(Należy się oprzeć na tożsamości $\frac{1}{\cos z} = 2\cos z - 2\operatorname{ctg} 2z \,.\, \sin z$, oraz na wzorach (46), (49) i 35), oraz porównać współczynniki rozwinięć po obu stronach).

2) Dowieść, że

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

3) Udowodnić następujące związki, zachodzące między sumami $S_p = S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$:

$$S_1^2 = S_3;\; 4\,S_1^3 = 3\,S_5 + S_3 \text{ (Amigues)};\; 2\,S_1^4 = S_7 + S_5 \text{ (Jacobi)};$$
$$3\,S_2^2 = 2\,S_5 + S_3 \text{ (Gauss)};\; 6\,S_1\,S_3 = 5\,S_4 + S_2 \text{ (Fermat)}.$$

ROZDZIAŁ XX.

Funkcja Γ Eulera oraz jej ważniejsze własności.

§ 161. Połóżmy przy wszelkim zespolonem z:

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}$$

Powiadam, że ciąg iloczynów cząstkowych iloczynu (1) jest zbieżny jednostajnie w każdym ograniczonym zbiorze liczb zespolonych z.

W myśl wzoru (14) z § 133, mamy przy wszelkiem zespolonem z i naturalnem k:

$$e^{-\frac{z}{k}} = 1 - \frac{z}{k} + \frac{z^2}{2!\,k^2} - \frac{z^3}{3!\,k^3} + \dots,$$

zatem:

$$\frac{z}{k}e^{-\frac{z}{k}} = \frac{z}{k} - \frac{z^2}{1!\,k^2} + \frac{z^3}{2!\,k^3} - \frac{z^4}{3!\,k^4} + \dots$$

oraz

$$\left(1 + \frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}} - 1 = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{1!}\right)\frac{z^2}{k^2} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right)\frac{z^3}{k^3} + \dots,$$

i przeto, z uwagi, że

$$\left|\left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right)\frac{z^{n+1}}{k^{n+1}}\right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{n!\,k^{n+1}}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

otrzymujemy:

$$\left|\left(1 + \frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}} - 1\right| \leq \frac{|z|^2}{1!\,k^2} + \frac{|z|^3}{2!\,k^3} + \frac{|z|^4}{3!\,k^4} + \dots$$
$$= \frac{|z|}{k^2}\left(\frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!\,k} + \frac{|z|^3}{3!\,k^2} + \dots\right) \leq \frac{|z|}{k^2}e^{|z|}. \tag{2}$$

Niech A oznacza dowolną daną liczbę dodatnią; połóżmy:

$$Ae^A = B. \tag{3}$$

Połóżmy, dalej:

$$\left(1 + \frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}} = 1 + u_k(z); \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \tag{4}$$

w myśl (2) i (3) będzie:

$$|u_k(z)| \leq \frac{B}{k^2}, \quad \text{dla} \quad |z| \leq A, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{5}$$

Wobec zbieżności szeregu nieskończonego $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{B}{k^2}$ i w myśl tw. 119, iloczyn nieskończony

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{B}{k^2}\right) \tag{6}$$

jest zbieżny: oznaczmy przez P jego wartość: będzie to więc pewna liczba dodatnia.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec zbieżności iloczynu (6), oraz w myśl tw. 117, dla liczby ε będzie istniało takie μ, iż

$$\prod_{k=n+1}^{n+p}\left(1 + \frac{B}{k^2}\right) - 1 < \frac{\varepsilon}{P}, \quad \text{dla} \quad n > \mu, \quad p = 1, 2, 3, \dots \tag{7}$$

Wobec (5) mamy, jak łatwo widzieć, dla $|z| \leq A$:

$$\left|\prod_{k=n+1}^{n+p}\left(1 + u_k(z)\right) - 1\right| \leq \prod_{k=n+1}^{n+p}\left(1 + \frac{B}{k^2}\right) - 1, \tag{8}$$

jakoteż

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\left(1 + u_k(z)\right)\right| \leq \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{B}{k^2}\right) < \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{B}{k^2}\right) = P, \tag{9}$$

skąd, mnożąc stronami (9) przez (8), wobec (7):

$$\left|\prod_{k=1}^{n+p}\left(1+u_k(z)\right)-\prod_{k=1}^{n}\left(1+u_k(z)\right)\right|<\varepsilon, \quad \text{dla } n>\mu,\ p=1,2,3,\ldots \tag{10}$$

przy wszelkiem zespolonem z, bezwzględnie nie większem od A, co, wobec (4), dowodzi, że ciąg iloczynów cząstkowych iloczynu nieskończonego (1) jest dla $|z|\leq A$ zbieżny jednostajnie. Wobec dowolności liczby dodatniej A wnosimy stąd natychmiast, że uważany ciąg iloczynów cząstkowych jest zbieżny jednostajnie w każdym ograniczonym zbiorze liczb zespolonych, *c. b. d. o.*

