

CZĘŚĆ TRZECIA.

Funkcje elementarne.

ROZDZIAŁ XVI.

Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej. Funkcje trygonometryczne oraz ich odwrócenie.

§ 133. Niech z oznacza daną liczbę zespoloną, zaś n — daną liczbę naturalną. Weźmy pod rozwagę wyrażenie

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Mamy, rozwijając według dwumianu Newtona (§ 62):

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}. \quad (1)$$

Dla $k = 2, 3, \dots, n$ mamy oczywiście:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{z^k}{n^k} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!}. \end{aligned} \quad (2)$$

Lecz, w myśl lematu z § 93, mamy dla $k = 2, 3, \dots, n$

$$\begin{aligned} 1 &\geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq \\ &\geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}, \end{aligned}$$

skąd

$$\left| \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) - 1 \right| \leq \frac{k(k-1)}{2n}$$

i przeto, wobec (2):

$$\left| \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^k k(k-1)}{k! 2n} = \frac{|z|^k}{2n(k-2)!}, \text{ dla } k=2, 3, \dots, n. \quad (3)$$

Wobec (1) i (3) mamy więc, stosując tw. o module sumy:

$$\begin{aligned} & \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}\right) \right| = \\ & = \left| \sum_{k=2}^n \left[\binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!} \right] \right| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{|z|^k}{(k-2)!}. \end{aligned} \quad (4)$$

Szereg nieskończony

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^k}{(k-2)!}$$

jest, jak to wynika natychmiast np. z kryterjum d'Alemberta (§ 76), zbieżny przy wszelkim dodatnim a : szereg

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{(k-2)!}$$

jest więc zbieżny: oznaczając przez A jego sumę (będzie to pewna liczba (skończona) nieujemna, zależna od z), będziemy mieli oczywiście

$$\sum_{k=2}^n \frac{|z|^k}{(k-2)!} \leq A,$$

skąd, wobec (4):

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}\right) \right| \leq \frac{A}{2n}$$

przy wszelkim naturalnym n , przyczem A nie zależy od n . Nie równość ta daje w jednej chwili:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}\right) \right\} = 0. \quad (5)$$

Udowodniliśmy więc wzór (5) przy wszelkim zespolonym z .

Wyrażenie

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

jest oczywiście $n+1$ -szą sumą cząstkową szeregu nieskończonego

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

który jest zbieżny przy wszelkim zespolonym z : wzór (5) dowodzi więc, że ciąg nieskończony $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ jest zbieżny przy wszelkim zespolonym z , oraz że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (6)$$

W razie rzeczywistego z lewa strona tego wzoru przedstawia, jak wiemy [§ 47, wzór (201)] liczbę e^z : mamy więc, przy wszelkim rzeczywistym z :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (7)$$

Stąd, w szczególności, dla $z=1$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \quad (8)$$

§ 134. Wzór (8) pozwala z łatwością obliczać przybliżoną wartość liczby e . Mamy oczywiście, oznaczając przez s_n i r_n sumy cząstkowe i reszty szeregu (8):

$$\begin{aligned} 0 < r_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \\ &= \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right] \\ &< \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right] = \frac{1}{n!n}, \end{aligned} \quad (9)$$

skąd:

$$0 < e - s_{n+1} < \frac{1}{n!n}$$

oraz

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!n} \quad (10)$$

przy wszelkim naturalnym n .

Więc np. dla $n=10$, wobec $10! \cdot 10 = 36288000 > 3 \cdot 10^7$, wyznaczając sumę

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{10!},$$

otrzymamy liczbę e z dokładnością siedmiu znaków dziesiętnych. Cały rachunek może być wykonany w kilka minut, przyczem dla ułatwienia kolejnego obli-

czania ilorazów $\frac{1}{k!}$ należy zauważyć, że jeżeli już mamy obliczoną w ułamku dziesiętnym liczbę $\frac{1}{k!}$, to dla otrzymania liczby $\frac{1}{(k+1)!}$ wystarczy ułamek dla $\frac{1}{k!}$ podzielić przez $k+1$. W ten sposób otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1!} &= 2 \\ \frac{1}{2!} &= 0,5 \\ \frac{1}{3!} &= 0,16666667 \\ \frac{1}{4!} &= 0,04166667 \\ \frac{1}{5!} &= 0,00833333 \\ \frac{1}{6!} &= 0,00138888 \\ \frac{1}{7!} &= 0,000198413 \\ \frac{1}{8!} &= 0,000024802 \\ \frac{1}{9!} &= 0,000002756 \\ \frac{1}{10!} &= 0,000000276 \end{aligned}$$

$$\text{Stąd: } 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{10!} = 2,718281802,$$

z błędem $< \frac{4}{10^9}$ (gdyż w każdym z ośmiu ostatnich składników przy obliczaniu ich w ułamki dziesiętne popełniamy błąd $< \frac{1}{2 \cdot 10^9}$), zatem

$$e = 2,7182818$$

$$\text{z błędem } < \frac{1}{3 \cdot 10^7} + \frac{4}{10^9} < \frac{1}{2 \cdot 10^7}.$$

Szereg (8) jest więc szybko zbieżny, znacznie szybciej niż ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Ten ostatni jest zbieżny wolno, tak wolno, jak szereg Leibniza (§ 82).

W samej rzeczy, niech n oznacza dowolną daną liczbę naturalną. W myśl wzoru (7) (dla $z = \frac{1}{n}$) znajdujemy w jednej chwili:

$$e^n > 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2},$$

skąd

$$e > \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right)^n$$

i przeto:

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left\{ \left[1 + \frac{1}{2n(n+1)}\right]^n - 1 \right\},$$

skąd, z uwagi, że

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n} = 2, \quad \left[1 + \frac{1}{2n(n+1)}\right]^n \geq 1 + \frac{n}{2n(n+1)} = 1 + \frac{1}{2(n+1)},$$

znajdujemy natychmiast:

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \frac{1}{n+1}.$$

Więc np., chcąc aby wyrażenie $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ przedstawiało liczbę e z dokładnością 5-ciu znaków dziesiętnych, musielibyśmy obrać $n \geq 100000$, i t. p.

Z nierówności (10) możemy z łatwością wywnioskować, że liczba e jest niewymierną (co udowodniliśmy na innej drodze w § 102). W samej rzeczy, załóżmy, że e jest liczbą wymierną i niech $e = \frac{p}{q}$ będzie ułamek nieprzywiedlny o naturalnym mianowniku dla liczby e .

W myśl (10) będzie, dla $n = q$:

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!q},$$

skąd, mnożąc przez $q!$:

$$0 < (q-1)!p - q! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q}. \quad (11)$$

Lecz

$$q! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right)$$

jest oczywiście liczbą całkowitą (gdyż dla $k = 1, 2, \dots, q$ składniki $\frac{q!}{k!} = (k+1)(k+2)\dots q$ są wszystkie całkowite): lewa strona nierówności (11) jest więc liczbą całkowitą, dodatnią, a że prawa jej strona jest oczywiście ≤ 1 , więc otrzymujemy sprzeczność.

Założenie, że liczba e jest liczbą wymierną doprowadza więc do sprzeczności. Dowiedliśmy zatem, że e jest liczbą niewymierną. (W § 103 dowiedliśmy niewymierności wymiernych potęg e).

Można też z łatwością udowodnić, że *liczba e nie jest niewymiernością drugiego stopnia*, t. j. że liczba e nie spełnia żadnego równania drugiego stopnia o współczynnikach całkowitych. Załóżmy, dla dowodu, że mamy

$$ae^2 + be + c = 0,$$

gdzie a, b, c są liczby całkowite, przyczem $a \neq 0$. Równanie to daje w jednej chwili:

$$ae + ce^{-1} = -b. \quad (12)$$

W myśl (7) i (9) znajdujemy w jednej chwili:

$$\left| e^{-1} - \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \right| < \frac{1}{n!n}. \quad (13)$$

Nierówności (10) i (13) dają w jednej chwili, wobec (12):

$$\left| -n!b - n!a \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) - n!c \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \right| < \frac{|a| + |c|}{n}.$$

Prawa strona otrzymanej nierówności jest dla $n > |a| + |c|$ mniejsza od jedności, lewa zaś jest zawsze całkowitą. Mamy więc, dla $n > |a| + |c|$ stale

$$-n!b - n!a \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) - n!c \left(1 - \frac{1}{1!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) = 0$$

Jest zatem

$$-b = a \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) + c \left(1 - \frac{1}{1!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \quad \text{dla } n > |a| + |b|.$$

oraz, tembardziej

$$-b = a \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \right) + c \left(1 - \frac{1}{1!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right),$$

dla $n > |a| + |b|$,

skąd, w jednej chwili:

$$a + c(-1)^{n+1} = 0, \quad \text{dla } n > |a| + |b|,$$

co, jak łatwo widzieć, pociąga za sobą równości $a + c = 0$ oraz $a - c = 0$, które dają $a = 0$, wbrew założeniu. Dowiedliśmy więc, że e nie może być niewymiernością drugiego stopnia.

§ 135. Dowiedliśmy w § 133, że przy wszelkiem rzeczywistym z zachodzi wzór (7). W razie, kiedy liczba z nie jest rzeczywistą, lewa strona tego wzoru niema jeszcze określonego znaczenia, gdyż nie umówiliśmy się dotąd, co mamy rozumieć przez potęgę o wykładniku nierzeczywistym; prawą zaś strona wzoru (7) ma określoną wartość przy wszelkiem zespolonem z , jako suma szeregu zbieżnego. Otóż, jako definicję symbolu e^z w razie, kiedy

liczba z nie jest rzeczywistą, przyjmiemy właśnie wzór (7): będzie więc przy wszelkiem zespolonem z :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (14)$$

Wzór (14) dowodzi, że funkcja $f(z) = e^z$, jako suma szeregu potęgowego bezustannie zbieżnego, jest *funkcją całkowitą* zmiennej zespolonej z (§ 124): jest to więc funkcja *ciągła* w całym zbiorze liczb zespolonych (§ 125). Funkcję $f(z) = e^z$ nazywamy *funkcją wykładniczą*.

