

pociągają za sobą wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} x_n = -\infty.$$

ROZDZIAŁ XVIII.

Rozwinięcia funkcji trygonometrycznych oraz hyperbolicznych na iloczyny nieskończone.

§ 151. Niech n oznacza daną liczbę naturalną, większą od jedności. W myśl tw. 176. (zastosowanego dla $r=1$, $t=0$, $m=2n$), pierwiastkami stopnia $2n$ -go z jedności są liczby

$$\zeta_j = e^{2\pi i j / 2n}, \quad (j=1, 2, \dots, 2n), \quad (1)$$

gdzie

$$\theta_j = \frac{\pi(j-n)}{n}, \quad (j=1, 2, \dots, 2n); \quad (2)$$

wszystkie te liczby są, jak wiemy, *różne*.

Liczby (1) są więc wszystkimi różnymi pierwiastkami równania

$$z^{2n} - 1 = 0,$$

skąd (§ 66) wynika tożsamość

$$z^{2n} - 1 = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \dots (z - \zeta_{2n}). \quad (3)$$

W myśl (2), mamy $\theta_n = 0$, $\theta_{2n} = \pi$, skąd, w myśl (1):

$$\zeta_n = 1, \quad \zeta_{2n} = -1, \quad (4)$$

zatem, przy wszelkiem zespolonem z :

$$(z - \zeta_n)(z - \zeta_{2n}) = (z - 1)(z + 1) = z^2 - 1. \quad (5)$$

Dalej, mamy, w myśl (1) i (2):

$$\zeta_{n+k} = e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \quad \zeta_{n-k} = e^{-\frac{2\pi i k}{n}}, \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, n-1, \quad (6)$$

skąd [wobec wzoru (26) z § 136]:

$$\begin{aligned} (z - \zeta_{n+k})(z - \zeta_{n-k}) &= (z - e^{\frac{2\pi i k}{n}})(z - e^{-\frac{2\pi i k}{n}}) = \\ &= z^2 - (e^{\frac{2\pi i k}{n}} + e^{-\frac{2\pi i k}{n}})z + 1 = z^2 - 2z \cos \frac{k\pi}{n} + 1, \quad (7) \\ &\text{dla } k=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Ponieważ zaś oczywiście

$$(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \dots (z - \zeta_{2n}) = (z - \zeta_n)(z - \zeta_{2n}) \prod_{k=1}^{n-1} [(z - \zeta_{n+k})(z - \zeta_{n-k})]$$

(gdyż prawa strona różni się od lewej tylko porządkiem czynników), więc, wobec (3), (5) i (7), mamy tożsamość:

$$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2z \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right),$$

z której, dla $z \neq 0$, dzieląc obie strony przez z^n , otrzymujemy w jednej chwili:

$$z^n - \frac{1}{z^n} = \left(z - \frac{1}{z} \right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z + \frac{1}{z} - 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right). \quad (8)$$

Wzór (8) zachodzi więc przy wszelkiem naturalnem $n > 1$ oraz wszelkiem zespolonem $z \neq 0$. Niech teraz u oznacza dowolną daną liczbę zespoloną: połóżmy

$$z = e^{\frac{\pi u}{n}}, \quad (9)$$

— będzie to, jak wiemy, liczba zespolona, różna od zera.

Wobec (9), mamy:

$$z^n - \frac{1}{z^n} = e^{\pi u} - e^{-\pi u} = 2i \sin \pi u,$$

$$z - \frac{1}{z} = 2i \sin \frac{\pi u}{n}, \quad z + \frac{1}{z} = 2 \cos \frac{\pi u}{n},$$

i przeto wzór (8) daje, po podzieleniu obu stron przez $2i$:

$$\sin \pi u = \sin \frac{\pi u}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 \cos \frac{\pi u}{n} - 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right). \quad (10)$$

