

Ze wzorów (120) wynika, że przy wszelkim całkowitem  $p$ :

$$\zeta_1^p + \zeta_2^p + \dots + \zeta_m^p = \zeta_1^p + \zeta_1^{2p} + \dots + \zeta_1^{mp};$$

stad, w jednej chwili, dla  $p=m$  (ogólniej, dla  $p$  podzielnych przez  $m$ ), z uwagi, że  $\zeta_1^m = 1$ :

$$\zeta_1^p + \zeta_2^p + \dots + \zeta_m^p = m,$$

zaś dla  $p=1, 2, \dots, m-1$  (ogólniej, dla  $p$  niepodzielnych przez  $m$ ), wobec (121):

$$\zeta_1^p + \zeta_2^p + \dots + \zeta_m^p = \frac{\zeta_1^{(m+1)p} - \zeta_1^p}{\zeta_1^p - 1} = \zeta_1^p \frac{\zeta_1^m - 1}{\zeta_1^p - 1} = 0$$

(gdyż  $\zeta_1^m = 1$ ). Zatem:

*Suma  $p$ -tych potęg wszystkich pierwiastków  $m$ -go stopnia z jedności jest zerem dla  $p$  całkowitych niepodzielnych przez  $m$ , zaś liczbą  $m$  dla  $p$  podzielnych przez  $m$ .*

## ROZDZIAŁ XVII.

### Logarytmy liczb zespolonych. Potęga ogólna. Funkcje kołowe zmiennej zespolonej.

§ 144. Logarytmy liczb zespolonych. Niech  $z$  oznacza daną liczbę zespoloną, różną od zera,  $r$  — jej moduł,  $t$  — amplitudę. Postaramy się wyznaczyć wszystkie liczby zespolone  $\zeta$ , spełniające równanie

$$e^{\zeta} = z. \quad (1)$$

Załóżmy w tym celu, że liczba zespolona  $\zeta = \xi + \eta i$  (gdzie  $\xi$  i  $\eta$  są liczby rzeczywiste) spełnia równanie (1). Mamy więc:

$$e^{\xi + \eta i} = r e^{it}. \quad (2)$$

Biorąc moduły po obu stronach, otrzymujemy:

$$e^{\xi} = r, \quad (3)$$

a ponieważ  $\xi$  jest liczbą rzeczywistą, zaś  $r > 0$ , więc wzór (3) daje

$$\xi = \lg r.$$

Wnosząc (3) do (2) i dzieląc obie strony przez  $r e^{-it}$ , otrzymujemy, po pomnożeniu przez  $e^{-\eta i}$ :

$$e^{(\eta - 1)i} = 1,$$

co, w myśl tw. 173, dowodzi, że

$$\eta - t = 2k\pi,$$

gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli liczba zespolona  $\zeta = \xi + \eta i$  spełnia równanie (1), to musi być

$$\xi = \lg r, \quad \eta = t + 2k\pi, \quad (4)$$

gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą (przyczem  $r$  oznacza moduł, zaś  $t$  — amplitudę liczby  $z$ ).

Okażemy teraz, że naodwrot, każda liczba zespolona  $\zeta = \xi + \eta i$ , gdzie  $\xi$  i  $\eta$  są liczby (rzeczywiste) wyznaczone przez wzory (4), spełnia przy wszelkim całkowitem  $k$  równanie (1).

Wobec wzorów (4) i własności funkcji wykładniczej, mamy przy całkowitem  $k$ :

$$e^{\zeta} = e^{\xi + \eta i} = e^{\xi} \cdot e^{\eta i} = e^{\lg r} \cdot e^{i(t + 2k\pi)} = r e^{it},$$

czyli  $e^{\zeta} = z$ , c. b. d. o.

Udowodniliśmy więc

**Twierdzenie 177.** *Jeżeli  $z$  oznacza liczbę zespoloną różną od zera,  $r$  — jej moduł,  $t$  — amplitudę, to na to, żeby liczba zespolona  $\zeta$  spełniała równanie*

$$e^{\zeta} = z,$$

*potrzeba i wystarcza, iżby było*

$$\zeta = \lg r + ti + 2k\pi i,$$

gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.

Każdą liczbę zespoloną  $\zeta$ , spełniającą przy danem zespolonym  $z$  równanie (1), nazywamy logarytmem naturalnym liczby zespolonej  $z$ . Z dowiedzionego twierdzenia wynika więc, że

*Każda liczba zespolona różna od zera posiada nieskończenie wiele różnych logarytmów naturalnych.*

§ 145. Każdy z logarytmów naturalnych liczby zespolonej  $z$  będziemy oznaczali symbolem  $\text{Lg}z$ . Symbol  $\text{Lg}z$  ma więc przy każdym danem zespolonym  $z$  nieskończenie wiele różnych wartości, którymi są liczby:

$$\lg r + ti + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5)$$

Dla  $k = 0$  otrzymujemy tak zwany logarytm główny (loga-

rithme principale — według Cauchy'ego, Hauptwert des Logarithmus — według Weierstrassa): będzie to więc liczba

$$\lg r + ti.$$

W szczególności, jeżeli liczba  $z$  jest rzeczywistą dodatnią, to będzie  $t = 0$  i logarytmem głównym będzie  $\lg r$ . Możemy więc uważać logarytm główny za uogólnienie logarytmu rzeczywistego i oznaczać go tym samym symbolem  $\lg$ , co w teorii liczb rzeczywistych. Kładziemy więc dla każdej różnej od zera liczby zespolonej  $z$ , której modulem jest  $r$ , zaś amplitudą  $t$ :

$$\lg z = \lg r + ti. \quad (6)$$

Zatem: Każda różna od zera liczba zespolona  $z$  posiada oznaczony w zupełności logarytm główny  $\lg z$ , który jest liczbą rzeczywistą w razie rzeczywistego, dodatniego  $z$ . Łatwo widzieć, że logarytmy główne liczb rzeczywistych dodatnich są jedynymi logarytmami naturalnymi rzeczywistymi: wynika to natychmiast z uwagi, że (wobec  $-\pi < t \leq \pi$ , gdyż  $t$  jest amplitudą) wzór (5) tylko dla  $t = 0$ ,  $k = 0$  przedstawia liczbę rzeczywistą (albo z uwagi, że jeżeli przy rzeczywistym  $\xi$  mamy  $e^{\xi} = z$ , to  $z$  jest liczbą rzeczywistą dodatnią).

Obliczmy, w szczególności, logarytmy główne liczb ujemnych. Dla liczby  $z = -a$ , gdzie  $a > 0$ , modulem jest  $a$ , zaś amplitudą  $\pi$  (§ 141): mamy więc, w myśl (6):

$$\lg(-a) = \lg a + \pi i$$

— przy wszelkiem dodatnim  $a$ .

W szczególności więc, dla  $a = 1$ :

$$\lg(-1) = \pi i, \quad (7)$$

co daje ciekawy wzór:

$$\pi = \frac{\lg(-1)}{\sqrt{-1}}.$$

Obliczmy jeszcze logarytm główny liczby  $i$ . Amplitudą liczby  $i$  jest, jak wiemy (§ 141)  $\frac{\pi}{2}$ , zaś modulem 1: mamy więc, w myśl (6):

$$\lg i = \frac{\pi}{2} i. \quad (8)$$

Wobec wzoru (6), wzór (5) na logarytmy naturalne  $\lg z$  liczby  $z$  przyjmuję postać:

$$\lg z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

W szczególności więc np., dla  $z = 1$ , wnosimy, że logarytmem naturalnym jedności jest (i przytem tylko) każda liczba

$$2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

czyli każda wielokrotność (całkowita  $\geq 0$ ) liczby  $2\pi i$  (skąd wynika natychmiast, że tw. 173 pozostanie prawdziwem, jeżeli w niem słowa „liczba rzeczywista“ zastąpimy przez słowa „liczba zespolona“).

