Sigma\varphi_k(x)$ w zbiorze X, dla dostatecznie wielkich wskaźników k będzie (przy danem n) w zbiorze X:

$$|\varphi_{k+1}(x)+\varphi_{k+2}(x)+\dots+\varphi_{k+q}(x)| < \frac{1}{2^n}, \quad \text{dla} \quad q = 1, 2, 3, \dots:$$

oznaczmy przez k_n najmniejszy z takich wskaźników k, większych od k_{n-1}.

Ciąg nieskończony wskaźników k_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ określiliśmy w ten sposób przez indukcję, przyczem ciąg ten jest oczywiście rosnący. Łatwo, dalej, widzieć, że ciąg k_n $(n = 1, 2, \dots)$ posiada wszystkie własności, wymagane przez nasz lemmat.

Przejdziemy teraz do dowodu twierdzenia 205. Załóżmy, że warunki tego twierdzenia są spełnione. W myśl naszego lemmatu (dla $\varphi_n(x) = f_n'(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$) istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_n $(n = 1, 2, \dots)$, taki, iż w przedziale (a, b):

$$\left|f'_{k_n+1}(x)+f'_{k_n+2}(x)+\dots+f'_{k_{n+1}}(x)\right| < \frac{1}{2^n}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{4}$$

Połóżmy $k_0 = 0$, oraz

$$\varphi_n(x) = f_{k_n+1}(x)+f_{k_n+2}(x)+\dots+f_{k_{n+1}}(x), \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots; \tag{5}$$

będzie więc też (z uwagi, że pochodna szeregu skończonego jest szeregiem pochodnych — o ile istnieją):

$$\varphi_n'(x) = f'_{k_n+1}(x)+f'_{k_n+2}(x)+\dots+f'_{k_{n+1}}(x), \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots, \tag{6}$$

zatem, w myśl (4):

$$|\varphi_n'(x)| < \frac{1}{2^n}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3 \dots \tag{7}$$

oraz, jak łatwo widzieć:

$$f(x) = \varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\dots, \tag{8}$$

$$S(x) = \varphi_0'(x)+\varphi_1'(x)+\varphi_2'(x)+\dots \tag{9}$$

Niech x_0 oznacza daną liczbę przedziału (a, b), ε — dowolną daną liczbę dodatnią. Obierzmy liczbę naturalną m, tak wielką, iżby było

$$\frac{1}{2^{m-2}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Z definicji pochodnej wynika natychmiast, że dla liczb x_0, ε i każdego danego wskaźnika $k \geq 0$ istnieje takie $\delta_k > 0$, iż

$$\left|\frac{\varphi_k(x_0+h)-\varphi_k(x_0)}{h} - \varphi_k'(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2m}, \quad \text{dla} \quad 0 < |h| < \delta_k. \tag{11}$$

Oznaczmy przez δ liczbę dodatnią, mniejszą od każdej z liczb $\delta_0, \delta_1, \dots \delta_{m-1}$: dla $0 < |h| < \delta$ będzie więc zachodziła nierówność (11) przy $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, skąd w jednej chwili:

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi_k(x_0+h)-\varphi_k(x_0)}{h} - \sum_{k=0}^{m-1}\varphi_k'(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Z drugiej strony, w myśl tw. Lagrange'a (tw. 199):

$$\frac{\varphi_k(x_0+h)-\varphi_k(x_0)}{h} = \varphi_k'(\xi_k),$$

gdzie ξ_k jest liczbą, leżącą wewnątrz przedziału (x_0, x_0+h). Jest więc

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\varphi_k(x_0+h)-\varphi_k(x_0)}{h} - \sum_{k=m}^{\infty}\varphi_k'(x_0) = \sum_{k=m}^{\infty}\varphi_k'(\xi_k) - \sum_{k=m}^{\infty}\varphi_k'(x_0)$$

i przeto, wobec (7) i (10):

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\varphi_k(x_0+h)-\varphi_k(x_0)}{h} - \sum_{k=m}^{\infty}\varphi_k'(x_0)\right| < 2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-2}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Nierówności (12) i (13) dają w jednej chwili, wobec (8) i (9):

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - S(x_0)\right| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad 0 < |h| < \delta,$$

co dowodzi, że

$$f'(x_0) = S(x_0).$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie 205. Twierdzenie to możemy wyrazić krótko: *Jeżeli szereg pochodnych szeregu zbieżnego funkcyj jest zbieżny jednostajnie w pewnym przedziale, to przedstawia w tym przedziale pochodną szeregu.* Uogólnienie tego twierdzenia na szereg n-tych pochodnych jest natychmiastowe.

Jeżeli zaś szereg pochodnych jest zbieżny w pewnym przedziale, ale nie jednostajnie, to może w tym przedziale przedstawiać albo nie przedstawiać pochodną szeregu, jak tego dowodzą następujące przykłady[1]).

[1]) Zob. też przykład z § 167.

1) Połóżmy, przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+(n-1)x^2} - \frac{x}{1+nx^2}, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Mamy tu, jak łatwo widzieć:

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = x - \frac{x}{1+nx^2},$$

skąd w jednej chwili

$$\lim_{n=\infty} s_n(x) = x$$

przy wszelkiem rzeczywistem x. Mamy więc przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$x = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots \tag{2}$$

Wobec (1), mamy przy wszelkiem rzeczywistem x, oraz naturalnem n:

$$f_n'(x) = \frac{1}{1+(n-1)x^2} - \frac{2(n-1)x^2}{[1+(n-1)x^2]^2} - \frac{1}{1+nx^2} + \frac{2nx^2}{(1+nx^2)^2},$$

oraz

$$s_n'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) = 1 - \frac{1}{1+nx^2} + \frac{2nx^2}{(1+nx^2)^2},$$

i przeto

$$\lim_{n=\infty} s_n'(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \neq 0 \\ 0 \text{ dla } x = 0. \end{cases}$$

Jest więc dla $x = 0$:

$$f_1'(0) + f_2'(0) + f_3'(0) + \ldots = 0,$$

gdy tymczasem pochodną sumy (2) jest oczywiście stale jedność. Zatem: szereg pochodnych kolejnych składników szeregu (2) dla $x = 0$ nie przedstawia pochodnej szeregu (2). W danym przykładzie zarówno dany szereg, jak i szereg pochodnych jest zbieżny w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

2) Połóżmy przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$f_n(x) = xe^{-(n-1)x^2} - xe^{-nx^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Z łatwością znajdziemy tutaj, przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$x = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots, \tag{3}$$

zaś

$$s_n'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) = 1 - e^{-nx^2} + 2nx^2e^{-nx^2},$$

co daje

$$\lim_{n=\infty} s_n'(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \neq 0 \\ 0 \text{ dla } x = 0 \end{cases}$$

i przeto

$$f_1'(0) + f_2'(0) + f_3'(0) + \ldots = 0,$$

gdy tymczasem pochodną sumy (3) jest jedność.

