

CZĘŚĆ CZWARTA.

Rachunek różniczkowy.

ROZDZIAŁ XXI.

Pochodna oraz jej zasadnicze własności.

§ 164. Niech Z oznacza dany zbiór liczb zespolonych, $f(z)$ — funkcję, określoną w zbiorze Z , z_0 — dany punkt zbioru Z , A — daną liczbę zespoloną. Jeżeli dla każdego dodatniego ε istnieje liczba dodatnia δ , taka iż dla każdego punktu z zbioru Z nierówność

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

pociąga za sobą nierówność

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - A \right| < \varepsilon,$$

to mówimy, że funkcja $f(z)$ posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną

$$f'(z_0) = A \quad (1)$$

(por. § 129).

Z definicji naszej wynika natychmiast, że jeżeli funkcja $f(z)$ posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną $f'(z_0) = A$, to dla każdego ciągu nieskończonego z_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) liczb zbioru Z różnych od z_0 , warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad (2)$$

pociąga za sobą wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = A \quad (3)$$

(por. tw. 61).

Opierając się na pewniku Zermelo (§ 54) możnaby z łatwością udowodnić twierdzenie odwrotne, mianowicie, że jeżeli (przy pewnym z_0 , należącym do zbioru Z) dla każdego ciągu nieskończonego z_n liczb zbioru Z różnych od z_0 , warunek (2) pociąga za sobą wzór (3), to zachodzi wzór (1). Nadto, jeżeli zbiór Z jest zamknięty, zaś funkcja $f(x)$ jest ciągła w całym zbiorze Z , to twierdzenie to można udowodnić, nie wprowadzając żadnego specjalnego pewnika. Okażemy to tylko dla przypadku, kiedy zbiór Z jest przedziałem liczb rzeczywistych.

Załóżmy więc, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) , oraz że przy pewnym x_0 , należącym do przedziału (a, b) , dla każdego ciągu nieskończonego x_n liczb przedziału (a, b) różnych od x_0 , warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad (4)$$

pociąga za sobą wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = A. \quad (5)$$

Zupełnie tak samo, jak w § 54 przy dowodzie twierdzenia 68, udowodnilibyśmy przedewszystkiem, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje takie $\delta > 0$, iż dla każdej liczby wymiernej w przedziału (a, b) , spełniającej nierówności

$$0 < |w - x_0| < \delta, \quad (6)$$

mamy:

$$\left| \frac{f(w) - f(x_0)}{w - x_0} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7)$$

Niech teraz x oznacza jakąkolwiek liczbę przedziału (a, b) , spełniającą nierówność

$$0 < |x - x_0| < \delta. \quad (8)$$

Niech, dalej, w_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) będzie ciągiem liczb wymiernych przedziału (a, b) , takim iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = x. \quad (9)$$

Wobec (8) i (9) będziemy mieli:

$$0 < |w_n - x_0| < \delta, \quad \text{dla } n > \mu,$$

i przeto [z uwagi, że dla wymiernych w w przedziale (a, b) nierówność (6) pociąga za sobą nierówność (7)]:

$$\left| \frac{f(w_n) - f(x_0)}{w_n - x_0} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{dla } n > \mu. \quad (10)$$

Z drugiej strony, wobec ciągłości funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) , oraz wobec (9), mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = f(x),$$

zaś, wobec (9) i (8):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n - x_0) = x - x_0 \neq 0;$$

nierówność (10) daje więc, w jednej chwili, w granicy dla $n = \infty$:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

skąd, tembardziej, wynika nierówność:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon. \quad (11)$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje takie dodatnie δ , iż dla każdej liczby x przedziału (a, b) nierówność (8) pociąga za sobą nierówność (11), co dowodzi, że mamy (w przedziale (a, b) , dla punktu x_0):

$$f'(x_0) = A.$$

Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 187. *Na to, żeby funkcja $f(x)$, ciągła w przedziale (a, b) , posiadała w tym przedziale dla danej wartości x_0 pochodną $f'(x_0) = A$, potrzeba i wystarcza, iżby dla każdego ciągu nieskończonego x_n liczb przedziału (a, b) , różnych od x_0 i zmierzających do x_0 , zachodził wzór:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = A.$$

Twierdzenie to udowodniliśmy, nie opierając się na żadnym specjalnym pewniku, przyczem nie robiliśmy żadnych założeń co do zachowania się funkcji $f(x)$ w punktach przedziału (a, b) , innych niż x_0 , prócz jedynie założenia, że jest ona w tych punktach ciągłą. Możnaby dowieść, że na to iżby twierdzenie 187 było prawdziwem dla wszystkich funkcji $f(x)$, ciągłych i nieciągłych, potrzeba i wystarcza, iżby prawdziwym był pewnik, wypowiedziany przy końcu § 54.

§ 165. Jeżeli mamy do czynienia z funkcją $f(z)$, określoną w zbiorze Z , to, mówiąc o jej pochodnej dla danego punktu z_0 zbioru Z , mamy zwykle na myśli pochodną dla punktu z_0 w zbiorze Z , chyba że wyraźnie zaznaczamy, iż zbiór, w którym uważamy pochodną dla punktu z_0 , jest różnym od zbioru Z .

Funkcja, określona w zbiorze Z , może posiadać pochodną dla każdego punktu z_0 pewnego zbioru Z_1 (będącego częścią zbioru Z) w zbiorze Z_1 , ale niekoniecznie w zbiorze Z . Np. funkcja $f(x) = |x|$, określona w całym zbiorze X wszystkich liczb rzeczywistych, posiada dla każdego punktu przedziału $(0,1)$ (nie wyłączając granic) pochodną ($=1$) w zbiorze wszystkich liczb tego przedziału, lecz nie posiada dla punktu 0 pochodnej w zbiorze X , jak to czytelnik sam zechce bliżej rozpatrzyć.

Niech X oznacza dany zbiór liczb rzeczywistych, $f(x)$ — funkcję, określoną w zbiorze X , x_0 — dany punkt zbioru X . Jeżeli dla każdej liczby dodatniej A istnieje liczba dodatnia δ taka, iż dla każdego punktu x zbioru X nierówność

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad (12)$$

pociąga za sobą nierówność

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > A,$$

to mówimy, że funkcja $f(x)$ posiada w zbiorze X dla punktu x_0 pochodną nieskończoną (dodatnią):

$$f'(x_0) = +\infty.$$

Podobnie, jeżeli dla każdej liczby dodatniej A istnieje liczba dodatnia δ taka, iż dla każdego punktu x zbioru X nierówność (12) pociąga za sobą nierówność

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < -A,$$

to mówimy, że funkcja $f(x)$ posiada w zbiorze X dla punktu x_0 pochodną

$$f'(x_0) = -\infty.$$

Łatwo widzieć, że tw. 187, udowodnione w § 164 dla pochodnych skończonych, pozostaje prawdziwym i dla pochodnych nieskończonych.

Niech Z oznacza dany zbiór liczb zespolonych i niech $f(z)$ będzie funkcją, która dla wszystkich punktów z zbioru Z posiada wartość stałą: $f(z) = C$, gdzie C oznacza liczbę, niezależną od z . Niech, dalej, z_0 oznacza dowolny dany punkt zbioru Z . Przy wszelkimi z , należącymi do zbioru Z i różnym od z_0 , będziemy mieli oczywiście

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{C - C}{z - z_0} = 0,$$

skąd, w myśl definicji pochodnej, wynika natychmiast, że mamy, w zbiorze Z :

$$f'(z_0) = 0.$$

Funkcja $f(z) = C$ posiada więc w całym zbiorze Z pochodną równą zero. Wynik ten wyrażamy, mówiąc, że *pochodna stałej jest stale równa zero*.

Rozpatrzmy teraz szereg przykładów na pochodne.

1) Znajdziemy pochodną funkcji $f(z) = e^z$ w zbiorze wszystkich liczb zespolonych.

W myśl wzoru (14) z § 133, mamy przy wszelkimi zespolonym $h \neq 0$:

$$\frac{e^h - 1}{h} - 1 = \frac{h}{2} \left(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{3 \cdot 4} + \dots \right);$$

skąd, w jednej chwili:

$$\left| \frac{e^h - 1}{h} - 1 \right| \leq \frac{|h|}{2} \left(1 + \frac{|h|}{1!} + \frac{|h|^2}{2!} + \dots \right) + \frac{|h|}{2} e^{|h|},$$

czyli:

$$\left| \frac{e^h - 1}{h} - 1 \right| \leq \frac{|h|}{2} e^{|h|}, \quad \text{dla } h \neq 0. \quad (13)$$

Niech teraz z_0 oznacza dowolną daną liczbę zespoloną, ε — dowolną daną liczbę dodatnią. Obierzmy liczbę dodatnią δ , spełniającą nierówności:

$$\delta < 1 \quad \text{oraz} \quad \delta < \frac{2\varepsilon}{e^{e^{\delta}}} \quad (14)$$

i niech z oznacza liczbę zespoloną, spełniającą nierówność

$$0 < |z - z_0| < \delta. \quad (15)$$

Wobec (15) i (14) będzie

$$|z - z_0| < 1,$$

skąd w jednej chwili:

$$e^{|z-z_0|} < e.$$

Stąd, w myśl (13) i wobec (14), mamy dla zespolonych z , spełniających nierówność (15):

$$\left| \frac{e^{z-z_0} - 1}{z - z_0} - 1 \right| \leq \frac{|z - z_0|}{2} e^{|z-z_0|} < \frac{\delta}{2} e < \frac{\varepsilon}{e}. \quad (16)$$

Lecz, dla $z \neq z_0$ mamy tożsamość:

$$\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} - e^{z_0} = \left(\frac{e^{z-z_0} - 1}{z - z_0} - 1 \right) e^{z_0},$$

skąd, w jednej chwili, wobec (16):

$$\left| \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} - e^{z_0} \right| < \varepsilon, \quad \text{dla } 0 < |z - z_0| < \delta, \quad (17)$$

co dowodzi, że funkcja $f(z) = e^z$ posiada w zbiorze wszystkich liczb zespolonych dla każdego danego punktu z_0 pochodną

$$f'(z_0) = e^{z_0}.$$

Funkcja e^z posiada więc w całym zbiorze liczb zespolonych pochodną, która jest równą odpowiedniej wartości funkcji. Mamy więc dla funkcji $f(z) = e^z$ przy wszelkiem zespolonem z :

$$f'(z) = f(z).$$

2) Wyznamy teraz pochodną funkcji $f(z) = \sin z$ w zbiorze wszystkich liczb zespolonych.

W myśl wzoru (26) z § 136, mamy, dla $z \neq z_0$:

$$\frac{\sin z - \sin z_0}{z - z_0} - \cos z_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{zi} - e^{z_0i}}{zi - z_0i} - e^{z_0i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-zi} - e^{-z_0i}}{z_0i - zi} - e^{-z_0i} \right). \quad (18)$$

Obierzmy teraz, dla danego zespolonego z_0 oraz danego dodatniego ε liczbę dodatnią δ , spełniającą nierówności (14): będziemy więc mieli nierówność (17). Zastępując w niej z przez zi , względnie przez $-zi$, otrzymujemy:

$$\left| \frac{e^{zi} - e^{z_0i}}{zi - z_0i} - e^{z_0i} \right| < \varepsilon, \quad \text{dla } 0 < |zi - z_0i| < \delta,$$

oraz

$$\left| \frac{e^{-zi} - e^{-z_0i}}{z_0i - zi} - e^{-z_0i} \right| < \varepsilon, \quad \text{dla } 0 < |z_0i - zi| < \delta,$$

skąd, wobec (18) i z uwagi, że $|zi - z_0i| = |z - z_0|$, otrzymujemy natychmiast:

$$\left| \frac{\sin z - \sin z_0}{z - z_0} - \cos z_0 \right| < \varepsilon, \quad \text{dla } 0 < |z - z_0| < \delta,$$

co dowodzi, że funkcja $f(z) = \sin z$ posiada w zbiorze wszystkich liczb zespolonych (dla każdego danego punktu z_0) pochodną

$$f'(z_0) = \cos z_0.$$

Podobnie znaleźlibyśmy, że dla funkcji $f(z) = \cos z$ mamy w całym zbiorze liczb zespolonych $f'(z) = -\sin z$.