Co się tyczy logarytmów naturalnych  $\lg z$ , to, przy wszelkich zespolonych  $z_1$  i  $z_2$  różnych od zera, zachodzi dla nich wzór

$$\lg(z_1 z_2) = \lg z_1 + \lg z_2, \quad (9)$$

który należy rozumieć w ten sposób, że każda z wartości lewej strony jest jedną z wartości prawej strony i naodwrot. Innymi słowy: jeżeli dodamy do siebie jakikolwiek logarytm naturalny liczby  $z_1$  oraz jakikolwiek logarytm naturalny liczby  $z_2$ , to otrzymana w ten sposób suma będzie zawsze jednym z logarytmów naturalnych liczby  $z_1 z_2$ ; jeżeli zaś od jakiegokolwiek logarytmu naturalnego liczby  $z_1 z_2$  odejmiemy jakikolwiek logarytm naturalny liczby  $z_1$ , to otrzymana w ten sposób różnica będzie jednym z logarytmów naturalnych liczby  $z_2$ .

W samej rzeczy, niech  $z_1$  i  $z_2$  będą dwie dane liczby zespolone, różne od zera, i niech  $\zeta_1$  oznacza jakikolwiek logarytm naturalny liczby  $z_1$ , zaś  $\zeta_2$  — jakikolwiek logarytm naturalny liczby  $z_2$ . Mamy więc, jak to wynika z definicji logarytmów naturalnych:

$$e^{\zeta_1} = z_1, \quad e^{\zeta_2} = z_2,$$

skąd:

$$e^{\zeta_1 + \zeta_2} = z_1 z_2,$$

co dowodzi, że liczba  $\zeta_1 + \zeta_2$  jest jednym z logarytmów naturalnych liczby  $z_1 z_2$ .

Z drugiej strony, niech  $\zeta$  oznacza jakikolwiek logarytm naturalny liczby  $z_1 z_2$ ,  $\zeta_1$  — jakikolwiek logarytm naturalny liczby  $z_1$ : będziemy więc mieli:

$$e^{\zeta} = z_1 z_2, \quad e^{\zeta_1} = z_1,$$

skąd (wobec  $z_1 \neq 0$ ):

$$e^{\xi - \zeta_1} = z_2,$$

co dowodzi, że liczba  $\xi - \zeta_1$  jest jednym z logarytmów naturalnych liczby  $z_2$ . Każdy logarytm naturalny liczby  $z_1 z_2$  jest więc sumą pewnych dwóch logarytmów naturalnych liczb  $z_1$  i  $z_2$ . Wzór (9) udowodniliśmy zatem w zupełności.

Podobnie udowodnilibyśmy wzór

$$\text{Lg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Lg} z_1 - \text{Lg} z_2$$

— przy wszelkich, różnych od zera, liczbach zespolonych  $z_1$  i  $z_2$ .

Zauważymy jednak, że dla logarytmów głównych nie zachodzą podobne wzory: mamy np., wobec (7):

$$\lg(-1) + \lg(-1) = 2\pi i,$$

natomiast

$$\lg[(-1)(-1)] = \lg 1 = 0:$$

logarytm główny iloczynu niekoniecznie więc jest sumą logarytmów głównych czynników. Przy wszelkich atoli zespolonych  $z_1$  i  $z_2$  różnych od zera, możemy napisać:

$$\lg(z_1 z_2) = \lg z_1 + \lg z_2 \pmod{2\pi i}$$

oraz

$$\lg \frac{z_1}{z_2} = \lg z_1 - \lg z_2 \pmod{2\pi i}.$$

[Wzór  $a \equiv b \pmod{m}$  (gdzie  $a$ ,  $b$  i  $m$  mogą być jakiejkolwiek dane liczby rzeczywiste lub zespolone) zwany w Teorii liczb *kongruencją*, wyraża, że przy pewnym całkowitem  $k$  zachodzi równość  $a = b + km$ ].

Możnaby z łatwością dowieść, że mamy zawsze

$$\lg(z_1 z_2) = \lg z_1 + \lg z_2 + 2k\pi i,$$

gdzie  $k=0$ , jeżeli suma amplitud liczb  $z_1$  i  $z_2$  jest jednocześnie  $> -\pi$  oraz  $\leq \pi$ ,  $k=1$ , jeżeli suma ta jest  $\leq -\pi$ , i wreszcie  $k=-1$ , jeżeli suma ta jest  $> \pi$ .

Co się tyczy wzoru (9), to zauważymy jeszcze, że nie możemy z niego, kładąc  $z_1 = z_2 = z$ , wysnuwać wniosku, że przy wszelkiem zespolonym  $z \neq 0$

$$\text{Lg}(z^2) = 2\text{Lg} z,$$

rozumiejąc tę równość w ten sposób, że każda z wartości lewej strony jest jedną z wartości prawej strony i naodwrot. Wprawdzie, jak łatwo widzieć, każda z wartości prawej strony wypisanego wzoru jest jedną z wartości lewej strony, lecz nie naodwrot: np. liczba  $\lg 4 + 2\pi i = 2\lg 2 + 2\pi i$  jest, jak łatwo widzieć, jednym z logarytmów naturalnych liczby  $4 = 2^2$ , natomiast połowa jej, czyli liczba  $\lg 2 + \pi i$ , nie jest logarytmem naturalnym liczby 2.

§ 146. Potęga o wykładniku zespolonym. Pojęcie potęgi (liczb różnych od zera) mamy dotychczas określone tylko:

1) w razie podstawy  $e$  — dla wszystkich wykładników zespolonych;

2) w razie podstawy rzeczywistej dodatniej — dla wszystkich wykładników rzeczywistych;

3) w razie podstawy zespolonej — dla wykładników całkowitych.

Rozszerzymy teraz pojęcie potęgi, określając je dla jakiejkolwiek (różnej od zera) podstawy zespolonej, oraz jakiegokolwiek zespolonego wykładnika.

**Definicja.** Przez symbol

$$z^m,$$

gdzie  $z$  i  $m$  są jakiejkolwiek dwie dane liczby zespolone, przyczem  $z \neq 0$ , rozumiemy liczbę

$$e^{m \lg z}$$

(liczbę tę nazywamy niekiedy *potęgą naturalną* o podstawie  $z$  i wykładniku (zespolonym)  $m$ , co należy odróżniać od potęgi o wykładniku naturalnym, która, jak to zobaczymy, jest tylko przypadkiem szczególnym potęgi naturalnej. Oprócz tej ostatniej można rozpatrywać jeszcze ogólniejsze pojęcie potęgi, którem się zajmujemy w § 147).

Ponieważ, jak wiemy, z jednej strony, każda różna od zera liczba zespolona  $z$  posiada oznaczony w zupełności logarytm główny  $\lg z$ , z drugiej zaś — każda potęga liczby  $e$  o zespolonym wykładniku jest oznaczoną w zupełności liczbą zespoloną, więc z definicji naszej wynika, że potęga  $z^m$  jest dla każdej, różnej od zera podstawy zespolonej  $z$  oraz każdego wykładnika zespolonego  $m$  określoną w zupełności (przez  $z$  i  $m$ ) liczbą zespoloną.

Dla przyjęcia jednak postawionej definicji, która ma być rozszerzeniem potęgi w przypadkach 1), 2) i 3), należy wprzód

sprawdzić, czy przyjęte przedtem definicje potęgi w przypadkach 1), 2) i 3) są zgodne z obecną definicją ogólną.

1) Dla  $z = e$  otrzymujemy, w myśl obecnej definicji potęgi:

$$e^m = e^{m \lg e},$$

co jest prawdziwe, gdyż  $\lg e = 1$ .

2) Dla  $z > 0$  oraz rzeczywistego  $m$  otrzymujemy, w myśl obecnej definicji potęgi:

$$z^m = e^{m \lg z},$$

co jest prawdziwe, gdyż dla  $z > 0$  i rzeczywistego  $m$  mamy:

$$e^{m \lg z} = (e^{\lg z})^m = z^m.$$

3) Dla całkowitego  $m$  obecna definicja potęgi daje przy wszelkim zespolonym  $z \neq 0$ :

$$z^m = e^{m \lg z},$$

co jest prawdziwe, gdyż (w myśl wzoru (20) z Rozdz. XVI) mamy dla całkowitych  $m$ :

$$e^{m \lg z} = (e^{\lg z})^m = z^m.$$

Definicja nasza jest więc zgodna z przyjętą przedtem definicją potęgi w przypadkach szczególnych 1), 2) i 3).