3) Połóżmy, przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{n} - \frac{\operatorname{arctg}(n+1)x}{n+1}; \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Z uwagi, że przy rzeczywistem y mamy zawsze $|\operatorname{arctg} y| < \pi/2$, wnosimy z łatwością, iż przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$\operatorname{arctg} x = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots \tag{5}$$

Wobec (4) znajdujemy przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$f_n'(x) = \frac{1}{1+n^2x^2} - \frac{1}{1+(n+1)^2x^2},$$

skąd, w jednej chwili

$$f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \ldots = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Sumą szeregu pochodnych kolejnych składników szeregu (5) jest więc dla $x = 0$ liczba 0, gdy tymczasem pochodną sumy szeregu (5) jest, przy wszelkiem rzeczywistem x, $1/(1+x)^2$, zatem, dla $x = 0$, liczba 1.

4) Połóżmy, przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$f_n(x) = \frac{\lg(1+n^2x^2)}{n} - \frac{\lg(1+(n+1)^2x^2)}{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Opierając się na uwadze, że (przy rzeczywistem x) $\lg(1+n^2x^2) \leq \lg(n^2+n^2x^2) = 2\lg n + \lg(1+x^2)$, oraz że $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\lg n}{n} = 0$, czytelnik udowodni z łatwością, że mamy przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$\lg(1+x^2) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots, \tag{7}$$

i przeto pochodną sumy tego szeregu jest $D\lg(1+x^2) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Wobec (6) mamy przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$f_n'(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} - \frac{2(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2} \tag{8}$$

skąd, jak łatwo widzieć, przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$\frac{2x}{1+x^2} = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \ldots \tag{9}$$

Suma szeregu (9) przedstawia więc przy wszelkiem rzeczywistem x pochodną sumy szeregu (7): tymczasem szereg (9) nie jest zbieżnym jednostajnie (w żadnym przedziale, zawierającym wewnątrz punkt 0), gdyż, wobec (8) mamy

$$s_{n-1}'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_{n-1}'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2nx}{1+n^2x^2},$$

i przeto, dla $x = \dfrac{1}{n}$:

$$\frac{2x}{1+x^2} - s_n'(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 1.$$

Zbieżność jednostajna szeregu pochodnych nie jest więc warunkiem koniecznym na to, żeby szereg pochodnych przedstawiał pochodną szeregu.

Zauważymy jeszcze, że szereg pochodnych może być zbieżnym w punkcie, w którym suma danego szeregu nie posiada pochodnej, jak tego dowodzi następujący przykład:

5) Połóżmy, przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$f_n(x) = \frac{\lg(1+n\,|\,x\,|)}{n} - \frac{\lg(1+(n+1)\,|\,x\,|)}{n+1}. \tag{10}$$

Mamy tu, jak łatwo widzieć, przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$\lg(1+|\,x\,|) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$$

Funkcja $f(x) = \lg(1+|\,x\,|)$ nie posiada pochodnej dla $x=0$, gdyż, jak łatwo widzieć, dla $x_n = \frac{1}{n}$ mamy $\lim\limits_{n=\infty} \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n - 0} = 1$, zaś dla $x_n = -\frac{1}{n}$ mamy $\lim\limits_{n=\infty} \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n - 0} = -1$. Tymczasem szereg pochodnych jest tu zbieżny dla $x=0$, gdyż, wobec (10) znajdujemy z łatwością $f'_n(0) = 0$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, jak to czytelnik sam zechce bliżej zbadać (rozróżniając przypadki gdy x zmierza do zera ciągiem liczb dodatnich, oraz ciągiem liczb ujemnych).

Z drugiej strony, szereg pochodnych może być rozbieżnym w punkcie, w którym suma danego szeregu posiada pochodną skończoną, czego dowodzi przykład następujący:

6) Połóżmy, przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n} - \frac{\sin(n+1)^2 x}{n+1}. \tag{11}$$

Jak łatwo widzieć, mamy tu przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$\sin x = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$$

i przeto pochodną sumy naszego szeregu jest tu stale $\cos x$.

Z drugiej strony, wobec (11), mamy

$$f'_n(x) = n\cos n^2 x - (n+1)\cos(n+1)^2 x, \tag{12}$$

skąd $f'_n(0) = -1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, i przeto szereg

$$f'_1(0) + f'_2(0) + f'_3(0) + \ldots$$

jest rozbieżny do $-\infty$.

Podobnież, dla $x=\pi$, znajdziemy z łatwością, wobec (12): $f'_n(\pi) = (-1)^n(2n+1)$, i przeto suma szeregu

$$f'_1(\pi) + f'_2(\pi) + f'_3(\pi) + \ldots$$

nie posiada żadnej oznaczonej (skończonej ani nieskończonej) wartości.

§ 184ᵃ. Podamy obecnie twierdzenie, dające warunki konieczne i wystarczające na to, aby pochodną szeregu był w danym punkcie szereg pochodnych jego składników.

Twierdzenie (Diniego) **206**: *Na to, żeby pochodna sumy $f(x)$ szeregu funkcyj $\Sigma f_n(x)$, zbieżnego w przedziale (a, b), którego składniki $f_n(x)$ posiadają*

dla punktu x_0, leżącego wewnątrz przedziału (a, b), pochodne skończone $f'_n(x_0)$, istniała w punkcie x_0, była skończoną, oraz była sumą szeregu $\Sigma f'_n(x_0)$, potrzeba i wystarcza, iżby 1) szereg $\Sigma f'_n(x_0)$ był zbieżny, oraz 2) aby dla każdej liczby $\varepsilon > 0$, oraz każdej liczby naturalnej q istniała liczba dodatnia δ, taka iżby dla każdej liczby h, bezwzględnie mniejszej od δ, istniał wskaźnik $m > q$, dla którego

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h} - f'_n(x_0)\right\}\right| < \varepsilon,\quad \left|\frac{R_m(x_0)}{h}\right| < \varepsilon,\quad \left|\frac{R_m(x_0+h)}{h}\right| < \varepsilon, \tag{1}$$

gdzie $R_m(x) = f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \ldots$

Dowód. Załóżmy, że warunki naszego twierdzenia są spełnione. Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Połóżmy:

$$Q_m = f'_{m+1}(x_0) + f'_{m+2}(x_0) + \ldots$$

z warunku 1) wynika, że mamy $\lim\limits_{n=\infty} Q_m = 0$: możemy więc obrać wskaźnik q, tak, iżby było

$$|\,Q_m\,| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad m > q. \tag{2}$$

Do tak obranego q i do liczby ε dobierzmy liczbę dodatnią δ w myśl warunku 2). Niech h oznacza liczbę rzeczywistą, taką iż $|\,h\,| < \delta$. W myśl warunku 2 istnieje więc taki wskaźnik $m > q$, przy którym zachodzą nierówności (1). Wobec (1), (2), oraz oczywistej tożsamości

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h} - f'_n(x_0)\right\} + \frac{R_m(x_0+h)}{h} - \frac{R_m(x_0)}{h} - Q_m, \tag{3}$$

wnosimy w jednej chwili, że

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0)\right| < 4\varepsilon, \quad \text{dla} \quad |\,h\,| < \delta,$$

co dowodzi, że $f'(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0)$. Warunki naszego twierdzenia są więc wystarczające.

