

skąd, w jednej chwili:

$$\left| \sum_{k=1}^q u_{k,n} - \sum_{k=1}^q \lim_{p \rightarrow \infty} u_{k,p} \right| < \varepsilon, \text{ dla } n > \mu_0. \quad (58)$$

Wreszcie, nierówność (49) daje, wobec $q > \mu$:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} - \sum_{k=1}^q u_{k,n} \right| < \varepsilon. \quad (59)$$

Nierówności (56), (58) i (59) dają w jednej chwili:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} - S \right| < 4\varepsilon, \text{ dla } n > \mu_0,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = S$$

i, wobec (54), daje wzór (50). Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 150. Jeżeli szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) są zbieżne jednostajnie i jeżeli każda z granic $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) istnieje i jest skończoną, to mamy wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k,n}$$

(przyczem obie strony tego wzoru są skończone).

ROZDZIAŁ XIV.

Rozwijanie funkcji ciągłych na szeregi wielomianów.

§ 118. Zajmiemy się teraz dowodem twierdzenia Weierstrassa, że każda funkcja zmiennej rzeczywistej, ciągła w danym skończonym przedziale, daje się w tym przedziale rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych¹⁾.

W tym celu wyprowadzimy przedewszystkiem pewien wzór na funkcję $|x|$.

Lemat. Dla $-1 \leq x \leq 1$ zachodzi przy wszelkiem naturalnem n nierówność

$$0 \leq |x| - x \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} < \frac{2}{\sqrt[n]{n}}. \quad (1)$$

Dowód. Połóżmy, przy naturalnem n

$$|x| - x \frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} = r_n; \quad (2)$$

zbadamy osobno przypadki: $x \geq 0$ oraz $x < 0$.

1) $x \geq 0$. Mamy tu $|x| = x$, zatem, w myśl (2):

$$r_n = \frac{2x}{(1+x)^n + 1}. \quad (3)$$

Dla $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ licznik wyrażenia (3) będzie oczywiście nieujemny i nie większy od $\frac{2}{\sqrt[n]{n}}$, mianownik zaś większy od jedności, zatem

$$0 \leq r_n < \frac{2}{\sqrt[n]{n}},$$

co, wobec (2), dowodzi nierówności (1) w uważanym przypadku.

Dla $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < x \leq 1$ mamy:

$$(1+x)^n > \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{\sqrt[n]{n}} > \sqrt[n]{n};$$

mianownik wyrażenia (3) jest tu więc większy od $\sqrt[n]{n}$, a ponieważ licznik jego jest dodatni oraz ≤ 2 , więc mamy

$$0 < r_n < \frac{2}{\sqrt[n]{n}},$$

co znowu, wobec (2), dowodzi prawdziwości nierówności (1).

2) $x < 0$. Mamy teraz $|x| = -x$, skąd, wobec (2):

$$r_n = \frac{-2x(1+x)^n}{(1+x)^n + 1}. \quad (4)$$

¹⁾ Por. Prace mat.-fiz. T. XXII, p. 59–68.

Dla $-\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq x < 0$ zachodzą oczywiście nierówności:

$$0 \leq -2x \leq \frac{2}{\sqrt[n]{n}}, \quad 0 \leq (1+x)^n < 1, \quad \text{oraz} \quad (1+x)^n + 1 \geq 1,$$

skąd, wobec (4):

$$0 \leq r_n < \frac{2}{\sqrt[n]{n}},$$

co, wobec (2), dowodzi prawdziwości (1).

Dla $-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ (co oczywiście jest możliwe tylko w razie $n > 1$), mamy

$$0 < -2x \leq 2, \quad (1+x)^n + 1 \geq 1, \\ 0 \leq (1+x)^n < \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}-1}\right)^n} < \frac{1}{1 + \frac{n}{\sqrt[n]{n}-1}} < \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

zatem, wobec (4):

$$0 \leq r_n < \frac{2}{\sqrt[n]{n}},$$

co, wobec (2), znowu dowodzi prawdziwości wzoru (1).

Lemat nasz udowodniliśmy zatem w zupełności. Zastępując w nim x przez x/s , gdzie s jest liczbą naturalną, i mnożąc wszystkie części nierówności przez s , otrzymujemy w jednej chwili następujący

Wniosek. Przy wszelkich naturalnych n i s zachodzi dla $-s \leq x \leq s$ nierówność

$$0 \leq |x| - x \frac{(s+x)^n - s^n}{(s+x)^n + s^n} < \frac{2s}{\sqrt[n]{n}} \quad (5)$$

Niech teraz (a, b) oznacza dany (skończony) przedział.

Wyznamy liczbę naturalną s tak, iżby było

$$s \geq |a| \quad \text{oraz} \quad s \geq |b|;$$

dla $a \leq x \leq b$ będziemy mieli tembardziej $-s \leq x \leq s$, zatem i nierówność (5) skąd w jednej chwili:

$$|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{(s+x)^n - s^n}{(s+x)^n + s^n}.$$

Wzór ten przedstawia funkcję $|x|$ w przedziale (a, b) jako granicę jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji wymiernych.

U w a g a. Z nierówności (1) moglibyśmy też z łatwością wywnioskować, że przy wszelkiem rzeczywistym x mamy

$$|x| = \lim_{k \rightarrow \infty} x \frac{(k+x)^{k^3} - k^{k^3}}{(k+x)^{k^3} + k^{k^3}},$$

oraz że ciąg, stojący w wypisanym wzorze pod znakiem granicy, jest zbieżny jednostajnie w każdym skończonym przedziale. (Nie jest on jednak zbieżny jednostajnie w całym zbiorze liczb rzeczywistych).

Zastosujmy teraz wzór (5) do rozwinięcia funkcji wymiernej na szereg wielomianów.

Niech $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ oznacza daną funkcję wymierną, (a, b) — dany (skończony) przedział (Funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są więc dane wielomiany całkowite względem x). Skoro funkcja $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ma być określona w całym przedziale (a, b) , to musimy założyć, że jej mianownik, czyli wielomian $\psi(x)$, nie staje się w tym przedziale nigdzie zerem. Znak wielomianu $\psi(x)$ musi więc być w przedziale (a, b) stały (gdyż inaczej funkcja ciągła $\psi(x)$, zmieniając znak w przedziale (a, b) , przechodziły w tym przedziale conajmniej raz przez zero), zaś moduł $|\psi(x)|$ musi być w przedziale (a, b) stale niemniejszy od pewnej liczby dodatniej δ . (Gdyż funkcja $|\psi(x)|$, jako ciągła, w myśl tw. 70. dosięga w przedziale (a, b) swego kresu dolnego, który nie może być zerem, skoro $\psi(x) \neq 0$ dla $a \leq x \leq b$).