Niech teraz z_1 i z_2 będą dwie dane liczby zespolone. Będzie więc

$$e^{z_1} = 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots$$

oraz

$$e^{z_2} = 1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \dots,$$

przyczem oba szeregi są oczywiście zbieżne bezwzględnie. Stąd, stosując mnożenie Cauchy'ego (§ 85), otrzymujemy:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = c_1 + c_2 + c_3 + \dots, \quad (15)$$

gdzie $c_1 = 1$, zaś przy naturalnem n :

$$c_{n+1} = 1 \cdot \frac{z_2^n}{n!} + \frac{z_1}{1!} \cdot \frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z_1^2}{2!} \cdot \frac{z_2^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{z_2}{1!} + \frac{z_1^n}{n!} \cdot 1,$$

czyli

$$c_{n+1} = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

$$\left(\text{gdź } \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \binom{n}{k}, \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n-1 \right).$$

Jest więc, wobec (15) i (16), oraz w myśl (14):

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

Dowiedliśmy więc, że przy wszelkich zespolonych z_1 i z_2 zachodzi wzór:

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad (17)$$

podobnie jak dla wykładników rzeczywistych.

Wnosimy stąd natychmiast, że przy wszelkich zespolonych $z_1, z_2, \dots, z_n$, mamy:

$$e^{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \cdot \dots \cdot e^{z_n}.$$

Stąd, w szczególności, kładąc $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$:

$$(e^z)^n = e^{nz}, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

— przy wszelkiem zespolonem z .

Dla $z_1 = nz$, $z_2 = -nz$, wzór (17) daje, wobec $e^0 = 1$:

$$e^{nz} \cdot e^{-nz} = 1,$$

co dowodzi, że $e^{nz} \neq 0$, i daje, wobec (18):

$$e^{-nz} = \frac{1}{e^{nz}} = \frac{1}{(e^z)^n}, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

czyli

$$e^{-nz} = (e^z)^{-n}, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

(gdyż przy wszelkiem zespolonem $u \neq 0$ rozumiemy przez u^{-n} liczbę $\frac{1}{u^n}$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$).

Wobec (18) i (19) wnosimy natychmiast, że

$$(e^z)^k = e^{kz}, \text{ dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (20)$$

— przy wszelkiem zespolonem z .

§ 136. Niech teraz z oznacza dowolną daną liczbę zespoloną. Zastępując we wzorze (14) z przez iz , otrzymujemy w jednej chwili:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + i \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Oznaczmy przy wszelkiem zespolonem z :

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \\ \sin z &= \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

[czytaj *cosinus* z , *sinus* z]. Funkcje $\cos z$ i $\sin z$, jako sumy szeregów potęgowych bezustannie zbieżnych, będą więc ciągłe w całym zbiorze liczb zespolonych. Wzory (22) dowodzą przytem, że dla rzeczywistych z wartości funkcji $\cos z$ i $\sin z$ będą rzeczywiste.

¹⁾ W dawniejszych podręcznikach polskich funkcje te oznaczone są przez $\text{dost } z$, wst z (*dostawa*, *wstawa*): obecnie jednak, gwołi ujednolicieniu znakowania matematycznego, symbole $\cos z$, $\sin z$ przyjęte są przez wszystkie narody cywilizowane.

W myśl (22) mamy, przy wszelkiem zespolonem z :

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z, \quad (23)$$

co wyrażamy, mówiąc, że $\cos z$ jest funkcją parzystą, zaś $\sin z$ — funkcją nieparzystą.

Wzory (21) i (22) dają, przy wszelkiem zespolonem z :

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (24)$$

— wzór ten nosi nazwę wzoru Eulera. Zastępując w nim z przez $-z$, otrzymujemy, wobec (23):

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (25)$$

Wzory (24) i (25) dają w jednej chwili:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (26)$$

przy wszelkiem zespolonem z .

Ze wzorów (26) otrzymujemy natychmiast, wobec (17):

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{1}{4} [(e^{iz} + e^{-iz})^2 - (e^{iz} - e^{-iz})^2] = e^{iz} \cdot e^{-iz} = e^0 = 1,$$

czyli

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad (27)$$

przy wszelkiem zespolonem z .

Równie łatwo sprawdzilibyśmy dla wszelkich zespolonych z_1 oraz z_2 równości:

$$\left. \begin{aligned} \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

gdzie znaki po obu stronach należy wziąć jednocześnie górne, lub jednocześnie dolne. [Równości (28) dla znaków dolnych wynikają bezpośrednio z równości dla znaków górnych, przy zastąpieniu z_2 przez $-z_2$, wobec (23)]. Dla sprawdzenia np. pierwszej z równości (28), obliczamy, w myśl (26) i (17):

$$\begin{aligned} \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \frac{1}{4i} [(e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2})] = \\ &= \frac{1}{4i} [e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)}] = \\ &= \frac{1}{2i} [e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}] = \sin(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Zastępując we wzorze (24) z przez kz , otrzymujemy, przy wszelkiem zespolonem z oraz całkowitem k :

$$e^{ikz} = \cos kz + i \sin kz,$$

a że z drugiej strony, wobec (20) oraz (24):

$$e^{ikz} = (e^z)^k = (\cos z + i \sin z)^k,$$

więc mamy przy wszelkiem zespolonem z :

$$(\cos z + i \sin z)^k = \cos kz + i \sin kz, \text{ dla } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (29)$$

Jest to t. zw. wzór Moivre'a.

Zastępując we wzorze (29) z przez $-z$, otrzymujemy natychmiast, wobec (23):

$$(\cos z - i \sin z)^k = \cos kz - i \sin kz, \text{ dla } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (30)$$

Załóżmy dalej, że k = liczbie naturalnej n . Dodając, względnie odejmując stronami wzory (29) i (30) i rozwijając ich lewe strony według dwumianu Newtona, otrzymujemy w jednej chwili, po łatwych redukcjach (przy wszelkiem zespolonem z , oraz $n=1, 2, 3, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} \cos nz &= \cos^n z - \binom{n}{2} \cos^{n-2} z \sin^2 z + \binom{n}{4} \cos^{n-4} z \sin^4 z - \dots, \\ \sin nz &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} z \sin z - \binom{n}{3} \cos^{n-3} z \sin^3 z + \binom{n}{5} \cos^{n-5} z \sin^5 z - \dots, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

gdzie szeregi po prawej stronie urywają się same przez się, gdyż $\binom{n}{k} = 0$, dla $k > n$.

Z szeregu na $\cos nz$, z uwagi, że, wobec (27):

$$\sin^2 z = (1 - \cos^2 z)^m, \text{ dla } m = 1, 2, 3, \dots,$$

wnosimy, że $\cos nz$ daje się przy wszelkiem naturalnem n przedstawić jako wielomian całkowity stopnia $\leq n$ względem $\cos z$. Podobnie wnioskujemy, że, w razie nieparzystego n , $\sin nz$ daje się przedstawić jako wielomian całkowity względem $\sin z$.

Oto kilka ciekawszych przypadków szczególnych wzorów (31):

$$\begin{aligned} \cos 2z &= \cos^2 z - \sin^2 z, \\ \cos 2z &= 2 \cos z \sin z, \\ \cos 3z &= \cos^3 z - 3 \cos z \sin^2 z = \cos^3 z - 3 \cos z (1 - \cos^2 z) = \\ &= 4 \cos^3 z - 3 \cos z, \\ \sin 3z &= 3 \cos^2 z \sin z - \sin^3 z = 3 (1 - \sin^2 z) \sin z - \sin^3 z = \\ &= 3 \sin z - 4 \sin^3 z. \end{aligned}$$

Ze wzoru Moivre'a można też otrzymać wzory, pozwalające wyrażać $\cos^m z$ przez $\cos z, \cos 2z, \dots, \cos nz$. Połóżmy w tym celu, przez skrócenie:

$$\left. \begin{aligned} \cos z + i \sin z &= u, \\ \cos z - i \sin z &= v; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

będzie oczywiście, w myśl (27):

$$uv = \cos^2 z + \sin^2 z = 1. \quad (33)$$

Mamy dalej

$$(u+v)^n = u^n + \binom{n}{1} u^{n-1} v + \binom{n}{2} u^{n-2} v^2 + \dots + \binom{n}{n} v^n$$

oraz

$$(u+v)^n = v^n + \binom{n}{1} v^{n-1} u + \binom{n}{2} v^{n-2} u^2 + \dots + \binom{n}{n} u^n.$$

skąd, dodając stronami i dzieląc przez 2, z uwagi że, wobec (33):

$$u^{n-k} v^k + v^{n-k} u^k = (u^{n-2k} + v^{n-2k}) u^k v^k = u^{n-2k} + v^{n-2k},$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (u+v)^n &= \frac{u^n + v^n}{2} + \binom{n}{1} \frac{u^{n-2} + v^{n-2}}{2} + \binom{n}{2} \frac{u^{n-4} + v^{n-4}}{2} + \dots + \\ &+ \binom{n}{n} \frac{u^n + v^n}{2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Lecz, wobec (32) i w myśl (29), mamy przy całkowitem k :

$$u^k + v^k = 2 \cos kz;$$

wzór (34) daje więc, w jednej chwili:

$$2^n \cos^n z = \cos nz + \binom{n}{1} \cos(n-2)z + \binom{n}{2} \cos(n-4)z + \dots + \binom{n}{n} \cos(n-2n)z,$$

a że, w myśl (23), $\cos(-kz) = \cos kz$ (zaś, wobec (22), $\cos 0 = 1$), więc ostatecznie wzór ten pozwala przedstawić $\cos^n z$ w postaci wielomianu linjowego o wymiernych współczynnikach względem $\cos z, \cos 3z, \cos 5z, \dots, \cos nz$ w razie nieparzystego n , oraz względem $\cos 2z, \cos 4z, \cos 6z, \dots, \cos nz$ w razie parzystego n ; odnośne wzory możnaby z łatwością wypisać wyraźnie, co pozostawiamy czytelnikowi.