Wartość $f(z)$ iloczynu (1) jest więc określoną w zupełności liczbą zespoloną przy wszelkiem danem zespolonem z.

Ponieważ wszystkie iloczyny cząstkowe iloczynu (1) są oczywiście funkcjami ciągłemi zmiennej zespolonej z, więc z jednostajnej ich zbieżności wynika (w myśl tw. 142), że $f(z)$ jest funkcją *ciągłą* w zbiorze wszystkich liczb zespolonych.

Ponieważ dowiedliśmy tylko zbieżności iloczynów cząstkowych iloczynu (1) [a nie zbieżności samego iloczynu (1)], więc nie wyłączyliśmy przypadku, w którym iloczyny te zmierzają do zera, dając $f(z)=0$. Okażemy, że zachodzi to jedynie wówczas, jeżeli z jest liczbą całkowitą ujemną.

W myśl (8) i (7), mamy:

$$\left|\prod_{k=n+1}^{n+p}\left(1+u_k(z)\right)-1\right|<\frac{\varepsilon}{P}, \quad \text{dla } n>\mu,\ p=1,2,3,\ldots;$$

gdyby więc wszystkie czynniki $1+u_k(z)$ $(k=1,2,3,\ldots)$ były różne od zera, to w myśl tw. 117, iloczyn nieskończony $\prod\limits_{k=1}^{\infty}[1+u_k(z)]$, czyli, wobec (4), iloczyn (1), byłby zbieżny, i wartością jego byłaby liczba różna od zera. Wynika stąd, że w razie $f(z)=0$ musi jeden z czynników iloczynu (1) być zerem, t. j. przy pewnem naturalnem k, musi być

$$\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}=0,$$

a że, jak wiemy, przy wszelkiem zespolonem u jest $e^u\neq 0$, więc równość (11) daje $1+\frac{z}{k}=0$, czyli $z=-k$.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli zachodzi równość $f(z)=0$, to z musi być liczbą całkowitą ujemną. Ale, jak łatwo widzieć, i na-

odwrót: jeżeli mamy $z=-k$, gdzie k jest liczbą naturalną, to jest $f(z)=0$ (gdyż wówczas oczywiście w iloczynie (1) wszystkie iloczyny cząstkowe rzędu $\geq k$ są równe zeru).

Dowiedliśmy zatem, że równość $f(z)=0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, jeżeli $z=-k$ $(k=1,2,3,\ldots)$.

Niech teraz z oznacza liczbę zespoloną różną od liczb $0,-1,-2,-3,\ldots$; połóżmy:

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-Cz}}{z f(z)}, \tag{12}$$

gdzie C oznacza stałą Eulera (§ 51).

Funkcja $\Gamma(z)$ będzie więc określoną w zupełności dla każdej wartości zespolonej z, nie będącej żadną z liczb $0,-1,-2,-3,\ldots$, przyczem będzie $\Gamma(z)\neq 0$.

Stosując twierdzenie o ilorazie funkcyj ciągłych, wnosimy dalej, wobec (12), że $\Gamma(z)$ jest funkcją *ciągłą* w zbiorze wszystkich liczb zespolonych, różnych od każdej z liczb $0,-1,-2,-3,\ldots$

Stosując, dalej, tw. o granicy ilorazu, znajdujemy, wobec (12) oraz (1):

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-Cz}}{z\lim\limits_{n=\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}}=\lim_{n=\infty}\frac{e^{-Cz}}{z\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}},$$

skąd, w jednej chwili:

$$\Gamma(z)=\lim_{n=\infty}\left[\frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}\cdot\frac{e^{\frac{z}{1}+\frac{z}{2}+\cdots+\frac{z}{n}}}{e^{Cz}\cdot n^z}\right]. \tag{13}$$