Udowodnimy obecnie konieczność naszych warunków. Załóżmy więc, że $f(x) = \Sigma f_n(x)$ w przedziale (a, b), oraz że dla pewnego punktu x_0, leżącego wewnątrz (a, b), istnieją pochodne skończone $f'(x_0)$ oraz $f'_n(x_0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tudzież że $f'(x_0) = \Sigma f'_n(x_0)$. Warunek 1) naszego twierdzenia musi wówczas być spełnionym oczywiście. Wynika stąd, że dla dowolnej danej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje takie μ, iż

$$\left|\,Q_m\,\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{dla} \quad m > q. \tag{4}$$

Wobec $f'(x_0) = \Sigma f'_n(x)$ i uwagi, że $a < x_0 < b$, istnieje takie $\delta > 0$, iż dla $|\,h\,| < \delta$ mamy $a \leq x_0 + h \leq b$, oraz

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5}$$

Niech h oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą, taką iż $|h| < \delta$, zaś q niech oznacza dowolną daną liczbę naturalną. Wobec zbieżności szeregu $\Sigma f_n(x)$ dla $a \leq x \leq b$, oraz wobec $a \leq x_0 \leq b$, $a \leq x_0 + h \leq b$, wnosimy, że istnieje wskaźnik m większy jednocześnie od μ i od q, taki, iż

$$|R_m(x_0)| < \frac{|h|\varepsilon}{4}, \quad \text{oraz} \quad |R_m(x_0+h)| < \frac{|h|\varepsilon}{4}, \tag{6}$$

przyczem, wobec $m > \mu$, mamy też nierówność (4). Nierówności (4), (5) i (6) dają w jednej chwili, wobec (3)

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} - f'(x_0) \right\} \right| < \varepsilon. \tag{7}$$

Wobec (6) i (7) mamy więc nierówności (1), skąd wynika konieczność warunku 2). Twierdzenie 206 zostało więc udowodnionem w zupełności.

§ 185. Opierając się na twierdzeniu 205, udowodnimy obecnie twierdzenie niejako względem niego odwrotne, mianowicie

Twierdzenie 207. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w przedziale skończonym (a, b) sumą jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyj (ciągłych lub nie)*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots, \tag{1}$$

z których każda, $f_n(x)$, posiada w przedziale (a, b) funkcję pierwotną $F_n(x)$, to $f(x)$ posiada w przedziale (a, b) funkcję pierwotną

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [F_n(x) - F_n(x_0)], \tag{2}$$

gdzie x_0 oznacza dowolną daną liczbę przedziału (a, b), przyczem szereg (2) jest również zbieżny jednostajnie w przedziale (a,b).

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ rozwija się w przedziale skończonym (a, b) na szereg jednostajnie zbieżny (1), przyczem każda z funkcyj $f_n(x)$ posiada w tym przedziale funkcję pierwotną $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$. Jest więc

$$F'_n(x) = f_n(x) \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b. \tag{3}$$

Niech x_0 oznacza dowolną daną liczbę przedziału (a, b).

Powiadam, że szereg (2) jest w przedziale (a, b) zbieżny jednostajnie.

W samej rzeczy, niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec jednostajnej zbieżności szeregu (1) w przedziale (a, b), istnieje dla ε takie μ, iż

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b, \; n > \mu, \; p = 1, 2, 3, \dots \tag{4}$$

Oznaczmy, przy naturalnych n i p:

$$\Phi_{n,p}(x) = \sum_{k=1}^{p} [F_{n+k}(x) - F_{n+k}(x_0)]. \tag{5}$$

W myśl (3), mamy

$$\Phi'_{n,p}(x) = \sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x), \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b, \; n = 1, 2, \dots, \; p = 1, 2, \dots \tag{6}$$

W myśl tw. Lagrange'a, mamy w przedziale (a, b):

$$\Phi_{n,p}(x) - \Phi_{n,p}(x_0) = (x - x_0)\, \Phi'_{n,p}(\xi). \tag{7}$$

gdzie ξ jest liczbą, leżącą wewnątrz przedziału (x_0, x) (zależną od n, p, x_0 oraz x), a więc, tembardziej, liczbą, leżącą wewnątrz przedziału (a, b). W myśl (6) i (4), mamy więc

$$|\Phi'_{n,p}(\xi)| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \; p = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, wobec (7), z uwagi, że $|x - x_0| \leq b - a$, dla $a \leq x \leq b$, otrzymujemy w jednej chwili:

$$|\Phi_{n,p}(x) - \Phi_{n,p}(x_0)| < (b-a)\varepsilon, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b, \; n > \mu, \; p = 1, 2, 3, \dots \tag{8}$$

Wobec (5) nierówność (8) daje natychmiast:

$$\left| \sum_{k=1}^{p} [F_{n+k}(x) - F_{n+k}(x_0)] \right| < (b-a)\varepsilon, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b, \; n > \mu, \; p = 1, 2, 3, \dots,$$

co dowodzi, że szereg (1) jest w przedziale (a, b) zbieżny jednostajnie.

Szeregiem pochodnych dla szeregu (2) jest oczywiście, wobec (3), szereg (1), który, jak zakładamy, jest w przedziale (a, b) zbieżny jednostajnie: w myśl twierdzenia 205 wnosimy więc, że przedstawia on w tym przedziale pochodną szeregu (2), czyli, że $F'(x) = f(x)$ dla $a \leq x \leq b$. Funkcja $F(x)$, określona wzorem (2), jest więc w przedziale (a, b) funkcją pierwotną dla $f(x)$, *c. b. d. o.*

Dowiedzione twierdzenie daje się też natychmiast uogólnić na przedziały nieskończone. Istotnie, jeżeli szereg (1) jest zbieżny jednostajnie w każdym skończonym przedziale, zaś $F'_n(x) = f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ przy wszelkiem rzeczywistem x, to warunki te zachodzą tembardziej, przy dowolnem danem x_0, oraz naturalnem s, w przedziale $(x_0 - s, x_0 + s)$, i, wyznaczając funkcję $F(x)$ ze wzoru (2), otrzymujemy, w myśl dowiedzionego twierdzenia, $F'(x) = f(x)$, dla $x_0 - s \leq x \leq x_0 + s$. Wobec dowolności liczby naturalnej s, wnosimy stąd, że $F(x)$ będzie funkcją pierwotną dla $f(x)$ w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Podobnież łatwo widzieć, że twierdzenie 207 pozostanie prawdziwem, jeżeli w niem słowa „w przedziale (a, b)“ zastąpić wszędzie przez słowa „wewnątrz przedziału (a, b)“.