Rozpatrzmy obecnie kilka przypadków szczególnych potęgi.

Niech  $m$  oznacza jakąkolwiek daną liczbę zespoloną; obliczymy  $1^m$ . Mamy, w myśl definicji potęgi:

$$1^m = e^{m \lg 1},$$

skąd, wobec  $m \lg 1 = 0$  oraz  $e^0 = 1$ :

$$1^m = 1$$

— przy wszelkim zespolonym  $m$ .

Wobec wzoru (7) wnosimy podobnie, że

$$(-1)^m = e^{m \pi i}$$

przy wszelkim zespolonym  $m$ : więc np. dla  $m = i$ :

$$(-1)^i = \frac{1}{e^{\pi}};$$

ze wzoru zaś (8) znajdujemy:

$$i^m = e^{\frac{\pi}{2} m i}$$

(10)

przy wszelkim zespolonym  $m$ : stąd w szczególności, dla  $m = i$  (z uwagi, że  $e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$ ):

$$i^i = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}};$$

liczba  $i^i$  jest więc rzeczywistą, dodatnią.

Obliczmy teraz potęgę  $z^{\frac{1}{n}}$ , gdzie  $z$  jest daną (różną od zera) liczbą zespoloną, zaś  $n$  — liczbą naturalną.

W myśl definicji potęgi, oraz wobec (6), będzie

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \lg z} = e^{\frac{1}{n} (\lg r + i t)} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i}{n} t},$$

skąd, w myśl wzoru Eulera [wzór (24) Rozdz. XVI]

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{t}{n} + i \sin \frac{t}{n} \right). \quad (11)$$

Wobec wzoru na pierwiastki  $m$ -go stopnia (wzór (118) Rozdz. XVI) wnosimy, że  $z^{\frac{1}{n}}$  jest jednym z pierwiastków  $n$ -go stopnia z liczby  $z$ . Pierwiastek ten nazywamy *pierwiastkiem głównym  $n$ -go stopnia z liczby  $z$* : jest to, jak łatwo widzieć, *uogólnienie pierwiastka arytmetycznego* (ten ostatni otrzymujemy w razie  $t = 0$ ). Przez pierwiastek główny naturalnego stopnia z liczby 0 rozumiemy 0. W ten sposób pierwiastek główny każdego danego naturalnego stopnia z każdej danej liczby zespolonej będzie określoną w zupełności liczbą zespoloną.

W szczególności, dla  $z = -a$ , gdzie  $a > 0$ ,  $n = 2$ , mamy  $r = a$ ,  $t = \pi$  i wzór (11) daje:  $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i \sqrt{a}$ . Zatem: pierwiastkiem głównym drugiego stopnia z liczby ujemnej  $-a$  jest  $i \sqrt{a}$ .

**Własności potęg zespolonych.**

**Twierdzenie 178. Mamy:**

$$z^{m_1} \cdot z^{m_2} = z^{m_1 + m_2} \quad (12)$$

przy wszelkim zespolonym  $z \neq 0$  oraz wszelkich zespolonych  $m_1$  i  $m_2$ .

**Dowód.** Mamy, w myśl definicji potęgi:

$$z^{m_1} = e^{m_1 \lg z}, \quad z^{m_2} = e^{m_2 \lg z}, \quad z^{m_1 + m_2} = e^{(m_1 + m_2) \lg z},$$

a że, w myśl wzoru (17) z Rozdz. XVI-go:

$$e^{(m_1 + m_2) \lg z} = e^{m_1 \lg z} \cdot e^{m_2 \lg z},$$

więc mamy wzór (12), c. b. d. o.

Podobnie udowodnilibysmy wzór:

$$z^{m_1} : z^{m_2} = z^{m_1 - m_2}$$

przy wszelkiem zespolonem  $z \neq 0$  oraz zespolonych  $m_1$  i  $m_2$ . A więc: mnożąc potęgi o tej samej podstawie, należy wykładniki dodawać, dzieląc — odejmować, podobnie jak dla potęg rzeczywistych.

Nie wszystkie jednak własności potęg rzeczywistych zachodzą dla potęg zespolonych: nie zachodzi tu np. prawo potęgowania potęg. Mamy np.:

$$[(-1)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1,$$

natomiast

$$(-1)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -1.$$

Podobnie, mamy

$$(i^{-2})^i = e^{-\pi}, \text{ zaś } i^{-2i} = e^{\pi} \quad [\text{w myśl (10)}].$$

Zauważymy, że liczby

$$(z^{m_1})^{m_2}, (z^{m_2})^{m_1}, z^{m_1 m_2}$$

mogą być wszystkie trzy różne: mamy np., jak to czytelnik obliczy z łatwością:

$$(e^{3\pi i})^{5\pi i} = e^{-15\pi^2}, \quad (e^{5\pi i})^{3\pi i} = e^{-15\pi^2}, \quad e^{3\pi i \cdot 5\pi i} = e^{-15\pi^2}.$$

Dla potęg zespolonych nie zawsze też zachodzi wzór

$$(z_1 z_2)^m = z_1^m z_2^m;$$

np., dla  $z_1 = z_2 = -1$ ,  $m = \frac{1}{2}$ , mamy, jak łatwo widzieć:

$$[(-1)(-1)]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1, \text{ natomiast } (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}} = i \cdot i = -1.$$

§ 147. Potęga ogólna. Prócz potęgi naturalnej, która (dla każdej różnej od zera podstawy zespolonej i każdego zespolonego wykładnika) jest określoną jednoznacznie, można też rozpatrywać ogólniejsze pojęcie potęgi.

Cauchy oznacza, przy danem zespolonem  $z \neq 0$  oraz danem zespolonem  $m$ , symbolem

$$((z))^m \quad (13)$$

każdą liczbę

$$e^{m \operatorname{Lg} z},$$

gdzie  $\operatorname{Lg} z$  oznacza którykolwiek z logarytmów naturalnych liczby  $z$ .

Symbol (13) jest wogóle wielowartościowy: oznacza on, mianowicie, wobec wzorów (5) na logarytm naturalny, każdą z liczb

$$e^{m(\operatorname{Lg} r + i + 2k\pi i)}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (14)$$

gdzie  $r$  oznacza moduł, zaś  $i$  — amplitudę liczby  $z$ .

Liczby (14) nie zawsze jednak są wszystkie różne: w razie rzeczywistego, wymiernego  $m$ , wśród liczb (14) skończona tylko liczba będzie różnych. W samej rzeczy, założmy, że  $m$  jest liczbą rzeczywistą, wymierną:  $m = \frac{p}{q}$  (gdzie  $p$  jest całkowite,  $q$  — naturalne) i niech  $k$  oznacza dowolną daną liczbę całkowitą. Będziemy mieli, wobec własności funkcji wykładniczej oraz z uwagi, że  $m q = p$ ,  $z = r e^{i\theta}$ :

$$[e^{m(\operatorname{Lg} r + i + 2k\pi i)}]^q = e^{p \operatorname{Lg} r + p i + 2kp\pi i} = r^p e^{pi} = (r e^{i\theta})^p = z^p,$$

co dowodzi, że każda z liczb (14) jest (w uważanym przypadku) pierwiastkiem  $q$ -go stopnia z liczby  $z^p$ .

Każda z wartości symbolu  $((z))^{\frac{p}{q}}$  jest więc jednym z pierwiastków  $q$ -go stopnia z liczby  $z^p$ : uważany symbol ma więc skończoną liczbę różnych wartości. Można by okazać, że jeżeli ułamek  $\frac{p}{q}$  jest nieprzywiedlny, o naturalnym mianowniku, to i naodwrot, każdy pierwiastek  $q$ -go stopnia z liczby  $z^p$  jest jedną z wartości symbolu  $((z))^{\frac{p}{q}}$ : symbol ten ma więc wtedy dokładnie  $q$  różnych wartości.