Bez ujmy dla ogólności naszych rozważań możemy zakładać, że wielomian $\psi(x)$ jest w przedziale (a, b) stale dodatni (gdyż w przeciwnym razie wystarczyłoby pomnożyć licznik i mianownik naszej funkcji wymiernej przez -1)

Zakładamy więc że mamy stale

$$\psi(x) \geq \delta, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b, \quad (6)$$

gdzie δ jest liczbą dodatnią, niezależną od x

W przedziale skończonym wielomian całkowity, jako funkcja ciągła, jest ograniczony (§ 56): istnieje więc liczba dodatnia d , niezależna od x , taka iż stale

$$\psi(x) \leq 2d + \delta, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b; \quad (7)$$

podobnie istnieje liczba $M > 0$, niezależna od x , taka iż

$$|\varphi(x)| \leq M, \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b. \quad (8)$$

Wobec (6) i (7) mamy w całym przedziale (a, b) :

$$-d \leq d + \delta - \psi(x) \leq d,$$

skąd

$$\left| \frac{d + \delta - \psi(x)}{d + \delta} \right| \leq \frac{d}{d + \delta},$$

oraz, przy naturalnym m :

$$\left| \frac{d + \delta - \psi(x)}{d + \delta} \right|^m \leq \left(\frac{d}{d + \delta} \right)^m = \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{d}\right)^m} \leq \frac{1}{1 + m \frac{\delta}{d}} < \frac{d}{m\delta}, \quad (9)$$

dla $a \leq x \leq b$.

Dalej, z łatwością sprawdzamy tożsamość:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{d + \delta} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{d + \delta - \psi(x)}{d + \delta} \right)^k + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \left(\frac{d + \delta - \psi(x)}{d + \delta} \right)^m \quad (10)$$

(gdzie $()^0$ należy zastąpić przez 1), która, z uwagi, że w myśl (6), (8) i (9)

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \left(\frac{d + \delta - \psi(x)}{d + \delta} \right)^m \right| < \frac{Md}{m\delta^2}, \quad \text{dla } a \leq x \leq b,$$

daje w jednej chwili:

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \left(\frac{d + \delta - \psi(x)}{d + \delta} \right)^k \right| < \frac{Md}{m\delta^2}, \quad \text{dla } a \leq x \leq b, \quad (11)$$

przy wszelkiem naturalnym m . Wynika stąd natychmiast rozwinięcie naszej funkcji w przedziale (a, b) na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{d + \delta} \left(\frac{d + \delta - \psi(x)}{d + \delta} \right)^k.$$

Udowodniliśmy więc, że każda funkcja wymierna, której mianownik wewnątrz danego skończonego przedziału ani też dla jego granic nie staje się zerem, daje się w tym przedziale rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych.

Przyjmijmy, w szczególności

$$a = -s, \quad b = s,$$

$$\varphi(x) = x[(s+x)^n - s^n], \quad \psi(x) = (s+x)^n + s^n,$$

gdzie s i n są dwie dane liczby naturalne

Z łatwością sprawdzamy, że można tu przyjąć:

$$\delta = s^n, \quad d = 2^{n-1}s^n, \quad M = (2^n - 1)s^{n+1},$$

wobec (5) i (11) mamy więc

$$\left| x - \sum_{k=0}^{m-1} x \frac{[(s+x)^n - s^n]}{(2^{n-1} + 1)s^n} \left(\frac{2^{n-1}s^n - (s+x)^n}{(2^{n-1} + 1)s^n} \right)^k \right| < \frac{2s}{\sqrt[n]{n}} + \frac{2^{n-1}(2^n - 1)s}{m}$$

— przy wszelkich naturalnych s, n, m , dla $-s \leq x \leq s$.

Oznaczając przez $W(x)$ wielomian całkowity (o współczynnikach wymiernych)

$$W(x) = \sum_{k=0}^{m-1} x \frac{[(s+x)^n - s^n]}{(2^{n-1} + 1)s^n} \left(\frac{2^{n-1}s^n - (s+x)^n}{(2^{n-1} + 1)s^n} \right)^k \quad (12)$$

będziemy więc mieli przy wszelkich naturalnych s, n i m :

$$\left| x - W(x) \right| < \frac{2s}{\sqrt[n]{n}} + \frac{2^{n-1}(2^n - 1)s}{m}, \quad \text{dla } -s \leq x \leq s. \quad (13)$$

§ 119. Wprowadzimy teraz funkcję pomocniczą

$$\varphi(x) = \left| \frac{x+1}{2} \right| + \left| \frac{x-1}{2} \right| - |x|. \quad (14)$$

Dla $x \leq -1$ mamy oczywiście, wobec (14):

$$\varphi(x) = -\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} + x = 0;$$

dla $-1 \leq x \leq 0$, znajdujemy:

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} + x = 1+x;$$

dla $0 \leq x \leq 1$ będzie

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} - x = 1-x;$$

wreszcie, dla $x \geq 1$:

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} - x = 0.$$

Mamy więc:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 1, \\ 1+x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Niech teraz $f(x)$ oznacza dowolną daną funkcję, ciągłą dla $-1 \leq x \leq 1$.

Położmy przy wszelkiem danem naturalnem q , dla $-1 \leq x \leq 1$:

$$f_q(x) = \sum_{p=-q}^q f\left(\frac{p}{q}\right) \varphi(qx - p) \quad (16)$$

i oznaczmy przez skrócenie

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \varphi(qx - p) = u_p. \quad (17)$$