Podobnie, zastępując we wzorze (34) v przez $-v$, możnaby otrzymać wzory dla $\sin^n z$, których wywód oraz bliższą dyskusję pozostawiamy czytelnikowi.

§ 137. Zajmiemy się teraz bliżej funkcjami $\cos x$ i $\sin x$ dla rzeczywistych wartości zmiennej. Okażemy przedewszystkiem, że funkcja $\sin x$ jest stale dodatnia dla $0 < x \leq 2$. Mamy, w myśl (22):

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1!} \left(1 - \frac{x^2}{2.3}\right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6.7}\right) + \frac{x^9}{9!} \left(1 - \frac{x^2}{10.11}\right) + \dots \\ &\dots + \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4n-2)(4n-1)}\right) + \dots \end{aligned}$$

Dla $0 < x \leq 2$ mamy oczywiście przy naturalnym n

$$\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!} > 0, \quad \frac{x^2}{(4n-2)(4n-1)} \leq \frac{x^2}{2.3} \leq \frac{2^2}{2.3} < 1,$$

skąd wnosimy, że wszystkie składniki wypisanego na $\sin x$ szeregu są dodatnie i przeto

$$\sin x > 0, \quad \text{dla } 0 < x \leq 2. \quad (35)$$

Niech teraz x_1 oraz $x_2 > x_1$ będą dwie dane liczby, należące do przedziału $(0, 2)$, i połóżmy $x_2 - x_1 = h$: będzie to więc liczba dodatnia. W myśl (28) i wobec $x_2 = x_1 + h$, możemy napisać:

$$\begin{aligned} \cos x_1 &= \cos \left(x_1 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \right) = \cos \left(x_1 + \frac{h}{2} \right) \cos \frac{h}{2} + \sin \left(x_1 + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}, \\ \cos x_2 &= \cos \left(x_1 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) = \cos \left(x_1 + \frac{h}{2} \right) \cos \frac{h}{2} - \sin \left(x_1 + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

skąd w jednej chwili:

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 2 \sin \left(x_1 + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2}. \quad (36)$$

Lecz, wobec $0 \leq x_1 < x_2 \leq 2$, $x_2 = x_1 + h$, oraz $0 < h \leq 2$, mamy:

$$0 \leq x_1 < x_1 + \frac{h}{2} < x_2 \leq 2, \quad 0 < \frac{h}{2} \leq 1,$$

zatem

$$0 < x_1 + \frac{h}{2}, \quad \text{oraz } 0 < \frac{h}{2} < 2,$$

skąd, w myśl (35):

$$\sin \left(x_1 + \frac{h}{2} \right) > 0, \quad \text{oraz } \sin \frac{h}{2} > 0,$$

i przeto, wobec (36):

$$\cos x_1 - \cos x_2 > 0.$$

Dowiedliśmy więc, że

$$\cos x_1 > \cos x_2, \quad \text{dla } 0 \leq x_1 < x_2 \leq 2,$$

co dowodzi, że w przedziale $(0, 2)$ funkcja $\cos x$ stale maleje.

W myśl (22) mamy oczywiście

$$\cos 0 = 1;$$

obliczymy teraz znak liczby $\cos 2$.

Wobec (22) możemy napisać:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \left(1 - \frac{x^2}{7.8} \right) - \dots \\ &\quad - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} \right) - \dots \end{aligned}$$

Lecz przy naturalnym n mamy oczywiście

$$\frac{2^2}{(4n+3)(4n+4)} \leq \frac{4}{7.8} < 1,$$

i przeto wypisany dla $\cos x$ szereg daje w jednej chwili:

$$\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = 1 - 2 + \frac{16}{24} < 0.$$

Mamy więc $\cos 0 > 0$, $\cos 2 < 0$, przytem w przedziale $(0, 2)$ funkcja $\cos x$ stale maleje i, jak wiemy, jest ciągła. Wnosimy stąd, wobec tw. 69, że wewnątrz przedziału $(0, 2)$ funkcja $\cos x$ raz i tylko raz przechodzi przez zero: istnieje więc jedna i tylko jedna liczba rzeczywista ξ , spełniająca warunki

$$\cos \xi = 0, \quad \text{oraz } 0 < \xi < 2.$$

Liczbę 2ξ oznaczmy symbolem π^1 : będzie to więc jedyna liczba rzeczywista, spełniająca warunki:

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{oraz } 0 < \pi < 4. \quad (37)$$

W myśl (27), mamy:

$$\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1,$$

skąd, wobec (37):

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1,$$

a że, wobec (35) i (37), $\sin \frac{\pi}{2} > 0$, więc mamy stąd:

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1. \quad (38)$$

¹⁾ Symbolem π oznaczyliśmy w § 82 sumę $4 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$;

w jednym z późniejszych rozdziałów udowodnimy, że jest to ta sama liczba, którą oznaczamy przez π obecnie (§ 159).

Okresowość funkcji trygonometrycznych.

W myśl (28) mamy przy wszelkim zespolonym z :

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \cos \frac{\pi}{2} - \sin z \sin \frac{\pi}{2},$$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin z \cos \frac{\pi}{2} + \cos z \sin \frac{\pi}{2},$$

skąd, wobec (37) i (38):

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z, \quad (39)$$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \quad (40)$$

— przy wszelkim zespolonym z .

Wobec (23) mamy stąd, pisząc $-z$ zamiast z :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z, \quad (41)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z. \quad (42)$$

Zastępując we wzorze (39) z przez $z + \frac{\pi}{2}$, otrzymujemy, wobec (40):

$$\cos(z + \pi) = -\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos z,$$

czyli, przy wszelkim zespolonym z :

$$\cos(z + \pi) = -\cos z. \quad (43)$$

Podobnie, zastępując z przez $z + \frac{\pi}{2}$ we wzorze (40), otrzymujemy, wobec (39):

$$\sin(z + \pi) = \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z,$$

czyli, przy wszelkim zespolonym z :

$$\sin(z + \pi) = -\sin z. \quad (44)$$

Zastępując, dalej, we wzorze (43) z przez $z + \pi$ i stosując raz jeszcze wzór (43), otrzymujemy:

$$\cos(z + 2\pi) = -\cos(z + \pi) = \cos z,$$

czyli, przy wszelkim zespolonym z :

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z. \quad (45)$$

Podobnie ze wzoru (44) otrzymujemy przy wszelkim zespolonym z :

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z. \quad (46)$$

Wzory (45) i (46) dowodzą, że funkcje $\sin z$ i $\cos z$ są *okresowe* (perjodyczne) z okresem 2π , czyli, że dodanie liczby 2π do zmiennej z nie wpływa na wartość tych funkcji. Można stąd w jednej chwili wywnioskować, że mamy przy wszelkim całkowitem $k \geq 0$:

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z \quad \text{oraz} \quad \sin(z + 2k\pi) = \sin z.$$

Z okresowości funkcji $\cos z$ i $\sin z$ wnosimy natychmiast o okresowości funkcji e^z . Mamy mianowicie, w myśl (17), przy wszelkim zespolonym z :

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i}; \quad (47)$$

lecz, w myśl (24):

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi, \quad (48)$$

zaś, w myśl (45) i (46) (dla $z = 0$):

$$\cos 2\pi + i \sin 2\pi = \cos 0 + i \sin 0,$$

a że, wobec (22):

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0,$$

więc wzór (48) daje:

$$e^{2\pi i} = 1 \quad (49)$$

i przeto wzór (47) daje przy wszelkim zespolonym z :

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \quad (50)$$

Funkcja e^z ma więc okres $= 2\pi i$. Wnosimy stąd natychmiast, że przy wszelkim całkowitem k oraz zespolonym z :

$$e^{z+2k\pi i} = e^z. \quad (51)$$

Ciekawy związek między liczbami e i π otrzymujemy ze wzoru Eulera (24), kładąc w nim $z = \pi$: dostajemy mianowicie:

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi,$$

a że wobec (43) i (44):

$$\cos \pi + i \sin \pi = -\cos 0 - i \sin 0 = -1,$$

więc mamy:

$$e^{i\pi} = -1. \quad (52)$$

§ 138. Zbadamy obecnie bieg funkcji $\cos x$ oraz $\sin x$ dla rzeczywistych x . Wobec okresowości naszych funkcji wystarczy oczywiście zbadać bieg każdej z nich dla jednego tylko okresu, np. dla przedziału $(0, 2\pi)$.

W przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$, jak dowiedliśmy w poprzednim paragrafie, funkcja $\cos x$ stale maleje od $\cos 0 = 1$ do $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Wobec (23) i (43) mamy stale

$$\cos x = \cos(-x) = -\cos(\pi - x); \quad (53)$$

gdy x wzrasta od $x = \frac{\pi}{2}$ do $x = \pi$, to $x - \pi$ maleje od $\frac{\pi}{2}$ do 0,

zatem $\cos(\pi - x)$ wzrasta od $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ do $\cos 0 = 1$ i wreszcie $-\cos(\pi - x)$ maleje od 0 do -1 . W myśl (53) wnosimy więc, że gdy x wzrasta od $x = \frac{\pi}{2}$ do $x = \pi$, to $\cos x$ maleje od $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ do $\cos \pi = -1$. Dowiedliśmy więc, że w przedziale $(0, \pi)$ funkcja $\cos x$ stale maleje od $\cos 0 = 1$ do $\cos \pi = -1$.

Dalej, w myśl (43) (dla $z = x - \pi$), mamy stale

$$\cos x = -\cos(x - \pi); \quad (54)$$

jeżeli teraz x wzrasta od $x = \pi$ do $x = 2\pi$, to $x - \pi$ wzrasta od 0 do π i przeto $\cos(x - \pi)$ maleje od 1 do -1 , zaś $-\cos(x - \pi)$ wzrasta od -1 do 1. W myśl (54) wnosimy więc, że gdy x wzrasta od $x = \pi$ do $x = 2\pi$, to $\cos x$ wzrasta od $\cos \pi = -1$ do $\cos 2\pi = 1$, przechodząc dla $x = \frac{3\pi}{2}$ przez zero. Zbadaliśmy więc bieg funkcji $\cos x$ w całym przedziale $(0, 2\pi)$.