Jeżeli bowiem liczby  $p \neq 0$  i  $q$  są względnie pierwsze, to jak się to dowodzi w Teorii liczb, istnieją liczby całkowite  $u$  i  $v$ , takie iż

$$uq + vp = 1. \quad (15)$$

Jeżeli teraz  $\zeta$  jest pierwiastkiem  $q$ -go stopnia z liczby  $z^p$ , to mamy

$$\zeta^q = z^p, \quad (16)$$

a że oczywiście  $\zeta = e^{i\theta} z$ ,  $z = e^{i\theta} z$ , więc, wobec (16), mamy  $e^{i\theta} z - z^p = 1$ , co dowodzi, że liczba  $q \operatorname{Lg} \zeta - p \operatorname{Lg} z$  jest jednym z logarytmów naturalnych liczby 1, skąd, jak wiemy (§ 145), wynika, że

$$q \operatorname{Lg} \zeta - p \operatorname{Lg} z = 2k\pi i, \quad (17)$$



gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą. Połóżmy teraz

$$\tau = q \frac{\lg \zeta - 2ku\pi i}{p} \quad (18)$$

będzie więc, wobec (15) oraz (17):

$$\tau = \lg s + 2ku\pi i, \text{ skąd } e^{\tau} = e^{\lg s + 2ku\pi i} = s,$$

co dowodzi, że  $\tau$  jest jednym z logarytmów naturalnych liczby  $s$ ; z drugiej zaś strony, wobec (18) będziemy mieli

$$\frac{p}{q} \tau = \lg \zeta - 2ku\pi i = \zeta,$$

co, z uwagi, że  $\tau$  jest jednym z  $\text{Lg} s$ , dowodzi, że  $\zeta$  jest jedną z wartości  $e^{\frac{p}{q} \text{Lg} s}$ .

Czyli jedną z wartości symbolu  $((s))^{\frac{p}{q}}$ , c. b. d. o.

Dla  $p=0$  ( $s \neq 0$ ) symbol  $((s))^0$  ma oczywiście jedną tylko wartość  $= 1$ ,

Żałujemy teraz, że  $m$  jest liczbą rzeczywistą niewymierną: powiadam, że wówczas wszystkie liczby (14) są różne. W samej rzeczy, z równości

$$e^{m(\lg r + i + 2k\pi i)} = e^{m(\lg r + i + 2k'\pi i)}$$

wynika

$$e^{2m\pi(k-k')i} = 1,$$

co, w myśl tw. 173, dowodzi, że

$$2m\pi(k-k') = 2l\pi,$$

gdzie  $l$  jest liczbą całkowitą, skąd, w razie  $k \neq k'$ :

$$m = \frac{l}{k-k'},$$

co niemożliwe, skoro  $m$  jest liczbą niewymierną. Liczby (14) są więc w razie niewymiernego  $m$  wszystkie różne i przeto symbol  $((z))^m$  posiada (przy wszelkiem zespolonem  $z \neq 0$ ) nieskończenie wiele różnych wartości.

W razie rzeczywistego  $m$  wszystkie wartości symbolu  $((z))^m$  posiadają, jak łatwo widzieć, jeden i ten sam moduł, mianowicie  $|z|^m$  (gdyż wszystkie liczby (14) posiadają, w razie rzeczywistego  $m$ , ten sam moduł  $e^{m \lg r} = r^m = |z|^m$ ).

Inaczej ma się rzecz w razie kiedy liczba  $m$  nie jest rzeczywistą: każda z liczb (14) posiada wówczas inny moduł.

W samej rzeczy, modulem liczby

$$e^{(a+bi)(\lg r + i + 2k\pi i)}$$

jest, jak łatwo widzieć, liczba

$$e^{a \lg r - bi - 2kb\pi}$$

i przeto, w razie  $b \neq 0$ , różnym wartościom na  $k$  będą odpowiadały zawsze różne moduły.

Jeżeli więc wykładnik  $m$  nie jest liczbą rzeczywistą, to symbol  $((z))^m$  posiada (przy wszelkiem zespolonem  $z \neq 0$ ) nieskończenie wiele różnych wartości.

Jako przykład weźmy symbol

$$((-1))^k;$$

ponieważ amplitudą liczby  $-1$  jest  $\pi$ , więc, w danym razie, liczbami (14), czyli wartościami symbolu  $((-1))^k$ , są liczby

$$e^{-(2k+1)\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

— wszystkie one są rzeczywiste, dodatnie.

Podobnie znaleźlibyśmy, że wartościami symbolu

$$((i))^k$$

są liczby

$$e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

zaś wartościami symbolu

$$((e))^k$$

są liczby

$$-e^{-2k\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

— wszystkie rzeczywiste, ujemne.

Symbol

$$((1))^k$$

ma, jak łatwo widzieć, tylko jedną wartość 1, podobnie jak symbol  $((1))^{-1}$ , lecz wartościami symbolu

$$((1))^k$$

są liczby

$$e^{-2k\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

§ 148. Funkcje kołowe zmiennej zespolonej. Niech  $z$  oznacza daną liczbę zespoloną. Postaramy się wyznaczyć wszystkie liczby zespolone  $\zeta$ , spełniające równanie

$$\cos \zeta = z.$$

(19)

W myśl wzoru (26) z § 136, mamy przy wszelkiem zespolonem  $\zeta$ :

$$\cos \zeta = \frac{e^{\zeta i} + e^{-\zeta i}}{2}.$$

i przeto równanie (19) równoważne jest równaniu

$$\frac{e^{\zeta i} + e^{-\zeta i}}{2} = z. \quad (20)$$

Założmy, że liczba zespolona  $\zeta$  spełnia równanie (20): położmy, przez skrócenie

$$e^{\zeta i} = u. \quad (21)$$

Równanie (20) daje, wobec (21), po pomnożeniu obu stron przez  $2u$ :

$$u^2 + 1 = 2zu,$$

skąd

$$(u - z)^2 = z^2 - 1. \quad (22)$$

Równanie (22) dowodzi, że liczba  $u - z$  jest jednym z pierwiastków drugiego stopnia z liczby zespolonej  $z^2 - 1$ : pierwiastków takich mamy, jak wiadomo dwa (§ 63) (w przypadku  $z = \pm 1$  tylko jeden  $= 0$ ); jeżeli pierwiastek główny oznaczymy symbolem  $\sqrt{z^2 - 1}$ , to uważanymi pierwiastkami będą liczby

$$+\sqrt{z^2 - 1} \quad \text{oraz} \quad -\sqrt{z^2 - 1}$$

(które w przypadku  $z = \pm 1$  są równe).

Musi więc być

$$u - z = +\sqrt{z^2 - 1} \quad \text{lub} \quad u - z = -\sqrt{z^2 - 1},$$

skąd

$$u = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad \text{lub} \quad u = z - \sqrt{z^2 - 1},$$

czyli, wobec (21):

$$e^{\zeta i} = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad \text{lub} \quad e^{\zeta i} = z - \sqrt{z^2 - 1}. \quad (23)$$

Przy wszelkiem zespolonem  $z$  mamy oczywiście

$$(z + \sqrt{z^2 - 1})(z - \sqrt{z^2 - 1}) = z^2 - (z^2 - 1) = 1,$$

co dowodzi, że przy wszelkiem zespolonem  $z$

$$z + \sqrt{z^2 - 1} \neq 0 \quad (24)$$

oraz

$$z - \sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}}; \quad (25)$$

wzory (23) możemy przeto przepisać w postaci:

$$e^{\zeta i} = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad \text{lub} \quad e^{\zeta i} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}},$$

co daje się połączyć w jeden wzór:

$$e^{\pm \zeta i} = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad (26)$$

(co należy rozumieć w ten sposób, że wzór (26) jest prawdziwy przy jednym conajmniej ze znaków  $\pm$ ).

Wobec (24) liczba  $\lg(z + \sqrt{z^2 - 1})$  ma zawsze oznaczoną wartość i przyletem mamy

$$e^{i \lg(z + \sqrt{z^2 - 1})} = z + \sqrt{z^2 - 1}. \quad (27)$$

Wzory (26) i (27) dają w jednej chwili:

$$e^{\pm \zeta i - i \lg(z + \sqrt{z^2 - 1})} = 1,$$

skąd, podnosząc obie strony do potęgi o wykładniku  $\pm 1$  (biorąc znak taki jak przy  $\zeta i$ ):

$$e^{\pm \zeta i \mp i \lg(z + \sqrt{z^2 - 1})} = 1,$$

co dowodzi, że liczba  $\zeta i \mp i \lg(z + \sqrt{z^2 - 1})$  jest jednym z logarytmów naturalnych jedności, skąd, jak wiemy (§ 145), wynika, że przy pewnym całkowitem  $k$ :

$$\zeta i \mp i \lg(z + \sqrt{z^2 - 1}) = 2k\pi i,$$

skąd, w jednej chwili:

$$\zeta = \mp i \lg(z + \sqrt{z^2 - 1}) + 2k\pi. \quad (28)$$

Dowiedzieliśmy więc, że jeżeli liczba zespolona  $\zeta$  spełnia równanie (19), to zachodzi wzór (28) przy jednym ze znaków  $\mp$  oraz pewnej całkowitej wartości na  $k$ .

