

ROZDZIAŁ XIX.

Rozwinięcia funkcji trygonometrycznych na ułamki proste.

§ 156. Zachowując te same znakowania co w § 151, mamy, dla $k = 1, 2, \dots, 2n$:

$$(z^{2n} - 1) = (z - \zeta_k)(z^{2n-1} + z^{2n-2}\zeta_k + z^{2n-3}\zeta_k^2 + \dots + z\zeta_k^{2n-2} + \zeta_k^{2n-1});$$

stąd, w założeniu, że z oznacza liczbę zespoloną, nie będącą $2n$ -tym pierwiastkiem z jedności:

$$\frac{z^{2n} - 1}{z - \zeta_k} = z^{2n-1} + z^{2n-2}\zeta_k + \dots + z\zeta_k^{2n-2} + \zeta_k^{2n-1} \quad (k = 1, 2, \dots, 2n).$$

Stąd, w myśl wyniku końcowego z § 143:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{z^{2n} - 1}{z - \zeta_k} = 2nz^{2n-1}.$$

Mamy więc przy wszelkiem zespolonem $z \neq \zeta_k$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$):

$$\frac{2nz^{2n-1}}{z^{2n} - 1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{z - \zeta_k}. \quad (1)$$

Wobec wzoru (4) z § 151, mamy, dla $z \neq \zeta_k$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$):

$$\frac{1}{z - \zeta_n} + \frac{1}{z - \zeta_{2n}} = \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z + 1} = \frac{2z}{z^2 - 1},$$

zaś, wobec wzoru (6) z § 151 oraz wzoru (26) z § 136:

$$\frac{1}{z - \zeta_{n+k}} + \frac{1}{z - \zeta_{n-k}} = \frac{1}{z - e^{\frac{k\pi i}{n}}} + \frac{1}{z - e^{-\frac{k\pi i}{n}}} = \frac{2z - 2\cos \frac{k\pi}{n}}{z^2 - 2z\cos \frac{k\pi}{n} + 1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Mamy więc, wobec (1), mnożąc przez z :

$$\frac{2nz^{2n}}{z^{2n} - 1} = \frac{2z^2}{z^2 - 1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2z \left(z - \cos \frac{k\pi}{n} \right)}{z^2 - 2z\cos \frac{k\pi}{n} + 1}, \quad (2)$$

przy wszelkiem zespolonem z , nie będącym $2n$ -tym pierwiastkiem z jedności.

Lecz, jak łatwo widzieć:

$$\frac{2nz^{2n}}{z^{2n} - 1} = n + n \frac{z^{2n} + 1}{z^{2n} - 1}, \quad \frac{2z^2}{z^2 - 1} = 1 + \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1},$$

$$\frac{2z \left(z - \cos \frac{k\pi}{n} \right)}{z^2 - 2z\cos \frac{k\pi}{n} + 1} = 1 + \frac{z^2 - 1}{z^2 - 2z\cos \frac{k\pi}{n} + 1};$$

mamy więc, wobec (2):

$$n \frac{z^{2n} + 1}{z^{2n} - 1} = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^2 - 1}{z^2 - 2z\cos \frac{k\pi}{n} + 1},$$

skąd, w razie $z \neq 0$:

$$n \frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{z^n - \frac{1}{z^n}} = \frac{z + \frac{1}{z}}{z - \frac{1}{z}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z} - 2\cos \frac{k\pi}{n}}. \quad (3)$$

Udowodniliśmy więc wzór (3) przy wszelkiem zespolonem z różnym od zera i nie będącym $2n$ -tym pierwiastkiem z jedności.

Niech teraz u oznacza liczbę zespoloną, nie będącą liczbą całkowitą; połóżmy

$$z = e^{\frac{\pi u}{n}};$$

będzie oczywiście $z \neq 0$, przytem $z^{2n} = e^{2\pi u} \neq 1$, gdyż, w razie $e^{2\pi u} = 1$, mamy, jak wiadomo, $u = k$, gdzie k jest liczbą całkowitą, wbrew założeniu.

Jest więc, wobec (3), oraz w myśl wzorów (26) z § 136:

$$n \frac{\cos \pi u}{i \sin \pi u} = \frac{\cos \frac{\pi u}{n}}{i \sin \frac{\pi u}{n}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2i \sin \frac{\pi u}{n}}{2 \cos \frac{\pi u}{n} - 2 \cos \frac{k\pi}{n}};$$

stąd, wobec wzoru (63) z § 150, oraz wzoru (11) z § 151; po podzieleniu obu stron przez $-ni$:

$$\operatorname{ctg} \pi u = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi u}{n}}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin \frac{\pi u}{n}}{2n \left(\sin^2 \frac{\pi u}{2n} - \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right)} \quad (4)$$

przy wszelkiem zespolonem $u \neq k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

W myśl (4) mamy przy wszelkim zespolonem, niecałkowitem z , dla $n > p > 1$:

$$\operatorname{ctg} \pi z = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi z}{n}}{n} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{n}}{2n \left(\sin^2 \frac{\pi z}{2n} - \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right)} + \sum_{k=p}^{n-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{n}}{2n \left(\sin^2 \frac{\pi z}{2n} - \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right)}. \quad (5)$$

Położmy (dla $n > p > 1$):

$$R_{p,n} = \sum_{k=p}^{n-1} \frac{\sin \frac{\pi z}{n}}{2n \left(\sin^2 \frac{\pi z}{2n} - \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right)}. \quad (6)$$

Wobec wzorów (23) i (25) z § 152, mamy:

$$\left| \sin^2 \frac{\pi z}{2n} - \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right| \geq \sin^2 \frac{k\pi}{2n} - \left| \sin^2 \frac{\pi z}{2n} \right| > \frac{\pi^2}{36n^2} (k^2 - 36|z|^2), \quad \text{dla}$$

$$n \geq \left| \frac{\pi z}{2} \right|, \text{ oraz}$$

$$\left| \sin \frac{\pi z}{n} \right| \leq \frac{2\pi|z|}{n}, \quad \text{dla } n \geq |\pi z|;$$

jest więc:

$$\left| \frac{\sin \frac{\pi z}{n}}{2n \left(\sin^2 \frac{\pi z}{2n} - \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right)} \right| \leq \frac{36|z|}{\pi(k^2 - 36|z|^2)}, \quad \text{dla } n \geq |\pi z|, k \geq 6|z|. \quad (7)$$