W razie $|qx - p| \geq 1$ będzie, w myśl wzorów (15), czynnik $\varphi(qx - p) = 0$: wystarczy więc we wzorze (16) zatrzymać tylko te składniki u_p , dla których p , będąc bezwzględnie $\leq q$, spełnia nierówności: $-1 < qx - p < 0$, lub nierówności: $0 \leq qx - p < 1$. W pierwszym przypadku otrzymujemy dla p nierówności

$$qx < p < qx + 1, \text{ dające } p = \text{E}qx + 1,$$

w drugim zaś przypadku mamy

$$qx - 1 < p \leq qx, \text{ skąd } p = \text{E}qx.$$

Różniami od zera wyrazami u_p ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) są więc conajwyżej wyrazy $u_{\text{E}qx}$ oraz $u_{\text{E}qx+1}$: pierwszy z nich jest zawsze składnikiem sumy (16), gdyż, wobec $-1 \leq x \leq 1$, mamy (przy naturalnem q): $-q \leq qx \leq q$, skąd też $-q \leq \text{E}qx \leq q$; co się zaś tyczy wyrazu $u_{\text{E}qx+1}$, to jest on składnikiem sumy (16) wtedy i tylko wtedy, jeżeli $-q \leq \text{E}qx + 1 \leq q$. Lewa część ostatniej nierówności jest zawsze prawdziwa (gdyż przy naturalnem q , dla $|x| \leq 1$ mamy $\text{E}qx + 1 > \text{E}qx \geq -q$), prawa zaś nie jest prawdziwą tylko wtedy, jeżeli $\text{E}qx > q - 1$, t. j. jeżeli $qx \geq \text{E}qx \geq q$, co daje $x \geq 1$, czyli (wobec $x \leq 1$): $x = 1$. Wyraz $u_{\text{E}qx+1}$ jest więc składnikiem sumy (16) zawsze, z wyjątkiem przypadku $x = 1$. Mamy więc

$$\left. \begin{aligned} f_q(x) &= u_{\text{E}qx} + u_{\text{E}qx+1}, \text{ dla } -1 \leq x < 1, \\ f_q(x) &= u_{\text{E}qx}, \text{ dla } x = 1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

W myśl (17) oraz wobec (15), znajdujemy, z uwagi że

$$0 \leq qx - \text{E}qx < 1, \text{ oraz } -1 \leq qx - \text{E}qx - 1 < 0:$$

$$u_{\text{E}qx} = f\left(\frac{\text{E}qx}{q}\right) \varphi(qx - \text{E}qx) = f\left(\frac{\text{E}qx}{q}\right) (1 - qx + \text{E}qx),$$

oraz

$$u_{\text{E}qx+1} = f\left(\frac{\text{E}qx+1}{q}\right) \varphi(qx - \text{E}qx - 1) = f\left(\frac{\text{E}qx+1}{q}\right) (qx - \text{E}qx);$$

jest więc w myśl (18):

$$\left. \begin{aligned} f_q(x) &= f\left(\frac{\text{E}qx}{q}\right) + \left[f\left(\frac{\text{E}qx+1}{q}\right) - f\left(\frac{\text{E}qx}{q}\right) \right] (qx - \text{E}qx) \\ &\text{dla } -1 \leq x < 1, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

zaś dla $x = 1$, w myśl (18), (17) i (15):

$$f_q(1) = u_q = f(1) \varphi(0) = f(1). \quad (20)$$

Mamy oczywiście przy wszelkiem naturalnem q oraz rzeczywistym x :

$$\left| \frac{\text{E}qx}{q} - x \right| < \frac{1}{q}, \quad \frac{\text{E}qx+1}{q} - \frac{\text{E}qx}{q} = \frac{1}{q},$$

zaś, dla $-1 \leq x < 1$:

$$-1 \leq \frac{\text{E}qx}{q} < 1, \quad -1 < \frac{\text{E}qx+1}{q} \leq 1$$

(gdyż, wobec $x < 1$, mamy, przy naturalnem q , $qx < q$, skąd $qx + 1 < q + 1$, co daje: $\text{E}(qx + 1) \leq q$).

Wobec tych nierówności, oraz w myśl założenia, że funkcja $f(x)$ jest ciągła dla $-1 \leq x \leq 1$, wnosimy o istnieniu dla danego dodatniego ε liczby q_0 takiej, iż dla $q > q_0$ stale

$$\left| f\left(\frac{\text{E}qx}{q}\right) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ oraz } \left| f\left(\frac{\text{E}qx+1}{q}\right) - f\left(\frac{\text{E}qx}{q}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

przy wszelkiem x , spełniającem nierówność $-1 \leq x \leq 1$; stąd, zważywszy jeszcze, że $|qx - \text{E}qx| < 1$, otrzymujemy w jednej chwili, wobec (19), dla $-1 \leq x < 1$:

$$|f_q(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ dla } q > q_0, \quad (21)$$

co, w myśl (20), pozostaje prawdziwem i dla $x = 1$.

Nierówność (21) zachodzi więc przy wszelkiem x , spełniającem nierówności $-1 \leq x \leq 1$. Dowodzi to, że ciąg $f_q(x)$ w przedziale $(-1, +1)$ jednostajnie zmierza do $f(x)$.

Przyjmijmy teraz, przy danem naturalnem q :

$$s = 2q, \quad n = 16s^2 q^4, \quad m = 2^n (2^n - 1) s q^2 \quad (22)$$

i wyznaczmy wielomian $W(x)$ ze wzoru (12).

Dla $|x| \leq 1$ oraz $p = 0 \pm 1, \pm 2, \dots \pm q$ mamy oczywiście, wobec $s = 2q$:

$$\left| \frac{qx - p + 1}{2} \right| < s, \quad \left| \frac{qx - p - 1}{2} \right| < s, \quad |qx - p| \leq s,$$

zatem, w myśl (13) i (22):

$$\left| \frac{qx - p \pm 1}{2} - W\left(\frac{qx - p \pm 1}{2}\right) \right| < \frac{1}{q^2},$$

oraz

$$|qx - p| - W(qx - p) < \frac{1}{q^2},$$

skąd, oznaczając przez $P_{p,q}(x)$ wielomian całkowity

$$P_{p,q}(x) = W\left(\frac{qx - p + 1}{2}\right) + W\left(\frac{qx - p - 1}{2}\right) - W(qx - p),$$

możemy, dla $-1 \leq x \leq 1$, napisać, wobec (14):

$$|\varphi(qx - p) - P_{p,q}(x)| < \frac{3}{q^2}, \quad (23)$$

przy wszelkiem naturalnem q , oraz $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm q$.