Przejdźmy teraz do funkcji $\sin x$. W myśl (39), mamy stale:

$$\sin x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

co sprowadza badanie biegu funkcji $\sin x$ do zbadanego już biegu funkcji $\cos x$ i doprowadza w jednej chwili do wniosku, że gdy x wzrasta od $x = 0$ do $x = \frac{\pi}{2}$, to $\sin x$ wzrasta od $\sin 0 = -\cos \frac{\pi}{2} = 0$ do $\sin \frac{\pi}{2} = -\cos \pi = 1$; dalej, gdy x wzrasta od $x = \frac{\pi}{2}$ do $x = \frac{3\pi}{2}$, to $\sin x$ maleje od $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ do $\sin \frac{3\pi}{2} = -\cos 2\pi = -1$, przechodząc dla $x = \pi$ przez zero; wreszcie, gdy x wzrasta od $x = \frac{3\pi}{2}$ do $x = 2\pi$, to $\sin x$ wzrasta od $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ do $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$.

Bieg funkcji $\cos x$ oraz $\sin x$ ilustruje następująca tabliczka:

zmienna	$x=0$	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$x = \pi$	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$x = 2\pi$
$\cos x$	bieg	+1	maleje	-1	wzrasta	+1			
	znak	dodatni	0	ujemny	0	dodatni			
$\sin x$	bieg	wzrasta	+1	maleje	-1	wzrasta			
	znak	0	dodatni	0	ujemny	0			

§ 139. Wyprowadzimy obecnie dla liczby π rozwinięcie na iloczyn nieskończony.

Niech x oznacza liczbę rzeczywistą dodatnią $< 2\pi$. Będzie więc, przy naturalnem n , $0 < \frac{x}{2^n} < \pi$ i przeto

$$\sin \frac{x}{2^n} > 0, \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (55)$$

W myśl (28) (dla $z_1 = z_2 = z$) mamy przy wszelkiem zespolonem z :

$$\sin 2z = 2 \cos z \sin z.$$

Kładąc kolejno $z = \frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \dots, \frac{x}{2^n}$, otrzymujemy stąd:

$$\begin{aligned}\sin x &= 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}, \\ \sin \frac{x}{2} &= 2 \cos \frac{x}{2^2} \sin \frac{x}{2^2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \sin \frac{x}{2^{n-1}} &= 2 \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n},\end{aligned}$$

skąd w jednej chwili, wobec (55):

$$\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3} \dots \cos \frac{x}{2^n} \quad (56)$$

przy wszelkiem naturalnem n .

Wobec (22) mamy dla $z \neq 0$:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots,$$

skąd, wobec bezustannej zbieżności (i przeto ciągłości dla $z = 0$) szeregu potęgowego po prawej stronie, wnosimy, że dla każdego ciągu nieskończonego z_n liczb zespolonych różnych od zera i zmierzających do zera:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin z_n}{z_n} = 1. \quad (57)$$

Stąd, w szczególności, dla $x \neq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = 1, \quad (57a)$$

skąd:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}$$

i wzór (56) daje rozwinięcie na iloczyn nieskończony:

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3} \dots, \quad (58)$$

dla $0 < x < 2\pi$.

W myśl (28) mamy

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z,$$

skąd, wobec (27):

$$\cos 2z = 2 \cos^2 z - 1$$

oraz

$$\cos^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2z \quad (59)$$

przy wszelkiem zespolonem z .

W przedziale $(0, \pi)$ funkcja $\cos x$, jak dowiedliśmy, stale maleje, zaś dla liczby $\frac{\pi}{2}$, leżącej wewnątrz tego przedziału, jest zerem: jest więc

$$\cos z > 0 \quad \text{dla} \quad 0 < z < \frac{\pi}{2};$$

w myśl (59) mamy więc, dla $0 < z < \frac{\pi}{2}$:

$$\cos z = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2z}.$$

Kładąc w tym wzorze kolejno $z = \frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \frac{x}{2^3}, \dots$, będziemy mieli, dla $0 < x < \pi$:

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x},$$

$$\cos \frac{x}{2^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}},$$

$$\cos \frac{x}{2^3} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2^2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}}$$

i t. d.

Stąd, w myśl (58), dla $0 < x < \pi$:

$$\frac{\sin x}{x} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} \dots$$

Kładąc w tym wzorze $x = \frac{\pi}{2}$, otrzymujemy wobec (37) i (38):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

— wzór, który znalazł już w r. 1593 Vieta. Ze względu na swą wolną zbieżność i złożoną formę czynników, wzór ten nie jest jednak dogodnym do obliczania wartości liczby π .

Podamy tu jeszcze jeden wzór na liczbę π , będący w ścisłym związku ze wzorem Vieta.

Niech x oznacza, jak wyżej, liczbę spełniającą nierówność

$$0 < x < \pi.$$

i położmy

$$b_0 = \frac{1}{\sin x}, \quad a_0 = b_0 \cos x,$$

zaś dla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$

Drogą łatwej indukcji wnosimy, że będzie

$$b_n = \frac{1}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}, \quad a_n = b_n \cos \frac{x}{2^n},$$

zatem, wobec (57a):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{x}$$

i przeto też, wobec $a_{n+1} = \frac{b_{n+1}^2}{b_n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{x}.$$

W szczególności, dla $x = \frac{\pi}{2}$, wnosimy stąd (wobec (37) i (38))¹⁾:

Jeżeli położymy

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 1$$

zaś

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}, \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots, (*)$$

to będzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{2}{\pi}.$$

[Aby stąd otrzymać wzór Vieta, wystarczy zauważyć, że wobec $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$, mamy $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} b_n$, skąd

$$b_n = b_0 \cdot \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \dots \frac{a_n}{b_n}$$

i przeto

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_0 \cdot \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} \dots = c_1 c_2 c_3 \dots,$$

gdzie

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (\text{gdyż, wobec } (*), \text{ mamy } \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \sqrt{\frac{1+\frac{a_n}{b_n}}{2}})$$

§ 140. Odwrócenie funkcji trygonometrycznych.

Funkcja $\cos x$, jak dowiedliśmy, w przedziale $(0, \pi)$ stale maleje od $\cos 0 = 1$ do $\cos \pi = -1$, przytem jest funkcją ciągłą w tym przedziale. Dla każdej liczby rzeczywistej y w przedziale $(-1, +1)$ istnieje więc jedna i tylko jedna wartość x , należąca do przedziału $(0, \pi)$ i spełniająca równanie

$$\cos x = y. \quad (60)$$

Innymi słowy, funkcja $\cos x$ posiada oznaczoną w zupełności funkcję odwrotną $\varphi(y)$, która będzie określona dla $-1 \leq y \leq 1$ i, jako funkcja odwrotna funkcji ciągłej w przedziale zamkniętym, w myśl tw. 140, sama będzie ciągłą. Funkcję tę oznaczamy symbolem

$$\arccos y$$

(czytaj: *arcus cosinus u*). Liczba $x = \arccos y$ — przy każdym danym rzeczywistym y , należącym do przedziału $(-1, +1)$ — jest

¹⁾ Por. K. Kommerell: Archiv der Math. u. Phys. Bd. 25 (1917), p. 296—309.

więc jedynym rozwiązaniem równania (60), należącym do przedziału $(0, \pi)$. Mamy więc stale

$$\cos(\arccos y) = y, \quad \text{dla } -1 \leq y \leq 1, \quad (61)$$

zaś z drugiej strony, stale

$$\arccos(\cos x) = x, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq \pi.$$

Jako funkcja odwrotna funkcji malejącej, $\arccos y$ będzie sama funkcją malejącą w przedziale $(-1, +1)$ od $\arccos(-1) = \pi$ do $\arccos 1 = 0$. Jest więc stale

$$0 \leq \arccos y \leq \pi, \quad \text{dla } -1 \leq y \leq 1, \quad (62)$$

przyczem $\left(\text{wobec } \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ oraz } \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \right)$:

$$\pi \geq \arccos y \geq \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } -1 \leq y \leq 0, \quad \text{oraz } \frac{\pi}{2} \geq \arccos y \geq 0 \quad \text{dla } 0 \leq y \leq 1.$$

Weźmy teraz pod rozwagę, przy danem a , równanie

$$\cos x = a. \quad (63)$$

Zbadamy, kiedy jest ono rozwiązalne w liczbach rzeczywistych x oraz postaramy się w razie rozwiązalności wyznaczyć wszystkie wartości na x , które je spełniają.

Wobec (22) funkcje $\cos x$ oraz $\sin x$ są dla rzeczywistych x rzeczywiste, oraz, wobec (27): $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \leq 1$, skąd $|\cos x| \leq 1$: równanie (63) może więc być rozwiązalne (w liczbach rzeczywistych) conajwyżej dla a rzeczywistych, bezwzględnie nie większych od jedności. Założmy więc, że liczba a spełnia ten warunek.

W przedziale $(0, \pi)$ równanie (63) posiada, jak wiemy, jedyne rozwiązanie, które oznaczamy przez $\arccos a$; z równości $\cos(-x) = \cos x$ wynika stąd natychmiast, że w przedziale $(-\pi, 0)$ równanie (63) posiada również jedyne rozwiązanie, którym jest $-\arccos a$. W przedziale $(-\pi, \pi)$ równanie (63) posiada więc tylko rozwiązania

$$x = \arccos a \quad \text{oraz} \quad x = -\arccos a,$$

które w przypadku $a = 1$ będą równe (równając się oba zeru). Wobec okresowości funkcji $\cos x$ [wzór (45)] wnosimy stąd natychmiast, że w przedziale $(2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$, przy danem całkowitem

$k \geq 0$, równanie (63) posiada i przytem tylko następujące rozwiązania:

$$x = 2k\pi + \arccos a \quad \text{oraz} \quad x = 2k\pi - \arccos a. \quad (64)$$

Stąd w jednej chwili otrzymujemy

Twierdzenie 169. *Każda liczba*

$$x = 2k\pi \pm \arccos a \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (65)$$

jest rozwiązaniem równania

$$\cos x = a \quad (\text{gdzie } -1 \leq a \leq 1)$$

i naodwrot, każde rozwiązanie (rzeczywiste) tego równania daje się przedstawić w postaci (65), przy odpowiedniej wartości całkowitej na k .