Wzór (28) z § 136 daje, dla $z_1 = z_2 = \frac{v}{2}$:

$$\cos v = \cos^2 \frac{v}{2} - \sin^2 \frac{v}{2},$$

a że $\cos^2 \frac{v}{2} = 1 - \sin^2 \frac{v}{2}$, więc mamy:

$$\cos v = 1 - 2 \sin^2 \frac{v}{2}$$

przy wszelkiem zespolonem v . Jest więc:

$$2 \cos \frac{\pi u}{n} - 2 \cos \frac{k\pi}{n} = 4 \left(\sin^2 \frac{k\pi}{2n} - \sin^2 \frac{\pi u}{2n} \right), \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, n-1. \quad (11)$$

Dla $k = 1, 2, \dots, n-1$ jest oczywiście $0 < \frac{k\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$, i przeto $\sin \frac{k\pi}{2n} \neq 0$: mamy więc, wobec (11):

$$2 \cos \frac{\pi u}{n} - 2 \cos \frac{k\pi}{n} = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi u}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \right) \quad (k=1, 2, \dots, n-1). \quad (12)$$

Oznaczmy

$$4^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{2n} = A_n \quad (13)$$

— będzie to pewna liczba (dodatnia), zależna jedynie od n : wobec (10) i (12) będziemy mieli:

$$\sin \pi u = A_n \sin \frac{\pi u}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi u}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \right) \quad (14)$$

przy wszelkiem zespolonem u i naturalnem $n > 1$. Stąd, w szczególności, dla $u = \frac{1}{p}$, przy naturalnem p :

$$\frac{\sin \frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}} = \frac{A_n}{n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{pn}}{\frac{\pi}{pn}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2pn}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \right) \quad (15)$$

Lecz, jak dowiedliśmy w § 139 [wzór (57)]:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{p}}{\frac{\pi}{p}} = 1, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{pn}}{\frac{\pi}{pn}} = 1,$$

zaś (wobec $\sin 0 = 0$ oraz wobec ciągłości funkcji $\sin x$):

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{2pn} = 0;$$

wzór (15) daje więc, w granicy dla $p = \infty$:

$$1 = \frac{A_n}{n},$$

skąd

$$A_n = n \quad (16)$$

(Wobec (13) i uwagi, że $\sin \frac{k\pi}{2n} > 0$, dla $k = 1, 2, \dots, n-1$, mamy więc wzór:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

przy wszelkiem naturalnem $n > 1$.

Wzór (14) daje więc, wobec (16):

$$\sin \pi u = n \sin \frac{\pi u}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi u}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \right) \quad (17)$$

— przy wszelkiem zespolonem u i naturalnem $n > 1$.

W myśl wzoru (17) mamy przy wszelkiem zespolonem z , dla $n > p > 1$:

$$\sin \pi z = n \sin \frac{\pi z}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \right) \cdot \prod_{k=p}^{n-1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \right) \quad (18)$$

§ 152. Niech teraz z oznacza daną liczbę zespoloną, taką iż $\sin \pi z \neq 0$.

Wobec (19) i wobec wzoru (18) będziemy mieli przy wszelkiem naturalnem $n > 1$:

$$\sin \frac{\pi z}{n} \neq 0, \text{ oraz } 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \neq 0, \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (20)$$

Położmy (dla $n > p > 1$):

$$Q_{p,n} = \prod_{k=p}^{n-1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \right); \quad (21)$$

wobec (21), (19) i (20) i w myśl (18), będziemy mieli:

$$Q_{p,n} = \frac{\sin \pi z}{n \sin \frac{\pi z}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}}\right)}, \quad \text{dla } n > p > 1. \quad (22)$$