Funkcja $f(x)$, jako ciągła w przedziale $(-1, +1)$, jest w tym przedziale ograniczona (§ 56): oznaczmy przez A kres górny modułów funkcji $f(x)$ w przedziale $(-1, +1)$ — będzie to więc pewna liczba nieujemna (skończona), przyczem stale będziemy mieli:

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq A, \quad \text{dla } \begin{matrix} p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm q, \\ q = 1, 2, 3, \dots, \end{matrix}$$

skąd w jednej chwili, wobec (16) i (23):

$$\left| f_q(x) - \sum_{p=-q}^q f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x) \right| < \frac{3A(2q+1)}{q^2}, \quad \text{dla } -1 \leq x \leq 1. \quad (24)$$

Oznaczmy przez $\Pi_q(x)$ wielomian całkowity

$$\Pi_q(x) = \sum_{p=-q}^q f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x). \quad (25)$$

Dla danego dodatniego ε istnieje oczywiście liczba q_1 , taka iż dla $q > q_1$, stale

$$\frac{3A(2q+1)}{q^2} < \varepsilon$$

skąd, w myśl (24) i (25):

$$|f_q(x) - \Pi_q(x)| < \varepsilon, \quad \text{dla } q > q_1, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (26)$$

Oznaczając przez μ liczbę większą jednocześnie od q_0 i q_1 , będziemy, wobec (21) i (26), mieli:

$$|f(x) - \bar{\Pi}_q(x)| < 2\varepsilon, \quad \text{dla } q > \mu, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (27)$$

co dowodzi, że ciąg wielomianów $\Pi_q(x)$ ($q = 1, 2, 3, \dots$) w przedziale $(-1, +1)$ jednostajnie zmierza do granicy $f(x)$.

Wnosimy stąd natychmiast o rozwinięciu funkcji $f(x)$ w przedziale $(-1, +1)$ na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych:

$$f(x) = \Pi_1(x) + (\Pi_2(x) - \Pi_1(x)) + (\Pi_3(x) - \Pi_2(x)) + \dots$$

Dowiedliśmy więc, że każde funkcja $f(x)$, ciągła w przedziale $(-1, +1)$, daje się w tym przedziale rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych.

Wobec $f(x) = \lim_{q \rightarrow \infty} \Pi_q(x)$ oraz wobec (25), znajdujemy wzór:

$$f(x) = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{p=-q}^q f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x), \quad \text{dla } -1 \leq x \leq 1, \quad (28)$$

który nosi nazwę *ogólnego wzoru interpolacyjnego Borela*¹⁾.

Wielomiany $P_{p,q}(x)$ mogą być wyznaczone raz na zawsze (podane wyżej wzory pozwoliłyby nam nawet wyraźnie wypisać wielomiany $P_{p,q}(x)$), a wzór Borela określa — teoretycznie przynajmniej — wartości każdej danej funkcji ciągłej w przedziale $(-1, +1)$, jeżeli dane są jej wartości dla argumentów wymiernych w tym przedziale. Ze wzoru (28) wynika więc bezpośrednio, że funkcja ciągła jest określona w zupełności przez swe wartości dla argumentów wymiernych.

Niech teraz $F(x)$ oznacza dowolną daną funkcję, ciągłą w przedziale skończonym (a, b) . Połóżmy

$$g(x) = \frac{(b-a)x + a + b}{2} \quad (29)$$

— będzie to oczywiście funkcja ciągła, przytem będzie

$$a \leq g(x) \leq b, \quad \text{dla } 1 \leq x \leq 1.$$

¹⁾ E. Borel: Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes. Paris 1905, p. 80.

Położmy

$$f(x) = F(g(x)), \text{ dla } -1 \leq x \leq 1; \quad (30)$$

funkcja $f(x)$ będzie więc ciągła w przedziale $(-1, +1)$ (jako funkcja ciągła funkcji ciągłej) i przeto będziemy dla niej mieli nierówność (27).

W myśl (29) mamy

$$g\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right) = x$$

skąd, wobec (30):

$$f\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right) = F(x) \quad (31)$$

dla

$$-1 \leq \frac{2x - a - b}{b - a} \leq 1, \quad (32)$$

czyli, co jak łatwo widzieć, wychodzi na jedno, dla

$$a \leq x \leq b. \quad (33)$$

Wobec równoważności nierówności (33) i (32), oraz w myśl (27) i (31), mamy:

$$\left| F(x) - \Pi_q\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right) \right| < 2\varepsilon, \text{ dla } q > \mu, \quad a \leq x \leq b,$$

co, z uwagi że $\Pi_q(x) = \Pi_q\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right)$ jest wielomianem całkowitym względem x dowodzi, że funkcja $F(x)$ jest w przedziale (a, b) granicą jednostajnie zbieżnego ciągu (a więc i sumą jednostajnie zbieżnego szeregu) wielomianów całkowitych. Udowodniłmy więc

Twierdzenie 151 (Weierstrassa): *Każda funkcja $F(x)$, ciągła w przedziale skończonym (a, b) , daje się w tym przedziale rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych.*

Z drugiej strony, każdy jednostajnie zbieżny w przedziale (a, b) szereg wielomianów całkowitych przedstawia, w myśl tw. 147, funkcję ciągłą w tym przedziale. Zatem:

Rozwijanie się w danym przedziale (skończonym) na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych jest cechą charakterystyczną funkcji ciągłych w tym przedziale.

W związku z dowodem tw. 151 zwrócimy jeszcze uwagę na okoliczność następującą. Z uwagi, że wielomiany $P_{n,q}(x)$ są wyzna-

zione w zupełności przez wskaźniki p i q wynika natychmiast, w myśl wzorów (29), (30) i (25), że każdemu przedziałowi skończonemu (a, b) , każdej funkcji $F(x)$, ciągłej w tym przedziale, oraz każdej liczbie naturalnej q odpowiada oznaczony w zupełności [przez a, b, q oraz funkcję $F(x)$] wielomian $Q_q(x) = \Pi_q\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right)$.

Ciąg nieskończony $Q_q(x)$ ($q = 1, 2, 3, \dots$) jest więc wyznaczony w zupełności przez liczby a i b oraz funkcję $F(x)$. Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 151^a. *Istnieje prawo, według którego każdemu przedziałowi skończonemu (a, b) oraz każdej funkcji $F(x)$, ciągłej w tym przedziale, odpowiada oznaczony w zupełności ciąg wielomianów całkowitych, zbieżający w przedziale (a, b) jednostajnie do $F(x)$.*

§ 120. Opierając się na twierdzeniu Weierstrassa'go udowodnimy obecnie ogólny wzór interpolacyjny S. Bernstein'a (podany w r. 1912), godny uwagi ze względu na prostotę swej formy.