Okazemy teraz, że wyznaczając (dla danego zespolonego  $z$ ) liczbę  $\zeta$  ze wzoru (28) przy dowolnym znaku  $\mp$  oraz dowolnej wartości całkowitej  $k$ , otrzymamy zawsze rozwiązanie równania (19).

Niech więc  $z$  oznacza daną liczbę zespoloną; mamy zawsze, jak dowiedzieliśmy wyżej, nierówność (24) i przeto  $\lg(z + \sqrt{z^2 - 1})$  jest oznaczona liczbą zespoloną, spełniającą wzór (27). Wyznaczając

liczbę  $\zeta$  ze wzoru (28) (przy którymkolwiek ze znaków  $\mp$  i jakiegokolwiek wartości całkowitej na  $k$ ) będziemy mieli:

$$e^{\zeta i} = e^{+i\lg(z + \sqrt{z^2 - 1}) + 2k\pi} = e^{+i\lg(z + \sqrt{z^2 - 1})},$$

czyli, wobec (27):

$$e^{\zeta i} = z + \sqrt{z^2 - 1}, \text{ lub } e^{\zeta i} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}},$$

co, wobec (25), możemy napisać w postaci:

$$e^{\zeta i} = z \pm \sqrt{z^2 - 1},$$

skąd, w każdym razie

$$(e^{\zeta i} - z)^2 = z^2 - 1,$$

oraz

$$e^{2\zeta i} + 1 = 2ze^{\zeta i}. \quad (29)$$

Mnożąc obie strony wzoru (29) przez liczbę  $\frac{e^{-\zeta i}}{2}$ , otrzymujemy:

$$\frac{e^{\zeta i} + e^{-\zeta i}}{2} = z,$$

czyli (wobec wzoru (26) z § 136):

$$\cos \zeta = z,$$

co dowodzi, że liczba  $\zeta$  spełnia równanie (19).

Udowodniliśmy więc następujące

**Twierdzenie 179.** *Na to, żeby liczba zespolona  $\zeta$  spełniała przy danym zespolonym  $z$  równanie*

$$\cos \zeta = z,$$

*potrzeba i wystarcza, iżby liczba  $\zeta$  była jedną z liczb*

$$\mp i\lg(z + \sqrt{z^2 - 1}) + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (30)$$

Każdą z liczb (30) oznaczamy symbolem  $\text{Arc cos } z$ : symbol ten posiada więc przy każdym danym zespolonym  $z$  nieskończenie wiele różnych wartości, z których każda spełnia równanie (19), i naodwrot: każde rozwiązanie równania (10) jest jedną z wartości symbolu  $\text{Arc cos } z$ .

Z równania (19) wynika, dalej, natychmiast, w myśl tw. 179, że jeżeli (przy danym  $z$ ) którakolwiek z wartości (30) jest rzeczywistą (a wówczas, jak łatwo widzieć, wszystkie liczby (30) będą

rzeczywiste), to liczba  $z$  musi być rzeczywistą, bezwzględnie nie większą od jedności [gdyż, przy rzeczywistym  $\zeta$ ,  $\cos \zeta$  jest liczbą rzeczywistą przedziału  $(-1, 1)$ ].

Zalóżmy więc, że  $z = x$ , gdzie  $-1 \leq x \leq 1$ .

Dla  $-1 < x < 1$  liczba  $x^2 - 1$  jest ujemną i przeto (jak dowiedliśmy w § 146) pierwiastkiem głównym stopnia drugiego z liczby  $x^2 - 1$  będzie  $i\sqrt{1 - x^2}$ , co pozostaje prawdziwym i dla  $x = \pm 1$  (gdyż pierwiastkiem głównym naturalnego stopnia z liczby 0 jest 0); mamy więc

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = x + i\sqrt{1 - x^2}, \text{ dla } -1 \leq x \leq 1, \quad (31)$$

skąd, wobec  $-1 \leq x \leq 1$ , wynika natychmiast, że modulem liczby  $x + \sqrt{x^2 - 1}$  jest liczba 1.

Jak dowiedliśmy w § 141, amplitudą liczby zespolonej  $a + bi \neq 0$  jest

$$\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ dla } b \geq 0, \text{ oraz } -\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ dla } b < 0;$$

kładąc  $a = x$ ,  $b = \sqrt{1 - x^2}$ , wnosimy stąd, w jednej chwili, że (dla  $-1 \leq x \leq 1$ ) amplitudą liczby  $x + i\sqrt{1 - x^2}$  jest  $\arccos x$ .

Wobec (31) i w myśl wzoru (6) na logarytm główny, wnosimy więc natychmiast, że

$$\lg(x + \sqrt{x^2 - 1}) = i\arccos x, \text{ dla } -1 \leq x \leq 1. \quad (32)$$

Wobec (32), wzór (30) przyjmuje więc dla  $z = x$ , gdzie  $-1 \leq x \leq 1$ , postać

$$\pm \arccos x + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Biorąc znak górny i kładąc  $k = 0$ , otrzymamy  $\arccos x$ . Umówimy się też w razie jakiegokolwiek zespolonego  $z$  tę wartość wzoru (30); którą otrzymujemy przy górnym znaku, dla  $k = 0$ , oznaczać przez  $\arccos z$  i nazwiemy ją *wartością główną* funkcji  $\text{Arc cos } z$ . Kładziemy więc przy wszelkiem zespolonym  $z$ :

$$\arccos z = -i\lg(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad (33)$$

— będzie to więc liczba zespolona, określona w zupełności przy wszelkiem zespolonym  $z$ .

Wzór (30) na wartości  $\text{Arc cos } z$  przyjmie, wobec (33), postać:

$$\pm \arccos z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (34)$$



(Moglibyśmy też, jak łatwo widzieć, napisać przy wszelkiem zespolonem  $z$ :

$$\operatorname{Arc} \cos z = \mp i \operatorname{Lg}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

co należy rozumieć w ten sposób, że każda z wartości lewej strony jest jedną z wartości prawej strony i naodwrot.

W szczególności, dla  $z = 0$ , wnosimy, że wartościami symbolu  $\operatorname{Arc} \cos 0$  są (wobec  $\operatorname{arc} \cos 0 = \frac{\pi}{2}$ ) liczby:

$$(2k \pm \frac{1}{2})\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (35)$$

innymi słowy, że dla liczb (35) i tylko dla tych liczb funkcja *cosinus* jest zerem. Liczby (35), jak łatwo widzieć, przedstawić można też wzorem

$$(k - \frac{1}{2})\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Weźmy teraz pod rozwagę równanie

$$\sin \zeta = z, \quad (36)$$

gdzie  $z$  jest daną liczbą zespoloną.

W myśl wzoru (41) z § 137, równanie (36) równoważne jest równaniu

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right) = z,$$

które dowodzi, że liczba  $\frac{\pi}{2} - \zeta$  jest jedną z wartości  $\operatorname{Arc} \cos z$ , czyli jedną z liczb (34). Wnosimy stąd, że na to, iżby liczba  $\zeta$  spełniała równanie (36), potrzeba i wystarcza, iżby  $\zeta$  było jedną z liczb

$$\frac{\pi}{2} \mp \operatorname{arc} \cos z - 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (37)$$

W szczególności, dla  $z = 0$ , wobec  $\operatorname{arc} \cos 0 = \frac{\pi}{2}$ , wnosimy, że na to, iżby było

$$\sin \zeta = 0,$$

potrzeba i wystarcza, iżby  $\zeta$  była jedną z liczb

$$\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2} - 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

czyli, jak łatwo widzieć, potrzeba i wystarcza, iżby  $\zeta$  było całkowitą ( $\geq$ ) wielokrotnością liczby  $\pi$ .