Wobec (6) i (7), mamy więc:

$$\left| R_{p,n} \right| \leq \frac{36|z|}{\pi} \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 36|z|^2}, \quad \text{dla } p \geq 6|z|, n > p. \quad (8)$$

Wobec wzoru (28) z § 152, oraz z uwagi że $\cos z$ jest funkcją ciągłą, zaś $\cos 0 = 1$, mamy, dla $z \neq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi z}{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cos \frac{\pi z}{n}}{\sin \frac{\pi z}{n}} = \frac{1}{\pi z}, \quad (9)$$

zaś, wobec wzorów (28) i (29) z § 152 (przy niecałkowitem z):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi z}{n}}{2n \left(\sin^2 \frac{\pi z}{2n} - \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{\pi^2} \sin \frac{\pi z}{n}}{\frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2n}}{z^2 \left(\frac{\pi^2 z^2}{4n^2} \right)} - k^2 \left(\frac{\pi^2}{4n^2} \right)} = \frac{2z}{\pi(z^2 - k^2)}. \quad (10)$$

Jest więc, wobec (6), (5), (9) i (10):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{p,n} = \operatorname{ctg} \pi z - \frac{1}{\pi z} - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{2z}{\pi(z^2 - k^2)}. \quad (11)$$

Położmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{p,n} = R_p; \quad (12)$$

wobec (8), będzie:

$$\left| R_p \right| \leq \frac{36|z|}{\pi} \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 36|z|^2}, \quad \text{dla } p \geq 6|z|. \quad (13)$$

Lecz szereg

$$\sum_{k=EVz+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a}$$

jest, jak łatwo widzieć, zbieżny przy wszelkiem $a \geq 0$ (gdyż, dla dostatecznie wielkich k mamy stale $\frac{1}{k^2 - a} < \frac{2}{k^2}$, zaś szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ jest, jak wiadomo, zbieżny): wnosimy stąd, w jednej chwili, że (przy wszelkiem zespolonem z):

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 36|z|^2} = 0$$

i przeto, wobec (13):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_p = 0,$$

co, wobec (12) i (11) daje:

$$\operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{\pi z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{\pi(z^2 - k^2)}. \quad (14)$$

Udowodniliśmy więc wzór (14) przy wszelkiem zespolonem z , nie będącem liczbą całkowitą.

Z uwagi, że

$$\frac{2z}{z^2 - k^2} = \frac{1}{z - k} + \frac{1}{z + k},$$

możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 184. Przy wszelkiem zespolonem z , nie będącem liczbą całkowitą, zachodzi rozwinięcie:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{z + k} \right). \quad (15)$$

Zauważymy, że wzór (15) możemy jeszcze przedstawić w postaci:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{z - k}. \quad (15a)$$

§ 157. Mamy, jak łatwo widzieć, przy naturalnych k i p , dla $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - k} + \frac{1}{z + k} &= -\frac{2z}{k^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{k}\right)^2} = \\ &= -2 \left[\frac{z}{k^3} + \frac{z^3}{k^5} + \dots + \frac{z^{2p-1}}{k^{2p+1}} \right] - \frac{2z^{2p+1}}{k^{2p}(k^2 - z^2)}; \end{aligned}$$

stąd, kładąc przez skrócenie

$$s_p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}, \quad (p = 1, 2, 3, \dots), \quad (16)$$

otrzymujemy w jednej chwili:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{z + k} \right) = -2(s_2 z + s_4 z^3 + \dots + s_{2p} z^{2p-1}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^{2p+1}}{k^{2p}(k^2 - z^2)} \quad (17)$$

Lecz, dla $|z| < 1$ mamy, jak łatwo widzieć, przy naturalnem p :

$$\left| \frac{2z^{2p+1}}{k^{2p}(k^2 - z^2)} \right| \leq \frac{2|z|^{2p+1}}{k^2(1 - |z|^2)},$$

zatem

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^{2p+1}}{k^{2p}(k^2 - z^2)} \right| \leq \frac{2|z|^{2p+1}}{1 - |z|^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

skąd wobec $\lim_{p \rightarrow \infty} z^{2p+1} = 0$, dla $|z| < 1$, wnosimy, że

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^{2p+1}}{k^{2p}(k^2 - z^2)} = 0,$$

i przeto wzór (17) daje, dla $|z| < 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{z + k} \right) = -2(s_2 z + s_4 z^3 + s_6 z^5 + \dots).$$

Wobec (15) mamy więc:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} - 2s_2 z - 2s_4 z^3 - 2s_6 z^5 - \dots, \quad \text{dla } 0 < |z| < 1. \quad (18)$$

Dla $|z| \geq 1$ szereg (18) jest rozbieżny, gdyż [wobec (16)] oczywiście $s_p > 1$, dla $p = 1, 2, 3, \dots$. Rozwinięcie (18) zachodzi więc przy wszelkiem zespolonem z różnym od zera i bezwzględnie mniejszem od jedności i przytem tylko przy takim zespolonem z .