(Pierwsza część tego twierdzenia wynika bezpośrednio ze wzorów (64) na pierwiastki równania (63), leżące w przedziale $(2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$, druga zaś — z tych wzorów, oraz z uwagi, że każda liczba rzeczywista musi należeć do pewnego przedziału $(2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$, przy odpowiednim całkowitem k).

Twierdzenie to możemy jeszcze wypowiedzieć jak następuje:

Dla $-1 \leq a \leq 1$, oraz przy rzeczywistym x , równość

$$\cos x = a$$

jest równoważna równości

$$x = 2k\pi \pm \arccos a,$$

gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

Określimy teraz dla przedziału $(-1, +1)$ funkcję $\arcsin y$ wzorem:

$$\arcsin y = \frac{\pi}{2} - \arccos y \quad (-1 \leq y \leq 1). \quad (66)$$

Funkcja $\arcsin y$ będzie więc określona w zupełności w całym przedziale $(-1, 1)$, przytem będzie w tym przedziale ciągłą i stale rosnącą od $\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \arccos(-1) = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$

$$\text{do } \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} - \arccos 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Jest więc stale

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{dla } -1 \leq y \leq 1. \quad (67)$$

Dla $-1 \leq y \leq 1$ mamy, w myśl (66):

$$\sin(\arcsin y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos y\right),$$

a że, w myśl (42) oraz (61) (dla $-1 \leq y \leq 1$):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos y\right) = \cos(\arccos y) = y,$$

więc mamy:

$$\sin(\arcsin y) = y, \quad \text{dla } -1 \leq y \leq 1, \quad (68)$$

co dowodzi, że dla $-1 \leq y \leq 1$ liczba $x = \arcsin y$ jest należącym do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ [wobec (67)] rozwiązaniem równania

$$\sin x = y, \quad (69)$$

a że w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funkcja $\sin x$ stale wzrasta, więc $\arcsin y$ jest jedynym, należącym do tego przedziału rozwiązaniem równania (69). Innymi słowy: dla $-1 \leq y \leq 1$ oraz $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ równości

$$\sin x = y \quad \text{oraz} \quad x = \arcsin y$$

są równoważne. Funkcja $\arcsin y$ jest więc funkcją odwrotną dla funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Niech teraz y oznacza dowolną daną liczbę przedziału $(-1, 1)$. Wobec (23) oraz (68) będziemy mieli:

$$\sin(-\arcsin y) = -\sin(\arcsin y) = -y,$$

a że, w myśl (67):

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\arcsin y \leq \frac{\pi}{2},$$

więc wzór ten dowodzi, że liczba $\xi = -\arcsin y$ leży w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i spełnia równanie $\sin \xi = -y$. Lecz to ostatnie jest,

jak wiemy, dla $-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$ równoważne równości $\xi = \arcsin(-y)$: mamy więc:

$$\arcsin(-y) = -\arcsin y, \quad \text{dla } -1 \leq y \leq 1. \quad (70)$$

Niech, dalej, y oznacza daną liczbę przedziału $(0, 1)$; położmy

$$x = \arcsin y; \quad (71)$$

będzie więc, w myśl (67)

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad (72)$$

skąd, jak wiemy:

$$\cos x \geq 0; \quad (73)$$

z drugiej strony, wobec (71) i w myśl (68), będzie

$$\sin x = y, \quad (74)$$

skąd, wobec $y \geq 0$, mamy $\sin x \geq 0$, a że, jak wiemy, $\sin x < 0$ dla $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$, więc wobec (72), wnosimy, że

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \quad (75)$$

Wobec (74) oraz (27), mamy:

$$\cos^2 x = 1 - y^2,$$

skąd, wobec (73):

$$\cos x = \sqrt{1 - y^2}$$

i przeto, wobec (75):

$$x = \arccos \sqrt{1 - y^2}.$$

Dowiedliśmy więc, wobec (71), że

$$\arcsin y = \arccos \sqrt{1 - y^2}, \quad \text{dla } 0 \leq y \leq 1, \quad (76)$$

skąd, wobec (70), wnosimy natychmiast, że

$$\arcsin y = -\arccos \sqrt{1 - y^2}, \quad \text{dla } -1 \leq y \leq 0. \quad (77)$$

Weźmy teraz pod rozwagę równanie

$$\sin x = a. \quad (78)$$

Ponieważ dla rzeczywistych x liczba $\sin x$ jest rzeczywistą, bezwzględnie nie większą od jedności (co wnosimy podobnie jak wyżej dla funkcji $\cos x$), więc dla rozwiązalności w liczbach rzeczywistych równania (78) potrzeba, iżby było $-1 \leq a \leq 1$: założmy więc, że warunek ten jest spełniony.

Wobec (41) i (23) mamy stale:

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

i przeto równanie (78) jest równoważne równaniu

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = a,$$

które znowu, w myśl tw. 169, jest równoważne równości

$$x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi \pm \arccos a,$$

gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

Wnosimy stąd, że wszystkie rozwiązania równania (78) zawarte są we wzorze

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm \arccos a, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

czyli, w myśl (66), we wzorze

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin a \right) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

rozpadającym się na wzory:

$$\begin{aligned} & x = (2k+1)\pi - \arcsin a, \\ \text{oraz} \quad & x = 2k\pi + \arcsin a, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & x = (2k+1)\pi - \arcsin a, \\ & x = 2k\pi + \arcsin a, \end{aligned}} \right\} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

które możemy połączyć w jeden:

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 170. Dla $-1 \leq a \leq 1$ oraz przy rzeczywistym x równość

$$\sin x = a$$

jest równoważna równości

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a,$$

gdzie k oznacza liczbę całkowitą ≤ 0 .

§ 141. Niech teraz a i b będą dwie dane liczby rzeczywiste. Postaramy się wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x , spełniające warunki:

$$\left. \begin{aligned} -\pi < x \leq \pi, \\ \cos x &= a \\ \sin x &= b. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

W myśl (27) warunki (79) wymagają, aby było

$$a^2 + b^2 = 1; \quad (80)$$

załóżmy więc, że równość ta zachodzi: jest więc

$$-1 \leq a \leq 1.$$

Równanie $\cos x = a$ posiada dla $-1 \leq a \leq 1$, jak wiemy (§ 140), jedno rozwiązanie $x = \arccos a$ w przedziale $(0, \pi)$ oraz jedno rozwiązanie $x = -\arccos a$ w przedziale $(-\pi, 0)$: zbadamy teraz, czy rozwiązania te spełniają pozostałe warunki układu (79).

Dla $x = \arccos a$ (gdzie $-1 \leq a \leq 1$) mamy w myśl (62): $0 \leq x \leq \pi$, zatem $\sin x > 0$, oraz, w myśl (27), (61) i (80):

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - a^2} = |b|,$$

zaś dla $x = -\arccos a$ mamy $-\pi \leq x \leq 0$, skąd $\sin x \leq 0$, oraz

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - a^2} = -|b|.$$

Widzimy więc, że w razie $b > 0$ z wartości $x = \arccos a$ oraz $x = -\arccos a$ tylko pierwsza spełnia równanie $\sin x = b$, zaś w razie $b < 0$ — tylko druga. Dla $b \neq 0$ mamy przytem, w myśl (80): $-1 < a < 1$ i przeto $0 < \arccos a < \pi$, zaś $-\pi < -\arccos a < 0$: warunek $-\pi < x \leq \pi$ jest tu więc spełniony przez każdą z wartości $x = \pm \arccos a$.

Ostatecznie więc, dla $b \neq 0$ układ warunków (79) posiada zawsze jedno i tylko jedno rozwiązanie, mianowicie:

$$x = \arccos a, \quad \text{dla } b > 0.$$

oraz

$$x = -\arccos a, \quad \text{dla } b < 0.$$

Dla $b = 0$ musi być, w myśl (80), $a = \pm 1$. Dla $a = 1$, $b = 0$ jedynym rozwiązaniem układu warunków (79) jest, jak łatwo widzieć, $x = 0$ (gdyż, z jednej strony, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, z drugiej zaś, dla różnych od zera x w przedziale $(-\pi, \pi)$ mamy stale $\cos x < 1$); podobnież, dla $a = -1$, $b = 0$ jedynym rozwiązaniem

układu (79) jest $x = \pi$ (gdyż, z jednej strony, $\cos \pi = 1$, $\sin \pi = 0$, z drugiej zaś, wewnątrz przedziału $(-\pi, \pi)$ mamy stale $\cos x > -1$). Dla $b = 0$ układ warunków (79) posiada więc również tylko jedno rozwiązanie, mianowicie

$$x = 0, \text{ jeżeli } a = 1$$

oraz

$$x = \pi, \text{ jeżeli } a = -1,$$

a że dla $a = 1$ mamy $\arccos a = 0$, zaś dla $a = -1$ mamy $\arccos a = \pi$, więc oba przypadki możemy objąć wzorem

$$x = \arccos a.$$

Zestawiając otrzymane dla $b \neq 0$ oraz dla $b = 0$ wyniki, możemy wypowiedzieć

Twierdzenie 171. Jeżeli a i b są liczby rzeczywiste, dla których $a^2 + b^2 = 1$, to układ warunków

$$\begin{aligned} -\pi < x \leq \pi, \\ \cos x &= a, \\ \sin x &= b \end{aligned}$$

posiada zawsze jedno i tylko jedno rozwiązanie, mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} x &= \arccos a, \text{ dla } b \geq 0 \\ x &= -\arccos a, \text{ dla } b < 0. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Forma trygonometryczna liczb zespolonych.