Uwaga. Mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka, że wzór (2) może, przy odpowiedniej wartości x_0, przedstawiać każdą funkcję pierwotną funkcji $f(x)$. Tak jednak może nie być, jak tego dowodzi przykład, który otrzymamy, kładąc stale $f_n(x)=0$ (dla $n=1,2,\ldots$): sumą szeregu (2) będzie tu przy wszelkim rzeczywistem x_0 (i dowolnym obiorze poszczególnych funkcyj pierwotnych $F_n(x)$ dla składników szeregu (1)) funkcja $F(x)=0$. Inny podobny przykład otrzymalibyśmy, kładąc $f_{2k-1}(x)=2^{-k}$, $f_{2k}(x)=-2^{-k}$ (dla $k=1,2,3,\ldots$). Chcąc więc otrzymać *każdą* funkcję pierwotną dla $f(x)$, należy, wogóle, do sumy (2) dodać stałą dowolną.

Jako natychmiastowy wniosek z tw. 207, otrzymujemy, przy pomocy tw. Weierstrassa (tw. 151):

Twierdzenie 208: *Każda funkcja $f(x)$, ciągła w przedziale (a, b), posiada w tym przedziale funkcję pierwotną.*

Dowód. Niech

$$w(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$$

oznacza jakikolwiek dany wielomian całkowity. Kładąc

$$W(x)=\frac{a_0x^{m+1}}{m+1}+\frac{a_1x^m}{m}+\frac{a_2x^{m-1}}{m-1}+\ldots+a_mx,$$

będziemy mieli oczywiście (w całym zbiorze liczb rzeczywistych):

$$W'(x)=w(x).$$

Każdy wielomian całkowity posiada więc (w całym zbiorze liczb rzeczywistych) funkcję pierwotną, będącą również wielomianem całkowitym (stopnia o jedność wyższego).

Niech teraz $f(x)$ oznacza daną funkcję ciągłą w przedziale skończonym (a, b). W myśl tw. Weierstrassa (tw. 151, § 119), funkcja $f(x)$ daje się w przedziale (a, b) rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych, a więc funkcyj, z których każda posiada funkcję pierwotną w przedziale (a, b). W myśl tw. 207 wnosimy więc, że $f(x)$ posiada w przedziale (a, b) funkcję pierwotną, *c. b. d. o.*

Twierdzenie to może być też uogólnionem na przedziały nieskończone, przyczem trzeba się oprzeć na twierdzeniu, że każda funkcja, ciągła w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, może być w tym zbiorze rozwiniętą na szereg wielomianów całkowitych, który jest zbieżny jednostajnie w każdym skończonym przedziale (§ 122).

§ 186. Zajmiemy się obecnie pewnem zastosowaniem twierdzenia 205. Połóżmy

$$f(\vartheta)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\vartheta}{n^2} \tag{1}$$

— szereg ten jest oczywiście zbieżny jednostajnie przy wszelkiem rzeczywistem ϑ (wobec zbieżności szeregu $\Sigma 1/n^2$). Szeregiem pochodnych kolejnych składników szeregu (1) jest tu szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\vartheta}{n}. \tag{2}$$

Udowodnimy, że, przy wszelkiem danem dodatnie. $\delta<\pi$, szereg (2) jest w przedziale $(\delta, 2\pi-\delta)$ zbieżny jednostajnie.

Połóżmy, dla dowodu:

$$s_n(\vartheta)=\frac{\sin\vartheta}{n}+\frac{\sin 2\vartheta}{2}+\ldots+\frac{\sin n\vartheta}{n} \tag{3}$$

$$\sigma_n(\vartheta)=\sin\vartheta+\sin 2\vartheta+\ldots+\sin n\vartheta. \tag{4}$$

Drogą łatwej indukcji sprawdzamy dla $\vartheta\neq 2k\pi$ tożsamość

$$\sin\vartheta+\sin 2\vartheta+\ldots+\sin n\vartheta=\frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}},$$

skąd, wobec (4), dla $\vartheta\neq 2k\pi$, z uwagi, że $|\sin x|\leq 1$ przy rzeczywistem x:

$$|\sigma_n(\vartheta)|=\frac{1}{\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right|} \quad (n=1,2,3,\ldots). \tag{5}$$

Założmy, dalej, że liczba ϑ spełnia warunki

$$\delta\leq\vartheta\leq 2\pi-\delta, \tag{6}$$

gdzie δ oznacza daną liczbę dodatnią $<\pi$.

Wobec (6) będzie

$$\frac{\delta}{2} \leq \frac{\vartheta}{2} \leq \pi - \frac{\delta}{2} \tag{7}$$

i przeto (wobec $\delta > 0$) $\vartheta/2$ będzie liczbą przedziału $(0, \pi)$. Jeżeli $\vartheta/2$ leży w przedziale $(0, \pi/2)$, to, z uwagi, że w tym przedziale funkcja *sinus* wzrasta, oraz, że, wobec (7), $\vartheta/2 \geq \delta/2$, mamy

$$\sin\frac{\vartheta}{2} \geq \sin\frac{\delta}{2}. \tag{8}$$

Jeżeli zaś $\vartheta/2$ leży w przedziale $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, to, z uwagi, że w tym przedziale funkcja *sinus* maleje, oraz, że, wobec (7), $\vartheta/2 \leq \pi - \delta/2$, mamy

$$\sin\frac{\vartheta}{2} \geq \sin\left(\pi - \frac{\delta}{2}\right) = \sin\frac{\delta}{2},$$

co znowu daje nierówność (8).

Warunek (7) pociąga więc za sobą zawsze nierówność (8). Wobec (5) wnosimy więc, że

$$|\sigma_n(\vartheta)| \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}, \quad \text{dla} \quad \delta \leq \vartheta \leq 2\pi - \delta, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Wobec (3) i (4) znajdujemy w jednej chwili, przy naturalnych n i k:

$$s_{n+k}(\vartheta) - s_n(\vartheta) = \frac{\sigma_{n+1}(\vartheta) - \sigma_n(\vartheta)}{n+1} + \frac{\sigma_{n+2}(\vartheta) - \sigma_{n+1}(\vartheta)}{n+2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\sigma_{n+k}(\vartheta) - \sigma_{n+k-1}(\vartheta)}{n+k} = -\frac{\sigma_n(\vartheta)}{n+1} + \frac{\sigma_{n+1}(\vartheta)}{(n+1)(n+2)} +$$

$$+ \frac{\sigma_{n+2}(\vartheta)}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{\sigma_{n+k-1}(\vartheta)}{(n+k-1)(n+k)} + \frac{\sigma_{n+k}(\vartheta)}{n+k},$$

skąd, wobec (9), otrzymujemy w jednej chwili (dla $\delta \leq \vartheta \leq 2\pi - \delta$):

$$|s_{n+k}(\vartheta) - s_n(\vartheta)| \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} + \frac{1}{n+k}\right] < \frac{2}{(n+1)\sin\frac{\delta}{2}},$$

co dowodzi, że szereg (2) jest zbieżny jednostajnie w całym przedziale $(\delta, 2\pi - \delta)$.