W myśl wzoru (26) z § 136, mamy, dla $z \neq 2k\pi i$ ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$\frac{i}{2} \operatorname{ctg} \frac{iz}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{z}{2}} + e^{\frac{z}{2}}}{e^{-\frac{z}{2}} - e^{\frac{z}{2}}} - \frac{1}{2} = \frac{e^z + 1}{2(e^z - 1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{e^z - 1};$$

zastępując więc we wzorze (18) z przez $\frac{iz}{2\pi}$, mnożąc przez $\frac{i}{2\pi}$ oraz odejmując $\frac{1}{2}$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{s_2 z}{2\pi^2} - \frac{s_4 z^3}{2^3 \pi^4} + \frac{s_6 z^5}{2^5 \pi^6} - \dots, \quad \text{dla } 0 < |z| < 2\pi. \quad (19)$$

Mamy więc rozwinięcie:

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots, \quad \text{dla } 0 < |z| < 2\pi, \quad (20)$$

gdzie

$$A_0 = -\frac{1}{2}, \quad A_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1} s_{2n}}{2^{2n-1} \pi^{2n}}, \quad A_{2n} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (21)$$

Stąd w jednej chwili, mnożąc przez $e^z - 1$:

$$1 = \frac{e^z - 1}{z} (1 + A_0 z + A_1 z^2 + A_2 z^3 + \dots), \quad \text{dla } 0 < |z| < 2\pi,$$

czyli, wobec wzoru (14) z § 135:

$$1 = \left(\frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right) (1 + A_0 z + A_1 z^2 + A_2 z^3 + \dots), \quad (22)$$

dla $0 < |z| < 2\pi$, co jest oczywiście prawdziwym i dla $z = 0$. Wzór (22) zachodzi więc dla $|z| < 2\pi$.

Pierwszy czynnik prawej strony wzoru (22) jest szeregiem zbieżnym bezwzględnie przy wszelkiem zespolonem z : mamy więc, w myśl tw. 112, stosując mnożenie Cauchy'ego:

$$\left(\frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right) (1 + A_0 z + A_1 z^2 + A_2 z^3 + \dots) = \\ = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad \text{dla } |z| < 2\pi, \quad (23)$$

gdzie

$$a_0 = 1, \text{ zaś } a_{n+1} = \frac{A_n}{1!} + \frac{A_{n-1}}{2!} + \dots + \frac{A_0}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} \quad (24) \\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Lecz, wobec (22), (23), i w myśl wniosku z tw. 164, musi być:

$$a_{n+1} = 0, \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

mamy więc, wobec (24):

$$\frac{A_n}{1!} + \frac{A_{n-1}}{2!} + \dots + \frac{A_0}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} = 0, \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Otrzymaliśmy więc wzór zwrotny dla obliczania kolejnych liczb A_n . Wzór ten wskazuje, że wszystkie A_n są liczby wymierne. Wobec (16) i (21) mamy stąd:

Twierdzenie 185. Przy wszelkiem naturalnem n suma

$$s_{2n} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots$$

jest wymierną wielokrotnością liczby π^{2n} : mamy mianowicie:

$$s_{2n} = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} A_{2n-1} \pi^{2n}, \quad (26)$$

gdzie liczby A_n są określone przez wzory (25).

Ponieważ, w myśl (21), $A_0 = -\frac{1}{2}$, zaś $A_{2n} = 0$, dla $n = 1, 2, \dots$, więc, wobec (25), mamy:

$$A_{2n-1} + \frac{A_{2n-3}}{3!} + \frac{A_{2n-5}}{5!} + \dots + \frac{A_1}{(2n-1)!} - \frac{1}{2(2n)!} + \frac{1}{(2n+1)!} = 0, \\ \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

Wzór ten służy do obliczania liczb $A_1, A_3, A_5, \dots$

Dla $n = 1$ wzór (27) daje:

$$A_1 - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3!} = 0,$$

skąd, w jednej chwili: $A_1 = \frac{1}{12}$.

Dla $n = 2$ wzór (27) daje:

$$A_3 + \frac{A_1}{3!} - \frac{1}{2 \cdot 4!} + \frac{1}{5!} = 0,$$

skąd, wobec $A_1 = \frac{1}{12}$, znajdujemy $A_3 = -\frac{1}{720}$.

Dla $n = 3$ otrzymalibyśmy ze wzoru (27), uwzględniając znalezione już wartości A_1 i A_3 , wartość $A_5 = \frac{1}{30240}$; dalej, znaleźli-

byśmy: $A_7 = \frac{1}{1209600}$ i t. d.

Wobec (26) mamy więc:

$$s_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad s_4 = \frac{\pi^4}{90}, \quad s_6 = \frac{\pi^6}{945}, \quad s_8 = \frac{\pi^8}{9450}$$

— pierwsze dwie wartości otrzymaliśmy już w § 154 na innej drodze ¹⁾.

Położmy:

$$B_n = (-1)^{n-1} (2n)! A_{2n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (28)$$

— są to tak zwane *liczby Bernoulli'ego*, które, wobec (21) i (16), możemy też określić wzorem:

$$B_n = \frac{(2n)!}{2^{2n-1} \pi^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (29)$$

— są to więc liczby wymierne, dodatnie ²⁾. W myśl (28) i wobec

¹⁾ Zauważymy, że wartości sum s_n dla kolejnych wartości n od $n = 2$ aż do $n = 70$ podał z 32-ma znakami dziesiętnymi Stieltjes w *Acta Mathematica* t. 10 (r. 1887), str. 299–302.

²⁾ I. J. Schwatt podaje na liczby Bernoulli'ego następujący wzór skończony:

$$B_n = (-1)^n \frac{n}{2^{2n} - 1} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2^k} \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^{2n-1},$$

oraz inne pokrewne wzory: zob. jego *An Introduction to the operations with series*, Philadelphia 1924, p. 269.

znalezionych wyżej wartości na A_1, A_3, A_5, A_7 , znajdujemy w jednej chwili: $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$.

Oto 15 pierwszych wartości liczb Bernoulli'ego:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{5}{66}, B_6 = \frac{691}{2730}, \\ B_7 &= \frac{7}{6}, B_8 = \frac{3617}{510}, B_9 = \frac{43867}{798}, B_{10} = \frac{174611}{330}, B_{11} = \frac{854513}{138}, \\ B_{12} &= \frac{236364091}{2730}, B_{13} = \frac{8553103}{6}, B_{14} = \frac{23749461029}{870}, \\ B_{15} &= \frac{8615841276005}{14322} \end{aligned}$$

(możnaby udowodnić, że wszystkie mianowniki liczb Bernoulli'ego są podzielne przez 6).

Tablicę pierwszych 62 liczb Bernoulli'ego podał J. Adams (Journ. f. r. u. a. M. Bd 85). Tablicę tę uzupełnił Serebrennikow aż do B_{90} (Zapiski S-Piet. Akad. Nauk 1905).