Twierdzenie 152 (Wzór Bernstein'a): *Dla każdej funkcji $f(x)$ ciągłej w przedziale $(0, 1)$ zachodzi wzór*

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}, \text{ dla } 0 \leq x \leq 1. \quad (34)$$

Udowodnimy przedewszystkiem prawdziwość wzoru Bernsteina dla wielomianów całkowitych. Zauważymy w tym celu najsmprzód, że prawdziwość wzoru (34) dla funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ pociąga za sobą natychmiast jego prawdziwość dla sumy $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$, zaś prawdziwość wzoru (34) dla funkcji $f(x)$ pociąga za sobą jego prawdziwość dla funkcji $af(x)$, gdzie a oznacza dowolną liczbę stałą. Nadto, wzór (34) jest prawdziwy oczywiście dla funkcji $f(x) = 1$ ($0 \leq x \leq 1$), gdyż, w myśl wzoru na dwumian Newtona, mamy:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = 1, \text{ dla } 0 \leq x \leq 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Aby więc udowodnić, że wzór (34) jest prawdziwy dla wielomianów całkowitych, wystarczy okazać, że jest on prawdziwy dla funkcji $f(x) = x^p$ ($p = 1, 2, 3, \dots$). W tym celu udowodnimy przedewszystkiem następujący

Lemmat. Dla naturalnych m oraz $p < m$ mamy przy wszelk-
kiem rzeczywistym t tożsamość

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^m k^p \binom{m}{k} t^k &= m(m-1) \dots (m-p+1) t^p (t+1)^{m-p} + \\ &+ m(m-1) \dots (m-p+2) a_p' t^{p-1} (t+1)^{m-p+1} + \dots + \\ &+ m a_p^{(p-1)} t (t+1)^{m-1}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

gdzie współczynniki $a_p^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, p-1$) zależą jedynie od p i k .

Dowód. Mamy, w myśl dwumianu Newtona:

$$(t+1)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} t^k;$$

stąd, przy wszelkimi rzeczywistym h :

$$(t+h+1)^m - (t+1)^m = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} [(t+h)^k - t^k]. \quad (36)$$

Lecz mamy tożsamość

$$(t+h)^k - t^k = h[(t+h)^{k-1} + (t+h)^{k-2}t + \dots + (t+h)t^{k-2} + t^{k-1}], \quad (37)$$

skąd, wobec (36), po podzieleniu przez h , otrzymujemy tożsamość:

$$\begin{aligned} (t+h+1)^{m-1} + (t+h+1)^{m-2}(t+1) + \dots + (t+1)^{m-1} &= \\ = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} [(t+h)^{k-1} + (t+h)^{k-2}t + \dots + t^{k-1}], \end{aligned}$$

która, dla $h = 0$, daje w jednej chwili:

$$m(t+1)^{m-1} = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} k t^{k-1},$$

skąd

$$\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} k t^k = m(t+1)^{m-1} t,$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (35) dla $p = 1$.

Założmy teraz, że wzór (35) jest prawdziwy dla liczby naturalnej p i połączmy (przy danym naturalnym m):

$$\sum_{k=1}^m k^p \binom{m}{k} t^k = S_p(t). \quad (38)$$

Stąd, w myśl (37):

$$S_p(t+h) - S_p(t) = h \sum_{k=1}^m k^p \binom{m}{k} [(t+h)^{k-1} + (t+h)^{k-2}t + \dots + t^{k-1}]. \quad (39)$$

Mamy, dalej, tożsamość:

$$\begin{aligned} (t+h)^k (t+h+1)^{m-k} - t^k (t+1)^{m-k} &= \\ = t^k [(t+h+1)^{m-k} - (t+1)^{m-k}] + [(t+h)^k - t^k] (t+h+1)^{m-k} &= \\ = h \{ t^k [(t+h+1)^{m-k-1} + (t+h+1)^{m-k-2}t + \dots + (t+1)^{m-k-1}] + \\ + [(t+h)^{k-1} + (t+h)^{k-2}t + \dots + t^{k-1}] (t+h+1)^{m-k} \}. \end{aligned} \quad (40)$$

Wzór (35) jest, jak zakładamy, prawdziwy dla liczby p :
w myśl (39) z jednej strony, zaś wobec (38), (35) i (40) z drugiej,
znajdujemy dla różnicy $S_p(t+h) - S_p(t)$ dwa wyrażenia, które po
podzieleniu przez h , dają dla $h = 0$, jak łatwo widzieć:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k^{p+1} \binom{m}{k} t^{k-1} &= \\ = m(m-1) \dots (m-p+1) [(m-p)t^p (t+1)^{m-p-1} + p t^{p-1} (t+1)^{m-p}] + \\ + m(m-1) \dots (m-p+2) a_p' [(m-p+1)t^{p-1} (t+1)^{m-p} + \\ + (p-1)t^{p-2} (t+1)^{m-p+1}] + \dots + m a_p^{(p-1)} [(m-1)t(t+1)^{m-2} + (t+1)^{m-1}], \end{aligned}$$

skąd, po pomnożeniu przez t oraz łatwej redukcji:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k^{p+1} \binom{m}{k} t^k &= m(m-1) \dots (m-p)t^{p+1} (t+1)^{m-p-1} + \\ + m(m-1) \dots (m-p+1) [a_p' + p] t^p (t+1)^{m-p} + \\ + m(m-1) \dots (m-p+2) [a_p'' + (p-1)a_p'] t^{p-1} (t+1)^{m-p+1} + \dots + \\ + m(m-1) [a_p^{(p-1)} + 2a_p^{(p-2)}] t^2 (t+1)^{m-2} + m a_p^{(p-1)} t (t+1)^{m-1}, \end{aligned}$$

co dowodzi prawdziwości wzoru (35) dla liczby $p+1$. Stąd, przez
indukcję, wynika prawdziwość wzoru (35) przy wszelkimi natu-
ralnym $p < m$. Udowodniliśmy więc nasz lemmat.

Kładąc we wzorze (35) $t = \frac{x}{1-x}$, otrzymujemy dla $x \neq 1$,
przy naturalnym p , oraz $m > p$, w jednej chwili, po pomnożeniu
przez $(1-x)^m$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k^p \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} &= \\ = m(m-1) \dots (m-p+1) x^p + m(m-1) \dots (m-p+2) a_p' x^{p-1} + \dots + m a_p^{(p-1)} x. \end{aligned}$$

Stąd, w jednej chwili:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^p} \sum_{k=0}^m k^p \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = x^p,$$

dla $x \neq 1$, co jest oczywiście prawdziwe i dla $x = 1$, jeżeli przez 0^o rozumieć będziemy liczbę 1. Dowodzi to, że wzór (34) jest prawdziwy dla funkcji $f(x) = x^p$ ($p = 1, 2, 3, \dots$).