W § 51 wyprowadziliśmy dla stałej Eulera wzór [(44)]:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\lg n\right)=C;$$

stąd, oraz z uwagi na ciągłość funkcji e^u znajdujemy natychmiast:

$$\lim_{n=\infty}e^{\frac{z}{1}+\frac{z}{2}+\cdots+\frac{z}{n}-z\lg n}=e^{Cz},$$

czyli, zważywszy, że, w myśl definicji potęgi o wykładniku zespolonym, $e^{-z\lg n}=\frac{1}{e^{z\lg n}}=\frac{1}{n^z}$:

$$\lim_{n=\infty}\frac{e^{\frac{z}{1}+\frac{z}{2}+\cdots+\frac{z}{n}}}{n^z}=e^{Cz}. \tag{14}$$

Wzór (13) daje, w myśl (14) (wobec tw. o granicy iloczynu):

$$\Gamma(z) = \lim_{n=\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}. \tag{15}$$

Wzór ten możemy też przyjąć jako definicję funkcji $\Gamma(z)$ [równoważną definicji (12)] dla wszystkich zespolonych z, różnych od liczb $0, -1, -2, \dots$.

Dla $z \neq 0, -1, -2, \dots$, mamy, w myśl (15):

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n=\infty} \frac{n!\,n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{zn}{z+n+1} \cdot \frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)},$$

skąd, wobec (15) i w myśl tw. o granicy iloczynu:

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \tag{16}$$

Funkcja $\Gamma(z)$ spełnia więc wzór (16) przy wszelkiem zespolonem $z \neq 0, -1, -2, \dots$

W szczególności, przy naturalnem n, znajdujemy w myśl wzoru (16) kolejno:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = \dots = n!\,\Gamma(1),$$

a że, wobec (15):

$$\Gamma(1) = \lim_{n=\infty} \frac{n!\,n}{(n+1)!} = 1,$$

więc mamy:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{17}$$

co, wobec $\Gamma(1) = 1$ pozostaje prawdziwem i dla $n = 0$, jeżeli przez $0!$ rozumieć liczbę 1.

Funkcja $\Gamma(z+1)$ przedstawia więc uogólnienie funkcji $z!$ dla niecałkowitych z.

§ 162. W założeniu, że z nie jest liczbą całkowitą, mamy wzór (15), jakoteż wzór:

$$\Gamma(1-z) = \lim \frac{n!\,n^{1-z}}{(1-z)(2-z)\dots(n+1-z)}. \tag{18}$$

Mnożąc stronami równości (15) i (18), otrzymujemy dla niecałkowitych z, w myśl tw. o granicy iloczynu:

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \lim_{n=\infty} \frac{n!^2\,n}{z(1-z^2)(2^2-z^2)\dots(n^2-z^2)(n+1-z)} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\pi n}{n+1-z} \cdot \frac{1}{\pi z\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\dots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)},$$

skąd w jednej chwili, wobec wzoru (35) z § 152:

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \text{dla} \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{19}$$

W szczególności, kładąc $z = \frac{1}{2}$, otrzymujemy stąd $[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = \pi$, a że, wobec (15), $\Gamma(\frac{1}{2})$ jest liczbą nieujemną, więc mamy:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Ze wzoru (19) możemy, dalej, wyprowadzić wnioski co do zachowania się funkcji $\Gamma(z)$ gdy z zmierza do jednej z liczb: $0, -1, -2, \dots$

Niech z_n oznacza ciąg nieskończony liczb zespolonych, taki iż $\lim_{n=\infty} z_n = l$, gdzie l jest jedną z liczb $0, -1, -2, \dots$, przyczem $z_n \neq l$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$ Dla dostatecznie wielkich n, jak łatwo widzieć, z_n nie będzie liczbą całkowitą i przeto, wobec (19), będzie

$$\Gamma(z_n)\,\Gamma(1-z_n) = \frac{\pi}{\sin \pi z_n}, \quad \text{dla} \quad n > \mu. \tag{20}$$

Przy całkowitem l mamy:

$$\sin(\pi z_n - \pi l) = \sin \pi z_n \cos \pi l = (-1)^l \sin \pi z_n,$$

i przeto, wobec (20):

$$(z_n - l)\,\Gamma(z_n)\,\Gamma(1-z_n) = (-1)^l \frac{\pi(z_n - l)}{\sin \pi(z_n - l)}, \quad \text{dla} \quad n > \mu. \tag{21}$$