Ze wzoru (29) mamy:

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{(2n+1)(n+1)}{2\pi^2} \frac{s_{2n+2}}{s_{2n}}, \quad \left(\text{gdzie } s_p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \right),$$

skąd, z uwagi, że $s_{2n+2} > 1$, $s_{2n} \leq s_2 = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} > \frac{3(2n+1)(n+1)}{\pi^4} \quad (30)$$

i przeto, dla $n \geq 4$:

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} > \frac{135}{\pi^4} > 1. \quad (31)$$

Mamy więc

$$B_{n+1} > B_n$$

dla $n \geq 4$, co jest jeszcze prawdą dla $n=3$, gdyż $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, natomiast $B_1 > B_2 > B_3$.

Zatem: liczby Bernoulli'ego stale wzrastają, poczynając od B_3 .

Z nierówności (31) wnosimy nadto natychmiast, że liczby B_n wzrastają nieograniczenie wraz z n . Wobec (30) wnosimy też, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = \infty.$$

Wyprowadzimy teraz, opierając się na wzorze Stirlinga, wzór asymptotyczny dla liczb Bernoulli'ego.

W myśl wzoru (29) mamy:

$$B_n = \frac{(2n!)}{2^{2n-1} \pi^{2n}} s_{2n}, \quad \text{gdzie } s_{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}. \quad (32)$$

Wobec wzoru Stirlinga (wzór (60) z § 135), mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n!)}{2 \sqrt{\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n}} = 1. \quad (33)$$

Dla $p > 1$ mamy, jak łatwo widzieć:

$$1 < s_p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} \frac{1}{k^p} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{m-1}}{2^{p(m-1)}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(p-1)(m-1)}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1},$$

zatem:

$$1 < s_p < \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1},$$

skąd, w jednej chwili:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = 1. \quad (34)$$

Wobec (32), (33) i (34), znajdujemy w jednej chwili:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{\frac{1}{4} \sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{\pi e} \right)^{2n}} = 1.$$

Asymptotyczną wartością liczby B_n jest więc wyrażenie

$$\frac{1}{4} \sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{\pi e} \right)^{2n}$$

Zauważymy też ciekawą równość:

$$2\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{(2n)!}{B_n}},$$

którą otrzymujemy z łatwością ze wzoru (29).

Wprowadzając liczby Bernoulli'ego możemy, wobec (29) i (16), wzór (18), po zastąpieniu w nim z przez $\frac{z}{\pi}$ oraz po podzieleniu przez π , przepisać w postaci:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{2^2 B_1}{2!} z - \frac{2^4 B_3}{4!} z^3 - \frac{2^6 B_5}{6!} z^5 - \dots, \quad \text{dla } 0 < |z| < \pi. \quad (35)$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkiem zespolonem z , spełniającym warunek $0 < |z| < \pi$, funkcja $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ rozwija się na szereg potęgowy według nieparzystych potęg z o wymiernych, ujemnych współczynnikach.

§ 158. Ze wzoru (35) możemy też z łatwością otrzymać rozwinięcie funkcji $\operatorname{tg} z$ na szereg potęgowy. W tym celu zauważymy, że mamy, dla $z \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\operatorname{ctg} z - 2 \operatorname{ctg} 2z = \frac{\cos z}{\sin z} - 2 \frac{\cos 2z}{\sin 2z} = \frac{\cos z}{\sin z} - \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\sin z \cos z} = \operatorname{tg} z;$$

jest więc, wobec (35), dla $0 < |z| < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \operatorname{ctg} z - 2 \operatorname{ctg} 2z = \left(\frac{1}{z} - \frac{2^2 B_1}{2!} z - \frac{2^4 B_2}{4!} z^3 - \dots \right) - \\ &- 2 \left(\frac{1}{2z} - \frac{2^2 B_1}{2!} z - \frac{2^4 B_2}{4!} z^3 - \dots \right) = \frac{2^2 (2^2 - 1)}{2!} B_1 z + \frac{2^4 (2^4 - 1)}{4!} B_2 z^3 + \dots, \end{aligned}$$

czyli:

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1) B_k}{(2k)!} z^{2k-1}, \quad (36)$$

dla $0 < |z| < \frac{\pi}{2}$, co pozostaje oczywiście prawdziwym i dla $z=0$.

[Dla $|z| \geq \frac{\pi}{2}$ szereg (36) jest, jak łatwo widzieć, rozbieżny, gdyż,

wobec (29), mamy $B_k > \frac{(2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) i przeto współczynniki szeregu (36) są stale $> \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k}$.

Funkcja $\operatorname{tg} z$ rozwija się więc wewnątrz koła o promieniu $\frac{\pi}{2}$ na szereg potęgowy według nieparzystych potęg z o wymiernych dodatnich współczynnikach:

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \frac{17}{315} z^7 + \frac{62}{2835} z^9 + \dots$$

Położmy

$$\frac{2^{2k-1} (2^{2k} - 1) B_k}{k} = T_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

w myśl (36), będzie:

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k}{(2k-1)!} z^{2k-1}, \quad \text{dla } |z| < \frac{\pi}{2}. \quad (37)$$

Liczby T_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) są wszystkie całkowite. W samej rzeczy, wobec $\operatorname{tg} z \cdot \cos z = \sin z$, otrzymujemy, w myśl (37) i rozwinięcie na $\cos z$ i $\sin z$, w jednej chwili, przez porównanie współczynników:

$$(-1)^{k-1} = T_k - \binom{2k-1}{2} T_{k-1} + \binom{2k-1}{4} T_{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} \binom{2k-1}{2k-2} T_1,$$

dla $k = 1, 2, 3, \dots$, skąd wynika, drogą natychmiastowej indukcji, że liczby T_k są wszystkie całkowite. Mamy:

$$T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 16, T_4 = 272, T_5 = 7936, \text{ i t. d.}$$