W myśl wzoru (22) z § 136, mamy przy wszelkiem zespolonem v :

$$\sin v = v \left(1 - \frac{v^2}{3!} + \frac{v^4}{5!} - \frac{v^6}{7!} + \dots\right),$$

skąd, w jednej chwili, dla $|v| \leq 1$:

$$|\sin v| \leq |v| \left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots\right) \leq |v| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = 2|v|,$$

czyli:

$$|\sin v| \leq 2|v|, \quad \text{dla } |v| \leq 1.$$

Stąd, kładąc $v = \frac{\pi z}{2n}$, otrzymujemy:

$$\left|\sin^2 \frac{\pi z}{2n}\right| \leq \frac{\pi^2 |z|^2}{n^2}, \quad \text{dla } n \geq \frac{\pi |z|}{2}. \quad (23)$$

Z drugiej strony, w myśl wzoru (22) z § 136, mamy:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \frac{x^7}{9!} \left(1 - \frac{x^2}{10 \cdot 11}\right) + \dots,$$

skąd, w jednej chwili, dla $0 < x < 2$:

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} = x \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) > x \left(1 - \frac{4}{6}\right) = \frac{x}{3},$$

czyli:

$$\sin x > \frac{x}{3}, \quad \text{dla } 0 < x < 2. \quad (24)$$

Dla $0 < k < n$ mamy oczywiście (w myśl wzoru (37) z § 137)

$$0 < \frac{k\pi}{2n} < \frac{\pi}{2} < 2,$$

skąd, w myśl (24):

$$\sin \frac{k\pi}{2n} > \frac{k\pi}{6n}$$

i przeto:

$$\sin^2 \frac{k\pi}{2n} > \frac{k^2 \pi^2}{36 n^2}, \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (25)$$

Wobec (23) i (25) mamy więc:

$$\left| \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} \right| \leq \frac{36 |z|^2}{k^2}, \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n-1; \quad n \geq \frac{\pi |z|}{2}. \quad (26)$$

Wobec (21) i (26), znajdujemy w jednej chwili, dla $n \geq \frac{\pi |z|}{2}$:

$$|Q_{p,n} - 1| \leq \prod_{k=p}^{n-1} \left(1 + \frac{\left|\frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}}\right|}{1}\right) - 1 \leq \prod_{k=p}^{n-1} \left(1 + \frac{36 |z|^2}{k^2}\right) - 1$$

i przeto, tembardziej:

$$|Q_{p,n} - 1| \leq \prod_{k=p}^{\infty} \left(1 + \frac{36 |z|^2}{k^2}\right) - 1, \quad \text{dla } n \geq \frac{\pi |z|}{2}. \quad (27)$$

W myśl wzoru (57) z § 139, mamy, z uwagi, że, wobec (19), $z \neq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi z}{n} = \pi z, \quad (28)$$

oraz, przy wszelkiem naturalnem k :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2n}}{\left(\frac{\pi^2 z^2}{4n^2}\right)} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}}{\left(\frac{k^2 \pi^2}{4n^2}\right)} = 1, \quad (29)$$

skąd, w jednej chwili (w myśl tw. o granicy ilorazu):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}} = \frac{z^2}{k^2}$$

i przeto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}}\right) = 1 - \frac{z^2}{k^2}, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

Wobec (19), z nie może być liczbą całkowitą i przeto:

$$1 - \frac{z^2}{k^2} \neq 0, \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Wobec (22), (28), (30) i (31) mamy więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{p,n} = \frac{\sin \pi z}{\pi z \prod_{k=1}^{p-1} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)}. \quad (32)$$

Położmy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{p,n} = Q_p; \quad (33)$$

wobec (27) i (33), będzie:

$$|Q_p - 1| \leq \prod_{k=p}^{\infty} \left(1 + \frac{36|z^2|}{k^2}\right) - 1. \quad (34)$$

W myśl tw. 119 i z uwagi, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{36|z^2|}{k^2}$ jest zbieżny