W myśl tw. 205 mamy więc w całym przedziale $(\delta, 2\pi - \delta)$:

$$f'(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n}. \tag{10}$$

Wzór (10) jest więc prawdziwy w przedziale $(\delta, 2\pi - \delta)$ przy dowolnie małem dodatniem δ, skąd wnosimy natychmiast, że jest on prawdziwy wszędzie wewnątrz przedziału $(0, 2\pi)$.

W myśl twierdzenia 203 mamy więc

$$f'(\vartheta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}, \quad \text{dla} \quad 0 < \vartheta < 2\pi,$$

skąd wynika, że

$$f(\vartheta) = C + \frac{\pi}{2}\vartheta - \frac{\vartheta^2}{2}, \quad \text{dla} \quad 0 < \vartheta < 2\pi. \tag{11}$$

gdzie C oznacza liczbę, niezależną od ϑ.

Lecz funkcja $f(\vartheta)$, określona wzorem (1), jako suma szeregu funkcyj ciągłych, zbieżnego jednostajnie w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych ϑ, jest funkcją ciągłą przy wszelkiem rzeczywistem ϑ. Obie strony wzoru (11) są więc ciągłe przy wszelkiem rzeczywistem ϑ, a że wzór (11) jest prawdziwy wszędzie wewnątrz przedziału $(0, 2\pi)$, więc wnosimy stąd, że musi on być prawdziwym i dla granic tego przedziału. Mamy więc wzór

$$f(\vartheta) = C + \frac{\pi}{2}\vartheta - \frac{\vartheta^2}{4}, \quad \text{dla} \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \tag{12}$$

Stąd:

$$f(0) = C, \quad \text{oraz} \quad f(\pi) = C + \frac{\pi^2}{4}. \tag{13}$$

Lecz, wobec (1), mamy

$$f(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{oraz} \quad f(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

a że, jak łatwo widzieć:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

więc mamy stąd $f(\pi) = -\frac{1}{2}f(0)$, co, wobec (13), daje

$$C + \frac{\pi^2}{4} = -\frac{1}{2}C,$$

skąd $C = -\frac{\pi^2}{6}$. Mamy więc, wobec (1) i (12):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^2} = \frac{\vartheta^2}{4} - \frac{\pi}{2}\vartheta + \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{dla} \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \tag{14}$$

Stąd, w szczególności, dla $\vartheta = 0$ znajdujemy wzór Eulera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

otrzymany w § 154 na innej drodze.

Zastąpmy we wzorze (14) ϑ przez $2\pi x$ i podzielmy obie strony przez $-2\pi^2$: otrzymamy wzór:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{2\pi^2 n^2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{12}, \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{15}$$

Połóżmy:

$$\varphi_0(x) = -x + \tfrac{1}{2}, \tag{16}$$

$$\varphi_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2\pi n x - p\frac{\pi}{2}\right)}{2^p \pi^{p+1} n^{p+1}}, \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1;\ p = 1, 2, 3, \ldots \tag{17}$$

Z uwagi, że dla $p > 1$ szeregi (17) są zbieżne jednostajnie w przedziale (0,1), oraz w myśl tw. 205, znajdujemy z łatwością:

$$\varphi_p'(x) = \varphi_{p-1}(x), \quad \text{dla} \quad p = 2, 3, 4, \ldots,$$

co, wobec (15) i (16), pozostaje prawdziwem i dla $p = 1$. Mamy więc (w całym przedziale (0,1)):

$$\varphi_p'(x) = \varphi_{p-1}(x), \quad \text{dla} \quad p = 1, 2, 3, \ldots, \tag{I}$$

przyczem

$$\varphi_0(x) = -x + \tfrac{1}{2}. \tag{II}$$

Wobec (I) i (II) wnosimy w jednej chwili, że funkcje $\varphi_p(x)$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ są wszystkie (w przedziale (0,1)) wielomianami całkowitemi.

Wobec (17) znajdujemy natychmiast

$$\varphi_p(1) = \varphi_p(0), \quad \text{dla} \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{III}$$

Wielomiany $\varphi_p(x)$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ spełniają więc (w przedziale (0, 1) warunki (I), (II) i (III), które, jak dowiedliśmy w § 160, są charakterystyczne dla wielomianów Bernoulli'ego. Funkcje $\varphi_p(x)$ są więc w przedziale (0, 1) wielomianami Bernoulli'ego.

Znaleźliśmy więc dla wielomianów Bernoulli'ego $\varphi_p(x)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ (dla $0 \leq x \leq 1$) rozwinięcia na szeregi trygonometryczne (17).

§ 187. Połóżmy przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$r_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2\pi n x - p\frac{\pi}{2}\right)}{2^p \pi^{p+1} n^{p+1}}, \quad \text{dla} \quad p = 1, 2, 3, \ldots; \tag{18}$$

będziemy mieli, wobec (17):

$$r_p(x) = \varphi_p(x), \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1,\ p = 1, 2, 3, \ldots \tag{19}$$

W myśl (18) mamy, przy wszelkiem rzeczywistem x:

$$r_p(x+1) = r_p(x), \quad \text{dla} \quad p = 1, 2, 3, \ldots, \tag{20}$$

oraz

$$r_p'(x) = r_{p-1}(x), \quad \text{dla} \quad p = 2, 3, 4, \ldots \tag{21}$$

Niech k oznacza daną liczbę całkowitą. Wobec (15), (18) i (20) znajdujemy w jednej chwili:

$$r_1(x) = -\frac{(x-k)^2}{2} + \frac{x-k}{2} + \frac{1}{12}, \quad \text{dla} \quad k \leq x \leq k+1,$$

skąd wynika natychmiast, że

$$r_1'(x) = -x + k + \tfrac{1}{2}, \quad \text{dla} \quad k < x < k+1. \tag{22}$$

Niech teraz a i b będą dwie dane liczby całkowite, i niech $f(x)$ oznacza funkcję, posiadającą w przedziale (a, b) skończoną pochodną m-go rzędu $(m > 1)$.