Dla funkcji *tangens* możemy też z łatwością otrzymać rozwinięcie analogiczne z rozwinięciem (15). W tym celu zauważymy, że, w myśl wzoru (64) z § 150, mamy, dla $z \neq k + \frac{1}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\operatorname{tg} \pi z = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \pi z \right) = \operatorname{ctg} [\pi(\frac{1}{2} - z)];$$

wzór (15^a) daje więc przy wszelkiem zespolonem z , nie będącem formy $k + \frac{1}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$-\pi \operatorname{tg} \pi z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{z + k - \frac{1}{2}},$$

skąd, z uwagi, że

$$\sum_{k=-n}^n \frac{1}{z + k - \frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{z - k - \frac{1}{2}} + \frac{1}{z + k + \frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{z + n + \frac{1}{2}},$$

oraz, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z + n + \frac{1}{2}} = 0$, wynika rozwinięcie:

$$-\pi \operatorname{tg} \pi z = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - (k + \frac{1}{2})} + \frac{1}{z + (k + \frac{1}{2})} \right)$$

przy wszelkiem zespolonem z , dla którego wszystkie składniki szeregu po prawej stronie mają sens.

§ 159. Mamy, przy wszelkiem zespolonem $z \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \operatorname{ctg} z = \frac{\cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} - \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{2 \cos^2 \frac{z}{2} - \cos z}{\sin z} = \frac{1}{\sin z}, \quad (38)$$

zatem, wobec (35), dla $0 < |z| < \pi$:

$$\frac{1}{\sin z} = \operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \operatorname{ctg} z = \left[\frac{2}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_k}{(2k)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-1} \right] - \left[\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_k}{(2k)!} z^{2k-1} \right],$$

czyli:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{2k-1} - 1) B_k}{(2k)!} z^{2k-1}, \quad \text{dla } 0 < |z| < \pi.$$

Wobec (38) mamy, dla $z \neq k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2} - \pi \operatorname{ctg} \pi z,$$

skąd, z uwagi, że w myśl (15^a) (dla $z \neq k$)

$$\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{2}{z - 2k}, \quad \pi \operatorname{ctg} \pi z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-2n}^{2n} \frac{1}{z - k},$$

otrzymujemy (dla $z \neq k$):

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=-n}^n \frac{2}{z - 2k} - \sum_{k=-2n}^{2n} \frac{1}{z - k} \right),$$

co, z uwagi, że

$$\sum_{k=-n}^n \frac{2}{z - 2k} - \sum_{k=-2n}^{2n} \frac{1}{z - k} = \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k}{z - k},$$

daje:

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k}{z - k} \quad (39)$$

przy wszelkiem zespolonem z , nie będącem liczbą całkowitą.

Wzór (39) możemy, jak łatwo widzieć, przedstawić jeszcze w postaci:

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{z + k} \right).$$

Wobec $\cos \pi z = -\sin \pi(z - \frac{1}{2})$, wzór (39) daje w jednej chwili, dla $z \neq k + \frac{1}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$-\frac{\pi}{\cos \pi z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k}{z + k - \frac{1}{2}},$$

skąd, z uwagi, że

$$\sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k}{z + k - \frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{1}{z - (k + \frac{1}{2})} - \frac{1}{z + (k + \frac{1}{2})} \right) + \frac{(-1)^n}{z + n + \frac{1}{2}},$$

oraz że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{z + n + \frac{1}{2}} = 0$, otrzymujemy:

$$-\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z - (k + \frac{1}{2})} - \frac{1}{z + (k + \frac{1}{2})} \right), \quad (40)$$

przy wszelkiem zespolonem $z \neq k + \frac{1}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Kładąc w tym wzorze $z = 0$, otrzymujemy (wobec $\cos 0 = 1$):

$$-\pi = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2}{k + \frac{1}{2}},$$

skąd, w jednej chwili:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + 1},$$

czyli:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

— jest to szereg Leibniza, który w § 82 przekształcaliśmy na szeregi szybciej zbieżne.

Ze wzoru (40) możemy otrzymać całą serję wzorów na potęgę nieparzyste liczby π , podobnie jak ze wzoru (15) otrzymaliśmy całą serję wzorów na potęgę parzyste liczby π .

W tym celu zauważymy, że dla $|z| < \frac{1}{2}$ mamy, przy naturalnem p oraz całkowitem $k \geq 0$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{z - (k + \frac{1}{2})} - \frac{1}{z + (k + \frac{1}{2})} &= \frac{2k+1}{z^2 - (k + \frac{1}{2})^2} = -\frac{4}{2k+1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2z}{2k+1} \right)^2} \\ &= - \left[\frac{2^1}{2k+1} + \frac{2^3 z^2}{(2k+1)^3} + \frac{2^5 z^4}{(2k+1)^5} + \dots + \frac{2^{2p} z^{2p-2}}{(2k+1)^{2p-1}} \right] - \\ &\quad - \frac{2^{2p+2} z^{2p}}{(2k+1)^{2p+1} [z^2 - (k + \frac{1}{2})^2]}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Dla $|z| < \frac{1}{2}$ znajdujemy z łatwością:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(2z)^{2p}}{(2k+1)^{2p-1} [z^2 - (k + \frac{1}{2})^2]} \right| = 0,$$

i przeto, kładąc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^p} = \sigma_p, \quad (p=1, 2, 3, \dots), \quad (42)$$

otrzymamy, wobec (40) i (41), w jednej chwili:

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = 2^3 \sigma_1 + 2^4 \sigma_3 z^2 + 2^6 \sigma_5 z^4 + \dots, \quad \text{dla } |z| < \frac{1}{2} \quad (43)$$

(dla $|z| \geq \frac{1}{2}$ szereg (43) jest rozbieżny, gdyż oczywiście $\sigma_p > 1 - \frac{1}{3^p} \geq \frac{2}{3}$, dla $p=1, 2, 3, \dots$).