(przy wszelkiem zespolonem z), wnosimy, że iloczyn nieskończony

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{36|z^2|}{k^2}\right)$$

jest zbieżny: stąd mamy, jak wiadomo:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \prod_{k=p}^{\infty} \left(1 + \frac{36|z^2|}{k^2}\right) = 1;$$

nierówność (34) daje więc w jednej chwili:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} Q_p = 1$$

i przeto, wobec (32) i (33), znajdujemy:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi z}{\pi z \prod_{k=1}^{p-1} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)} = 1,$$

skąd, w jednej chwili:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \pi z \prod_{k=1}^{p-1} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = \sin \pi z,$$

czyli:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right). \quad (35)$$

Wzór (35) wyprowadziliśmy w założeniu, że $\sin \pi z \neq 0$: wiadom jednak, że jest on prawdziwy przy wszelkiem zespolonem z . W samej rzeczy, jeżeli $\sin \pi z = 0$, to, jak dowiedliśmy w § 140, z musi być liczbą całkowitą, a wówczas jeden z czynników iloczynu nieskończonego we wzorze (35) jest zerem: wartości obu stron wzoru (35) są więc wtedy $= 0$ i przeto wzór (35) jest prawdziwy. Wzór (35) jest więc prawdziwy przy wszelkiem zespolonem z .

Udowodniliśmy więc następujące

Twierdzenie 182. Przy wszelkiem zespolonem z funkcja $\sin \pi z$ rozwija się na iloczyn nieskończony

$$\sin \pi z = \pi z \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right) \dots$$

Przyjmijmy we wzorze (35), w szczególności, $z = \frac{1}{2}$: otrzymamy, wobec $\sin \frac{\pi}{2} = 1$:

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right),$$

skąd, w jednej chwili:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)},$$

czyli

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \dots,$$

a że $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{2k+1} = 1$, więc możemy jeszcze napisać:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \dots \quad (36)$$

— jest to wzór Wallis'a (podany w r. 1655).

Wzór (35) jest jak dowiedliśmy, prawdziwy przy wszelkiem zespolonem z : możemy więc w nim zastąpić z przez iz , co, wobec wzoru (26) z § 136, daje w jednej chwili:

$$\frac{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}{2} = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2}\right) \quad (37)$$

przy wszelkiem zespolonem z . (Wyrażenie $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ nosi nazwę *wstawy hyperbolicznej* (sinus hyperbolicus) i bywa oznaczane przez $\sin \text{hyp } x$, albo krócej: $\sinh x$: wzór (37) daje więc rozwinięcie na $\sinh \pi z$).

§ 153. Wzór (35) możemy przy wszelkiem zespolonem z przepisać w postaci:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k-z)(k+z)}{k \cdot k}, \quad (38)$$

skąd, w szczególności, dla $z = \frac{1}{2}$:

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})}{k \cdot k}. \quad (39)$$

Wzory (38) i (39) dają w jednej chwili:

$$\sin \pi z = 2z \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k-z)(k+z)}{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})} \quad (40)$$

przy wszelkiem zespolonem z . Zastępując we wzorze (40) z przez $\frac{1}{2} - z$, otrzymujemy, przy wszelkiem zespolonem z :

$$\begin{aligned} \cos \pi z &= 2(\frac{1}{2} - z) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\frac{1}{2}+z)(k+\frac{1}{2}-z)}{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})} = \\ &= (1-2z) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2z}{2k-1}\right) \left(1 - \frac{2z}{2k+1}\right) \end{aligned}$$

czyli

$$\cos \pi z = (1-2z) \cdot \left[\left(1 + \frac{2z}{1}\right)\left(1 - \frac{2z}{3}\right)\right] \cdot \left[\left(1 + \frac{2z}{3}\right)\left(1 - \frac{2z}{5}\right)\right] \dots,$$

co, z uwagi, że przy wszelkiem danem zespolonem z mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2z}{2k+1}\right) = 1, \text{ napisać możemy w postaci:}$$

$$\cos \pi z = \left(1 - \frac{2z}{1}\right) \left(1 + \frac{2z}{1}\right) \left(1 - \frac{2z}{3}\right) \left(1 + \frac{2z}{3}\right) \left(1 - \frac{2z}{5}\right) \left(1 + \frac{2z}{5}\right) \dots,$$

skąd, w jednej chwili:

$$\cos \pi z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2}\right) \quad (41)$$

przy wszelkiem zespolonem z . Mamy więc

Twierdzenie 183. Przy wszelkiem zespolonem z funkcja $\cos \pi z$ rozwija się na iloczyn nieskończony:

$$\cos \pi z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(k-\frac{1}{2})^2}\right).$$