Niech $z = x + yi$ oznacza dowolną daną liczbę zespoloną, różną od zera. Oznaczmy przez ρ jej moduł: będzie więc

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$

Położmy, dalej

$$\frac{z}{\rho} = a + bi; \quad (82)$$

będziemy więc mieli

$$a = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad b = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (83)$$

a i b będą więc dwie oznaczone w zupełności (przez liczbę z) liczby rzeczywiste, przy czym będzie

$$a^2 + b^2 = 1.$$

W myśl tw. 171 istnieje więc jedna tylko liczba θ , spełniająca warunki:

$$\left. \begin{aligned} -\pi < \theta \leq \pi, \\ \cos \theta &= a, \\ \sin \theta &= b. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Liczba θ jest więc przez liczbę zespoloną z wyznaczoną w zupełności: nazywamy ją *amplitudą* (lub argumentem) liczby z . W myśl wzorów (84) i (83) oraz w myśl tw. 171, amplitudą liczby zespolonej $z = x + yi$ jest

$$\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ dla } y \geq 0, \text{ oraz } -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ dla } y < 0.$$

W myśl (82) oraz (84) możemy napisać:

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

— jest to t. zw. *forma trygonometryczna* liczby zespolonej, której, w myśl wzoru Eulera (24), możemy jeszcze nadać postać:

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 172. Każda liczba zespolona z różna od zera daje się zawsze, i to w jeden tylko sposób, przedstawić w postaci

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta},$$

gdzie ρ oznacza jej moduł, zaś θ — liczbę większą od $-\pi$ i nie większą od π (amplitudę).

Amplitudą liczby rzeczywistej dodatniej jest oczywiście zero (gdyż dla $z > 0$, kładąc $|z| = \rho$, mamy $z = \rho e^{i0}$), zaś amplitudą liczby rzeczywistej ujemnej jest liczba π (gdyż, kładąc $|z| = \rho$, mamy, dla $z < 0$, w myśl (52), $z = -\rho = \rho e^{i\pi}$).

Amplitudą liczby i jest, jak łatwo widzieć, $\frac{\pi}{2}$, gdyż wobec (24):

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i, \text{ zaś } |i| = 1, \text{ i przeto możemy napisać}$$

$$i = |i| e^{i\frac{\pi}{2}}. \text{ Podobnież wnosimy, że amplitudą liczby } -i \text{ jest } -\frac{\pi}{2}$$

$$(\text{gdyż, w myśl (25): } e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i, \text{ zaś } |-i| = 1,$$

$$\text{skąd } -i = |-i| e^{-i\frac{\pi}{2}}). \text{ Stąd łatwy wniosek, że amplitudą liczby}$$

urojonej $z = yi$ (gdzie y jest rzeczywiste) jest $\frac{\pi}{2}$ lub $-\frac{\pi}{2}$, zależnie od tego, czy $y > 0$, czy też $y < 0$.

Zbadamy teraz, jakie będą wszystkie rozwiązania rzeczywiste równania

$$e^{xi} = 1, \quad (85)$$

nie ograniczone warunkiem $-\pi < x \leq \pi$. Załóżmy w tym celu, że liczba rzeczywista x spełnia równanie (85). Połóżmy

$$k = -E\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}\right) \quad (86)$$

— będzie to pewna liczba całkowita. W myśl (86) (z uwagi, że $u - 1 < Eu \leq u$), będzie

$$-\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} < -k \leq \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi},$$

skąd

$$-\pi < x - 2k\pi \leq \pi. \quad (87)$$

Z drugiej strony, w myśl (51), mamy:

$$e^{(x-2k\pi)i} = e^{xi-2k\pi i} = e^{xi},$$

zatem, wobec (85):

$$e^{(x-2k\pi)i} = 1. \quad (88)$$

Wzory (87) i (88) dowodzą, że liczba $x - 2k\pi$ jest amplitudą jedności, skąd wynika, że $x - 2k\pi = 0$, czyli:

$$x = 2k\pi.$$

Dowiedliśmy więc, że każdy pierwiastek rzeczywisty równania (85) jest wielokrotnością (≥ 0) liczby 2π . Ale i naodwrot: przy wszelkiem całkowitem k mamy, w myśl (49):

$$e^{2k\pi i} = 1.$$

Stąd

Twierdzenie 173. *Na to, żeby liczba rzeczywista x spełniała równanie*

$$e^{xi} = 1,$$

potrzeba i wystarcza, iżby x było liczbą formy $2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą (≥ 0).

Z dowiedzonego twierdzenia wnosimy natychmiast, że liczba 2π jest najmniejszym rozwiązaniem dodatnim równania $e^{xi} = 1$, skąd wynika, że *liczba π jest najmniejszym rozwiązaniem dodatnim równania $e^{2xi} = 1$* . Liczba π posiada więc taką prostą definicję analityczną i taki prosty związek z liczbą e .

§ 142. Własności charakterystyczne funkcji trygonometrycznych.

Funkcje $\varphi(x) = \cos x$ oraz $\psi(x) = \sin x$ spełniają, w myśl (28), równania:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x)\varphi(y) - \psi(x)\psi(y), \\ \psi(x+y) &= \psi(x)\varphi(y) + \varphi(x)\psi(y), \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

wyrażające t. zw. *twierdzenie dodawania*.

Postaramy się obecnie wyznaczyć wszystkie układy dwóch funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, ciągłych w zbiorze liczb rzeczywistych i spełniających przy wszelkich rzeczywistych x i y równania (89).

Założmy w tym celu, że $\varphi(x)$ oraz $\psi(x)$ są dwie funkcje rzeczywiste, ciągłe w całym zbiorze liczb rzeczywistych i spełniające przy wszelkich rzeczywistych x i y równania (89). Połóżmy

$$\omega(x) = \varphi(x) + i\psi(x). \quad (90)$$

Funkcja $\omega(x)$ będzie więc posiadała określoną wartość (zespoloną) przy wszelkiem rzeczywistem x , przyczem, wobec (90) i (89), będzie przy wszelkich rzeczywistych x i y :

$$\omega(x+y) = \omega(x)\omega(y), \quad (91)$$

skąd, w jednej chwili, przy naturalnem m i rzeczywistem x :

$$\omega(mx) = [\omega(x)]^m. \quad (92)$$

W myśl (91) mamy, dla $x = y = 0$:

$$\omega(0) = [\omega(0)]^2,$$

co daje w jednej chwili:

$$\omega(0) = 0, \text{ lub } \omega(0) = 1. \quad (93)$$

Gdyby było $\omega(0) = 0$, mieliśmyby, wobec (91) (dla $y = 0$), przy wszelkiem rzeczywistem x :

$$\omega(x) = \omega(x)\omega(0) = 0,$$

czyli, wobec (90), przy wszelkiem rzeczywistem x :

$$\varphi(x) + i\psi(x) = 0,$$

co [wobec rzeczywistości funkcji $\varphi(x)$ oraz $\psi(x)$] daje stale

$$\varphi(x) = 0 \text{ oraz } \psi(x) = 0.$$

Zalóżmy dalej, że przynajmniej jedna z funkcji $\varphi(x)$ oraz $\psi(x)$ nie jest stale równą zeru: musi więc być $\omega(x) \neq 0$ i przeto, wobec (93):

$$\omega(0) = 1, \quad (94)$$

czyli, wobec (90):

$$\varphi(0) + i\psi(0) = 1,$$

co [wobec rzeczywistości liczb $\varphi(0)$ i $\psi(0)$] daje

$$\varphi(0) = 1, \quad \psi(0) = 0.$$

Wobec $\varphi(0) = 1$ oraz wobec ciągłości funkcji $\varphi(x)$, istnieje liczba dodatnia α taka, iż w przedziale $(0, \alpha)$ mamy stale $\varphi(x) > 0$. Oznaczmy przez ϱ i θ moduł i amplitudę liczby zespolonej $\omega(x)$: będziemy mieli $\varrho > 0$, gdyż $\omega(x) \neq 0$.

Powiadamy, że jeżeli

$$0 < x \leq \alpha \quad (95)$$

i jeżeli amplitudą liczby $\omega(x)$ jest t , a modułem r , to amplitudą liczby $\omega\left(\frac{x}{2}\right)$ jest $\frac{t}{2}$, a modułem $\sqrt{r}$.

W samej rzeczy, załóżmy że liczba x spełnia nierówność (95) i niech r i t będą modułem i amplitudą liczby $\omega(x)$. Mamy więc

$$\omega(x) = r(\cos t + i \sin t),$$

a, że wobec (91) (pisząc $\frac{x}{2}$ zamiast x i y) mamy

$$\omega(x) = \left[\omega\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2,$$

więc jest

$$\left[\omega\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 = r(\cos t + i \sin t);$$

z drugiej strony, w myśl wzoru Moivre'a (29):

$$\cos t + i \sin t = \left(\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2} \right)^2;$$

mamy zatem:

$$\left[\omega\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 = r \left(\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2} \right)^2,$$

co dowodzi, że przy jednym ze znaków $\pm$ mamy

$$\omega\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{r} \left(\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2} \right) \quad (96)$$

Załóżmy, że wzór (96) zachodzi przy dolnym znaku, czyli że

$$\omega\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{r} \left(\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2} \right);$$

w myśl (90), mielibyśmy więc

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{r} \cos \frac{t}{2} \quad (97)$$

Lecz t , jako amplituda liczby zespolonej, spełnia nierówność

$$-\pi < t \leq \pi,$$

skąd

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad (98)$$

i przeto

$$\cos \frac{t}{2} \geq 0;$$

wzór (97) dawałby więc

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \leq 0,$$

gdy tymczasem z definicji liczby α wynika, wobec (95) i, tembardziej:

$$0 < \frac{x}{2} < \alpha, \text{ iż}$$

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) > 0.$$

We wzorze (96) musi więc zachodzić znak górny, czyli

$$\omega\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{r} \left(\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2} \right),$$

skąd wynika natychmiast, że modułem liczby $\omega\left(\frac{x}{2}\right)$ jest $\sqrt{r}$, zaś amplitudą $\frac{t}{2}$ [wobec 98], c. b. d. o.