Zastępując we wzorze (43) z przez $\frac{z}{\pi}$ i dzieląc przez π , otrzymujemy rozwinięcie:

$$\frac{1}{\cos z} = \frac{2^3 \sigma_1}{\pi} + \frac{2^4 \sigma_3}{\pi^3} z^2 + \frac{2^6 \sigma_5}{\pi^5} z^4 + \dots, \quad \text{dla } |z| < \frac{\pi}{2}. \quad (44)$$

Położmy, przez skrócenie:

$$\frac{2^{2n} \sigma_{2n-1}}{\pi^{2n-1}} = C_n, \quad (n=1, 2, 3, \dots); \quad (45)$$

wzór (44) przyjmuje postać:

$$\frac{1}{\cos z} = C_1 + C_3 z^2 + C_5 z^4 + C_7 z^6 + \dots, \quad \text{dla } |z| < \frac{\pi}{2}. \quad (46)$$

Stąd, w jednej chwili, mnożąc przez $\cos z$ (wobec wzoru (22) z § 136):

$$1 = (1 - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots) (C_1 + C_3 z^2 + C_5 z^4 + \dots), \quad \text{dla } |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Stosując mnożenie Cauchy'ego i porównując współczynniki po obu stronach, otrzymujemy w jednej chwili: $C_1 = 1$, zaś

$$C_n - \frac{C_{n-1}}{2!} + \frac{C_{n-2}}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{C_1}{(2n-2)!} = 0, \quad \text{dla } n=2, 3, \dots \quad (47)$$

Otrzymaliśmy więc wzór zwrotny, dla obliczania kolejnych liczb $C_1, C_3, C_5, \dots$. Ze wzoru tego wynika, że wszystkie liczby C_n ($n=1, 2, 3, \dots$) są liczbami wymiernymi. Wobec (42) i (45) mamy stąd:

Twierdzenie 186. Przy wszelkiem naturalnem n suma

$$\sigma_{2n-1} = \frac{1}{1^{2n-1}} - \frac{1}{3^{2n-1}} + \frac{1}{5^{2n-1}} - \frac{1}{7^{2n-1}} + \dots$$

jest wymierną wielokrotnością liczby π^{2n-1} : mamy mianowicie:

$$\sigma_{2n-1} = \frac{C_n \pi^{2n-1}}{2^{2n}}, \quad (48)$$

gdzie liczby C_n są określone przez wzory (47).

Wzór (47) daje, dla $n=2$:

$$C_2 - \frac{C_1}{2!} = 0,$$

skąd, wobec $C_1=1$, znajdujemy: $C_2 = \frac{1}{2}$; dla $n=3$, wzór (47) daje:

$$C_3 - \frac{C_2}{2!} + \frac{C_1}{4!} = 0,$$

skąd, wobec $C_1=1$, $C_2 = \frac{1}{2}$, znajdujemy: $C_3 = \frac{5}{24}$; mamy więc, wobec (48):

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \sigma_3 = \frac{\pi^3}{32}, \quad \sigma_5 = \frac{5\pi^5}{1536}.$$

Położmy:

$$E_n = (2n)! C_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (49)$$

— będą to t. zw. *liczby Eulera*. Wobec wzorów (47) i (49) otrzymujemy dla liczb Eulera w jednej chwili wzór zwrotny:

$$(-1)^{n-1} = E_n - \binom{2n}{2} E_{n-1} + \binom{2n}{4} E_{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{2n-2} E_1 \quad (50)$$

($n=1, 2, 3, \dots$)¹⁾.

Oto kilka pierwszych wartości liczb Eulera:

$$E_1 = 1, \quad E_2 = 5, \quad E_3 = 61, \quad E_4 = 1385, \quad E_5 = 50521.$$

Wobec (50) wnosimy, że wszystkie liczby Eulera są całkowite. Wobec (49), wzór (48) daje:

$$\sigma_{2n-1} = \frac{E_{n-1} \pi^{2n-1}}{2^{2n} (2n-2)!} \quad (n=2, 3, \dots)$$

— liczby Eulera są więc wszystkie dodatnie, zatem naturalne.

¹⁾ I. J. Schwatt podaje dla liczb Eulera E_n wzór:

$$E_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (1+2j)^n,$$

oraz inne pokrewne (l. c., p. 270).

[Możnaby dowieść, że ostatnimi cyframi liczb Eulera są naprzemian 1 i 5. Każda liczba Eulera jest formy $4k+1$ (Sylvester)].

Szczegółowy rachunek pierwszych 32 liczb Eulera podał Joffe w *Quarterly Journal of Math.* Nr. 186 (Jury 1916), p. 103–126.

Wobec (49) i (45), mamy:

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = 8(2n+1)(n+1) \frac{\sigma_{2n+3}}{\pi^2 \sigma_{2n+1}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (51)$$

Lecz:

$$\sigma_{2n+3} > 1 - \frac{1}{3^{2n+3}} > 1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} > \sigma_{2n+1}, \quad \text{dla } n=1, 2, \dots$$

(gdyż $\left(\frac{3}{5}\right)^{2n+1} < \frac{3}{5} < 1 - \frac{1}{9}$, skąd $\frac{1}{5^{2n+1}} < \frac{1}{3^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+3}}$); mamy więc:

$$E_{n+1} : E_n > \frac{8}{\pi^2} (2n+1)(n+1), \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

co dowodzi, że liczby Eulera stale i nieograniczenie wzrastają.

§ 160. Zastosujemy obecnie wzór (20) do wywodu wzorów na sumy potęg kolejnych liczb naturalnych.