Stąd, zastępując z przez iz , otrzymujemy w jednej chwili, przy wszelkiem zespolonem z :

$$\frac{e^{\pi z} + e^{-\pi z}}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{(k-\frac{1}{2})^2}\right)$$

— jest to rozwinięcie dla funkcji $\cosh \pi z$.

Położmy we wzorze (41) $z = \frac{1}{4}$. W myśl wzoru (42) z § 137, mamy

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4},$$

skąd, wobec wzoru (27) z § 136:

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

a że $\cos \frac{\pi}{4} > 0$ (gdyż $\cos \alpha > 0$ dla $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), więc mamy stąd:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wzór (41) daje więc, dla $z = \frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(4k-2)^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(4k-3)(4k-1)}{(4k-2)(4k-2)},$$

skąd:

$$\sqrt{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(4k-2)(4k-2)}{(4k-3)(4k-1)},$$

czyli

$$\sqrt{2} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{10.10}{9.11} \cdot \frac{14.14}{13.15} \dots$$

— jest to wzór, podany przez Eulera w r. 1748¹⁾.

Położmy teraz we wzorze (41) $z = \frac{1}{6}$. Mamy

$$\cos \frac{\pi}{6} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6},$$

skąd, dzieląc przez $\cos \frac{\pi}{6} > 0$:

$$1 = 2 \sin \frac{\pi}{6};$$

co daje $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ oraz (wobec $\cos \frac{\pi}{6} > 0$):

$$\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{6}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wzór (41) daje więc, dla $z = \frac{1}{6}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(6k-3)^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(6k-4)(6k-2)}{(6k-3)(6k-3)},$$

¹⁾ Co do uogólnienia tego wzoru zob. Biuletyn Akademii Krakowskiej, r. 1906, p. 1052—1057.

czyli

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{8.10}{9.9} \cdot \frac{14.16}{15.15} \cdot \frac{20.22}{21.21} \dots$$

— jest to wzór, podany przez Sterna w r. 1860¹⁾.

§ 154. Powróćmy teraz do wzoru (35). Szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ jest zbieżny bezwzględnie: możemy więc względem iloczynu (35) zastosować wynik, otrzymany w § 97 dla iloczynów typu $\prod(1 + a_n z)$. W ten sposób otrzymujemy przy wszelkiem zespolonem z rozwinięcie na szereg potęgowy (według parzystych potęg z):

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = 1 + A_1 z^2 + A_2 z^4 + A_3 z^6 + \dots, \quad (42)$$

gdzie

$$A_1 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad A_2 = \sum_{(k,l)} \frac{1}{k^2 l^2}, \quad A_3 = -\sum_{(k,l,m)} \frac{1}{k^2 l^2 m^2} \text{ i t. d.}, \quad (43)$$

przyczem $\sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} u_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ oznacza sumę, rozciągniętą na wszystkie układy n wskaźników rosnących $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Wobec wzoru (22) z § 136, wzoru (35) oraz (42), znajdujemy w jednej chwili:

$$\frac{\pi z}{1!} - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \frac{\pi^5 z^5}{5!} - \dots = \pi z + A_1 \pi z^3 + A_2 \pi z^5 + \dots$$

przy wszelkiem zespolonem z , skąd (w myśl wniosku z tw. 164):

$$A_1 = -\frac{\pi^2}{3!}, \quad A_2 = \frac{\pi^4}{5!}, \quad A_3 = -\frac{\pi^6}{7!} \text{ i t. d.}$$