Niech k oznaczą liczbę całkowitą, taką, iż

$$a \leq k < b; \tag{23}$$

będzie więc $k + 1 \leq b$. Połóżmy, dla $k \leq x \leq k+1$:

$$F_k(x) = f(x) + (k - x + \tfrac{1}{2})f'(x) - r_1(x)f''(x) + r_2(x)f'''(x) - \ldots + (-1)^m r_{m-2}(x) f^{m-1}(x). \tag{24}$$

Funkcja $F_k(x)$ będzie oczywiście ciągłą w przedziale $(k, k+1)$ i wewnątrz tego przedziału będzie wszędzie (wobec (22) i (21)) posiadała pochodną, dla której, po łatwej redukcji, otrzymujemy wzór:

$$F_k'(x) = (-1)^m r_{m-2}(x) f^{m}(x).$$

W myśl tw. Lagrange'a (tw. 199), mamy więc

$$F_k(k+1) - F_k(k) = (-1)^m r_{m-2}(\xi_k) f^{(m)}(\xi_k), \text{ gdzie } k < \xi_k < k+1. \qquad (25)$$

Wzór (25) zachodzi dla $k = a, a+1, \ldots, b-1$: stąd:

$$\sum_{k=a}^{b-1} [F_k(k+1) - F_k(k)] = (-1)^m \sum_{k=a}^{b-1} r_{m-2}(\xi_k) f^{(m)}(\xi_k). \qquad (26)$$

Z drugiej strony, wobec (24), i z uwagi, że, w myśl (18), przy całkowitych a i b jest $r_p(a) = r_p(b) = r_p(0)$, dla $p = 1, 2, 3, \ldots$, znajdujemy, po łatwej redukcji:

$$\sum_{k=a}^{b-1} [F_k(k+1) - F_k(k)] = f(b) - f(a) - \sum_{k=a+1}^{b} f'(k) + \tfrac{1}{2}[f'(b) - f'(a)]$$
$$- r_1(0)[f''(b) - f''(a)] + r_2(0)[f'''(b) - f'''(a)] - \ldots +$$
$$+ (-1)^m r_{m-2}(0)[f^{m-1}(b) - f^{m-1}(a)]. \qquad (27)$$

Wzory (26) i (27) dają w jednej chwili:

$$\sum_{k=a+1}^{b} f'(k) = f(b) - f(a) + \tfrac{1}{2}[f'(b) - f'(a)] +$$
$$+ \sum_{k=2}^{m-1} (-1)^{k-1} r_{k-1}(0)[f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)] + R_m, \qquad (28)$$

gdzie

$$R_m = (-1)^m \sum_{k=a}^{b-1} r_{m-2}(\xi_k) f^{(m)}(\xi_k), \quad \text{gdzie} \quad k < \xi_k < k+1, \qquad (29)$$
$$\text{dla } k = a, a+1, \ldots, b-1.$$

Lecz, wobec (18), znajdujemy:

$$r_{2p}(0) = 0, \quad \text{dla} \quad p = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (30)$$

zaś

$$r_{2p-1}(0) = (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p} n^{2p}}, \quad \text{dla} \quad p = 1, 2, 3, \ldots,$$

i przeto, w myśl wzoru (29) z § 157:

$$r_{2p-1}(0) = \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!}, \quad \text{dla} \quad p = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (31)$$

gdzie B_p $(p = 1, 2, \ldots)$ są liczby Bernoulli'ego.

Wzór (28) daje więc, wobec (30) i (31):

$$\sum_{k=a+1}^{b} f'(k) = f(b) - f(a) + \tfrac{1}{2}[f'(b) - f'(a)] +$$
$$+ \sum_{p=1}^{E\frac{m-1}{2}} (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!}[f^{(2p)}(b) - f^{(2p)}(a)] + R_m. \qquad (32)$$

Jest to wzór Eulera-Maclaurina.

Przyjmijmy, w szczególności, $m = 2q + 1$.

Wobec (18) mamy przy wszelkiem rzeczywistem x, w myśl wzoru (29) z § 157:

$$|r_{2q-1}(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2q-1}\pi^{2q} n^{2q}} = \frac{B_q}{(2q)!},$$

zatem, wobec (29):

$$|R_{2q+1}| \leq \frac{B_q}{(2q)!} \sum_{k=a}^{b-1} |f^{2q-1}(\xi_k)|, \quad \text{gdzie} \quad k < \xi_k < k+1, \qquad (33)$$
$$k = a, a+1, \ldots, b-1.$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 209. *Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w przedziale (a, b), gdzie a i $b > a$ są liczby całkowite, pochodną skończoną rzędu $2q + 1$, to mamy wzór:*

$$\sum_{k=a+1}^{b} f'(k) = f(b) - f(a) + \tfrac{1}{2}[f'(b) - f'(a)] +$$
$$+ \sum_{p=1}^{q} (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!}[f^{(2p)}(b) - f^{(2p)}(a)] + R_{2q+1}, \qquad (34)$$

gdzie reszta R_{2q+1} spełnia nierówność (33).

§ 188. Jako przykład na zastosowanie twierdzenia 209 przyjmijmy

$$a > 0, \quad f(x) = \lg x. \qquad (35)$$

Mamy tu

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}, \quad \text{dla} \quad k=1,2,3,\dots \tag{36}$$

Wzór (34) daje więc w jednej chwili (przy wszelkiem naturalnem q):

$$\sum_{k=a+1}^{b}\frac{1}{k}=\lg\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right]+\sum_{p=1}^{q}(-1)^p\frac{B_p}{2p}\left[\frac{1}{b^{2p}}-\frac{1}{a^{2p}}\right]+R_{2q+1}.$$

Wobec (36), mamy

$$|f^{(2q+1)}(x)|<\frac{(2q)!}{k^{2q+1}}, \quad \text{dla} \quad k<x<k+1,$$

zatem, wobec (33):

$$|R_{2q+1}|\le B_q\sum_{k=a}^{b-1}\frac{1}{k^{2q+1}}\le\frac{B_q}{a^{2q-1}}\sum_{k=a}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\frac{2B_q}{a^{2q-1}}.$$

Mamy więc przy wszelkich naturalnych a, b i q nierówność

$$\left|\sum_{k=a+1}^{b}\frac{1}{k}-\lg\frac{b}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)-\sum_{p=1}^{q}(-1)^p\frac{B_p}{2p}\left(\frac{1}{b^{2p}}-\frac{1}{a^{2p}}\right)\right|<\frac{2B_q}{a^{2q-1}}.$$

Przejdźmy w tej nierówności do granicy dla $b=\infty$. Zważywszy, że

$$\lim_{b=\infty}\left[\sum_{k=1}^{b}\frac{1}{k}-\lg b\right]=C, \tag{37}$$

gdzie C oznacza stałą Eulera (§ 52, wzór (44)), znajdziemy z łatwością nierówność

$$\left|C-\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{k}+\lg a+\frac{1}{2a}+\sum_{p=1}^{q}(-1)^p\frac{B_q}{2pa^{2p}}\right|\le\frac{2B_q}{a^{2q-1}}. \tag{38}$$

Wzór (38) może służyć do obliczania liczby C. Przyjmijmy w nim np. $a=10$, $q=5$: prawa strona nierówności (38) będzie więc równą $\frac{2B_5}{10^9}=\frac{1}{66.10^8}$, co pozwoliłoby z łatwością obliczyć liczbę C z dokładnością 9-ciu znaków dziesiętnych.