3) Niech $f(z)$ oznacza szereg potęgowy

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

zbieżny wewnątrz koła o promieniu R . Dla $|z| < R$ mamy, jak dowiedliśmy w § 129:

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots$$

W szczególności, jeżeli $f(z)$ oznacza wielomian całkowity

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m$$

[który jest przypadkiem szczególnym szeregu potęgowego bezustannie zbieżnego ($R = \infty$)], mamy w całym zbiorze liczb zespolonych:

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + m a_m z^{m-1}.$$

Pochodna wielomianu m -go stopnia jest więc wielomianem stopnia $m-1$ -go.

Ze wzoru na pochodną szeregu potęgowego, oraz w myśl wzorów (14) i (22) z § 135, sprawdzamy z łatwością udowodnione wyżej na innej drodze wzory na pochodne funkcji e^z , $\cos z$ oraz $\sin z$.

4) Wyznamy teraz w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich pochodną funkcji $f(x) = x^\mu$, gdzie μ oznacza liczbę rzeczywistą, niezależną od x .

Niech x_0 oraz ε będą dowolne dane liczby dodatnie, i załóżmy, że $\mu > 0$.

Dla dostatecznie małej bezwzględnie różnicy $x - x_0$ liczba

$$d = \frac{x - x_0}{x_0} \quad (19)$$

będzie dowolnie małą bezwzględnie: będzie więc, przy dostatecznie małym $|x - x_0|$:

$$-1 < d < \frac{1}{\mu}.$$

skąd, w myśl tw. 62:

$$1 + \frac{\mu d}{1+d} \leq (1+d)^\mu \leq \frac{1}{1-\mu d},$$

co daje, w jednej chwili:

$$-\frac{\mu d}{1+d} \leq \frac{(1+d)^\mu - 1}{d} - \mu \leq \frac{\mu^2 d}{1-\mu d}. \quad (20)$$

Dla dostatecznie małych bezwzględnie d mamy, jak łatwo widzieć

$$\frac{\mu^2 d}{1-\mu d} < \frac{\varepsilon}{x_0^{\mu-1}} \quad \text{oraz} \quad \frac{\mu d}{1+d} < \frac{\varepsilon}{x_0^{\mu-1}},$$

zatem, w myśl (20):

$$\left| \frac{(1+d)^\mu - 1}{d} - \mu \right| < \frac{\varepsilon}{x_0^{\mu-1}}, \quad (21)$$

Wobec (19) mamy, dla dodatnich $x \neq x_0$:

$$\frac{x^\mu - x_0^\mu}{x - x_0} - \mu x_0^{\mu-1} = x_0^{\mu-1} \left[\frac{(1+d)^\mu - 1}{d} - \mu \right],$$

skąd, w myśl (21), wnosimy natychmiast, że przy odpowiednim dodatnim δ , mamy

$$\left| \frac{x^\mu - x_0^\mu}{x - x_0} - \mu x_0^{\mu-1} \right| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad 0 < |x - x_0| < \delta,$$

co dowodzi, że funkcja $f(x) = x^\mu$ posiada w zbiorze liczb dodatnich dla wartości x_0 pochodną

$$f'(x_0) = \mu x_0^{\mu-1}. \quad (22)$$

Podobnie udowodnilibyśmy wzór (22) dla przypadku $\mu < 0$, opierając się na wynikającej z tw. 62 nierówności

$$0 \leq \frac{(1+d)^\mu - 1}{d} - \mu \leq \frac{\mu(\mu-1)d}{1+d-\mu d}, \quad \text{dla} \quad \mu < 0, \quad d > \frac{1}{\mu-1}.$$

Wreszcie, dla $\mu = 0$ wzór (22) zachodzi oczywiście.

Dla funkcji $f(x) = x^\mu$ mamy więc przy wszelkim danym rzeczywistym μ :

$$f'(x) = \mu x^{\mu-1}$$

w całym zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich.

5) Wyznamy obecnie w całym zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich pochodną funkcji $f(x) = \lg x$.

Niech x_0 oraz ε będą dowolne dane liczby dodatnie. Połóżmy

$$\delta = \frac{x_0 \varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad (23)$$

— będzie to więc pewna liczba dodatnia.

Niech, dalej, x oznacza liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność

$$0 < |x - x_0| < \delta. \quad (24)$$

Wobec (24) i (23), znajdujemy w jednej chwili:

$$x > x_0 - \delta = \frac{\delta}{\varepsilon}, \quad \text{skąd} \quad \delta < x\varepsilon$$

i przeto, wobec (24):

$$|x - x_0| < x\varepsilon, \quad (25)$$

skąd też wynika, że liczba x jest dodatnią.

Położmy, dalej:

$$d = \frac{x - x_0}{x_0}; \quad (26)$$

z uwagi, że liczby x_0 oraz x są dodatnie, znajdujemy, w myśl (26):

$$d > -1$$

i przeto, w myśl wzoru (33) z § 50:

$$\left| \frac{\lg(1+d)}{d} - 1 \right| \leq \frac{|d|}{1+d}. \quad (27)$$

Dzieląc obie strony nierówności (27) przez $x_0 > 0$, z uwagi, że, w myśl (26):

$$\frac{\lg(1+d)}{dx_0} = \frac{\lg x - \lg x_0}{x - x_0}, \quad \text{zaś} \quad \frac{|d|}{(1+d)x_0} = \frac{|x - x_0|}{x},$$

znajdujemy w jednej chwili, wobec (25):

$$\left| \frac{\lg x - \lg x_0}{x - x_0} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon. \quad (28)$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdej liczby rzeczywistej x równość (24) pociąga za sobą nierówność (28), co dowodzi, że funkcja $f(x) = \lg x$ posiada dla wartości x_0 w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych pochodną

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0}.$$

Zatem: pochodną funkcji $f(x) = \lg x$ w całym zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich jest $f'(x) = \frac{1}{x}$.

6) Połóżmy, przy wszelkimi rzeczywistym x , $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt[3]{|x|}$. Oznaczmy, przy dowolnym danym dodatniem A , przez δ liczbę

$$\delta = A^{-\frac{3}{2}},$$

dla

$$0 < |x - 0| < \delta$$

będziemy mieli, jak łatwo widzieć:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt[3]{|x|}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} > A,$$

skąd wnosimy, że funkcja $f(x)$ posiada w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych dla wartości 0 pochodną

$$f'(0) = +\infty.$$

Załóżmy teraz, że funkcja $f(x)$ posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną skończoną $f'(z_0)$ i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Z definicji pochodnej wynika, że istnieje liczba dodatnia δ_1 taka, iż w zbiorze Z :

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < 1, \quad \text{dla } 0 < |z - z_0| < \delta_1. \quad (29)$$

Niech, dalej, δ oznacza liczbę dodatnią, spełniającą nierówności

$$\delta < \delta_1 \quad \text{oraz} \quad \delta < \frac{\varepsilon}{|f'(z_0)| + 1}. \quad (30)$$

Dla liczb z zbioru Z , spełniających nierówność

$$|z - z_0| < \delta$$

będziemy, w myśl (30) i (29), mieli:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq [|f'(z_0)| + 1] |z - z_0| < \varepsilon,$$

co dowodzi, że funkcja $f(x)$ jest w zbiorze Z dla punktu z ciągłą. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 188. Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną skończoną, to funkcja $f(x)$ jest w zbiorze Z dla punktu z_0 ciągłą.

Twierdzenie to nie daje się jednak odwrócić: jeżeli funkcja jest w zbiorze Z dla danego punktu z_0 ciągłą, to może nie istnieć w zbiorze Z pochodna $f'(z_0)$.

Oto przykład: połóżmy, przy wszelkimi zespolonym z , $f(z) = |z|$ — będzie to, jak wiemy, funkcja ciągła w całym zbiorze liczb zespolonych. Funkcja ta nie posiada jednak w zbiorze wszystkich liczb zespolonych pochodnej dla żadnego punktu. W samej rzeczy, niech z_0 oznacza daną liczbę zespoloną. Rozróżnimy dwa przypadki: $z_0 \neq 0$ oraz $z_0 = 0$.

W pierwszym przypadku połóżmy $z_n = z_0 e^{\frac{i}{n}}$ dla n nieparzystych, zaś $z_n = \frac{n+1}{n} z_0$ dla n parzystych. Będzie, jak łatwo widzieć: $z_n \neq z_0$ ($n=1, 2, \dots$), oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0,$$

przytem, dla n nieparzystych będzie

$$|z_n| = |z_0 e^{\frac{i}{n}}| = |z_0|$$

i przeto

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{|z_n| - |z_0|}{z_n - z_0} = 0, \quad \text{dla } n=1, 3, 5, 7, \dots,$$

zaś dla n parzystych będzie

$$|z_n| = \frac{n+1}{n} |z_0|$$

i przeto:

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{|z_n| - |z_0|}{z_n - z_0} = \frac{|z_0|}{z_0} \neq 0, \quad \text{dla } n=2, 4, 6, \dots$$

ciąg $\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}$ nie posiada więc dla $n=\infty$ żadnej granicy, co musiałoby, jak wiemy, zachodzić (§ 164), gdyby istniała pochodna $f'(z_0)$. Zatem pochodna $f'(z_0)$ nie istnieje.

W razie $z_0 = 0$ połóżmy $z_n = \frac{(-1)^n}{n}$: będzie $z_n \neq z_0$ ($n=1, 2, \dots$), $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, oraz

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{|z_n| - |z_0|}{z_n - z_0} = (-1)^n,$$

skąd znowu wnosimy że ciąg $\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}$ nie jest zbieżny i przeto, że nie istnieje pochodna $f'(0)$.

Pochodna $f'(z_0)$ nie istnieje więc przy żadnym zespolonym z_0 , c. b. d. o.

W jednym z dalszych paragrafów (§ 173) poznamy przykład funkcji zmiennej rzeczywistej, która, będąc ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych, nie posiada pochodnej dla żadnej wartości rzeczywistej zmiennej.

§ 166. Niech $\varphi(z)$ oznacza funkcję, określoną w danym zbiorze liczb zespolonych Z , i niech a będzie danym punktem skupienia zbioru Z , należącym lub nie do tego zbioru; wreszcie A niech oznacza daną liczbę zespoloną.

Jeżeli dla każdego dodatniego ε istnieje liczba dodatnia δ taka, iż dla każdego punktu z zbioru Z , spełniającego nierówność

$$0 < |z - a| < \delta$$

zachodzi też nierówność

$$|\varphi(z) - A| < \varepsilon,$$

to mówimy, że gdy z zmierza w zbiorze Z do punktu a , to $\varphi(z)$ zmierza do A , albo, że w zbiorze Z granicą funkcji $\varphi(z)$ dla $z = a$ jest A , przyczem piszemy

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = A$$

[dodając, w razie potrzeby, w nawiasie: (w zbiorze Z)].