Mamy więc, wobec (43):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3!}, \quad \sum_{(k,l)} \frac{1}{k^2 l^2} = \frac{\pi^4}{5!}, \quad \sum_{(k,l,m)} \frac{1}{k^2 l^2 m^2} = \frac{\pi^6}{7!} \text{ i t. d.} \quad (44)$$

¹⁾ Co do uogólnienia tego wzoru na inne pierwiastki kwadratowe, zob. Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz. r. 1908, p. 136—140.

Pierwszy z tych wzorów daje:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \quad (45)$$

— jest to wzór Eulera.

Dalej, mamy, jak łatwo widzieć:

$$2 \sum_{(k,l)} \frac{1}{k^2 l^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4},$$

i przeto drugi ze wzorów (44) daje, wobec (45):

$$2 \frac{\pi^4}{5!} = \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4},$$

skąd:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

co daje wzór

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

również znaleziony przez Eulera.

Ze wzoru (45), wobec oczywistej równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

znajdujemy w jednej chwili:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

co daje wzór Eulera:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Szereg (45) jest, jak łatwo widzieć, wolno zbieżny¹⁾: opierając się na tożsamości

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = 6 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right) - \frac{3}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2}$$

¹⁾ Można by dowieść, że na to iżby z szeregu (45) otrzymać liczbę π^2 z dokładnością do $\frac{1}{n}$ -tej, należałoby obliczyć sumę $6n$ pierwszych jego składników: więc np. chcąc otrzymać π^2 z czterema tylko znakami dziesiętnymi, należałoby wyliczyć sumę sześćdziesięciu tysięcy składników.

można jednak z szeregu (45) w jednej chwili otrzymać wzór

$$\pi^2 = 10 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n(n+1)]^2},$$

gdzie szereg, stojący po prawej stronie, jest już znacznie szybciej zbieżny¹⁾. Wzór ten wskazuje, że przybliżoną wartością liczby π^2 jest liczba 10, zatem przybliżoną wartością liczby π — liczba $\sqrt{10}$, którą Hindusi uważali w swoim czasie za dokładną wartość liczby π^2 .

§ 155. Wzór Stirlinga.

W § 152 wyprowadziliśmy wzór Wallisa na liczbę $\frac{\pi}{2}$, który możemy napisać w formie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^n \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} = 1. \quad (46)$$

Lecz, jak łatwo widzieć:

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n)!^2} \cdot \frac{1}{2n+1},$$

wobec czego, oraz z uwagi, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$, wzór (46) daje w jednej chwili:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n)!^2 \pi n} = 1,$$

skąd, biorąc po obu stronach pierwiastek arytmetyczny drugiego stopnia, otrzymujemy natychmiast:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{\pi n}} = 1. \quad (47)$$

¹⁾ Uwzględniając tylko pierwsze pięć jego składników otrzymalibyśmy π^2 z dokładnością czterech znaków dziesiętnych.

²⁾ Z innych wzorów przybliżonych tego rodzaju na liczbę π zauważymy wzór $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (z błędem $< \frac{1}{200}$).

Zauważymy jeszcze wzór przybliżony $\pi = \sqrt{2^2 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$, z błędem $< \frac{6}{10^5}$, nadający się do łatwej konstrukcji geometrycznej (Rektyfikacja Kochańskiego z r. 1685).