Wynika stąd, dalej, natychmiast, że jeżeli liczba x spełnia nierówność (95) i jeżeli modułem liczby $\omega(x)$ jest r , zaś amplitudą t , to modułem liczby $\omega\left(\frac{x}{2^n}\right)$

jest $\sqrt[n]{r}$, zaś amplitudą $\frac{t}{2^n}$ (dla $n = 1, 2, 3, \dots$). W szczególności więc modułem liczby $\omega\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$ jest $\sqrt[n]{\varrho}$, zaś amplitudą $\frac{\theta}{2^n}$, skąd:

$$\omega\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \sqrt[n]{\varrho} \left(\cos \frac{\theta}{2^n} + i \sin \frac{\theta}{2^n} \right). \quad (99)$$

Kładąc we wzorze (92) $x = \frac{\alpha}{2^n}$, mamy przy naturalnych m i n :

$$\omega\left(\frac{m\alpha}{2^n}\right) = \left[\omega\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \right]^m,$$

zatem, wobec (99) i w myśl wzoru Moivre'a (29):

$$\omega\left(\frac{m\alpha}{2^n}\right) = \varrho^{\frac{m}{2^n}} \left(\cos \frac{m}{2^n} \theta + i \sin \frac{m}{2^n} \theta \right),$$

skąd, wobec (90):

$$\varphi\left(\frac{m\alpha}{2^n}\right) = \varrho^{\frac{m}{2^n}} \cos \frac{m}{2^n} \theta \quad \text{oraz} \quad \psi\left(\frac{m\alpha}{2^n}\right) = \varrho^{\frac{m}{2^n}} \sin \frac{m}{2^n} \theta, \quad (100)$$

przy wszelkich naturalnych m i n .

W. Sierpiński: Analiza. T. I. Cz. III.

Niech teraz x oznacza dowolną daną liczbę rzeczywistą nieujemną. Kładąc

$$u_n = \frac{E 2^n x + 1}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

będziemy mieli, jak łatwo zobaczyć:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x, \quad (101)$$

zaś w myśl (100):

$$\varphi(u_n) = e^{u_n} \cos u_n \theta, \quad \psi(u_n) = e^{u_n} \sin u_n \theta, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

skąd, w granicy dla $n = \infty$, w myśl (101) oraz wobec ciągłości funkcji φ i ψ :

$$\varphi(x) = e^x \cos x \theta, \quad \psi(x) = e^x \sin x \theta. \quad (102)$$

Udowodniliśmy więc wzory (102) przy wszelkim $x \geq 0$. W razie $x < 0$ będzie $-x > 0$ i przeto, wobec wzorów dowiedzionych przed chwilą:

$$\varphi(-x) = e^{-x} \cos(-x \theta), \quad \psi(-x) = e^{-x} \sin(-x \theta). \quad (103)$$

Z drugiej strony, kładąc we wzorze (91) $x = u$, $y = -u$, dostajemy

$$\omega(0) = \omega(u) \omega(-u),$$

skąd, wobec (94):

$$\omega(u) = \frac{1}{\omega(-u)}$$

i przeto, wobec (90) i (103) [oraz wobec (23) i (27)]

$$\varphi(x) + i \psi(x) = \frac{1}{e^{-x} [\cos(-x \theta) + i \sin(-x \theta)]} = e^x (\cos x \theta + i \sin x \theta),$$

skąd

$$\varphi(x) = e^x \cos x \theta, \quad \psi(x) = e^x \sin x \theta.$$

Wzory (102) zachodzą więc przy wszelkim rzeczywistym x . Zastępując w nich x przez $\frac{x}{a}$ i kładąc

$$e^{\frac{x}{a}} = a$$

(będzie to pewna liczba dodatnia, gdyż $a > 0$ oraz $e > 0$), oraz

$$\frac{\theta}{a} = b$$

(będzie to pewna liczba rzeczywista), otrzymamy:

$$\varphi(x) = a^x \cos bx, \quad \psi(x) = a^x \sin bx. \quad (104)$$

Udowodniliśmy więc, że jeżeli $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są funkcje ciągłe zmiennej rzeczywistej, spełniające równania (89), z których jedna przynajmniej nie jest stale zerem, to funkcje te muszą być określone przez wzory (104), gdzie a i b są stałe rzeczywiste, przytem $a > 0$. Gdyby funkcje $\varphi(x)$ oraz $\psi(x)$ były obie stale równe zeru, to byłyby one objęte wzorami (104) dla $a = 0$. Możemy więc powiedzieć, że każdy układ funkcji ciągłych $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, spełniających równania (89), jest zawarty we wzorach (104) przy pewnej wartości nieujemnej stałej a i pewnej wartości rzeczywistej stałej b .

Z drugiej strony założymy, że $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są jakiekolwiek dwie funkcje zmiennej rzeczywistej, określone przez wzory (104), gdzie a jest liczbą nieujemną, zaś b liczbą rzeczywistą (a i b niezależne od x). Ze wzorów (104) wynika, że funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są ciągłe (w całym zbiorze liczb rzeczywistych), a podstawiając je do równań (89) sprawdzamy z łatwością, że te ostatnie będą spełnione (przy wszelkich rzeczywistych x i y). Udowodniliśmy więc następujące

Twierdzenie 174. *Na to żeby funkcje $\varphi(x)$ oraz $\psi(x)$ były układem dwóch funkcji (rzeczywistych) ciągłych, spełniających przy wszelkich rzeczywistych x i y równania (89), potrzeba i wystarcza iaby było*

$$\varphi(x) = a^x \cos bx, \quad \psi(x) = a^x \sin bx, \quad (105)$$

gdzie a jest stałą nieujemną, zaś b — stałą rzeczywistą.

Jeżeli teraz do warunku, że funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są ciągłe i spełniają równania (89), dodamy warunek, że przy wszelkim rzeczywistym x :

$$[\varphi(x)]^2 + [\psi(x)]^2 = 1,$$

to, w myśl (105), będziemy mieli [wobec (27)] przy wszelkim rzeczywistym x :

$$a^{2x} = 1,$$

skąd, w jednej chwili:

$$a = 1. \quad (106)$$

Wobec (105) i (106) znajdujemy w jednej chwili [w myśl (57)]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \psi\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{b}{n}\right) = b;$$

jeżeli więc dodamy jeszcze warunek, iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \psi\left(\frac{1}{n}\right) = 1,$$

to będzie musiało być

$$b = 1.$$

Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 175. *Jedynym układem dwóch funkcji (rzeczywistych) ciągłych $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, spełniających przy wszelkich rzeczywistych x i y równania*

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x)\varphi(y) - \psi(x)\psi(y) \\ \psi(x+y) &= \psi(x)\varphi(y) + \varphi(x)\psi(y) \\ [\varphi(x)]^2 + [\psi(x)]^2 &= 1 \end{aligned}$$

oraz warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \psi\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

jest układ

$$\varphi(x) = \cos x, \quad \psi(x) = \sin x.$$

Funkcje $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(x) = \sin x$ (dostawa i wstawa), z którymi mamy do czynienia w trygonometrii, są, jak wiadomo, ciągłe i spełniają wszystkie cztery warunki twierdzenia 175: są one więc odpowiednio identyczne z funkcjami $\cos x$ oraz $\sin x$. Ponieważ, dale, ludolfina, czyli stosunek obwodu koła do jego

średnicy jest, jak wiadomo z trygonometrii, najmniejszym pierwiastkiem dodatnim równania $\frac{z}{2} = 0$, więc jest to ta sama liczba, którą oznaczyliśmy przez π w § 137.

§ 143. Wzory na pierwiastki naturalnego stopnia.

Niech z oznacza daną liczbę zespoloną różną od zera, r — jej moduł, t — amplitudę. Każdą liczbę zespoloną ζ , spełniającą przy danym naturalnym m równanie

$$\zeta^m = z \quad (107)$$

nazywamy, jak wiadomo, *pierwiastkiem m -go stopnia z liczby z* . Postaramy się wyznaczyć wszystkie takie pierwiastki.

Załóżmy, że liczba zespolona ζ spełnia równanie (107) i niech ρ będzie jej moduł, zaś θ — amplituda. W myśl (107), mamy więc

$$(\rho e^{i\theta})^m = r e^{it},$$

skąd, w myśl (18):

$$\rho^m e^{m\theta i} = r e^{it}. \quad (108)$$

Weźmy moduły po obu stronach: z uwagi, że przy rzeczywiście z , w myśl wzoru Eulera (24) i wobec (27):

$$|e^{it}| = |\cos t + i \sin t| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1,$$

otrzymamy:

$$\rho^m = r, \quad (109)$$

skąd, wobec $r > 0$ (gdyż r jest modulem liczby $z \neq 0$), oraz wobec $\rho \geq 0$:

$$\rho = \sqrt[m]{r}. \quad (110)$$

Wnosząc (109) do (108), po podzieleniu obu stron przez $r \neq 0$, dostajemy:

$$e^{m\theta i} = e^{it},$$

skąd, mnożąc przez liczbę e^{-it} , wobec (17):

$$e^{(m\theta - t)i} = 1. \quad (111)$$

W myśl tw. 173, wzór (111) daje:

$$m\theta - t = 2k\pi$$

czyli

$$\theta = \frac{t + 2k\pi}{m}, \quad (112)$$

gdzie k jest liczbą całkowitą.