Każdą z liczb (37) oznaczamy symbolem  $\operatorname{Arc} \sin z$ : symbol ten posiada więc przy każdym danem zespolonem  $z$  nieskończenie wiele różnych wartości, z których każda spełnia równanie (36) i naodwrot. Możemy też oczywiście napisać

$$\operatorname{Arc} \sin z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \cos z,$$

w tem znaczeniu, że każda z wartości lewej strony jest jedną z wartości prawej strony oraz naodwrot.

W szczególności, tę liczbę, którą otrzymujemy ze wzoru (37) przy górnym znaku, kładąc  $k = 0$ , nazywamy wartością główną symbolu  $\operatorname{Arc} \sin z$  i oznaczamy symbolem  $\operatorname{arcsin} z$ : jest to więc, wobec wzoru (66) z § 140, uogólnienie funkcji *arcus sinus*, określonej przedtem w przedziale  $(-1, 1)$ , przyczem mamy przy wszelkiem zespolonem  $z$ :

$$\operatorname{arc} \sin z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \cos z.$$

**§ 149. Funkcja  $\operatorname{tg} z$  oraz jej odwrócenie.** Jak dowiedliśmy w § 140, liczby (35) są jedynymi liczbami zespolonemi, dla których *cosinus* jest zerem. Dla każdej więc liczby zespolonej  $z$ , nie będącej żadną z liczb (35), będzie  $\cos z \neq 0$ , i przeto iloraz  $\frac{\sin z}{\cos z}$  będzie oznaczoną w zupełności (przez  $z$ ) liczbą zespoloną, którą będziemy oznaczali przez  $\operatorname{tg} z$  (czytaj *tangens*  $z$ ). Funkcja

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

będzie więc określoną w zupełności i przytem (jako iloraz funkcji ciągłych) *ciągłą* w całym zbiorze liczb zespolonych, z wyjątkiem liczb (35), t. j. liczb, tworzących postęp arytmetyczny (nieograniczony w obu kierunkach):

$$\dots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \quad (38)$$

Wobec wzorów (44) i (43) z § 137, mamy:

$$\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z \quad (39)$$

— przy wszelkiem zespolonem  $z$ , nie będącym żadną z liczb (38). Funkcja  $\operatorname{tg} z$  jest więc *okresową*, o okresie  $\pi$ .

Zbadamy bliżej funkcję  $\operatorname{tg} x$  dla zmiennej rzeczywistej. Wobec okresowości funkcji  $\operatorname{tg} x$ , wystarczy ją zbadać dla jednego tylko okresu, np. dla  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

Wobec wzorów (23) z § 136, mamy stale

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x; \quad (40)$$

wystarczy więc zbadać bliżej funkcję  $\operatorname{tg} x$  tylko dla  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ .

Wewnątrz przedziału  $(0, \frac{\pi}{2})$ , jak wiemy (§ 138), funkcja  $\sin x$  stale wzrasta, zaś funkcja  $\cos x$  stale maleje, przytem obie są dodatnie: wnosimy stąd, że funkcja  $\operatorname{tg} x = \sin x : \cos x$  stale wzrasta wewnątrz przedziału  $(0, \frac{\pi}{2})$  i jest dodatnią. Wobec (40), wnosimy stąd w jednej chwili, że wewnątrz przedziału  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  funkcja  $\operatorname{tg} x$  stale wzrasta i jest ujemną. Dla  $x=0$  mamy oczywiście  $\operatorname{tg} 0 = 0$ .

*Funkcja  $\operatorname{tg} x$  jest więc stale rosnącą wewnątrz przedziału  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .*

Niech teraz  $y$  oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą. Uodwodnimy, że wewnątrz przedziału  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  istnieje jedna i tylko jedna liczba rzeczywista  $x$ , spełniająca równanie

$$\operatorname{tg} x = y. \quad (41)$$

W samej rzeczy, założmy, że  $x$  jest liczbą rzeczywistą, spełniającą nierówność

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad (42)$$

oraz (przy danem rzeczywistem  $y$ ) równanie (41).

Z uwagi, że [wobec (42)]:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x},$$

wnosimy, w myśl (41), że

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = y^2,$$

skąd, w jednej chwili:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2},$$

co, z uwagi, że, wobec (42),  $\cos x > 0$ , daje:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}. \quad (43)$$

Rozróżnimy, dalej, dwa przypadki:  $y \geq 0$  oraz  $y < 0$ . Jeżeli  $y \geq 0$ , to, w myśl (41), mamy  $\operatorname{tg} x \geq 0$ , a że, jak wiemy,  $\operatorname{tg} x < 0$  dla  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ , więc [wobec (42)] mamy w uważanym przypadku

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

i przeto wzór (43) daje:

$$x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Jeżeli zaś  $y < 0$ , to, w myśl (41), mamy  $\operatorname{tg} x < 0$ , że, jak wiemy,  $\operatorname{tg} x \geq 0$  dla  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , więc [wobec (42)] mamy w uważanym przypadku

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0,$$

czyli

$$0 < -x < \frac{\pi}{2}$$

i przeto wzór (43), równoważny (wobec parzystości funkcji  $\cos x$ ) wzorowi

$$\cos(-x) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}},$$

daje:

$$-x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}},$$

czyli

$$x = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Dowiedliśmy więc, że jeżeli liczba rzeczywista  $x$  leży wewnątrz przedziału  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  i spełnia (przy danym rzeczywistym  $y$ ) równanie (41), to musi być

$$x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \text{ dla } y \geq 0, \text{ oraz } x = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \text{ dla } y < 0. \quad (44)$$

Z drugiej strony, niech  $y$  oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą. Będziemy mieli oczywiście  $0 < \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq 1$  i przeto  $\arccos \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$  będzie oznaczoną w zupełności liczbą rzeczywistą  $\geq 0$  oraz  $< \frac{\pi}{2}$ . Wyznamy, dalej, liczbę  $x$  ze wzorów (44): będziemy więc mieli

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ dla } y \geq 0, \text{ oraz } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \text{ dla } y < 0, \quad (45)$$

oraz, w każdym razie

$$x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

skąd:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

oraz

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{y^2}{1+y^2},$$

zatem

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = y^2,$$

skąd, wobec (45), znajdujemy w jednej chwili (z uwagi że  $\operatorname{tg} x \geq 0$  dla  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , zaś  $\operatorname{tg} x < 0$  dla  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ ):

$$\operatorname{tg} x = y.$$

Dowiedliśmy więc, że liczba  $x$ , wyznaczona ze wzorów (44), spełnia zawsze nierówność (42) oraz równanie (41).

Możemy więc wypowiedzieć następujące

**Twierdzenie 180.** *Przy wszelkiem rzeczywistym  $y$  istnieje wewnątrz przedziału  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  jedna i tylko jedna liczba rzeczywista  $x$ , spełniająca równanie*

$$\operatorname{tg} x = y:$$

jest to liczba

$$x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \text{ dla } y \geq 0, \text{ oraz } x = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \text{ dla } y < 0.$$

Funkcja  $\operatorname{tg} x$  jest więc jednoznacznie odwracalną wewnątrz przedziału  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ : oznaczmy jej funkcję odwrotną przez  $\arctg$  (czytaj: *arcus tangens*): będziemy więc mieli

$$\arctg y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \text{ dla } y \geq 0 \quad (46)$$

oraz

$$\arctg y = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \text{ dla } y < 0. \quad (47)$$

Wobec ciągłości funkcji  $\arccos t$  w przedziale  $(-1, 1)$  i uwagi, że przy wszelkiem rzeczywistym  $y$  funkcja  $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$  jest ciągłą względem  $y$  i zawartą w przedziale  $(0, 1)$ , wzory (46) i (47) dowodzą, iż  $\arctg y$  jest funkcją ciągłą przy wszelkiem rzeczywistym  $y$ .

Ponieważ funkcja  $y = \operatorname{tg} x$  jest wewnątrz przedziału  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  stale rosnącą, więc funkcja  $x = \arctg y$ , jako jej odwrócenie, również będzie stale rosnącą.