Wyprowadzimy tu jeszcze pewien inny wzór dla stałej Eulera. Wobec (37), oraz z uwagi, że $\sum_{k=1}^{b}\lg\left(1+\frac{1}{k}\right)=\lg(b+1)$, możemy napisać

$$C=\lim_{b=\infty}\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{1}{k}-\lg\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]. \tag{39}$$

Lecz, w myśl wzoru (4) z § 180:

$$\frac{1}{k}-\lg\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{3k^3}+\frac{1}{4k^4}-\dots, \quad \text{dla} \quad k=1,2,3,\dots,$$

skąd, z uwagi, że składniki po prawej stronie maleją bezwzględnie:

$$\left|\frac{1}{k}-\lg\left(1+\frac{1}{k}\right)-\left(\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{3k^3}+\dots+\frac{(-1)^p}{pk^p}\right)\right|<\frac{1}{pk^p};$$

kładąc

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}=s_n \quad (\text{dla} \quad n=2,3,\dots),$$

będziemy więc, wobec (39), mieli:

$$\left|C-\left(\frac{s_2}{2}-\frac{s_3}{3}+\dots+(-1)^p\frac{s_p}{p}\right)\right|<\frac{s_p}{p},$$

co, wobec $\lim_{n=\infty}\frac{s_p}{p}=0$ (gdyż $s_p\le s_2$, dla $p=2,3,\dots$), daje rozwinięcie liczby C na szereg nieskończony:

$$C=\frac{s_2}{2}-\frac{s_3}{3}+\frac{s_4}{4}-\frac{s_5}{5}+\dots$$

Jako drugi przykład zastosowania tw. 209 przyjmijmy

$$a>0, \quad f(x)=x\lg x-x.$$

Mamy

$$f'(x)=\lg x, \quad f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k(k-2)!}{x^{k-1}}, \quad \text{dla} \quad k=2,3,4,\dots \tag{40}$$

Wzór (34) daje więc w jednej chwili (przy wszelkiem naturalnem q):

$$\sum_{k=a+1}^{b}\lg k=b\lg b-a\lg a-(b-a)+\tfrac{1}{2}(\lg b-\lg a)+$$

$$+\sum_{p=1}^{q}(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p-1)\,2p}\left(\frac{1}{b^{2p-1}}-\frac{1}{a^{2p-1}}\right)+R_{2q+1}. \tag{41}$$

Wobec (40), mamy

$$\left|f^{2q+1}(x)\right|<\frac{(2q-1)!}{k^{2q}}, \quad \text{dla} \quad k<x<k+1,$$

zatem, wobec (33):

$$\left|R_{2q+1}\right| \leq \frac{B_q}{2q}\sum_{k=a}^{b-1}\frac{1}{k^{2q}} \leq \frac{B_q}{2q\,a^{2q-2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \frac{B_q}{q\,a^{2q-2}}.$$

Mamy więc przy wszelkich naturalnych a, b i q nierówność

$$\left|-\sum_{k=a+1}^{b}\lg k + b\lg b - a\lg a - (b-a) + \tfrac{1}{2}(\lg b - \lg a) + \right.$$
$$\left. + \sum_{p=1}^{q}\frac{(-1)^{p-1}B_p}{(2p-1)\,2p}\left(\frac{1}{b^{2p-1}} - \frac{1}{a^{2p-1}}\right)\right| < \frac{B_q}{q\,a^{2q-2}}. \tag{42}$$

Przejdźmy teraz w tej nierówności do granicy dla $b=\infty$. Zważywszy, że w myśl wzoru Stirlinga (wzór (61) z § 155):

$$\lim_{b=\infty}\left[\sum_{k=1}^{b}\lg k - b\lg b + b - \tfrac{1}{2}\lg b\right] = \tfrac{1}{2}\lg 2\pi,$$

znajdujemy wobec (42) w jednej chwili:

$$\left|\sum_{k=1}^{a}\lg k - a\lg a + a - \tfrac{1}{2}\lg a - \tfrac{1}{2}\lg 2\pi - \sum_{p=1}^{q}\frac{(-1)^{p-1}B_p}{(2p-1)\,2p\,a^{2p-1}}\right| \leq$$
$$\leq \frac{B_q}{q\,a^{2q-2}} \tag{43}$$

— przy wszelkiem naturalnem a oraz naturalnem q. Wzór ten może służyć do obliczania sumy logarytmów kolejnych liczb naturalnych.

Weźmy teraz pod rozwagę szereg nieskończony

$$a\lg a - a + \tfrac{1}{2}\lg a + \tfrac{1}{2}\lg\pi + \frac{B_1}{1.2.a} - \frac{B_2}{3.4.a^3} + \frac{B_3}{5.6.a^5} - \ldots \tag{44}$$

noszący nazwę *szeregu* Stirlinga. Szereg ten jest rozbieżny przy wszelkiem a, gdyż, wobec wzoru (29) z § 157, znajdujemy z łatwością

$$\lim_{p=\infty}\frac{B_p}{(2p-1)\,2p\,a^{2p-1}} = \infty, \quad \text{dla} \quad a>0.$$

Z drugiej zaś strony wzór (43), po zastąpieniu w nim q przez $q+1$, daje w jednej chwili:

$$\lim_{a=\infty} a^{2q-1}\left[\sum_{k=1}^{a}\lg k - a\lg a + a - \tfrac{1}{2}\lg a - \tfrac{1}{2}\lg 2\pi - \sum_{p=1}^{q}\frac{(-1)^{p-1}B_p}{(2p-1)2pa^{2p-1}}\right] = 0, \tag{45}$$

dla $q=1,2,3,\ldots$

Jeżeli szereg nieskończony

$$\varphi(a) + \frac{c_1}{a} + \frac{c_2}{a^2} + \frac{c_3}{a^3} + \ldots$$

jest rozbieżny przy wszelkiem dodatniem a, lecz posiada tę własność, że

$$\lim_{a=\infty} a^n\left[F(a) - \varphi(a) - \frac{c_1}{a} - \frac{c_2}{a^2} - \ldots - \frac{c_n}{a^n}\right] = 0, \quad \text{dla} \quad n=1,2,3\ldots,$$

to szereg taki nazywamy *szeregiem asymptotycznym* dla funkcji $F(a)$. W myśl (45) wnosimy więc z łatwością, że *szereg* Stirlinga *jest szeregiem asymptotycznym dla funkcji* $F(a) = \sum_{k=1}^{a}\lg k$

Podobnież, opierając się na nierówności (38), możnaby z łatwością wnioskować, że szereg

$$\lg a + C + \frac{1}{2a} - \frac{B_1}{2a^2} + \frac{B_2}{4a^4} - \frac{B_3}{6a^6} + \ldots$$

jest szeregiem asymptotycznym dla funkcji $\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{k}$ [1].