Z definicji ciągłości funkcji (Cauchy'ego) (§ 107) wynika natychmiast, że na to iżby funkcja $f(z)$ była w zbiorze Z dla punktu z_0 ciągłą, potrzeba i wystarcza, iżby było w zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Z definicji pochodnej (§ 164) wynika, dalej, natychmiast, że na to iżby funkcja $f(z)$ posiadała w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną $f'(z_0) = A$, potrzeba i wystarcza, iżbyśmy mieli w zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A.$$

Udowodnimy teraz kilka twierdzeń o granicach funkcji.

Twierdzenie 189. Jeżeli mamy w zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi_1(z) = A_1, \text{ oraz } \lim_{z \rightarrow a} \varphi_2(z) = A_2, \quad (31)$$

gdzie A_1 i A_2 są dwie dane liczby zespolone, skończone, to mamy też w zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow a} [\varphi_1(z) + \varphi_2(z)] = A_1 + A_2, \quad (32)$$

oraz

$$\lim_{z \rightarrow a} [\varphi_1(z) - \varphi_2(z)] = A_1 - A_2. \quad (33)$$

Dowód. Załóżmy, że dla funkcji $\varphi_1(z)$ i $\varphi_2(z)$ zachodzą w zbiorze Z wzory (31) i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Z definicji granicy funkcji wynika, że dla liczby dodatniej $\frac{\varepsilon}{2}$ istnieją liczby dodatnie δ_1 i δ_2 takie, iż dla każdego punktu z zbioru Z nierówność

$$0 < |z - a| < \delta_1 \quad (34)$$

pociąga za sobą nierówność

$$|\varphi_1(z) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (35)$$

zaś nierówność

$$0 < |z - a| < \delta_2 \quad (36)$$

pociąga za sobą nierówność

$$|\varphi_2(z) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (37)$$

Oznaczmy teraz przez δ liczbę dodatnią, mniejszą jednocześnie od δ_1 i δ_2 i niech z oznacza liczbę zbioru Z , spełniającą nierówność

$$0 < |z - a| < \delta. \quad (38)$$

Nierówność (38) pociąga za sobą (wobec $\delta < \delta_1$ oraz $\delta < \delta_2$) nierówności (34) i (36), a więc też nierówności (35) i (37), dające w jednej chwili, nierówności

$$|\varphi_1(z) + \varphi_2(z) - (A_1 + A_2)| = |(\varphi_1(z) - A_1) + (\varphi_2(z) - A_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

oraz

$$|\varphi_1(z) - \varphi_2(z) - (A_1 - A_2)| = |(\varphi_1(z) - A_1) - (\varphi_2(z) - A_2)| < \varepsilon$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdego dodatniego ε istnieje liczba dodatnia δ taka, iż dla każdego punktu z zbioru Z nierówność (38) pociąga za sobą nierówności

$$|\varphi_1(z) + \varphi_2(z) - (A_1 + A_2)| < \varepsilon \text{ oraz } |\varphi_1(z) - \varphi_2(z) - (A_1 - A_2)| < \varepsilon,$$

co, w myśl definicji granicy funkcji, dowodzi, że w zbiorze Z zachodzą wzory (32) i (33). Udowodniliśmy więc tw. 189.

Dowiedliśmy więc, że w każdym zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow a} [\varphi_1(z) + \varphi_2(z)] = \lim_{z \rightarrow a} \varphi_1(z) + \lim_{z \rightarrow a} \varphi_2(z),$$

oraz

$$\lim_{z \rightarrow a} [\varphi_1(z) - \varphi_2(z)] = \lim_{z \rightarrow a} \varphi_1(z) - \lim_{z \rightarrow a} \varphi_2(z),$$

o ile (przy danym a) granice po prawej stronie istnieją i są skończone.

Drogą łatwej indukcji tw. 189 daje się uogólnić na sumę dowolnej, skończonej liczby funkcji.

Twierdzenie 190. Jeżeli mamy w zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi_1(z) = A_1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{z \rightarrow a} \varphi_2(z) = A_2 \quad (39)$$

(gdzie A_1 i A_2 są dane liczby zespolone skończone), to mamy też w zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi_1(z) \varphi_2(z) = A_1 A_2. \quad (40)$$

Dowód. Załóżmy, że dla funkcji $\varphi_1(z)$ i $\varphi_2(z)$ zachodzą w zbiorze Z wzory (39) i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Obierzmy liczbę dodatnią η , spełniającą nierówność:

$$\eta < 1 \quad \text{oraz} \quad \eta < \frac{\varepsilon}{1 + |A_1| + |A_2|}. \quad (41)$$

Z założenia, że w zbiorze Z zachodzą wzory (39) wynika, że dla liczby dodatniej η istnieje liczba dodatnia δ , taka iż dla każdego punktu z zbioru Z nierówność

$$0 < |z - a| < \delta \quad (42)$$

pociąga za sobą nierówność

$$|\varphi_1(z) - A_1| < \eta \quad \text{oraz} \quad |\varphi_2(z) - A_2| < \eta. \quad (43)$$

Mamy, dalej, tożsamość:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) \varphi_2(z) - A_1 A_2 &= [\varphi_1(z) - A_1][\varphi_2(z) - A_2] + \\ &+ [\varphi_1(z) - A_1] A_2 + [\varphi_2(z) - A_2] A_1, \end{aligned}$$

która, wobec (43) i (41), daje w jednej chwili:

$$|\varphi_1(z) \varphi_2(z) - A_1 A_2| \leq \eta^2 + \eta |A_2| + \eta |A_1| < \eta(1 + |A_1| + |A_2|) < \varepsilon.$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdego dodatniego ε istnieje liczba dodatnia δ , taka iż dla każdego punktu z zbioru Z nierówność (42) pociąga za sobą nierówność

$$|\varphi_1(z) \varphi_2(z) - A_1 A_2| < \varepsilon,$$

co, w myśl definicji granicy funkcji, dowodzi, że w zbiorze Z zachodzi wzór (40). Udowodniliśmy więc tw. 190.

Dowiedliśmy więc, że w każdym zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi_1(z) \varphi_2(z) = \lim_{z \rightarrow a} \varphi_1(z) \cdot \lim_{z \rightarrow a} \varphi_2(z),$$

o ile (przy danym a) obie granice po prawej stronie istnieją i są skończone.

Drogą łatwej indukcji tw. 190 daje się uogólnić na iloczyn dowolnej, skończonej liczby funkcji.

Twierdzenie 191. Jeżeli mamy w zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi_1(z) = A_1, \quad \text{oraz} \quad \lim_{z \rightarrow a} \varphi_2(z) = A_2 \neq 0 \quad (44)$$

(gdzie A_1 i A_2 są dane liczby zespolone skończone), to mamy też w zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = \frac{A_1}{A_2}. \quad (45)$$

Dowód. Załóżmy, że dla funkcji $\varphi_1(z)$ i $\varphi_2(z)$ zachodzą w zbiorze Z wzory (44) i niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Obierzmy liczbę dodatnią η , spełniającą warunki:

$$\eta < \frac{|A_2|}{2} \quad \text{oraz} \quad \eta < \frac{|A_2|^2 \varepsilon}{2(|A_1| + |A_2|)}. \quad (46)$$

Z założenia, że w zbiorze Z zachodzą wzory (44) wynika, że dla liczby dodatniej η istnieje liczba dodatnia δ , taka iż dla każdego punktu z zbioru Z nierówność

$$0 < |z - a| < \delta \quad (47)$$

pociąga za sobą nierówność

$$|\varphi_1(z) - A_1| < \eta \quad \text{oraz} \quad |\varphi_2(z) - A_2| < \eta. \quad (48)$$

Drużga z nierówności (48) daje, w myśl tw. o module różnicy, wobec (46):

$$|\varphi_1(z)| = |A_2 - (A_2 - \varphi_2(z))| \geq |A_2| - |A_2 - \varphi_2(z)| > |A_2| - \eta > |A_2| - \frac{|A_2|}{2},$$

czyli

$$|\varphi_2(z)| > \frac{|A_2|}{2}; \quad (49)$$

liczba $\varphi_2(z)$ jest więc, przy warunku (47), różną od zera.

Dla $\varphi_1(z) \neq 0$ mamy, dalej, tożsamość:

$$\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} - \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2[\varphi_1(z) - A_1] - A_1[\varphi_2(z) - A_2]}{A_2\varphi_2(z)},$$

która, wobec (48), (49) oraz (46), daje w jednej chwili:

$$\left| \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} - \frac{A_1}{A_2} \right| \leq \frac{|A_2|\eta + |A_1|\eta}{|A_2| \cdot \frac{1}{2}|A_2|} = \frac{2(|A_1| + |A_2|)}{|A_2|^2} \eta < \varepsilon.$$

Dowiedliśmy więc, że dla każdego dodatniego ε istnieje $\delta > 0$ takie, iż dla każdego punktu z zbioru Z nierówność (47) pociąga za sobą nierówność

$$\left| \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} - \frac{A_1}{A_2} \right| < \varepsilon,$$

co dowodzi, że w zbiorze Z zachodzi wzór (45). Udowodniliśmy więc tw. 191.

Dowiedliśmy więc, że w każdym zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow a} \varphi_1(z)}{\lim_{z \rightarrow a} \varphi_2(z)},$$

o ile (przy danem a) prawa strona tego wzoru posiada oznaczoną wartość.

§ 167. Pochodna sumy i różnicy. Niech $f_1(z)$ i $f_2(z)$ będą dwie dane funkcje, posiadające w zbiorze Z dla punktu z_0 odpowiednio pochodne skończone $f'_1(z_0)$ oraz $f'_2(z_0)$. Mamy więc w zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z) - f_1(z_0)}{z - z_0} = f'_1(z_0) \quad \text{oraz} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_2(z) - f_2(z_0)}{z - z_0} = f'_2(z_0),$$

skąd, w myśl tw. 189, w zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z) + f_2(z) - [f_1(z_0) + f_2(z_0)]}{z - z_0} = f'_1(z_0) + f'_2(z_0)$$

oraz

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z) - f_2(z) - [f_1(z_0) - f_2(z_0)]}{z - z_0} = f'_1(z_0) - f'_2(z_0),$$

co dowodzi, że funkcje

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \quad \text{oraz} \quad g(z) = f_1(z) - f_2(z)$$

posiadają w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodne

$$f'(z_0) = f'_1(z_0) + f'_2(z_0) \quad \text{oraz} \quad g'(z_0) = f'_1(z_0) - f'_2(z_0).$$

Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 192. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest sumą (względnie różnicą) dwóch funkcji $f_1(z)$ i $f_2(z)$, z których każda posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną skończoną, to funkcja $f(z)$ posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną $f'(z_0)$, która jest sumą (względnie różnicą) pochodnych $f'_1(z_0)$ oraz $f'_2(z_0)$.

Twierdzenie to wyrażamy krócej, mówiąc:

Pochodna sumy (względnie różnicy) jest sumą (względnie różnicą) pochodnych.