Funkcja  $\arctg y$  jest więc ciągłą i stale rosnącą w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

W myśl tw. 180, oraz wzorów (46) i (47) mamy, dalej:

$$\operatorname{tg}(\arctg y) = y,$$

oraz

$$-\frac{\pi}{2} < \arctg y < \frac{\pi}{2}$$

przy wszelkiem rzeczywistem  $y$ , przyczem

$$0 < \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2} \text{ dla } y > 0, \text{ oraz } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} y < 0 \text{ dla } y < 0, \quad (48)$$

jakoteż

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \text{ dla } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Wobec (46) i (47) wnosimy też natychmiast, że

$$\operatorname{arctg}(-y) = -\operatorname{arctg} y \quad (49)$$

przy wszelkiem rzeczywistem  $y$ .

Niech teraz  $y$  oznacza daną liczbę dodatnią. Połóżmy

$$x = \operatorname{arctg} y;$$

będzie więc

$$\operatorname{tg} x = y, \quad (50)$$

przyczem, wobec (48) oraz  $y > 0$ :

$$0 < x < \frac{\pi}{2},$$

skąd

$$0 < \frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{2}; \quad (51)$$

liczba

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

będzie więc miała oznaczoną wartość, przytem, w myśl wzorów (41) i (42) z § 137, będzie

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos x}{\sin x},$$

czyli, wobec (50):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{y},$$

co, wobec (51), dowodzi, że

$$\frac{\pi}{2} - x = \operatorname{arctg} \frac{1}{y}.$$

Dowiedliśmy więc, że

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y, \text{ dla } y > 0,$$

skąd, wobec (49), wynika natychmiast, że

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{y} = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y, \text{ dla } y < 0.$$

§ 150. Weźmy teraz pod rozwagę równanie

$$\operatorname{tg} \zeta = z, \quad (52)$$

gdzie  $z$  jest daną liczbą zespoloną.

Załóżmy, że liczba zespolona  $\zeta$  spełnia równanie (52). Wobec  $\operatorname{tg} \zeta = \sin \zeta : \cos \zeta$ , równanie (52) daje:

$$\sin \zeta = z \cos \zeta,$$

skąd, w myśl wzorów (26) z § 136:

$$e^{i\zeta} - e^{-i\zeta} = iz(e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}),$$

skąd, mnożąc przez  $e^{2i\zeta}$ :

$$e^{2i\zeta} - 1 = iz(e^{2i\zeta} + 1),$$

co daje:

$$e^{2i\zeta}(1 - iz) = 1 + iz. \quad (53)$$

Równość (53) dowodzi, że nie może być  $z = i$ , ani też  $z = -i$ . W samej rzeczy, dla  $z = -i$  równość (53) daje  $0 = 2$ , co niemożliwe, zaś dla  $z = i$  równość (53) daje  $2e^{2i\zeta} = 0$ , co również niemożliwe. Musi więc być  $z \neq -i$  oraz  $z \neq i$ , skąd

$$1 - iz \neq 0 \text{ oraz } 1 + iz \neq 0, \quad (54)$$

i przeto wzór (53) daje:

$$e^{2i\zeta} = \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad (55)$$

przyczem prawa strona jest różną od zera.

Wobec (54) liczba  $\operatorname{lg} \frac{1 + iz}{1 - iz}$  jest więc oznaczoną w zupełności liczbą zespoloną, przyczem

$$e^{\operatorname{lg} \frac{1 + iz}{1 - iz}} = \frac{1 + iz}{1 - iz}. \quad (56)$$

Wzory (55) i (56) dają, w jednej chwili:

$$e^{2\xi i + \lg \frac{1-iz}{1+iz}} = 1,$$

co dowodzi, że liczba  $2\xi i + \lg \frac{1-iz}{1+iz}$  jest jednym z logarytmów naturalnych jednośc, skąd, jak wiemy, wynika, że przy pewnym całkowitem  $k$ :

$$2\xi i + \lg \frac{1-iz}{1+iz} = 2k\pi i,$$

skąd, w jednej chwili (po pomnożeniu obu stron przez  $-\frac{i}{2}$ ):

$$\xi = \frac{i}{2} \lg \frac{1-iz}{1+iz} + k\pi. \quad (57)$$

Dowiedliśmy więc, że równanie (52) jest rozwiązalne względem  $\xi$  tylko wtedy, jeżeli  $z = \pm i$ , oraz że wówczas każda liczba  $\xi$ , spełniająca równanie (52) musi mieć postać (57), przy pewnym całkowitem  $k$ .

Okazemy teraz, że przy każdym danym zespolonym  $z = \pm i$  każda liczba  $\xi$ , wyznaczona ze wzoru (57) przy dowolnej wartości całkowitej na  $k$ , spełnia równanie (52).

Załóżmy więc, że  $z = \pm i$ , i wyznaczmy liczbę  $\xi$  ze wzoru (57), obierając na  $k$  dowolną wartość całkowitą. Wobec  $z \neq \pm i$  będziemy mieli nierówności (54) i przeto  $\lg \frac{1-iz}{1+iz}$ , a więc też  $\xi$ , będzie oznaczoną liczbą zespoloną. Wobec (57), będzie

$$-2\xi i = \lg \frac{1-iz}{1+iz} - 2k\pi i,$$

skąd:

$$e^{-2\xi i} = e^{\lg \frac{1-iz}{1+iz} - 2k\pi i} = \frac{1-iz}{1+iz},$$

zatem

$$e^{-2\xi i} (1+iz) = 1-iz,$$

skąd, mnożąc przez  $e^{\xi i}$ :

$$e^{-\xi i} (1+iz) = e^{\xi i} (1-iz),$$

co daje:

$$e^{\xi i} - e^{-\xi i} = iz (e^{\xi i} + e^{-\xi i}),$$

czyli [w myśl wzorów (26) z § 136]:

$$\sin \xi = z \cos \xi. \quad (58)$$

Gdyby było  $\cos \xi = 0$ , mielibyśmy, wobec (58), również  $\sin \xi = 0$ , co niemożliwe (gdyż  $\cos^2 \xi + \sin^2 \xi = 1$ ). Jest więc  $\cos \xi \neq 0$  i wzór (58) daje

$$\frac{\sin \xi}{\cos \xi} = z,$$

co dowodzi, że liczba  $\xi$  spełnia równanie (52).

Udowodniliśmy więc następujące

**Twierdzenie 181.** *Na to, żeby liczba zespolona  $\xi$  spełniała równanie*

$$\lg \xi = z,$$

*gdzie  $z$  oznacza daną liczbę zespoloną  $\neq \pm i$ , potrzeba i wystarcza, iżby liczba  $\xi$  była jedną z liczb*

$$\frac{i}{2} \lg \frac{1-iz}{1+iz} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (59)$$

W razie  $z = i$  oraz  $z = -i$  równanie  $\lg \xi = z$  nie jest spełnione przez żadną liczbę zespoloną  $\xi$ .

Każdą z liczb (59) oznaczamy symbolem  $\text{Arc} \lg z$ : symbol ten posiada więc przy każdym danym zespolonym  $z \neq \pm i$  nieskończenie wiele różnych wartości, z których każda spełnia równanie (52) i naodwrot.

Założmy, w szczególności, że  $z =$  liczbie rzeczywistej  $x$ , i weźmy pod rozwagę wyrażenie  $\frac{i}{2} \lg \frac{1-ix}{1+ix}$ .

Przy rzeczywistym  $x$  mamy, jak łatwo widzieć:

$$\left| \frac{1-ix}{1+ix} \right| = 1:$$

modułem liczby  $\frac{1-ix}{1+ix}$  jest więc jedność; oznaczmy przez  $t$  jej amplitudę: w myśl wzoru (6) na logarytm główny, będzie więc

$$\lg \frac{1-ix}{1+ix} = \lg 1 + ti = ti,$$

skąd

$$\frac{i}{2} \lg \frac{1-ix}{1+ix} = -\frac{1}{2} t. \quad (60)$$

Lecz lewa strona wzoru (60) jest jedną z liczb (59), dla  $z = x$ , mianowicie tą, którą otrzymujemy dla  $k = 0$ ; liczba ta spełnia więc równanie  $\operatorname{tg} \zeta = x$ ; wobec (60), mamy więc

$$\operatorname{tg} \left( -\frac{1}{2}t \right) = x. \quad (61)$$

Z drugiej strony, skoro  $t$  jest amplitudą, mamy nierówność

$$-\pi < t \leq \pi,$$

skąd

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{1}{2}t < \frac{\pi}{2}.$$

Liczba  $-\frac{1}{2}t$  należy więc do przedziału  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  i spełnia równanie (61), skąd wynika natychmiast, że

$$-\frac{1}{2}t = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

Jest więc, wobec (60):

$$\frac{i}{2} \lg \frac{1-ix}{1+ix} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

przy wszelkiem rzeczywistym  $x$ .