Jako inny przykład zastosowania twierdzenia 209, przyjmijmy:

$$a=0,\ b=1,\ f(x)=e^{tx},$$

gdzie t oznacza daną liczbę rzeczywistą $\neq 0$. Mamy tu

$$f^{(k)}(x) = t^k e^{tx}, \quad \text{dla} \quad k=1,2,3,\ldots \tag{46}$$

Wzór (34) daje więc w jednej chwili (dla $q=1,2,3,\ldots$):

$$te^t = e^t - 1 + \tfrac{1}{2}(te^t - t) + \sum_{p=1}^{q}(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p)!}(t^{2p}e^t - t^{2p}) + R_{2p+1}, \tag{47}$$

gdzie, wobec (33) i (46):

$$\left|R_{2q+1}\right| \leq \frac{B_q}{(2q)!}\left|t\right|^{2q+1}e^{t\xi}, \quad \text{gdzie} \quad 0<\xi<1. \tag{48}$$

Lecz, w myśl wzoru (29) z § 157

$$\frac{B_q t^{2q+1}}{(2q)!} = \frac{t^{2q+1}}{2^{2q-1}\pi^{2q}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2q}} \tag{49}$$

skąd, wobec (48) i uwagi, że $0<e^{t\xi}<e^{|t|}$, dla $0<\xi<1$, wnosimy z łatwością, iż

$$\lim_{q=\infty} R_{2q+1} = 0, \quad \text{dla} \quad |t|<2\pi.$$

[1] Bardziej szczegółowe wiadomości o szeregach asymptotycznych znajdzie czytelnik u Borela w jego *Leçons sur les séries divergentes,* Paryż 1901, str. 21—54.

Wzór (47) daje więc w jednej chwili, po podzieleniu obu stron przez $t\,(e^t-1)$, rozwinięcie na szereg nieskończony

$$\frac{1}{e^t-1}=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\frac{B_1 t}{2!}-\frac{B_2 t^3}{4!}+\frac{B_3 t^5}{6!}-\ldots,\quad \text{dla}\quad 0<|t|<2\pi,$$

znalezione w § 157 na innej drodze. Dla $|t|\geq 2\pi$, jak to wynika z łatwością ze wzoru (49), otrzymany szereg jest rozbieżny.

Ćwiczenia.

1) Udowodnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\vartheta}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi\vartheta}{4},\ \text{dla}\ 0\leq\vartheta\leq\pi,\ \text{zaś}=\frac{\pi\vartheta}{4}-\frac{3\pi^2}{8},\ \text{dla}\ \pi\leq\vartheta\leq 2\pi.$$

2) Przyjąć w twierdzeniu 209 $a=0$, $f(x)=\dfrac{x^{m+1}}{(m+1)!}$, $q>\dfrac{m}{2}$, oraz wyprowadzić wzór (dokładny) na sumę $1^m+2^m+\ldots+b^m$.

3) Przyjąć w twierdzeniu 209 $a=0$, $b=1$, $f(x)=\sin 2tx$, gdzie $t\neq 0$, i wyprowadzić stąd rozwinięcie funkcji $\operatorname{ctg} t$ na szereg potęgowy.

4) Wyprowadzić przy pomocy tw. 209 rozwinięcie funkcji $F(a)=\sum\limits_{k=1}^{a}\dfrac{1}{k^2}$ na szereg asymptotyczny

$$\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{a}+\frac{1}{2a^2}-\frac{B_1}{a^3}+\frac{B_2}{a^5}-\frac{B_3}{a^7}+\ldots.$$

5) Wychodząc z szeregu na $\operatorname{arctg} x$ (wzór (7) z § 181) i stosując mnożenie Cauchy'ego, wyprowadzić dla $-1<x<1$ rozwinięcie

$$(\operatorname{arctg} x)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)x^{2n}.$$

6) Opierając się na szeregu dla $\lg(1+x)$ (wzór (4), § 180), wyprowadzić rozwinięcia:

$$\frac{\lg(1+x)}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n,\quad \text{dla}\quad -1<x<1$$

oraz

$$[\lg(1+x)]^2=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^{n+1},\quad \text{dla}\quad 1<x\leq 1$$

(przypadek szczególny tego ostatniego wzoru dla $x=1$ wyprowadziliśmy już w § 85).

7) Opierając się na wzorze $D\lg\sqrt{1+x^2}=\dfrac{x}{1+x^2}$ oraz na tw. 202, wyprowadzić rozwinięcie

$$\lg\sqrt{1+x^2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+\ldots,\quad \text{dla}\quad |x|\leq 1.$$

ROZDZIAŁ XXIII.

Wzór Taylora i Maclaurina.

189. Załóżmy, że w całym przedziale (a, b)[1]) funkcja $f(x)$ posiada (przy danem naturalnem n) pochodną $f^{(n-1)}(x)$, która jest ciągłą w przedziale (a, b), oraz, że *wewnątrz* przedziału (a, b) istnieje wszędzie pochodna $f^{(n)}(x)$. Z istnienia oraz ciągłości pochodnej $f^{(n-1)}(x)$ w przedziale (a, b) wynika oczywiście istnienie oraz ciągłość w całym przedziale (a, b) każdej z pochodnych $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$.

Połóżmy:

$$F(x)=f(x)+\frac{b-x}{1!}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) \tag{1}$$

— będzie to funkcja ciągła w całym przedziale (a, b).

Jak łatwo widzieć (stosując twierdzenie o pochodnej sumy oraz iloczynu, oraz wobec założenia, że istnieje pochodna $f^{(n)}(x)$ wewnątrz przedziału (a, b)), funkcja $F(x)$ będzie wewnątrz przedziału (a, b) posiadała wszędzie pochodną

$$F'(x)=\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) \tag{2}$$

(mamy bowiem dla $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, rozumiejąc przez $f^{(0)}(x)$ samą funkcję $f(x)$:

$$D\,\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)=\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x)-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x),$$

skąd, sumując te równości dla $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, wobec (1), otrzymujemy w jednej chwili wzór (2)).

Niech dalej $\varphi(x)$ oznacza dowolną daną funkcję, ciągłą w przedziale (a, b) i posiadającą wszędzie wewnątrz tego przedziału pochodną skończoną, różną od zera, $\varphi'(x)$. Względem funkcyj $F(x)$ i $\varphi(x)$ będzie zatem stosowalne twierdzenie Cauchy'ego (tw. 200, § 177), i przeto przy pewnem ξ, leżącem wewnątrz przedziału (a, b), będziemy mieli wzór

$$\frac{F(b)-F(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

[1]) Jeżeli $a>b$, to przez przedział (a, b) rozumiemy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, spełniających nierówność $a\geq x\geq b$.