Stąd, jak wiemy, wynika prawdziwość wzoru (34) dla wielomianów całkowitych.

Niech teraz $f(x)$ oznacza daną funkcję ciągłą w przedziale (0, 1). Niech, dalej n oznacza dowolną daną liczbę naturalną. W myśl tw. Weierstrassa istnieje wielomian całkowity $W_n(x)$, taki iż

$$|f(x) - W_n(x)| < \frac{1}{n}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1. \quad (41)$$

Wobec (41) znajdujemy w jednej chwili, przy naturalnem m :

$$\left| \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} - \sum_{k=0}^m W_n\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \right| < \left\{ \begin{aligned} &< \frac{1}{n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = \frac{1}{n}. \end{aligned} \right. \quad (42)$$

Ponieważ, jak dowiedliśmy, wzór (34) jest prawdziwy dla wielomianów, więc mamy:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m W_n\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = W_n(x), \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1,$$

skąd wnosimy, że przy danem x , należącym do przedziału (0, 1), dla $m > \mu = \mu(x, n)$ będzie

$$\left| \sum_{k=0}^m W_n\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} - W_n(x) \right| < \frac{1}{n}. \quad (43)$$

Nierówności (42), (43) i (41) dają w jednej chwili:

$$\left| \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} - f(x) \right| < \frac{3}{n}, \quad \text{dla } m > \mu = \mu(x, n),$$

co dowodzi, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = f(x).$$

Udowodniliśmy więc wzór (34) dla każdej funkcji ciągłej w przedziale (0, 1). Dowiedliśmy zatem tw. 152.

Zauważymy, że uzupełniając w odpowiednich miejscach nasz dowód, moglibyśmy z łatwością wywnioskować, że (dla każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (0, 1), wyrażenie pod znakiem granicy we wzorze (34) zmierza do $f(x)$ jednostajnie w całym przedziale (0, 1), czego bliższe zbadanie pozostawiamy czytelnikowi.

§ 121. Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem z tw. 152 pewnych wniosków ogólniejszej natury.

W tym celu zauważymy przedewszystkiem, że z tw. 152 wynika natychmiast dla każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (0, 1) (z uwagi że wówczas funkcja $|f(x)|$ również jest ciągłą w uważanym przedziale) wzór

$$|f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \left| f\left(\frac{k}{m}\right) \right| \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1. \quad (44)$$

Jeżeli więc funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (0, 1), to mamy jednocześnie wzory (34) i (44), przyczem, w myśl uczynionej w końcu § 120 uwagi, ciągi, figurujące pod znakiem granicy we wzorach (34) i (44), są zbieżne jednostajnie.

Wynika stąd natychmiast, że dla każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (0, 1), każdej liczby dodatniej ε , oraz każdej liczby naturalnej n istnieje wielomian

$$P(x) = A_0(1-x)^n + A_1x(1-x)^{n-1} + A_2x^2(1-x)^{n-2} + \dots + A_nx^n,$$

taki iż $m > n$, oraz iż kładąc

$$Q(x) = |A_0|(1-x)^n + |A_1|x(1-x)^{n-1} + |A_2|x^2(1-x)^{n-2} + \dots + |A_n|x^n,$$

bedziemy mieli jednocześnie

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \text{oraz } ||f(x)| - Q(x)| < \varepsilon, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1^1).$$

Zastosujmy teraz otrzymany wniosek do funkcji $f_0(x) = f(x)$, dla $\varepsilon = 1$, $n = 1$, i oznaczmy odpowiedni wielomian $P(x)$ przez

$$P_1(x) = A_{0,m_1}(1-x)^{m_1} + A_{1,m_1}(x)(1-x)^{m_1-1} + \dots + A_{m_1,m_1}x^{m_1}.$$

¹⁾ Jasne jest, że każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (0, 1), każdej liczbie naturalnej n oraz każdej liczbie dodatniej ε możemy podporządkować oznaczony w zupełności wielomian $P(x)$, spełniający uważane warunki (np. pierwszy, spełniający żądane warunki wyraz ciągu, stojącego pod znakiem granicy we wzorze (34)).

Położmy, dalej

$$f(x) - P_1(x) = f_1(x) \quad (45)$$

— będzie to funkcja ciągła w przedziale $(0, 1)$. Wyznamy dalej odpowiedni wielomian $P(x)$ dla funkcji $f_1(x)$, przy $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $n = m_1$, i oznaczymy go przez

$$P_2(x) = A_{0,m_2}(1-x)^{m_2} + A_{1,m_2}x(1-x)^{m_2-1} + \dots + A_{m_2,m_2}x^{m_2}$$

oraz położmy

$$f_1(x) - P_2(x) = f_2(x).$$

Ogólnie, wyznaczmy odpowiedni wielomian $P(x)$ dla funkcji $f_{n-1}(x)$ przy $\varepsilon = \frac{1}{2^{k-1}}$, $n = m_{k-1}$, i oznaczymy go przez

$$P_k(x) = A_{0,m_k}(1-x)^{m_k} + A_{1,m_k}x(1-x)^{m_k-1} + \dots + A_{m_k,m_k}x^{m_k}$$

oraz położmy

$$f_{k-1}(x) - P_k(x) = f_k(x), \quad (46)$$

kolejno dla $k = 1, 2, 3, \dots$

Położmy jeszcze, dla $k = 1, 2, 3, \dots$

$$Q_k(x) = |A_{0,m_k}|(1-x)^{m_k} + |A_{1,m_k}|x(1-x)^{m_k-1} + \dots + |A_{m_k,m_k}|x^{m_k}.$$

Z definicji wielomianów $P_k(x)$ i $Q_k(x)$ oraz z własności wielomianów $P(x)$ i $Q(x)$ wynika natychmiast, że będziemy mieli

$$|f_{k-1}(x) - P_k(x)| < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (47)$$

oraz

$$|f_{k-1}(x)| - Q_k(x) < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (48)$$

Wobec (45) i (46) mamy:

$$f(x) = P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_k(x) + f_k(x), \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

zaś, w myśl (47), mamy, wobec (46):

$$|f_k(x)| < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (49)$$

wynika stąd natychmiast, że funkcja $f(x)$ rozwija się w przedziale $(0, 1)$ na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów

$$f(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + \dots \quad (50)$$

Wobec (48) i (49) znajdujemy:

$$Q_k(x) < \frac{1}{2^{k-1}} + |f_{k-1}(x)| < \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} = \frac{1}{2^{k-2}}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \quad k = 2, 3, \dots,$$

przeto szereg

$$Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x) + \dots$$

jest zbieżny (jednostajnie) w całym przedziale $(0, 1)$.