Liczba $1-l$ jest pewną liczbą naturalną (gdyż l oznacza jednę z liczb $0, -1, -2, \dots$): wobec ciągłości funkcyj $\Gamma(z)$ w zbiorze liczb zespolonych różnych od $0, -1, -2, \dots$, oraz w myśl (17), mamy więc:

$$\lim_{n=\infty} \Gamma(1-z_n) = \Gamma(1-l) = (-l)! \tag{22}$$

W myśl (57) z § 139, mamy, wobec $\lim_{n=\infty} z_n = l$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\pi(z_n - l)}{\sin \pi(z_n - l)} = 1. \tag{23}$$

Wobec (22) i (23), wzór (21) daje w jednej chwili:

$$\lim_{n=\infty} (z_n - l)\,\Gamma(z_n) = \frac{(-1)^l}{(-l)!}. \tag{24}$$

Wnosimy stąd natychmiast, że gdy z zmierza do jednej z liczb $0, -1, -2, \ldots$, to moduł funkcji $\Gamma(z)$ wzrasta nieograniczenie.

W szczególności, dla $l = 0$, ze wzoru (24) wnosimy, że gdy z zmierza do zera (ciągiem wartości różnych od zera), to $z\Gamma(z)$ zmierza do jedności.

§ 163. Wyprowadzimy obecnie t. zw. *twierdzenie* Gaussa *o mnożeniu funkcji* Γ.

Niech m oznacza daną liczbę naturalną, s — daną liczbę z ciągu $0, 1, 2, \ldots, m-1$, zaś z — daną liczbę zespoloną, różną od każdej z liczb $\frac{k}{m}$, gdzie $k = 0, -1, -2, \ldots$ Wzór (15) daje w jednej chwili:

$$\Gamma\left(z + \frac{s}{m}\right) = \lim_{n=\infty} \frac{n!\, n^{z+\frac{s}{m}} m^{n+1}}{(mz+s)(mz+s+m)(mz+s+2m)\ldots(mz+s+nm)}$$

skąd

$$\prod_{s=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{s}{m}\right) = \lim_{n=\infty} \frac{(n!)^m\, n^{mz+\frac{m-1}{2}} \cdot m^{m(n+1)}}{mz(mz+1)(mz+2)\ldots(mz+mn+m-1)}. \tag{25}$$

Z drugiej strony, zastępując we wzorze (15) z przez mz, zaś n przez mn, otrzymujemy:

$$\Gamma(mz) = \lim_{n=\infty} \frac{(mn)!\, m^{mz}\, n^{mz}}{mz(mz+1)(mz+2)\ldots(mz+mn)}. \tag{26}$$

Zastępując n przez mn we wzorze (60) z § 155, znajdujemy

$$\lim_{n=\infty} \frac{(mn)!}{\sqrt{2\pi mn}\,.\, m^{mn}\,.\, n^{mn}\,.\, e^{-mn}} = 1, \tag{27}$$

zaś podnosząc obie strony wzoru (60) do m-tej potęgi, dostajemy:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n!)^m}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} n^{\frac{m}{2}}\,.\, n^{mn}\,.\, e^{-mn}} = 1; \tag{28}$$

wreszcie, mamy oczywiście

$$\lim_{n=\infty} \frac{(mz+mn+1)(mz+mn+2)\ldots(mz+mn+m-1)}{m^{m-1} n^{m-1}} = 1. \tag{29}$$

Mnożąc wzór (26) przez (28), zaś dzieląc przez (27) i (29), w myśl twierdzeń o granicy iloczynu i ilorazu, otrzymujemy po łatwych redukcjach wzór:

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} \prod_{s=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{s}{m}\right), \tag{30}$$

wyrażający t. zw. *twierdzenie* Gaussa o mnożeniu funkcji Γ. Wzór ten wyprowadziliśmy dla wszelkich zespolonych z, różnych od liczb $\frac{k}{m}$, gdzie $k = 0, -1, -2, \ldots$

W szczególności, dla $m = 2$, otrzymujemy stąd wzór Legendre'a

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma(z)\, \Gamma(z + \tfrac{1}{2}) \tag{31}$$

dla zespolonych z, różnych od liczb $\frac{k}{2}$, gdzie $k = 0, -1, -2, \ldots$

Z funkcją Γ Eulera spotkamy się w rachunku całkowym.

KONIEC CZĘŚCI TRZECIEJ TOMU PIERWSZEGO.