Lecz θ , jako amplituda liczby zespolonej, musi spełniać warunki:

$$-\pi < \theta \leq \pi;$$

wobec (112) mamy więc dla liczby k nierówności:

$$-\pi < \frac{t + 2k\pi}{m} \leq \pi,$$

czyli

$$-\frac{m}{2} - \frac{t}{2\pi} < k \leq \frac{m}{2} - \frac{t}{2\pi},$$

które, wobec całkowitości k , są równoważne nierównościami

$$E\left(-\frac{m}{2} - \frac{t}{2\pi}\right) < k \leq E\left(\frac{m}{2} - \frac{t}{2\pi}\right) = E\left(-\frac{m}{2} - \frac{t}{2\pi}\right) + m.$$

Musi więc k być jedną z liczb

$$E\left(-\frac{m}{2} - \frac{t}{2\pi}\right) + 1, E\left(-\frac{m}{2} - \frac{t}{2\pi}\right) + 2, \dots, E\left(-\frac{m}{2} - \frac{t}{2\pi}\right) + m,$$

które oznaczmy odpowiednio przez $k_1, k_2, \dots, k_m$.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli liczba zespolona ζ , której modulem jest ρ , zaś amplitudą θ , jest pierwiastkiem m -go stopnia z liczby zespolonej z , to [w myśl (110)] ρ musi być pierwiastkiem arytmetycznym m -go stopnia z modułu r liczby z , zaś θ [w myśl (112)] musi być jedną z m wartości

$$\theta_j = \frac{t + 2k_j\pi}{m} \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (113)$$

gdzie t oznacza amplitudę liczby z , zaś

$$k_j = E\left(-\frac{m}{2} - \frac{t}{2\pi}\right) + j \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (114)$$

Okazemy teraz, że wszystkie liczby

$$\zeta_j = \rho e^{i\theta_j} = \sqrt[m]{r} e^{\frac{t + 2k_j\pi}{m} i} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (115)$$

są różnymi pierwiastkami m -go stopnia z liczby z .

W samej rzeczy, liczby (115) są wszystkie różne, gdyż, w myśl (113) i (114), posiadają różne amplitudy, zaś w myśl (115), mamy (wobec całkowitości liczb k_j):

$$\zeta_j^m = r e^{(t+2k_j\pi)^i} = r e^u = z,$$

czyli

$$\zeta_j^m = z \quad (\text{dla } j = 1, 2, \dots, m).$$

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 176. *Z każdej, różnej od zera liczby zespolonej $z = re^u$ (gdzie r oznacza jej moduł, zaś t — amplitudę) istnieje przy każdym naturalnym m dokładnie m różnych pierwiastków m -go stopnia. Pierwiastkami temi są liczby*

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m,$$

gdzie

$$\zeta_j = \rho e^{\theta_j i} \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (116)$$

przyczem

$$\rho = \sqrt[m]{r},$$

zaś

$$\theta_j = \frac{t + 2\pi \left[E\left(-\frac{m}{2} - \frac{t}{2\pi}\right) + j \right]}{m} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (117)$$

Wzór (117) wyznacza przytem amplitudy pierwiastków ζ_j .

Że z każdej liczby zespolonej różnej od zera istnieje dokładnie m różnych pierwiastków m -go stopnia, dowiedliśmy już na innej drodze w § 66 (tw. 75). Opierając się na tem twierdzeniu, a nawet już tylko na twierdzeniu, że żadne równanie m -go stopnia nie może posiadać więcej niż m różnych pierwiastków, moglibyśmy z łatwością dowieść, że jeżeli $z = re^u$, gdzie $r > 0$ i t jest liczbą rzeczywistą, to wszystkimi pierwiastkami m -go stopnia z liczby z są liczby

$$\zeta_k = \sqrt[m]{r} e^{\frac{t+2k\pi}{m}i} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1). \quad (118)$$

W samej rzeczy, z jednej strony, jak łatwo widzieć, każda z liczb (118) spełnia równanie $\zeta^m = z$, z drugiej zaś wszystkie liczby (118) są różne, gdyż w razie $\zeta_k = \zeta_{k'}$, mielibyśmy, w myśl (118):

$$e^{\frac{t+2k\pi}{m}i} = e^{\frac{t+2k'\pi}{m}i},$$

skąd, w jednej chwili:

$$e^{\frac{2(k-k')\pi i}{m}} = 1,$$

zatem, w myśl tw. 173:

$$\frac{2(k-k')\pi}{m} = 2l\pi,$$

skąd

$$k - k' = lm,$$

gdzie l jest liczbą całkowitą, co, z uwagi, że $k - k'$, jako różnica liczb ciągu $0, 1, \dots, m-1$, jest bezwzględnie mniejsza od m , daje $l = 0$ i przeto $k = k'$. Liczby (118) przedstawiają więc m różnych pierwiastków m -go stopnia z liczby z , a że z liczby tej nie może istnieć więcej niż m pierwiastków m -go stopnia, więc są to wszystkie uważane pierwiastki, c. b. d. o. We wzorze (118) niekoniecznie jednak amplitudą liczby zespolonej ζ_k jest $\frac{t+2k\pi}{m}$.

W szczególności, dla $r = 1$, $t = 0$, wnosimy, że wszystkimi różnymi pierwiastkami m -go stopnia z jedności są liczby

$$\zeta_k = e^{\frac{2k\pi i}{m}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (119)$$

czyli liczby

$$\cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Ze wzoru (119) wynika natychmiast, że

$$\zeta_k = \zeta_l^m, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (120)$$

czyli, że wszystkie pierwiastki m -go stopnia z jedności dają się przedstawić jako kolejne potęgi jednego z tych pierwiastków.

Wynika też stąd, że

$$\zeta_k \neq 1, \quad \text{dla } (k = 1, 2, \dots, m-1), \quad (121)$$

t. j. że ζ_1 , będąc pierwiastkiem m -go stopnia z jedności, nie jest pierwiastkiem żadnego niższego (naturalnego) stopnia z jedności: każdy taki pierwiastek nazywamy pierwiastkiem pierwotnym m -go stopnia z jedności. Można by z łatwością dowieść, że z liczb (119) te i tylko te są pierwiastkami pierwotnymi m -go stopnia z jedności, których wskaźnik k jest liczbą pierwszą względem m .

W każdym więc razie dowiedliśmy, że istnieją pierwiastki pierwotne każdego naturalnego stopnia z jedności.

Ze wzorów (120) wynika, że przy wszelkim całkowitem p :

$$\zeta_1^p + \zeta_2^p + \dots + \zeta_m^p = \zeta_1^p + \zeta_1^{2p} + \dots + \zeta_1^{mp};$$

stad, w jednej chwili, dla $p=m$ (ogólniej, dla p podzielnych przez m), z uwagi, że $\zeta_1^m = 1$:

$$\zeta_1^p + \zeta_2^p + \dots + \zeta_m^p = m,$$

zaś dla $p=1, 2, \dots, m-1$ (ogólniej, dla p niepodzielnych przez m), wobec (121):

$$\zeta_1^p + \zeta_2^p + \dots + \zeta_m^p = \frac{\zeta_1^{(m+1)p} - \zeta_1^p}{\zeta_1^p - 1} = \zeta_1^p \frac{\zeta_1^m - 1}{\zeta_1^p - 1} = 0$$

(gdyż $\zeta_1^m = 1$). Zatem:

Suma p -tych potęg wszystkich pierwiastków m -go stopnia z jedności jest zerem dla p całkowitych niepodzielnych przez m , zaś liczbą m dla p podzielnych przez m .

ROZDZIAŁ XVII.

Logarytmy liczb zespolonych. Potęga ogólna. Funkcje kołowe zmiennej zespolonej.

§ 144. Logarytmy liczb zespolonych. Niech z oznacza daną liczbę zespoloną, różną od zera, r — jej moduł, t — amplitudę. Postaramy się wyznaczyć wszystkie liczby zespolone ζ , spełniające równanie

$$e^{\zeta} = z. \quad (1)$$

Załóżmy w tym celu, że liczba zespolona $\zeta = \xi + \eta i$ (gdzie ξ i η są liczby rzeczywiste) spełnia równanie (1). Mamy więc:

$$e^{\xi + \eta i} = r e^{it}. \quad (2)$$

Biorąc moduły po obu stronach, otrzymujemy:

$$e^{\xi} = r, \quad (3)$$

a ponieważ ξ jest liczbą rzeczywistą, zaś $r > 0$, więc wzór (3) daje

$$\xi = \lg r.$$

Wnosząc (3) do (2) i dzieląc obie strony przez $r e^{-it}$, otrzymujemy, po pomnożeniu przez $e^{-\eta i}$:

$$e^{(\eta - 1)i} = 1,$$

co, w myśl tw. 173, dowodzi, że

$$\eta - t = 2k\pi,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli liczba zespolona $\zeta = \xi + \eta i$ spełnia równanie (1), to musi być

$$\xi = \lg r, \quad \eta = t + 2k\pi, \quad (4)$$

gdzie k jest liczbą całkowitą (przyczem r oznacza moduł, zaś t — amplitudę liczby z).

Okażemy teraz, że naodwrot, każda liczba zespolona $\zeta = \xi + \eta i$, gdzie ξ i η są liczby (rzeczywiste) wyznaczone przez wzory (4), spełnia przy wszelkim całkowitem k równanie (1).

Wobec wzorów (4) i własności funkcji wykładniczej, mamy przy całkowitem k :

$$e^{\zeta} = e^{\xi + \eta i} = e^{\xi} \cdot e^{\eta i} = e^{\lg r} \cdot e^{i(t + 2k\pi)} = r e^{it},$$

czyli $e^{\zeta} = z$, c. b. d. o.

Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 177. *Jeżeli z oznacza liczbę zespoloną różną od zera, r — jej moduł, t — amplitudę, to na to, żeby liczba zespolona ζ spełniała równanie*

$$e^{\zeta} = z,$$

potrzeba i wystarcza, iżby było

$$\zeta = \lg r + ti + 2k\pi i,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą.

Każdą liczbę zespoloną ζ , spełniającą przy danem zespolonym z równanie (1), nazywamy logarytmem naturalnym liczby zespolonej z . Z dowiedzionego twierdzenia wynika więc, że

Każda liczba zespolona różna od zera posiada nieskończenie wiele różnych logarytmów naturalnych.

§ 145. Każdy z logarytmów naturalnych liczby zespolonej z będziemy oznaczali symbolem $\text{Lg}z$. Symbol $\text{Lg}z$ ma więc przy każdym danem zespolonym z nieskończenie wiele różnych wartości, którymi są liczby:

$$\lg r + ti + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5)$$

Dla $k = 0$ otrzymujemy tak zwany logarytm główny (loga-