Dla nierzeczywistych  $z$  symbol  $\operatorname{arctg} z$  nie jest jeszcze określony: położmy

$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \lg \frac{1-iz}{1+iz}$$

przy wszelkiem zespolonem  $z \neq \pm i$ . W ten sposób funkcja  $\operatorname{arctg} z$  będzie określona przy wszelkiem zespolonem  $z \neq \pm i$ , i wzór (59) na rozwiązanie równania (52) przyjmie postać:

$$\operatorname{arctg} z + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

**Funkcja  $\operatorname{ctg} z$ .** Jak dowiedliśmy w § 140, liczby

$$k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (62)$$

są jedynymi liczbami zespolonemi, dla których sinus jest zerem. Dla każdej więc liczby zespolonej  $z$ , nie będącej żadną z liczb (62), będzie  $\sin z \neq 0$  i przeto iloraz  $\frac{\cos z}{\sin z}$  będzie oznaczoną w zupełności

(przez  $z$ ) liczbą zespoloną, którą oznaczamy przez  $\operatorname{ctg} z$  (czytaj: *kotangens*  $z$ ). Funkcja

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad (63)$$

jest więc określona w zupełności i przytem ciągłą (jako iloraz funkcji ciągłych) w zbiorze wszystkich liczb zespolonych, z wyjątkiem liczb (62), t. j. całkowitych  $\left(\geq 0\right)$  wielokrotności liczby  $\pi$ .

Dla  $z \neq \frac{k\pi}{2}$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą, będą, jak łatwo widzieć, miały oznaczoną wartość obie funkcje:  $\operatorname{tg} z$  i  $\operatorname{ctg} z$ , i przytem będzie

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}.$$

Dla  $z \neq k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ); w myśl wzorów (41) i (42) z § 137, oraz wobec (63), będzie

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} - z \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - z \right)} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - z \right) \quad (64)$$

— w ten sposób badanie funkcji  $\operatorname{ctg} z$  sprowadza się do badania funkcji  $\operatorname{tg} z$ .

**Ćwiczenia.**

1) Udowodnić, że przy wszelkich zespolonych  $s_1$  i  $s_2$ , różnych od zera, oraz przy wszelkiem zespolonem  $m$ , mamy wzór

$$((s_1))^m ((s_2))^m = ((s_1 s_2))^m,$$

który należy rozumieć w ten sposób, że każda z wartości lewej strony jest jedną z wartości prawej strony i naodwrot.

2) Okazać, że każda wartość symbolu  $((s))^{m_1 m_2}$  jest jedną z wartości symbolu  $((((s))^{m_1}))^{m_2}$ , lecz niekoniecznie naodwrot.

3) Udowodnić, że warunki

$$x_n < \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$$

pociągają za sobą wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} x_n = +\infty,$$

zaś warunki

$$x_n > \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$$



pociągają za sobą wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} x_n = -\infty.$$

## ROZDZIAŁ XVIII.

### Rozwinięcia funkcji trygonometrycznych oraz hyperbolicznych na iloczyny nieskończone.

§ 151. Niech  $n$  oznacza daną liczbę naturalną, większą od jedności. W myśl tw. 176. (zastosowanego dla  $r=1$ ,  $t=0$ ,  $m=2n$ ), pierwiastkami stopnia  $2n$ -go z jedności są liczby

$$\zeta_j = e^{2\pi i j / 2n}, \quad (j=1, 2, \dots, 2n), \quad (1)$$

gdzie

$$\theta_j = \frac{\pi(j-n)}{n}, \quad (j=1, 2, \dots, 2n); \quad (2)$$

wszystkie te liczby są, jak wiemy, *różne*.

Liczby (1) są więc wszystkimi różnymi pierwiastkami równania

$$z^{2n} - 1 = 0,$$

skąd (§ 66) wynika tożsamość

$$z^{2n} - 1 = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \dots (z - \zeta_{2n}). \quad (3)$$

W myśl (2), mamy  $\theta_n = 0$ ,  $\theta_{2n} = \pi$ , skąd, w myśl (1):

$$\zeta_n = 1, \quad \zeta_{2n} = -1, \quad (4)$$

zatem, przy wszelkiem zespolonem  $z$ :

$$(z - \zeta_n)(z - \zeta_{2n}) = (z - 1)(z + 1) = z^2 - 1. \quad (5)$$

Dalej, mamy, w myśl (1) i (2):

$$\zeta_{n+k} = e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \quad \zeta_{n-k} = e^{-\frac{2\pi i k}{n}}, \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, n-1, \quad (6)$$

skąd [wobec wzoru (26) z § 136]:

$$\begin{aligned} (z - \zeta_{n+k})(z - \zeta_{n-k}) &= (z - e^{\frac{2\pi i k}{n}})(z - e^{-\frac{2\pi i k}{n}}) = \\ &= z^2 - (e^{\frac{2\pi i k}{n}} + e^{-\frac{2\pi i k}{n}})z + 1 = z^2 - 2z \cos \frac{k\pi}{n} + 1, \quad (7) \\ &\text{dla } k=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Ponieważ zaś oczywiście

$$(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \dots (z - \zeta_{2n}) = (z - \zeta_n)(z - \zeta_{2n}) \prod_{k=1}^{n-1} [(z - \zeta_{n+k})(z - \zeta_{n-k})]$$

(gdyż prawa strona różni się od lewej tylko porządkiem czynników), więc, wobec (3), (5) i (7), mamy tożsamość:

$$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left( z^2 - 2z \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right),$$

z której, dla  $z \neq 0$ , dzieląc obie strony przez  $z^n$ , otrzymujemy w jednej chwili:

$$z^n - \frac{1}{z^n} = \left( z - \frac{1}{z} \right) \prod_{k=1}^{n-1} \left( z + \frac{1}{z} - 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right). \quad (8)$$

Wzór (8) zachodzi więc przy wszelkiem naturalnem  $n > 1$  oraz wszelkiem zespolonem  $z \neq 0$ . Niech teraz  $u$  oznacza dowolną daną liczbę zespoloną: połóżmy

$$z = e^{\frac{\pi u}{n}}, \quad (9)$$

— będzie to, jak wiemy, liczba zespolona, różna od zera.

Wobec (9), mamy:

$$z^n - \frac{1}{z^n} = e^{\pi u} - e^{-\pi u} = 2i \sin \pi u,$$

$$z - \frac{1}{z} = 2i \sin \frac{\pi u}{n}, \quad z + \frac{1}{z} = 2 \cos \frac{\pi u}{n},$$

i przeto wzór (8) daje, po podzieleniu obu stron przez  $2i$ :

$$\sin \pi u = \sin \frac{\pi u}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \left( 2 \cos \frac{\pi u}{n} - 2 \cos \frac{k\pi}{n} \right). \quad (10)$$

Wzór (28) z § 136 daje, dla  $z_1 = z_2 = \frac{v}{2}$ :

$$\cos v = \cos^2 \frac{v}{2} - \sin^2 \frac{v}{2},$$

a że  $\cos^2 \frac{v}{2} = 1 - \sin^2 \frac{v}{2}$ , więc mamy:

$$\cos v = 1 - 2 \sin^2 \frac{v}{2}$$

przy wszelkiem zespolonem  $v$ . Jest więc:

$$2 \cos \frac{\pi u}{n} - 2 \cos \frac{k\pi}{n} = 4 \left( \sin^2 \frac{k\pi}{2n} - \sin^2 \frac{\pi u}{2n} \right), \quad \text{dla } k=1, 2, \dots, n-1. \quad (11)$$