Przy wszelkiem zespolonem $z \neq 0$ oraz wszelkiem naturalnem n mamy tożsamość:

$$\frac{e^{nz} - 1}{e^z - 1} = 1 + e^z + e^{2z} + \dots + e^{(n-1)z};$$

skąd, z uwagi, że dla $k=1, 2, 3, \dots, n-1$:

$$e^{kz} = 1 + \frac{kz}{1!} + \frac{k^2 z^2}{2!} + \frac{k^3 z^3}{3!} + \dots,$$

oraz, kładąc, przy naturalnych p i n :

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p, \quad (52)$$

znajdujemy natychmiast:

$$\frac{e^{nz} - 1}{e^z - 1} = n + S_1(n-1) \frac{z}{1!} + S_2(n-1) \frac{z^2}{2!} + S_3(n-1) \frac{z^3}{3!} + \dots, \quad \text{dla } z \neq 0. \quad (53)$$

Z drugiej strony, wobec (20) i uwagi, że przy wszelkiem zespolonem x :

$$e^{xz} - 1 = \frac{xz}{1!} + \frac{x^2 z^2}{2!} + \frac{x^3 z^3}{3!} + \dots,$$

otrzymujemy, dla $0 < |z| < 2\pi$:

$$\frac{e^{xz} - 1}{e^z - 1} = \left(\frac{1}{z} + A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots \right) \left(\frac{xz}{1!} + \frac{x^2 z^2}{2!} + \frac{x^3 z^3}{3!} + \dots \right),$$

skąd, stosując mnożenie Cauchy'ego i kładąc:

$$f_p(x) = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{A_0 x^p}{p!} + \frac{A_1 x^{p-1}}{(p-1)!} + \dots + \frac{A_{p-1} x}{1!} \quad (54)$$

otrzymujemy natychmiast rozwinięcie:

$$\frac{e^{xz} - 1}{e^z - 1} = x + z f_1(x) + z^2 f_2(x) + z^3 f_3(x) + \dots, \quad (55)$$

prawdziwe przy wszelkiem zespolonem x , przynajmniej dla $0 < |z| < 2\pi$.

Stąd, w szczególności, kładąc $x=n$ i porównując ze współczynnikami rozwinięcia (53), otrzymujemy natychmiast:

$$\frac{S_p(n-1)}{p!} = f_p(n)$$

przy naturalnych p i n , co, wobec (52) i (54) (po dodaniu do obu stron $\frac{n^p}{p!}$, wobec $A_0 = -\frac{1}{2}$), daje w jednej chwili wzór:

$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{p!} = \frac{n^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{n^p}{2 \cdot p!} + \frac{A_1 n^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{A_2 n^{p-2}}{(p-2)!} + \dots + \frac{A_{p-1} n}{1!} \quad (56)$$

przy wszelkich naturalnych n i p .

W szczególności, kładąc $p=1, 2, 3, \dots$ oraz uwzględniając wartości współczynników $A_1, A_2, A_3, \dots$, znajdujemy w jednej chwili wzory:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

¹⁾ I. J. Schwatt wyprowadza (l.c., p. 88) dla sum $S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$ wzór wyraźny:

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k-1}{j-1} j^p.$$

$$\begin{aligned}
1^4 + 2^4 + \dots + n^4 &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}, \\
1^5 + 2^5 + \dots + n^5 &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}, \\
1^6 + 2^6 + \dots + n^6 &= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}, \\
1^7 + 2^7 + \dots + n^7 &= \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}, \\
1^8 + 2^8 + \dots + n^8 &= \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30}.
\end{aligned}$$

Położmy:

$$\varphi_0(x) = -x + \frac{1}{2}, \quad \varphi_p(x) = -f_p(x) - A_p, \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, \dots \quad (57)$$

— będą to t. zw. wielomiany Bernoulli'ego. Wobec (57) i (54) możemy napisać:

$$\varphi_p(x) = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} - \frac{A_1 x^p}{p!} - \frac{A_2 x^{p-1}}{(p-1)!} - \dots - \frac{A_{p-1} x}{1!} - A_p, \quad \text{dla } p = 0, 1, 2, \dots \quad (58)$$

Wobec (55), (20) i (57) wnosimy z łatwością, że wielomiany $\varphi_p(x)$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) określić można też jako współczynniki rozwinięcia

$$\frac{e^{xz}}{1-e^x} + \frac{1}{x} = \varphi_0(x) + x\varphi_1(x) + x^2\varphi_2(x) + \dots$$

Wobec (58) znajdujemy w jednej chwili, biorąc pochodną po obu stronach:

$$\varphi'_p(x) = \varphi_{p-1}(x), \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, \dots;$$

dalej, mamy, wobec (57):

$$\varphi_0(x) = -x + \frac{1}{2},$$

wreszcie, wobec (58) oraz (25):

$$\varphi_p(1) = \varphi_p(0), \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, \dots$$

Powiadamy, że własności te są dla wielomianów Bernoulli'ego charakterystyczne. Udowodnimy mianowicie, że jeżeli $W_p(x)$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) są wielomiany całkowite, spełniające warunki:

$$W'_p(x) = W_{p-1}(x), \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, \dots \quad (I)$$

$$W'_0(x) = -x + \frac{1}{2}, \quad (II)$$

oraz

$$W_p(1) = W_p(0), \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, \dots \quad (III)$$

to musi być tożsamościowo:

$$W_p(x) = \varphi_p(x), \quad \text{dla } p = 0, 1, 2, \dots$$

Z warunków (I) i (II) wynika drogą łatwej indukcji, że wielomian $W_p(x)$ musi być stopnia $p+1$ ($p = 0, 1, 2, \dots$). Możemy więc położyć:

$$W_p(x) = C^{(p)} x^{p+1} - C_0^{(p)} x^p - C_1^{(p)} x^{p-1} - \dots - C_p^{(p)}. \quad (59)$$

W myśl (I) oraz (59) musi być (przy wszelkiem x):

$$(p+1) C^{(p)} x^p - p C_0^{(p)} x^{p-1} - (p-1) C_1^{(p)} x^{p-2} - \dots - C_{p-1}^{(p)} = C^{(p-1)} x^p - C_0^{(p-1)} x^{p-1} - C_1^{(p-1)} x^{p-2} - \dots - C_{p-1}^{(p-1)}, \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd, w jednej chwili:

$$(p+1) C^{(p)} = C^{(p-1)} \quad \text{oraz} \quad (p-k) C_k^{(p)} = C_k^{(p-1)}, \quad \text{dla } \begin{cases} k=0, 1, 2, \dots, p-1; \\ p=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Stąd wnosimy w jednej chwili, że

$$C^{(p)} = \frac{C^{(0)}}{(p+1)!} \quad \text{oraz} \quad C_k^{(p)} = \frac{C_k^{(0)}}{(p-k)!}, \quad \text{dla } \begin{cases} k=0, 1, 2, \dots, p-1 \\ p=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (60)$$