Przez łatwą indukcję dowiedzione twierdzenie uogólniamy na dowolną skończoną liczbę składników, co wyrażamy krótko, mówiąc: *pochodna szeregu skończonego jest szeregiem pochodnych.*

Twierdzenie o pochodnej sumy nie jest jednak wogóle prawdziwe dla szeregów nieskończonych; jeżeli w zbiorze Z funkcja $f(z)$ jest sumą szeregu nieskończonego $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ i jeżeli każda z funkcji $f_k(z)$ posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną $f'_k(z)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), to, nawet w razie zbieżności szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(z_0)$ oraz istnienia pochodnej $f'(z_0)$, liczby $f'(z_0)$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(z_0)$ mogą być różne (już nie mówiąc o tem, że zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(z_0)$ nie pociąga za sobą jeszcze istnienia pochodnej $f'(z_0)$, ani naodwrot). Udowodnimy to na przykładzie.

Niech X oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych przedziału $(0, 1)$; położmy w tym przedziale:

$$f_k(x) = \frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (50)$$

Wobec przykładu (4) z § 165, oraz w myśl tw. o pochodnej różnicy dwóch funkcji, wnosimy, wobec (50), że dla każdej wartości $x \neq 0$ zbioru X :

$$f'_k(x) = x^{k-1} - x^k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

zatem, w szczególności, dla $x = 1$:

$$f'_k(1) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

skąd:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(1) = 0.$$

Obliczmy teraz $f'(1)$, gdzie $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. Wobec (50) znajdujemy w jednej chwili, dla $0 \leq x \leq 1$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = x$$

i przeto, stale w zbiorze X :

$$f'(x) = 1.$$

Jest tu więc

$$f'(1) = 1, \text{ zaś } \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(1) = 0$$

Zatem: pochodna szeregu nieskończonego nie jest wogóle równa szeregowi pochodnych jego składników.

Jako drugi przykład, połóżmy w zbiorze X wszystkich liczb przedziału $(0,1)$:

$$f_k(x) = \frac{x^{k+1}}{k} - \frac{x^{(k+1)^2}}{k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (51)$$

Jak wyżej, znajdujemy stąd w jednej chwili, że w całym zbiorze X :

$$f_k(x) = kx^{k-1} - (k+1)x^{(k+1)^2-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

skąd, w szczególności, dla $x = 1$:

$$f'_k(1) = -1,$$

i przeto szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(1)$$

jest rozbieżny, dając sumę $= -\infty$.

Natomiast, w myśl (51), mamy, dla $0 \leq x \leq 1$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = x,$$

skąd, w zbiorze X :

$$f'(1) = 1.$$

Pochodną szeregu $\sum f_k(x)$ w zbiorze X dla $x = 1$ jest więc liczba 1, natomiast szereg pochodnych jest dla $x = 1$ rozbieżny do $-\infty$.

Podobnież, kładąc

$$f_{2k-1}(x) = \frac{x^k}{k}, \quad f_{2k}(x) = -\frac{x^k}{k}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

otrzymalibyśmy szereg nieskończony $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, którego sumą $f(x)$ dla $0 \leq x \leq 1$ jest zero, skąd $f'(x) = 0$ w przedziale $(0,1)$, natomiast $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(1)$ daje szereg rozbieżny

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

nie posiadający żadnej oznaczonej sumy.

§ 168. Pochodna iloczynu.

Niech $f_1(z)$ i $f_2(z)$ będą dwie dane funkcje, posiadające w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodne skończone $f'_1(z_0)$ oraz $f'_2(z_0)$: będziemy więc mieli w zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z) - f_1(z_0)}{z - z_0} = f'_1(z_0) \quad \text{oraz} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_2(z) - f_2(z_0)}{z - z_0} = f'_2(z_0), \quad (52)$$

oraz, w myśl tw. 188, w zbiorze Z :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = f_2(z_0). \quad (53)$$

Wobec tożsamości

$$\frac{f_1(z)f_2(z) - f_1(z_0)f_2(z_0)}{z - z_0} = \frac{f_1(z) - f_1(z_0)}{z - z_0} f_2(z) + f_1(z_0) \frac{f_2(z) - f_2(z_0)}{z - z_0}$$

wzory (52) i (53) dają w jednej chwili, w myśl tw. 189 oraz 190:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z)f_2(z) - f_1(z_0)f_2(z_0)}{z - z_0} = f'_1(z_0)f_2(z_0) + f_1(z_0)f'_2(z_0)$$

w zbiorze Z , co dowodzi, że funkcja $f(z) = f_1(z)f_2(z)$ posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną

$$f'(z_0) = f'_1(z_0)f_2(z_0) + f_1(z_0)f'_2(z_0). \quad (54)$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 193. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest iloczynem dwóch funkcji $f_1(z)$ i $f_2(z)$, z których każda posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną skończoną, to funkcja $f(z)$ posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną $f'(z_0)$, określoną wzorem (54).

W szczególności, jeżeli jeden z czynników jest stałym, np. $f_2(z) = C$, gdzie C nie zależy od z , wzór (54) daje (w razie istnienia pochodnej $f'_1(z_0)$):

$$f'(z_0) = Cf'_1(z_0).$$

W razie, jeżeli $f(z_0) \neq 0$, wzór (54) możemy, wobec $f(z) = f_1(z)f_2(z)$, napisać w postaci

$$\frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = \frac{f'_1(z_0)}{f_1(z_0)} + \frac{f'_2(z_0)}{f_2(z_0)}.$$

Wzór ten daje się przez łatwą indukcję uogólnić na dowolną skończoną liczbę funkcji:

Jeżeli w zbiorze Z istnieje każda z pochodnych skończonych $f'_1(z_0), f'_2(z_0), \dots, f'_m(z_0)$, i jeżeli położymy $f(z) = f_1(z)f_2(z) \dots f_m(z)$, to, w razie $f(z_0) \neq 0$, mamy

$$\frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = \frac{f'_1(z_0)}{f_1(z_0)} + \frac{f'_2(z_0)}{f_2(z_0)} + \dots + \frac{f'_m(z_0)}{f_m(z_0)}. \quad (55)$$

W samej rzeczy: wzór (55) jest prawdziwy dla $m=2$; założmy, że jest on prawdziwy przy pewnym $m \geq 2$, i niech $f_1'(z), f_2'(z), \dots, f_{m+1}'(z)$ będą $m+1$ funkcji, posiadających w zbiorze Z odpowiednio pochodne skończone $f_1'(z_0), f_2'(z_0), \dots, f_{m+1}'(z_0)$; połączmy $F(z) = f_1(z)f_2(z) \dots f_{m+1}(z)$, $f_m(z)f_{m+1}(z) = \varphi(z)$, zakładając, że $F(z_0) \neq 0$. Ponieważ wzór (55) jest prawdziwy, w myśl założenia, dla m funkcji, jakoteż dla dwóch funkcji, więc mamy, z uwagi, że $F(z) = f_1(z)f_2(z) \dots f_{m-1}(z)\varphi(z)$ i że wobec $F(z_0) \neq 0$ musi być $\varphi(z_0) \neq 0$:

$$\frac{F'(z_0)}{F(z_0)} = \frac{f_1'(z_0)}{f_1(z_0)} + \frac{f_2'(z_0)}{f_2(z_0)} + \dots + \frac{f_{m-1}'(z_0)}{f_{m-1}(z_0)} + \frac{\varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)},$$

oraz

$$\frac{\varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)} = \frac{f_m'(z_0)}{f_m(z_0)} + \frac{f_{m+1}'(z_0)}{f_{m+1}(z_0)},$$

skąd w jednej chwili wynika prawdziwość wzoru (55) dla $m+1$ funkcji.

W szczególności, dla $f_k(z) = z - \alpha_k$, $f(z) = (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_m)$, dla $z \neq \alpha_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), otrzymujemy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - \alpha_1} + \frac{1}{z - \alpha_2} + \dots + \frac{1}{z - \alpha_m}.$$

§ 169. Pochodna ilorazu.

Niech $f_1(z)$ i $f_2(z)$ będą dwie dane funkcje, posiadające w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodne skończone $f_1'(z_0)$ oraz $f_2'(z_0)$, przy czym $f_2'(z_0) \neq 0$. Dla wszystkich tych liczb z zbioru Z , dla których $f_2(z) \neq 0$, iloraz $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ będzie posiadał oznaczoną wartość.

Niech, dalej, $z_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ oznacza ciąg nieskończony liczb zbioru Z , różnych od z_0 , zmierzający do z_0 . Z założenia, że istnieje w zbiorze Z pochodna $f_2'(z_0)$, wynika, jak wiemy, że funkcja $f_2(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą dla punktu z_0 ; mamy więc (wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$)

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(z_n) = f_2(z_0) \neq 0$ i przeto, dla dostatecznie wszelkich n , np. dla $n > \mu$, $f_2(z_n) \neq 0$. Możemy więc napisać dla $n > \mu$:

$$\begin{aligned} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} &= \frac{f_1(z_n)f_2(z_0) - f_1(z_0)f_2(z_n)}{(z_n - z_0)f_2(z_0)f_2(z_n)} = \\ &= \frac{1}{f_2(z_0)f_2(z_n)} \left[\frac{f_1(z_n) - f_1(z_0)}{z_n - z_0} f_2(z_0) - \frac{f_1(z_n) - f_1(z_0)}{z_n - z_0} f_1(z_0) \right], \end{aligned}$$

skąd, wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(z_n) = f_2(z_0) \neq 0$, oraz wobec definicji pochodnych $f_1'(z_0)$ i $f_2'(z_0)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{f_1'(z_0)f_2(z_0) - f_1(z_0)f_2'(z_0)}{[f_2(z_0)]^2}.$$

Udowodniliśmy więc następujące

Twierdzenie 194. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ilorazem funkcji $f_1(z)$ przez funkcję $f_2(z)$ i jeżeli w zbiorze Z istnieją dla punktu z_0 pochodne skończone $f_1'(z_0)$ i $f_2'(z_0)$, oraz jeżeli $f_2(z_0) \neq 0$, to istnieje w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodna $f'(z_0)$, przyczem

$$f'(z_0) = \frac{f_1'(z_0)f_2(z_0) - f_1(z_0)f_2'(z_0)}{[f_2(z_0)]^2} \quad (*)$$

Przykłady. Połóżmy $f_1(z) = \sin z$, $f_2(z) = \cos z$, $z_0 \neq (k + \frac{1}{2})\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$): będzie, jak wiemy, $\cos z_0 \neq 0$, $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \tan z$, i przeto w zbiorze liczb zespolonych będzie

$$f'(z_0) = \frac{\cos z_0 \cos z_0 - \sin z_0 \cdot (-\sin z_0)}{\cos^2 z_0} = \frac{\cos^2 z_0 + \sin^2 z_0}{\cos^2 z_0} = \frac{1}{\cos^2 z_0}.$$

Pochodną funkcji $\tan z$ jest więc [dla $z \neq (k + \frac{1}{2})\pi$] $\frac{1}{\cos^2 z}$.

Podobnie znaleźlibyśmy, że pochodną funkcji $\cot z$ (dla $z \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) jest $-\frac{1}{\sin^2 z}$.

Założmy teraz, że $f(z)$ jest funkcją wymierną, czyli ilorazem dwóch wielomianów całkowitych, $f_1(z):f_2(z)$. Licznik i mianownik prawej strony wzoru (*) będą, jak łatwo widzieć, znowu wielomianami całkowitymi. Zatem: pochodna funkcji wymiernej jest funkcją wymierną.

§ 170. Pochodna funkcji funkcji.