Wobec definicji wielomianów $Q_k(x)$ wynika stąd natychmiast, że szereg, który otrzymamy z szeregu (50), zastępując każdy jego składnik $P_k(x)$ przez odpowiednie wyrażenie, złożone z $m_k + 1$ składników, czyli szereg

$$\left. \begin{aligned} & A_{0,m_1}(1-x)^{m_1} + A_{1,m_1}x(1-x)^{m_1-1} + \dots + A_{m_1,m_1}x^{m_1} + \\ & + A_{0,m_2}(1-x)^{m_2} + A_{1,m_2}x(1-x)^{m_2-1} + \dots + A_{m_2,m_2}x^{m_2} + \\ & + A_{0,m_3}(1-x)^{m_3} + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

jest zbieżny bezwzględnie. Ponieważ zaś, łącząc składniki szeregu (51) w odpowiednie grupy, otrzymujemy z niego szereg (50), którego sumą w przedziale $(0, 1)$ jest funkcja $f(x)$, więc wnosimy, że funkcja $f(x)$ rozwija się w całym przedziale $(0, 1)$ na szereg bezwzględnie zbieżny (51).

Położmy, dla całkowitych nieujemnych p i q :

$a_{p,q} = A_{p,p+q}$, jeżeli $p + q = m_k$ (przy pewnym $k = 1, 2, 3, \dots$),
zaś

$$a_{p,q} = 0, \quad \text{jeżeli } p + q \neq m_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

z uwagi, że ciąg m_k ($k = 1, 2, \dots$) jest rosnący, wnosimy stąd z łatwością, że szereg bezwzględnie zbieżny (51) możemy napisać w postaci szeregu podwójnego

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q} x^p (1-x)^q,$$

i przeto mamy wzór:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q} x^p (1-x)^q, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \quad (52)$$

przyczem szereg (52) będzie zbieżny bezwzględnie. Dla każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale $(0, 1)$, zachodzi więc rozwinięcie na szereg bezwzględnie zbieżny (52).

Niech teraz $\varphi(x)$ oznacza funkcję ciągłą w przedziale (a, b) . Połóżmy

$$\varphi(a + (b - a)x) = f(x), \text{ dla } 0 \leq x \leq 1: \quad (53)$$

— będzie to funkcja ciągła w przedziale $(0, 1)$ i przeto będziemy dla niej mieli rozwinięcie na szereg bezwzględnie zbieżny (52).

Zastępując we wzorze (52) x przez $\frac{x-a}{b-a}$ i zważywszy, że nierówność $0 \leq \frac{x-a}{b-a} \leq 1$ jest równoważna nierówności $a \leq x \leq b$, oraz, że wobec (53), mamy $f\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = \varphi(x)$, otrzymamy w jednej chwili:

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q \alpha_{p,q}}{(b-a)^{p+q}} (x-a)^p (x-b)^q, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

czyli, kładąc

$$\frac{(-1)^q \alpha_{p,q}}{(b-a)^{p+q}} = c_{p,q},$$

będziemy mieli:

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{p,q} (x-a)^p (x-b)^q, \text{ dla } a \leq x \leq b, \quad (54)$$

przyczem szereg (54) będzie, jak łatwo widzieć, zbieżny bezwzględnie.

Rozwinięcia typu (54) na szereg bezwzględnie zbieżny w przedziale (a, b) nazywamy według Bernsteina szeregami *normalnymi* w przedziale (a, b) ¹⁾. Mamy więc

Twierdzenie 153. *Każda funkcja ciągła w przedziale (a, b) rozwija się w tym przedziale na szereg normalny.*

§ 122. Wyprowadzimy teraz jeszcze kilka wniosków z twierdzenia Weierstrassa. Udowodnimy przedewszystkiem

Twierdzenie 154. *Dla każdej danej funkcji $F(x)$, ciągłej w przedziale skończonym (a, b) oraz każdej danej liczby dodatniej ε istnieje wielomian całkowity $P(x)$ o współczynnikach wymiernych, taki iż*

$$|F(x) - P(x)| < \varepsilon, \text{ dla } a \leq x \leq b. \quad (55)$$

¹⁾ Zob. np. R. d'Adhémar: *Leçons sur les principes d'Analyse*, T. II. Paris 1913. Note de S. Bernstein: „Sur les séries normales“, p. 259.

Dowód Niech $F(x)$ oznacza daną funkcję ciągłą w przedziale skończonym (a, b) , zaś ε — daną liczbę dodatnią. Z twierdzenia Weierstrassa (tw. 151) wynika natychmiast, że istnieje wielomian całkowity o współczynnikach rzeczywistych

$$Q(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m \quad (56)$$

taki iż

$$|F(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dla } a \leq x \leq b \quad (57)$$

Obierzmy liczbę naturalną s , taką iż

$$s \geq |a| \text{ oraz } s \geq |b|, \quad (58)$$

raz wyznaczmy dla każdej z liczb rzeczywistych $A_0, A_1, \dots, A_m$ odpowiednie przybliżenie wymierne α_k , takie, iż

$$|A_k - \alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2(m+1)s^m}, \quad (k=0, 1, \dots, m), \quad (59)$$

połóżmy

$$P(x) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \dots + \alpha_m \quad (60)$$

— będzie to wielomian całkowity o współczynnikach wymiernych. Wobec (56) (60) będzie

$$Q(x) - P(x) = (A_0 - \alpha_0)x^m + (A_1 - \alpha_1)x^{m-1} + \dots + (A_m - \alpha_m),$$

skąd, w myśl (59), oraz z uwagi, że dla $a \leq x \leq b$ mamy, wobec (58), $|x| \leq s$ oraz $|x^k| \leq s^m$ ($k=0, 1, \dots, m$), znajdujemy w jednej chwili:

$$|Q(x) - P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

co, wobec (57), daje nierówność (55) co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Wielomianów $P(x)$ o współczynnikach wymiernych, spełniających nierówność (55) jest oczywiście nieskończenie wiele, gdyż liczby wymierne α_k ($k=0, 1, \dots, m$) możemy obierać całkiem dowolnie, z tym jedynie warunkiem, iżby zachodziły nierówności (59). Stąd otrzymujemy w jednej chwili następujący

Wniosek: Każda funkcja ciągła w przedziale (a, b) jest w tym przedziale granicą ciągu (jednostajnie zbieżnego) samych różnych wielomianów całkowitych o współczynnikach wymiernych.