Wobec (II), musi być $C^{(0)} = -1$, pierwszy ze wzorów (60) daje więc

$$C^{(p)} = -\frac{1}{(p+1)!}. \quad (61)$$

Wobec (59) oraz (III), mamy:

$$C^{(p)} - C_0^{(p)} - C_1^{(p)} - \dots - C_{p-1}^{(p)} - C_p^{(p)} = -C_p^{(p)}, \quad (p = 1, 2, 3, \dots),$$

zatem, wobec (61) oraz (60) (znosząc po obu stronach $-C_p^{(p)}$, oraz mnożąc przez -1):

$$\frac{1}{(p+1)!} + \frac{C_0^{(0)}}{p!} + \frac{C_1^{(1)}}{(p-1)!} + \dots + \frac{C_{p-1}^{(p-1)}}{1!} = 0, \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, \dots$$

Dla liczb $C_k^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) otrzymaliśmy więc te same wzory, które określają liczby A_k : mamy więc:

$$C_k^{(k)} = A_k, \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots \quad (62)$$

Wobec (59), (60), (62) oraz (58) wnosimy, że mamy tożsamościowo:

$$W_p(x) = \varphi_p(x), \quad \text{dla } p = 1, 2, 3, \dots,$$

zaś, wobec (II) i (57) mamy też oczywiście $W_0(x) = \varphi_0(x)$. Jest więc

$$W_p(x) = \varphi_p(x), \quad \text{dla } p = 0, 1, 2, \dots,$$

c. b. d. o.

Łatwo widzieć, że dowód nasz pozostałby bez zmiany, gdybyśmy założyli, że warunki (I) i (II) zachodzą tylko w przedziale $(0, 1)$.

Z dowiedzionej własności charakterystycznej wielomianów Bernoulli'ego zrobimy użytek w rozdziale XXII (§ 186) przy wywodzie wzoru sumacyjnego Eulera-Maclaurina.

Ćwiczenia.

1) Udowodnić wzór

$$E_n = (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{2n+1} - 2 + \binom{2n}{1} 2^2 B_1 - \binom{2n}{3} 2^4 B_3 + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{2n-1} 2^{2n} B_n \right].$$

(Należy się oprzeć na tożsamości $\frac{1}{\cos z} = 2 \cos z - 2 \operatorname{ctg} 2z \cdot \sin z$, oraz na wzorach (46), (49) i (35), oraz porównać współczynniki rozwinąć po obu stronach).

2) Dowieść, że

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

3) Udowodnić następujące związki, zachodzące między sumami $S_p = S_p(n) = 1^p + 2^p + \dots + n^p$:

$$S_1^2 = S_2; \quad 4 S_1^3 = 3 S_2 + S_3 \text{ (Amigues)}; \quad 2 S_1^4 = S_2 + S_3 \text{ (Jacobi)}; \\ 3 S_1^5 = 2 S_2 + S_3 \text{ (Gauss)}; \quad 6 S_1 S_2 = 5 S_4 + S_5 \text{ (Fermat)}.$$

ROZDZIAŁ XX.

Funkcja Γ Eulera oraz jej ważniejsze własności.

§ 161. Połóżmy przy wszelkiem zespolonem z :

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

Powiadam, że ciąg iloczynów cząstkowych iloczynu (1) jest zbieżny jednostajnie w każdym ograniczonym zbiorze liczb zespolonych z .

W myśl wzoru (14) z § 133, mamy przy wszelkiem zespolonem z i naturalnem k :

$$e^{-\frac{z}{k}} = 1 - \frac{z}{k} + \frac{z^2}{2!k^2} - \frac{z^3}{3!k^3} + \dots,$$

zatem:

$$\frac{z}{k} e^{-\frac{z}{k}} = \frac{z}{k} - \frac{z^2}{1!k^2} + \frac{z^3}{2!k^3} - \frac{z^4}{3!k^4} + \dots$$

oraz

$$\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} - 1 = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{1!}\right) \frac{z^2}{k^2} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) \frac{z^3}{k^3} + \dots,$$

i przeto, z uwagi, że

$$\left| \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \right) \frac{z^{n+1}}{k^{n+1}} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{n! k^{n+1}}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

otrzymujemy:

$$\left| \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} - 1 \right| \leq \frac{|z|^3}{1!k^3} + \frac{|z|^4}{2!k^4} + \frac{|z|^5}{3!k^5} + \dots \\ = \frac{|z|}{k^3} \left(\frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!k} + \frac{|z|^3}{3!k^2} + \dots \right) \leq \frac{|z|}{k^3} e^{|z|}. \quad (2)$$

Niech A oznacza dowolną daną liczbę dodatnią; połóżmy:

$$A e^A = B. \quad (3)$$

Położmy, dalej:

$$\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} = 1 + u_k(z); \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

w myśl (2) i (3) będzie:

$$|u_k(z)| \leq \frac{B}{k^3}, \quad \text{dla } |z| \leq A, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Wobec zbieżności szeregu nieskończonego $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B}{k^3}$ i w myśl tw. 119, iloczyn nieskończony

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{B}{k^3}\right) \quad (6)$$

jest zbieżny: oznaczmy przez P jego wartość: będzie to więc pewna liczba dodatnia.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Wobec zbieżności iloczynu (6), oraz w myśl tw. 117, dla liczby ε będzie istniało takie μ , iż

$$\prod_{k=n+1}^{n+p} \left(1 + \frac{B}{k^3}\right) - 1 < \frac{\varepsilon}{P}, \quad \text{dla } n > \mu, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Wobec (5) mamy, jak łatwo widzieć, dla $|z| \leq A$:

$$\left| \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + u_k(z)) - 1 \right| \leq \prod_{k=n+1}^{n+p} \left(1 + \frac{B}{k^3}\right) - 1, \quad (8)$$

jakoteż

$$\left| \prod_{k=1}^n (1 + u_k(z)) \right| \leq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{B}{k^3}\right) < \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{B}{k^3}\right) = P, \quad (9)$$