Założmy, że funkcja $u = \varphi(z)$ jest określoną w zbiorze Z i posiada w tym zbiorze dla punktu z_0 pochodną skończoną $\varphi'(z_0)$. Niech U oznacza zbiór wszystkich różnych wartości, jakie przyjmuje funkcja $\varphi(z)$ w zbiorze Z . Założmy, dalej, że w zbiorze U określoną jest funkcja $\psi(u)$, która posiada w tym zbiorze dla punktu $u_0 = \varphi(z_0)$ pochodną skończoną $\psi'(u_0)$. Połóżmy $f(z) = \psi(\varphi(z))$ — będzie to więc funkcja, określona w zbiorze Z . Udowodnimy, że funkcja $f(z)$ posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną $f'(z_0) = \psi'(u_0)\varphi'(z_0)$.

Niech więc $z_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ oznacza ciąg liczb zbioru Z , różnych od z_0 , zmierzający do z_0 . Połóżmy

$$u_n = \varphi(z_n), \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (56)$$

Rozpatrzmy osobno trzy następujące przypadki:

1) w ciągu (56) mamy co najwyżej skończoną liczbę wyrazów równych u_0 (zatem dla $n > \mu$ będzie stale $u_n \neq u_0$);

2) w ciągu (56) mamy co najwyżej skończoną liczbę wyrazów różnych od u_0 (zatem dla $n > \mu$ jest stale $u_n = u_0$);

3) w ciągu (56) mamy nieskończenie wiele wyrazów równych u_0 , jakoteż nieskończenie wiele wyrazów różnych od u_0 .

W pierwszym przypadku mamy $u_n \neq u_0$ dla $n > \mu$, i przeto możemy dla $n > \mu$ wypisać, wobec (56), tożsamość:

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{\psi(\varphi(z_n)) - \psi(\varphi(z_0))}{z_n - z_0} = \frac{\psi(u_n) - \psi(u_0)}{u_n - u_0} \cdot \frac{\varphi(z_n) - \varphi(z_0)}{z_n - z_0} \quad (57)$$

Z założenia, że istnieje pochodna $\varphi'(z_0)$ w zbiorze Z , wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(z_n) - \varphi(z_0)}{z_n - z_0} = \varphi'(z_0), \quad (58)$$

oraz że funkcja $\varphi(z)$ jest w zbiorze Z ciągłą dla punktu z_0 .

Mamy więc $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n) = \varphi(z_0)$, czyli, wobec (56), $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0$, i przeto (w myśl założenia, że w uważanym przypadku $u_n \neq u_0$ dla $n > \mu$), wobec istnienia pochodnej $\psi'(u_0)$ w zbiorze U :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(u_n) - \psi(u_0)}{u_n - u_0} = \psi'(u_0). \quad (59)$$

Wzór (57) daje więc, wobec (58) i (59):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \psi'(u_0) \cdot \varphi'(z_0). \quad (60)$$

Przejdźmy teraz do przypadku 2). Mamy tu, dla $n > \mu$ stale $u_n = u_0$, skąd $\psi(u_n) = \psi(u_0)$ dla $n > \mu$, czyli, wobec $f(z_n) = \psi(\varphi(z_n))$, oraz w myśl (56):

$$f(z_n) = f(z_0), \quad \text{dla } n > \mu,$$

co daje w jednej chwili:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = 0. \quad (61)$$

Z drugiej strony, wobec $u_n = u_0$ dla $n > \mu$, oraz w myśl (56), mamy

$$\varphi(z_n) = \varphi(z_0), \quad \text{dla } n > \mu,$$

co daje w jednej chwili:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(z_n) - \varphi(z_0)}{z_n - z_0} = 0.$$

czyli $\varphi'(z_0) = 0$, skąd

$$\psi'(u_0) \varphi'(z_0) = 0. \quad (62)$$

Wobec (61) i (62) wnosimy, że wzór (60) jest w uważanym przypadku prawdziwy.

Załóżmy wreszcie, że zachodzi przypadek 3). Oznaczmy przez u_n ($n = 1, 2, \dots$) kolejne wyrazy ciągu u_n , które są $\neq u_0$, zaś przez u_n — kolejne wyrazy ciągu u_n , które są $= u_0$. Jak w przypadku 1), znajdziemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \psi'(u_0) \varphi'(z_0), \quad (63)$$

zaś, jak w przypadku 2), znajdziemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \psi'(u_0) \varphi'(z_0). \quad (64)$$

Wzory (63) i (64) dają, w myśl twierdzeń 15 i 18, znowu wzór (60).

Udowodniliśmy więc, że dla każdego ciągu nieskończonego z_0 liczb zbioru Z , różnych od z_0 i zmierzających do z_0 , zachodzi wzór (60). Wynika stąd, że w zbiorze Z istnieje pochodna $f'(z_0) = \psi'(u_0) \varphi'(z_0)$. Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 195. Jeżeli funkcja $\varphi(z)$ jest określoną w zbiorze Z , zaś funkcja $\psi(u)$ — w zbiorze U wszystkich wartości funkcji $\varphi(z)$ w zbiorze Z , i jeżeli dla punktu z_0 istnieje w zbiorze Z pochodna skończona $\varphi'(z_0)$, zaś dla punktu $u_0 = \varphi(z_0)$ istnieje w zbiorze U pochodna skończona $\psi'(u_0)$, to funkcja $f(z) = \psi(\varphi(z))$ posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną $f'(z_0) = \psi'(u_0) \varphi'(z_0)$.

Z dowiedzionego twierdzenia wynika też natychmiast, że jeżeli w całym zbiorze Z istnieje pochodna $\varphi'(z)$, zaś w całym zbiorze U istnieje pochodna $\psi'(u) = \theta(u)$, to w całym zbiorze Z istnieje pochodna $f'(z)$, przyczem przy wszelkiem z , należącym do zbioru Z , mamy

$$f'(z) = \theta(\varphi(z)) \varphi'(z).$$

Jest to prawo wyznaczania pochodnej funkcji funkcji.

Przykłady.

1) Połóżmy $f(z) = e^{iz}$ (w zbiorze wszystkich liczb zespolonych). Możemy tu przyjąć $u = \varphi(z) = \sin z$, $\psi(u) = e^u$. Będziemy mieli $\varphi'(z) = \cos z$, $\psi'(u) = e^u$. Jest więc, w myśl dowiedzonego twierdzenia:

$$f'(z) = e^u \cos z = e^{iz} \cos z.$$

2) Połóżmy $f(z) = \sin(e^z)$. Możemy tu przyjąć $u = \varphi(z) = e^z$, $\psi(u) = \sin u$. Będzie więc

$$f'(z) = \cos u \cdot e^z = e^z \cos(e^z).$$

§ 171. Pochodna funkcji odwrotnej.

Załóżmy, że funkcja $f(z)$ posiada w zbiorze Z dla punktu z_0 pochodną skończoną $f'(z_0) \neq 0$. Niech U oznacza zbiór wszystkich różnych wartości, jakie przyjmuje funkcja $f(z)$ w zbiorze Z ; załóżmy, że funkcja $f(z)$ jest w zbiorze Z odwracalna: istnieje więc funkcja $F(u)$, określona w zbiorze U , która jest odwrotną dla $f(z)$ w zbiorze Z (§ 110). Załóżmy wreszcie, że funkcja $F(u)$ jest dla punktu $u_0 = f(z_0)$ ciągłą w zbiorze U . Powiadam, że funkcja $F(u)$ posiadać będzie w zbiorze U dla punktu u_0 pochodną $F'(u) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

W samej rzeczy, niech u_n ($n = 1, 2, \dots$) oznacza jakikolwiek ciąg liczb zbioru U , różnych od u_0 i zmierzających do u_0 . Połóżmy

$$z_n = F(u_n), \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (65)$$

Z założenia, że funkcja $F(u)$ jest w zbiorze U ciągłą dla punktu u_0 , i wobec $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0$, oraz (65), wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F(u_0). \quad (66)$$

Ponieważ funkcja $F(u)$ jest odwrotną dla $f(z)$, więc wobec $u_0 = f(z_0)$, mamy

$$F(u_0) = F(f(z_0)) = z_0, \quad (67)$$

i przeto wzór (66) daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0. \quad (68)$$

Gdyby przy pewnym naturalnym n było $z_n = z_0$, mielibyśmy $f(z_n) = f(z_0)$, co, z uwagi, że, wobec (65), mamy

$$f(z_n) = f(F(u_n)) = u_n, \quad (69)$$

dałoby $u_n = u_0$, wbrew założeniu, że wszystkie wyrazy ciągu u_n są różne od u_0 . Zatem wszystkie wyrazy ciągu z_n są różne od z_0 . Stąd, wobec (68) i w myśl założenia, że istnieje w zbiorze Z pochodna $f'(z_0)$, mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = f'(z_0),$$

co, wobec (69), (67) i (65), możemy napisać w postaci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u_0}{F(u_n) - F(u_0)} = f'(z_0),$$

co, wobec $f'(z_0) \neq 0$, daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(u_n) - F(u_0)}{u_n - u_0} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Dowiedliśmy więc, że istnieje w zbiorze U pochodna $F'(u_0)$ oraz że $F'(u_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$, c. b. d. o. Udowodniliśmy więc następujące

Twierdzenie 196. Jeżeli funkcja $u = f(z)$, określona w zbiorze Z , jest odwracalna, jeżeli dla punktu z_0 istnieje w zbiorze Z pochodna skończona $f'(z_0) \neq 0$ i jeżeli odwrócenie $z = F(u)$ funkcji $f(z)$ jest funkcją ciągłą dla punktu $u_0 = f(z_0)$ w zbiorze U wszystkich wartości funkcji $f(z)$ w zbiorze Z , to funkcja $F(u)$ posiada w zbiorze U dla punktu u_0 pochodną $F'(u_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

Z dowiedzonego twierdzenia wynika natychmiast, że jeżeli funkcja $u = f(z)$, określona w zbiorze Z , jest odwracalna, a jej funkcja odwrotna $F(u)$ jest ciągłą w całym zbiorze U , oraz jeżeli funkcja $f(z)$ posiada w całym zbiorze Z pochodną skończoną, różną od zera, to w całym zbiorze U zachodzi wzór $F'(u) = \frac{1}{f'(z)}$, gdzie $z = F(u)$.

Zastosowania.

1) Funkcja $y = f(x) = e^x$, uważana w zbiorze X wszystkich liczb rzeczywistych, daje jako zbiór odpowiednich wartości zbiór Y wszystkich liczb dodatnich, oraz jest, jak wiemy, odwracalna, a odwrócenie jej $x = F(y) = \lg y$ jest w zbiorze Y funkcją ciągłą. Dla każdej wartości rzeczywistej x funkcja $f(x) = e^x$ posiada, jak wiemy (§ 165), pochodną $f'(x) = e^x \neq 0$. Warunki naszego twier-

dzienia są tu więc spełnione dla każdej wartości zbioru X . Mamy więc przy wszelkiem y w zbiorze Y :

$$F'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Pochodną funkcji $\lg y$ jest więc w całym zbiorze liczb dodatnich $\frac{1}{y}$, co znaleźliśmy już na innej drodze w § 165.

2) Funkcja $y = f(x) = \operatorname{tg} x$, uważana w zbiorze X wszystkich liczb rzeczywistych x , leżących wewnątrz przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, daje, jako zbiór odpowiednich wartości, zbiór Y wszystkich liczb rzeczywistych, oraz jest, jak wiemy, odwracalna, a odwrócenie jej $x = F(y) = \operatorname{arctg} y$ jest w zbiorze Y funkcją ciągłą. Dla każdej wartości x w zbiorze X funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x$ posiada pochodną skończoną $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ (§ 170). Funkcja $F(y) = \operatorname{arctg} y$ posiada więc, w myśl naszego twierdzenia, w całym zbiorze Y pochodną $F'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x$, gdzie $x = \operatorname{arctg} y$, co daje $\operatorname{tg} x = y$ i przeto $\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$. Mamy więc $F'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$ w całym zbiorze Y . Dowiedliśmy więc, że w całym zbiorze liczb rzeczywistych pochodną funkcji $\operatorname{arctg} y$ jest $\frac{1}{1 + y^2}$.