Położmy:

$$\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} = u_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (48)$$

będziemy mieli, jak to sprawdzimy po łatwych redukcjach:

$$\frac{u_n^2}{u_{2n}} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)! \sqrt{\pi n}},$$

skąd, w myśl (47):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^2}{u_{2n}} = 1. \quad (49)$$

Z drugiej strony mamy wobec (48), jak łatwo widzieć:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \quad (50)$$

Położmy

$$a_n = \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{n + \frac{1}{2}}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (51)$$

mamy, przy naturalnym n :

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4n^2} < 1 + \frac{1}{n^2},$$

zatem, wobec (51), przy naturalnym n :

$$a_n > \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}, \quad (52)$$

skąd, tembardziej:

$$a_n > \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

i przeto

$$\frac{1}{2} a_n^2 > \frac{1}{2n^2} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{8n^4}, \quad (53)$$

oraz

$$\frac{1}{6} a_n^2 > \frac{1}{6n^2} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2 > \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{4n^3}, \quad (54)$$

zatem (wobec $a_n > 0$ oraz w myśl wzoru (14) z § 133), z uwagi na (52), (53) i (54):

$$a_n^2 > 1 + \frac{a_n^2}{1!} + \frac{a_n^2}{2!} + \frac{a_n^2}{3!} > 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{8n^4} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Mamy więc przy wszelkiem naturalnem n :

$$1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}},$$

skąd, wobec (51):

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{2n}}. \quad (55)$$

Z drugiej strony, położmy

$$b_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}; \quad (56)$$

mamy (wobec $0 < b_n < 1$ oraz w myśl wzoru (14) z § 133):

$$e^{-b_n} > 1 - \frac{b_n}{1!} + \frac{b_n^2}{2!} - \frac{b_n^3}{3!}. \quad (57)$$

Lecz, jak łatwo widzieć, przy naturalnem n mamy, wobec (56), nierówność

$$1 - \frac{b_n}{1!} + \frac{b_n^2}{2!} - \frac{b_n^3}{3!} > \frac{n}{n+1},$$

wzór (57) daje więc, wobec (56):

$$e^{-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n}},$$

skąd

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > e. \quad (58)$$

Wobec (50), (55) i (58) możemy zatem napisać:

$$e < \frac{u_n}{u_{n+1}} < e^{1+\frac{1}{n^2}}, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

skąd wnosimy, że przy wszelkiem $k = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$e < \frac{u_{n+k}}{u_{n+k+1}} < e^{1+\frac{1}{(n+k)^2}} \leq e^{1+\frac{1}{n^2}}.$$

Mamy więc (przy naturalnem n):

$$e < \frac{u_{n+k}}{u_{n+k+1}} < e^{1+\frac{1}{n^2}}, \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Mnożąc te n nierówności stronami, otrzymujemy po łatwej redukcji:

$$e^n < \frac{u_n}{u_{2n}} < e^{n+\frac{1}{n}},$$

skąd:

$$1 < \frac{u_n e^{-n}}{u_{2n}} < e^{\frac{1}{n}}$$

i przeto, w granicy dla $n = \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n e^{-n}}{u_{2n}} = 1. \quad (59)$$

Wobec (49) i (59) otrzymujemy w jednej chwili, stosując tw. o granicy ilorazu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{e^n} = 1,$$

czyli, wobec (48):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}} = 1. \quad (60)$$

Wobec (60) otrzymujemy też w jednej chwili wzór:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \lg k - (n \lg n - n + \frac{1}{2} \lg n + \frac{1}{2} \lg 2\pi) \right] = 0. \quad (61)$$

Są to t. zw. wzory Stirlinga.

Jeżeli dla danego ciągu u_n , wzrastającego nieograniczenie wraz z n , oraz danej funkcji $f(x)$ zachodzi wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{f(n)} = 1,$$

to mówimy, że $f(n)$ jest *wartością asymptotyczną* wyrażenia u_n . Dla wielkich wartości n liczba $f(n)$ przedstawia wówczas przybliżoną wartość wyrażenia u_n , w tem znaczeniu, że stosunek $u_n : f(n)$ zmierzają do jedności (gdy n wzrasta nieograniczenie).

Zatem, w myśl wzoru (60), wyrażenie

$$\sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$$

przedstawia wartość asymptotyczną dla $n!$