3) Funkcja $y = f(x) = \cos x$, uważana w zbiorze X wszystkich liczb rzeczywistych przedziału $(0, \pi)$, daje, jako zbiór odpowiednich wartości, zbiór Y wszystkich liczb przedziału $(-1, 1)$, oraz jest, jak wiemy, odwracalna, a odwrócenie jej $x = F(y) = \arccos y$ jest w zbiorze Y funkcją ciągłą. Dla każdej wartości x zbioru X funkcja $f(x) = \cos x$ posiada pochodną $f'(x) = -\sin x$, która jest różną od zera przy wszelkiem rzeczywistem x , leżącym wewnątrz przedziału $(0, \pi)$. Ponieważ, dalej, liczbom x , leżącym wewnątrz przedziału $(0, \pi)$, odpowiadają wartości $y = \cos x$, leżące wewnątrz przedziału $(-1, 1)$, więc, w myśl naszego twierdzenia, funkcja $F(y) = \arccos y$ posiada dla $-1 < y < 1$ w przedziale $(-1, 1)$ pochodną $F'(y) = \frac{1}{-\sin x}$, gdzie $x = \arccos y$, co daje $\cos x = y$, skąd z uwagi, że x leży

wewnątrz przedziału $(0, \pi)$, w którym, jak wiemy $\sin x > 0$, wnosimy, że $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$. Jest więc

$$F'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \text{dla} \quad -1 < y < 1.$$

Funkcja $\arccos y$ posiada więc wewnątrz przedziału $(-1, 1)$ pochodną $-\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

Podobnież uważając funkcję $y = f(x) = \sin x$ w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, wywnioskowalibyśmy, że funkcja $x = F(y) = \arcsin y$ posiada dla $-1 < y < 1$ w przedziale $(-1, 1)$ pochodną $F'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$. Pochodne funkcji $\arccos y$ oraz $\arcsin y$ różnią się więc (dla $-1 < y < 1$) tylko znakiem, a więc suma ich jest stale zerem, co wynika zresztą bezpośrednio z twierdzenia o pochodnej sumy, oraz ze wzoru $\arccos y + \arcsin y = \pi/2$ (dla $-1 \leq y \leq 1$), znalezione w § 140.

§ 172. Zestawimy poniżej różne wzory, wyprowadzone przez nas dotychczas dla pochodnych różnych funkcji, przyczem symbol $Df(x)$ oznacza pochodną $f'(x)$.

- 1) $Dx^\mu = \mu x^{\mu-1}$ (w zbiorze liczb dodatnich, przy rzeczywistem μ).
- 2) $De^x = e^x$
- 3) $D \sin x = \cos x$
- 4) $D \cos x = -\sin x$
- 5) $D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$ (w zbiorze liczb zespolonych, różnych od $(k + \frac{1}{2})\pi$, gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
- 6) $D \lg x = \frac{1}{x}$ (w zbiorze liczb dodatnich).
- 7) $D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- 8) $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- 9) $D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1 + x^2}$ (w całym zbiorze liczb rzeczywistych).

Ze wzorów tych na pochodne funkcji zasadniczych, przez zastosowanie różnych twierdzeń ogólnych o pochodnych (mianowicie

o pochodnej sumy różnicy, iloczynu, ilorazu, funkcji funkcji, funkcji odwrotnej) można dalej otrzymać mnóstwo innych wzorów na pochodne różnych funkcji, jak prostszych, tak i bardziej złożonych. Przy wyprowadzaniu tych wzorów należy oczywiście w każdym przypadku uprzednio sprawdzić, czy warunki stosowalności twierdzeń i wzorów, na których się w danym razie opieramy, są zachowane.

Oto kilka przykładów.

1) Połóżmy w zbiorze wszystkich liczb zespolonych $f(z) = a^z$, gdzie a oznacza liczbę niezależną od z , różną od zera. W myśl definicji potęgi głównej, możemy napisać: $f(z) = e^{z \lg a}$, skąd, stosując twierdzenie o pochodnej funkcji funkcji, znajdziemy w jednej chwili (przy wszelkiem zespolonym z): $f'(z) = e^{z \lg a} \cdot \lg a = a^z \lg a$.

2) Przyjmijmy w zbiorze liczb dodatnich $f(x) = x^x$. Pisząc $f(x) = e^{x \lg x}$, będziemy mogli zastosować twierdzenie o pochodnej funkcji funkcji, skąd $Df(x) = e^{x \lg x} D(x \lg x)$, dalej zaś twierdzenie o pochodnej iloczynu, skąd $D(x \lg x) = \lg x D x + x D \lg x = \lg x + 1$. Jest więc w zbiorze liczb dodatnich

$$Dx^x = x^x (\lg x + 1).$$

3) Jako nieco ogólniejszy przykład, połóżmy $\varphi(x) = \lg f(x)$, zakładając, że funkcja $\varphi(x)$ jest w zbiorze X dodatnią i posiada dla wartości x_0 pochodną $\varphi'(x_0)$. Stosując twierdzenie o pochodnej funkcji funkcji, będziemy mieli (w zbiorze X):

$$\varphi'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Jest to t. zw. *pochodna logarytmiczna* funkcji $f(x)$. Jeżeli $f(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_m(x)$, gdzie $f_k(x) > 0$, dla $k = 1, 2, \dots, m$, w zbiorze X , oraz jeżeli istnieje każda z pochodnych $f'_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m$), to, wobec

$$\lg f(x) = \lg f_1(x) + \lg f_2(x) + \dots + \lg f_m(x),$$

biorąc po obu stronach pochodne, otrzymamy (w zbiorze X)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'_1(x)}{f_1(x)} + \frac{f'_2(x)}{f_2(x)} + \dots + \frac{f'_m(x)}{f_m(x)}$$

— wzór, który wyprowadziliśmy na innej drodze w § 168.

4) Niech $f(z)$ oznacza wielomian całkowity stopnia m -go,

a — jego pierwiastek krotności k (zob. § 66). Możemy więc napisać przy wszelkiem zespolonym z :

$$f(z) = (z - a)^k \varphi(z), \quad (70)$$

gdzie $\varphi(z)$ oznacza wielomian całkowity, przyczem $\varphi(a) \neq 0$.

Biorąc pochodne po obu stronach wzoru (70), otrzymujemy, w myśl twierdzenia o pochodnej iloczynu, oraz funkcji funkcji:

$$f'(z) = k(z - a)^{k-1} \varphi(z) + (z - a)^k \varphi'(z),$$

czyli

$$f'(z) = (z - a)^{k-1} \psi(z), \quad (71)$$

gdzie $\psi(z) = k\varphi(z) + (z - a)\varphi'(z)$ jest oczywiście wielomianem całkowitym (stopnia $m - k$ -go), przyczem $\psi(a) = k\varphi(a) \neq 0$, co, wobec (71) dowodzi, że a jest pierwiastkiem $k - 1$ -krotnym wielomianu $f''(z)$. Stąd

Twierdzenie 197. *Każdy k -krotny pierwiastek wielomianu całkowitego $f(z)$ jest $k - 1$ -krotnym pierwiastkiem jego pochodnej $f'(z)$.*

Zatem: każdy wielokrotny pierwiastek wielomianu $f(z)$ jest zarazem pierwiastkiem jego pochodnej $f'(z)$. Wynika stąd, że pierwiastek wielomianu $f(z)$, nie będący pierwiastkiem jego pochodnej $f'(z)$, jest jednokrotnym pierwiastkiem wielomianu $f(z)$ i naodwrot.

Ćwiczenia.

1) Dowieść, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest rosnącą i posiada dla wartości x_0 pochodną $f'(x_0) = 0$, to funkcja odwrotna posiada dla wartości $y_0 = f(x_0)$ pochodną $= +\infty$.

2) Dowieść, że $D \lg \frac{x}{2} = \frac{1}{\sin x}$ (dla $0 < x < \pi$).

3) Dowieść, że funkcja $f(x)$, określona w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych X przez warunki $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, dla $x \neq 0$, zaś $f(0) = 0$, posiada dla każdej wartości rzeczywistej w zbiorze X oznaczoną skończoną pochodną $f'(x)$, która jest nieciągłą w punkcie $x = 0$.

§ 173. Funkcja ciągła, nie posiadająca pochodnej.

Funkcja może być ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych, lecz nie posiadać dla żadnej wartości zmiennej pochodnej skończonej, ani nieskończonej. Podamy tu przykład takiej właśnie funkcji, zbudowany przez G. Faber'a.

Oznaczmy, dla rzeczywistych x , przez $\varphi(x)$ bezwzględną wartość różnicy między liczbą x oraz najbliższą ($\geq x$) [liczbą całkowitą]. Innymi słowy, określimy funkcję $\varphi(x)$ przez warunki:

$$\varphi(x) = x - k, \text{ dla } k \leq x \leq k + \frac{1}{2}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

zaś

$$\varphi(x) = k + 1 - x, \text{ dla } k + \frac{1}{2} < x < k + 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Powiadamy, że przy wszelkich rzeczywistych x i y będziemy mieli nierówność

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|. \quad (72)$$

Dla dowodu zauważymy przedewszystkiem, że z definicji funkcji $\varphi(x)$ wynika, iż stale

$$0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{2}, \text{ oraz } -\frac{1}{2} \leq -\varphi(x) \leq 0$$

i przeto zawsze

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{1}{2}. \quad (73)$$

Jeżeli więc $|x - y| \geq \frac{1}{2}$, to, w myśl (73), nierówność (72) jest prawdziwa. Wystarczy więc dalej, dla dowodu nierówności (72), zakładać, iż $|x - y| < \frac{1}{2}$. Wobec symetrii wzoru (72) ze względu na x i y , oraz uwagi, iż jest on prawdziwy dla $x = y$, możemy, dalej, zakładać, iż $x < y$. Rozróżnimy, dalej, dwa przypadki:

1) Między liczbami $2x$ i $2y$ nie leży żadna liczba całkowita. Kładąc $E2x = p$, będziemy więc mieli

$$p \leq 2x < 2y \leq p + 1,$$

skąd

$$\frac{p}{2} \leq x < y \leq \frac{p+1}{2}. \quad (74)$$

Jeżeli p jest parzyste, to, wobec (74) i w myśl definicji funkcji $\varphi(x)$, będziemy mieli oczywiście

$$\varphi(x) = x - \frac{p}{2}, \quad \varphi(y) = y - \frac{p}{2},$$

zatem

$$\varphi(x) - \varphi(y) = x - y.$$

Jeżeli zaś p jest nieparzyste, to w myśl (74) i definicji funkcji $\varphi(x)$, będzie

$$\varphi(x) = \frac{p+1}{2} - x, \quad \varphi(y) = \frac{p+1}{2} - y,$$

skąd

$$\varphi(x) - \varphi(y) = y - x.$$

W każdym więc razie będzie w uważanym przypadku

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|,$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (72).

2) Między liczbami $2x$ oraz $2y$ leży liczba całkowita — oczywiście tylko jedna (gdyż z założenia $|x - y| < \frac{1}{2}$ wynika $2y - 2x < 1$): oznaczmy ją przez p . Będzie więc

$$p - 1 \leq 2x < p < 2y \leq p + 1,$$

skąd

$$\frac{p-1}{2} \leq x < \frac{p}{2} < y \leq \frac{p+1}{2}. \quad (75)$$

Jeżeli p jest parzyste, to mamy, wobec (75) i definicji funkcji $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{p}{2} - x, \quad \varphi(y) = y - \frac{p}{2},$$

skąd

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x)| + |\varphi(y)| = \frac{p}{2} - x + y - \frac{p}{2} = y - x = |x - y|,$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (72).

Jeżeli wreszcie p jest nieparzyste, to mamy, wobec (75) i w myśl definicji funkcji $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = x - \frac{p-1}{2}, \quad \varphi(y) = \frac{p+1}{2} - y,$$

skąd

$$\varphi(x) - \varphi(y) = x + y - p = \left(x - \frac{p}{2}\right) + \left(y - \frac{p}{2}\right)$$

i przeto, wobec (75):

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \left|x - \frac{p}{2}\right| + \left|y - \frac{p}{2}\right| = \frac{p}{2} - x + y - \frac{p}{2} = y - x = |x - y|,$$

co znowu dowodzi prawdziwości nierówności (72).

Nierówność (72) udowodniliśmy zatem dla wszelkich rzeczywistych x i y . Wynika z niej natychmiast, że funkcja $\varphi(x)$ jest ciągła w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.

Położmy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{10^n}. \quad (76)$$

Szereg (76) jest oczywiście zbieżny jednostajnie w całym zbiorze liczb rzeczywistych, gdyż mamy stale $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{2}$. Funkcja $f(x)$, określona wzorem (76), jest więc ciągłą w całym zbiorze liczb rzeczywistych. Powiadam, że funkcja $f(x)$ nie posiada pochodnej dla żadnej wartości rzeczywistej zmiennej.

Niech x_0 oznacza daną liczbę rzeczywistą; zbudujemy dwa ciągi: jeden $x'_p < x_0$, drugi $x''_p > x_0$, oba zmierzające do x_0 dla $p = \infty$. Ciągi te określimy w następujący sposób.

Mamy, przy danem x_0 i danem naturalnem p :

$$\text{albo } \varphi(2^p x_0) \leq \frac{1}{2}, \quad (a)$$

$$\text{albo też } \varphi(2^p x_0) > \frac{1}{2}. \quad (b)$$

W przypadku (a) mamy $\varphi(2^p x_0) < \frac{1}{2}$: liczba $2^p x_0$ nie może więc być formy $k + \frac{1}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Można jednak w tym przypadku wyznaczyć dwie kolejne liczby tej formy, między którymi będzie zawarta liczba $2^p x_0$. Innymi słowy, w przypadku (a) da się wyznaczyć oznaczona w zupełności liczba całkowita k , taka iż będzie

$$k - \frac{1}{2} < 2^p x_0 < k + \frac{1}{2},$$

czyli

$$\frac{k - \frac{1}{2}}{2^p} < x_0 < \frac{k + \frac{1}{2}}{2^p}. \quad (77)$$

Położmy w tym razie

$$x'_p = \frac{k - \frac{1}{2}}{2^p}, \quad x''_p = \frac{k + \frac{1}{2}}{2^p}. \quad (78)$$

Będzie oczywiście, wobec (77) i (78):

$$x'_p < x_0 < x''_p, \quad \text{oraz} \quad x''_p - x'_p = \frac{1}{2^p}, \quad (79)$$

nadto, wobec (78) oraz definicji funkcji φ :

$$\varphi(2^p x'_p) = \varphi(k - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, \quad \varphi(2^p x''_p) = \varphi(k + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}. \quad (80)$$

Wzory (80) dają, z uwagi, że w badanym przypadku zachodzi nierówność (a):

$$\varphi(2^p x_0) - \varphi(2^p x'_p) \leq -\frac{1}{2}, \quad \text{oraz} \quad \varphi(2^p x_0) - \varphi(2^p x''_p) \leq -\frac{1}{2}. \quad (81)$$

W przypadku (b) liczba $2^p x_0$ nie może być całkowitą (gdzie wtedy byłoby $\varphi(2^p x_0) = 0$); jest ona więc zawartą między oznaczonymi w zupełności kolejnymi liczbami całkowitemi k i $k+1$:

$$k < 2^p x_0 < k+1,$$

zatem

$$\frac{k}{2^p} < x_0 < \frac{k+1}{2^p}. \quad (82)$$

Położmy w tym razie

$$x'_p = \frac{k}{2^p}, \quad x''_p = \frac{k+1}{2^p}. \quad (83)$$

Wobec (83) i (82) będziemy znowu mieli wzory (79), nadto oczywiście,

$$\varphi(2^p x'_p) = \varphi(2^p x''_p) = 0, \quad (84)$$

gdzie obie liczby $2^p x'_p$ oraz $2^p x''_p$ są całkowite.

Ponieważ, dalej, w uważanym przypadku zachodzi nierówność (b), więc, wobec (84), będziemy mieli

$$\varphi(2^p x_0) - \varphi(2^p x'_p) > \frac{1}{2}, \quad \text{oraz} \quad \varphi(2^p x_0) - \varphi(2^p x''_p) > \frac{1}{2}. \quad (85)$$

Wyznaczyliśmy więc dwa ciągi x'_p oraz x''_p takie, iż stale zachodzą wzory (79), oraz, albo nierówności (81), albo nierówności (85), w każdym więc razie nierówności

$$|\varphi(2^p x_0) - \varphi(2^p x'_p)| \geq \frac{1}{2}, \quad \text{oraz} \quad |\varphi(2^p x_0) - \varphi(2^p x''_p)| \geq \frac{1}{2}. \quad (86)$$

Wobec (79) wnosimy, że oba ciągi x'_p oraz x''_p zmierzają do x_0 , przytem, wobec (81), względnie (85), wnosimy, że liczby

$$\varphi(2^p x_0) - \varphi(2^p x_0) \quad \text{oraz} \quad \varphi(2^p x_0) - \varphi(2^p x''_p) \quad (87)$$

są zawsze jednego znaku (t. j. albo obie ujemne, albo obie dodatnie).

Wobec (72) mamy, zarówno dla $x_p = x'_p$, jak i dla $x_p = x''_p$:

$$\left| \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\varphi(2^n x_0)}{10^n} - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\varphi(2^n x_p)}{10^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{p-1} \frac{|2^n x_0 - 2^n x_p|}{10^n} < \frac{1}{2^p} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{2^n}{10^n}, \quad (88)$$

gdzie, wobec (79), mamy

$$|x_0 - x'_p| < \frac{1}{2^p}, \quad \text{jakoteż} \quad |x_0 - x''_p| < \frac{1}{2^p}. \quad (89)$$

Mamy, dalej, oczywiście

$$\frac{1}{2^p!} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{2^{n!}}{10^n} \leq \frac{1}{2^p!} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{2^{(p-1)!}}{10^n} < \frac{1}{2^{p!-(p-1)!}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9 \cdot 2^{(p-1)!(p-1)}}. \quad (90)$$

Lecz, dla $p \geq 4$ mamy

$$(p-1)!(p-1) \geq (p-2)!9 > (p-2)!8 \geq 8(p-2) = 4(p+p-4) \geq 4p, \quad \text{skąd}$$

$$2^{(p-1)!(p-1)} > 2^{4p} = 16^p > 10^p, \quad \text{dla } p \geq 4. \quad (91)$$

Wobec (88), (90) i (91) mamy więc

$$\left| \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\varphi(2^{n!}x_0)}{10^n} - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\varphi(2^{n!}x_p)}{10^n} \right| < \frac{1}{9 \cdot 10^p}, \quad \text{dla } p \geq 4. \quad (92)$$

Mamy, dalej, z uwagi, że zawsze $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{2}$:

$$\left| \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\varphi(2^{n!}x_0)}{10^n} - \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\varphi(2^{n!}x_p)}{10^n} \right| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9 \cdot 10^p}. \quad (93)$$

Wreszcie, wobec (86), możemy napisać, zarówno dla $x_p = x'_p$, jak i dla $x_p = x''_p$:

$$\left| \frac{\varphi(2^{p!}x_0)}{10^p} - \frac{\varphi(2^{p!}x_p)}{10^p} \right| \geq \frac{1}{4 \cdot 10^p}. \quad (94)$$

Nierówności (92), (94) i (93) dają w jednej chwili, wobec (76):

$$|f(x_0) - f(x_p)| > \frac{1}{4 \cdot 10^p} - \frac{1}{9 \cdot 10^p} - \frac{1}{9 \cdot 10^p} = \frac{1}{36 \cdot 10^p}, \quad \text{dla } p \geq 4,$$

zarówno dla $x_p = x'_p$, jak i dla $x_p = x''_p$, czyli

$$|f(x_0) - f(x'_p)| > \frac{1}{36 \cdot 10^p}, \quad \text{oraz } |f(x_0) - f(x''_p)| > \frac{1}{36 \cdot 10^p} \quad \text{dla } p \geq 4, \quad (95)$$

przytem, z uwagi, że liczby (87) są, jak dowiedliśmy wyżej, zawsze jednego znaku, wnosimy z łatwością (wobec nierówności (92), (94) i (93)), że liczby

$$f(x_0) - f(x'_p) \quad \text{oraz} \quad f(x_0) - f(x''_p) \quad (p \geq 4)$$

są jednego znaku. Z uwagi, że, wobec (79), $x_0 - x'_p > 0$, zaś $x_0 - x''_p < 0$, wnosimy stąd natychmiast, że liczby

$$\frac{f(x_0) - f(x'_p)}{x_0 - x'_p} \quad \text{oraz} \quad \frac{f(x_0) - f(x''_p)}{x_0 - x''_p}$$

są zawsze różnych znaków (dla $p = 4, 5, 6, \dots$). Wobec $\lim_{p \rightarrow \infty} x'_p = \lim_{p \rightarrow \infty} x''_p = x_0$, dowodzi to, że pochodna $f'(x_0)$, o ile istnieje jako oznaczona liczba skończona lub nieskończona, nie może być różną od zera. Z drugiej atoli strony, wobec (95) oraz (89), mamy

$$\left| \frac{f(x_0) - f(x_p)}{x_0 - x_p} \right| > \frac{2^{p!}}{36 \cdot 10^p},$$

co, wobec $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2^{p!}}{36 \cdot 10^p} = \infty$, dowodzi, że $f'(x_0)$ nie może być liczbą skończoną.

Dowiedliśmy więc, że funkcja $f(x)$ nie posiada dla wartości x_0 pochodnej ani skończonej, ani nieskończonej.

Istnieją więc funkcje ciągłe, nie posiadające pochodnej (skończonej, ani nieskończonej) dla żadnej wartości zmiennej.

Z drugiej strony, zauważymy, że istnieją funkcje zmiennej rzeczywistej wszędziegdy nieciągłe, a jednak wszędziegdy posiadające pochodną. Taką jest np. funkcja $f(x)$, określona jak następuje. Jeżeli x jest skończonym ułamkiem dwójkowym o m cyfrach, to $f(x) = 6^{-2^m}$, w przeciwnym zaś razie $f(x) = 0$. Określona w ten sposób funkcja jest nieciągła dla każdego skończonego ułamka dwójkowego, natomiast $f'(x) = 0$ dla każdej liczby niecałkowitej, będącej skończonym ułamkiem trójkowym. (Wewnątrz każdego więc przedziału istnieje punkt, w którym funkcja nasza jest nieciągła, jakoteż punkt, w którym funkcja nasza posiada pochodną $= 0$).¹⁾

§ 174. Pochodne rzędów wyższych. Jeżeli funkcja $f(z)$ posiada w zbiorze Z pochodną $f'(z)$ dla każdego punktu z pewnego otoczenia danego punktu z_0 (t. j. przy pewnym dodatnim δ , dla każdej liczby zespolonej z zbioru Z , takiej iż $|z - z_0| < \delta$), i jeżeli funkcja $\varphi(z) = f'(z)$, określona w ten sposób dla pewnego otoczenia punktu z_0 , posiada dla tego punktu w zbiorze Z pochodną $\varphi'(z_0)$, to liczbę $\varphi'(z_0)$ nazywamy *pochodną 2-go rzędu*, albo *drugą pochodną* funkcji $f(z)$ w zbiorze Z dla punktu z_0 , i oznaczamy przez $f''(z_0)$. Podobnie, jeżeli pochodna $\psi(z) = f''(z)$ istnieje w pewnym otoczeniu punktu z_0 w zbiorze Z , i jeżeli w zbiorze Z istnieje pochodna $\psi'(z_0)$, to liczbę $\psi'(z_0)$ nazywamy *pochodną trzeciego rzędu* funkcji $f(z)$ w punkcie z_0 i oznaczamy przez $f'''(z_0)$.

¹⁾ Zob. moją notatkę „O funkcji nieciągłej, różniczkowalnej” Wektor 1913.

Ogólnie, dochodzimy w ten sposób do pojęcia n -tej pochodnej $f^{(n)}(z)$. Pochodną n -tego rzędu, $f^{(n)}(z)$, oznaczamy też przez $D^n f(z)$.

Ze wzoru $De^z = e^z$ wnosimy np., że w całym zbiorze liczb zespolonych mamy $D^n e^z = e^z$ (dla $n = 1, 2, \dots$).

Przy stałym a , ze wzoru $De^{az} = ae^{az}$, wnosimy, drogą łatwej indukcji, że $D^n e^{az} = a^n e^{az}$.

Przy naturalnym k mamy, w zbiorze liczb zespolonych $Dz^k = k z^{k-1}$, skąd, drogą łatwej indukcji:

$$D^n z^k = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)z^{k-n};$$

wnosimy stąd, że $D^n z^k = k!$, oraz że $D^n z^k = 0$, dla $n > k$, skąd wynika z łatwością, że n -ta pochodna wielomianu stopnia $< n$ jest stale zerem.

W zbiorze liczb dodatnich mamy, przy stałym rzeczywistym μ (§ 172): $Dx^\mu = \mu x^{\mu-1}$, skąd

$$D^n x^\mu = \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n}. \quad (96)$$

Ze wzoru $D \lg x = x^{-1}$ (§ 165) wynika, wobec (96), że w zbiorze liczb dodatnich

$$D^n \lg x = D^{n-1} x^{-1} = (-1)(-2)\dots(-n+1)x^{-n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Wzór $D \sin z = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ daje z łatwością, w zbiorze liczb zespolonych:

$$D^n \sin z = \sin\left(z + n\frac{\pi}{2}\right);$$

podobnie, wzór $D \cos z = -\sin z = \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ daje:

$$D^n \cos z = \cos\left(z + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Wzór Leibniza na n -tą pochodną iloczynu. Niech $u = \varphi(z)$, $v = \psi(z)$ będą dwie dane funkcje, posiadające w zbiorze Z kolejne pochodne aż do n -tej. W myśl wzoru na pochodną iloczynu, mamy:

$$D(uv) = vDu + uDv,$$

skąd, w myśl twierdzeń o pochodnej sumy i iloczynu:

$$D^2(uv) = D(vDu + uDv) = vD^2u + 2Du \cdot Dv + uD^2v.$$

Biorąc dalsze pochodne i stosując wciąż twierdzenia o pochodnej sumy i iloczynu, otrzymujemy, drogą łatwej indukcji, wzór:

$$D^n(uv) = vD^n u + \binom{n}{1} D^{n-1} u \cdot Dv + \binom{n}{2} D^{n-2} u D^2 v + \dots \\ \dots + \binom{n-1}{n} Du \cdot D^{n-1} v + uD^n v,$$

znany pod nazwą wzoru Leibniza.

Ćwiczenia.

1) Wyprowadzić wzór na $D^n \arctg x$, opierając się na wzorze

$$D \arctg x = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right].$$

2) Wyprowadzić wzory:

$$D^n (e^x \sin x) = \frac{e^x}{\sin^n \frac{x}{4}} \sin \left(x + \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$D^n (e^x \cos x) = \frac{e^x}{\sin^n \frac{x}{4}} \cos \left(x + \frac{n\pi}{4} \right).$$

3) Udowodnić, że

$$D^n \left(\lg x \right) = (-1)^{n-1} \frac{n!}{x^{n+1}} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \lg x \right].$$

4) Udowodnić, że jeżeli funkcja zmiennej rzeczywistej $f(x)$ posiada dla wartości x_0 oznaczoną pochodną (skończoną lub nieskończoną) $f'(x_0)$, i jeżeli u_n i v_n ($n = 1, 2, \dots$) są dwa ciągi nieskończone, takie, iż

$$u_n < x_0 < v_n, \quad (1)$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = x_0, \quad (2)$$

to mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} = f'(x_0). \quad (3)$$

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ posiada dla wartości x_0 pochodną skończoną $f'(x_0)$ i niech u_n i v_n będą dwa ciągi nieskończone, spełniające warunki (1) i (2). Mamy oczywistą tożsamość

$$\frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} - f'(x_0) = \left[\frac{f(v_n) - f(x_0)}{v_n - x_0} - f'(x_0) \right] \frac{v_n - x_0}{v_n - u_n} + \\ + \left[\frac{f(x_0) - f(u_n)}{x_0 - u_n} - f'(x_0) \right] \frac{x_0 - u_n}{v_n - u_n}. \quad (4)$$

Lecz, wobec (1):

$$0 < \frac{v_n - x_0}{v_n - u_n} < 1 \text{ oraz } 0 < \frac{x_0 - u_n}{v_n - u_n} < 1, \quad (5)$$

zaś z założenia, że istnieje pochodna $f'(x)$, oraz w myśl (2) wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(v_n) - f(x_0)}{v_n - x_0} - f'(x_0) \right] = 0, \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x_0) - f(u_n)}{x_0 - u_n} - f'(x_0) \right] = 0. \quad (6)$$

Tożsamość (4) daje więc, wobec (5) i (6) w jednej chwili, w granicy dla $n = \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} - f'(x_0) \right] = 0,$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (3).

Załóżmy teraz, że $f'(x_0) = +\infty$, i niech u_n i v_n będą znowu dwa ciągi, spełniające warunki (1) i (2).

Niech A oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. W myśl założenia, że $f'(x) = -\infty$, oraz wobec (2), będziemy mieli

$$\frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - x_0} > A, \text{ oraz } \frac{f(x_0) - f(u_n)}{x_0 - u_n} > A, \text{ dla } n > \mu,$$

skąd, z uwagi, że, wobec (1), $\frac{v_n - x_0}{v_n - u_n} > 0$, oraz $\frac{x_0 - u_n}{v_n - u_n} > 0$, znajdujemy:

$$\begin{aligned} \frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} &= \frac{f(v_n) - f(x_0)}{v_n - x_0} \cdot \frac{v_n - x_0}{v_n - u_n} + \frac{f(x_0) - f(u_n)}{x_0 - u_n} \cdot \frac{x_0 - u_n}{v_n - u_n} > \\ &> A \cdot \frac{v_n - x_0}{v_n - u_n} + A \cdot \frac{x_0 - u_n}{v_n - u_n} = A, \text{ dla } n > \mu, \end{aligned}$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} = +\infty = f'(x_0).$$

Podobnie udowodnilibyśmy wzór (3) w przypadku $f'(x_0) = -\infty$.

W związku z dowiedzionym twierdzeniem zauważymy, że same warunki (2), nawet w razie istnienia skończonej pochodnej $f'(x_0)$, jeszcze nie pociągają za sobą wzoru (3). Np. dla funkcji $f(x)$, określonej przez warunki

$$f(0) = 0, \quad f(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x}, \quad \text{dla } x \neq 0,$$

mamy oczywiście

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(h)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} h \sin \frac{\pi}{h} = 0,$$

lecz, kładąc

$$u_n = \frac{1}{2n + \frac{1}{2}}, \quad v_n = \frac{1}{2n - \frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

będziemy mieli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0, \quad f(v_n) = -\frac{1}{(2n - \frac{1}{2})^2}, \quad f(u_n) = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})^2},$$

natomiast

$$\frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} = -\frac{2n + \frac{1}{2}}{2n - \frac{1}{2}} - \frac{2n - \frac{1}{2}}{2n + \frac{1}{2}}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

i przeto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} = -2 \neq f'(0).$$

5) Udowodnić, że jeżeli funkcja $f(x)$ posiada dla wartości x_0 oznaczoną pochodną (skończoną lub nieskończoną) $f'(x_0)$, to mamy:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Dowód. Jest to szczególny przypadek twierdzenia udowodnionego pod 4), gdy $u_n = x_0 - \delta_n$, $v_n = x_0 + \delta_n$, $\delta_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.

Granicę

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

(o ile istnieje) nazywamy *uogólnioną pochodną* funkcji $f(x)$ dla wartości x_0 . Jeżeli więc istnieje pochodna $f'(x_0)$, to istnieje też dla wartości x_0 uogólniona pochodna i ma tę samą wartość. Zauważymy jednak, że z istnienia uogólnionej pochodnej nie wynika jeszcze istnienie zwykłej pochodnej. Np. dla funkcji $f(x) = |x|$ mamy oczywiście $f(h) - f(-h) = 0$ przy wszelkim rzeczywistym h , skąd wynika natychmiast, że uogólnioną pochodną funkcji $f(x)$ dla $x = 0$ jest zero, natomiast pochodna $f'(0)$ nie istnieje. Funkcja, posiadająca wszędzie skończoną uogólnioną pochodną, może nawet nie być ciągłą, np. funkcja $f(x)$, określona przez warunki $f(x) = 0$ dla x różnych od zera, zaś $f(0) = 1$, która jest nieciągłą dla wartości $x = 0$, lecz posiada wszędzie uogólnioną pochodną równą zeru. Nie wiadomo dotąd, czy istnieje funkcja zmiennej rzeczywistej, mająca nieciągłości wewnątrz każdego przedziału i posiadająca wszędzie uogólnioną pochodną równą zeru. (Jest to zagadnienie prof. Steinhausa: *Fundamenta Mathematicae* t. IV (1923), p. 368).

6) Udowodnić, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona w otoczeniu punktu x_0 i jeżeli

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)] = 0,$$

to funkcja $f(x)$ jest ciągła dla $x = x_0$. (Zob. *Prace mat.-fiz.* t. 26 (1913), str. 125)

7) Udowodnić, że jeżeli dla wartości x_0 istnieje pochodna skończona $f'(x_0)$, to

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)}{h} = f'(x_0), \quad (7)$$

oraz, że twierdzenie to nie jest prawdziwe, jeżeli pochodna $f'(x_0)$ jest nieskończoną. Okazać nadto, że granica, stojąca po lewej stronie wzoru (7), może istnieć, jeżeli funkcja $f(x)$ nie jest ciągłą dla $x = x_0$.