Wszystkie wielomiany całkowite o współczynnikach wymiernych (wypisanych w postaci nieprzywiedlnej $\frac{p}{q}$, gdzie $q > 0$)

$$\frac{p_0}{q_0} x^m + \frac{p_1}{q_1} x^{m-1} + \dots + \frac{p_m}{q_m} \quad (61)$$

podzielimy teraz na klasy, zaliczając do N -tej klasy wszystkie wielomiany (61), dla których

$$|p_0| + |p_1| + \dots + |p_m| + q_0 + q_1 + \dots + q_m = N \quad (62)$$

Każdy wielomian całkowity o współczynnikach wymiernych będzie więc należał do pewnej klasy, a w każdej klasie będziemy mieli co najwyżej skoń-

czoną liczbę wielomianów (gdyż, wobec (62), musi być $m < N$ oraz $|p_k| < N$, dla $k = 0, 1, \dots, m$, skąd z łatwością wynika, że do N -tej klasy należy mniej niż $(2N)^m$ wielomianów). Wypisując wszystkie wielomiany kolejnych klas¹⁾, otrzymamy ciąg nieskończony wielomianów

$$P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots, \quad (63)$$

w którym będzie (raz i tylko raz) zawarty każdy wielomian całkowity o współczynnikach wymiernych.

Położmy

$$Q_1(x) = P_1(x), \quad Q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x), \text{ dla } n = 2, 3, 4, \dots \quad (64)$$

i weźmy pod rozwagę szereg nieskończony wielomianów:

$$Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x) + \dots \quad (65)$$

Powiadam, że składniki szeregu (65) można zawsze tak połączyć w grupę, iżby suma otrzymanego w ten sposób szeregu przedstawiała dowolną funkcję ciągłą.

W rzeczy samej, niech $F(x)$ oznacza dowolną daną funkcję ciągłą w przedziale (a, b) . Jak dowiedliśmy wyżej (wniosek z tw. 154), funkcja $F(x)$ daje się w przedziale (a, b) przedstawić jako granica samych różnych wielomianów całkowitych o współczynnikach wymiernych:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x). \quad (66)$$

Każdy wielomian $R_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) jest więc jednym z wyrazów ciągu (63). Niech

$$P_{n_1}(x), P_{n_2}(x), P_{n_3}(x), \dots \quad (67)$$

będą te kolejne wyrazy ciągu (63), które są jednocześnie wyrazami ciągu $R_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) (wskaźniki $n_1, n_2, \dots$ tworzą tu więc ciąg nieskończony rosnący). Ciąg (67) będzie się, jak łatwo widzieć, różnił co najwyżej порядkiem wyrazów od ciągu $R_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) i przeto, wobec (66), będzie w przedziale (a, b) :

$$F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n_k}(x),$$

czyli, wobec (64):

$$F(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} [Q_1(x) + Q_2(x) + \dots + Q_{n_k}(x)],$$

co dowodzi, że w przedziale (a, b) :

$$F(x) = [Q_1(x) + \dots + Q_{n_1}(x)] + [Q_{n_1+1}(x) + \dots + Q_{n_2}(x)] + \dots + [Q_{n_{r-1}+1}(x) + \dots + Q_{n_r}(x)] + \dots$$

¹⁾ Możemy z łatwością ustalić porządek, w jakim mają być wypisywane wielomiany każdej klasy. Łatwo widzieć, że porządek ten będzie ustalony, jeżeli np. umówimy się z dwóch wielomianów $P(x)$ i $Q(x)$ tej samej klasy wypisywać $P(x)$ wcześniej niż $Q(x)$, jeżeli wielomian $P(x) - Q(x)$ daje przy najwyższej (≥ 0) potęgze x współczynnik dodatni, oraz później niż $Q(x)$ w przypadku przeciwnym.

Dowiedliśmy więc (według Fréchet'a)¹⁾, że istnieje szereg nieskończony wielomianów, którego suma przy odpowiednim ugrupowaniu składników przedstawiać może dowolną funkcję ciągłą.

Zauważymy, że opierając się na tw. Weierstrassa możnaby również dowieść, że istnieje szereg nieskończony wielomianów, którego suma przy odpowiednim uporządkowaniu składników (bez łączenia ich w grupy) przedstawiać może dowolną funkcję ciągłą²⁾.

Co się tyczy twierdzenia Weierstrassa dla przedziału nieskończonego $(-\infty, +\infty)$, to możemy tylko dowieść, że każda funkcja ciągła w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych daje się w całym tym zbiorze rozwinąć na szereg nieskończony wielomianów całkowitych: nie możemy jednak twierdzić, że zawsze można zbudować szereg wielomianów jednostajnie zbieżny w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych, którego suma przedstawia w tym zbiorze daną funkcję ciągłą (np. możnaby dowieść, że funkcją $f(x) = |x|$ nie daje się przedstawić jako suma szeregu wielomianów, zbieżnego jednostajnie w całym zbiorze liczb rzeczywistych, co pozostawiamy czytelnikowi).

Niech $F(x)$ oznacza daną funkcję ciągłą w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych. Funkcja $F(x)$ jest więc, tembardziej, przy wszelkiem naturalnem n , ciągła dla $-n \leq x \leq n$: z tw. 151^a wynika więc, że przy wszelkiem naturalnem n istnieje oznaczony w zupełności wielomian całkowity $P_n(x)$, taki iż

$$|F(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}, \text{ dla } -n \leq x \leq n. \quad (68)$$

Powiadam, że będzie

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \quad (69)$$

przy wszelkiem rzeczywistym x .

W samej rzeczy, niech x oznacza dowolną daną wartość rzeczywistą, zaś ε — dowolną daną liczbę dodatnią. Obierzmy liczbę μ większą od $|x|$ i od $\frac{1}{\varepsilon}$.

¹⁾ M. Fréchet: Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. 22, (1906), p. 86.

²⁾ Rozpr. Wydz. mat.-przyr. Akad. Um. w Krakowie, Ser. A, t. LII (1912).

Dla $n > \mu$ będzie więc $n > |x|$, czyli $-n < x < n$, stąd w myśl (68) i z uwagi, że $\frac{1}{n} < \frac{1}{\mu} < \varepsilon$:

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon,$$

co dowodzi, że dla wartości x zachodzi wzór (69), c. b. d. o.

Z twierdzenia 151^a wynika jeszcze następujący łatwy wniosek:

Twierdzenie 155. *Każda funkcja, która jest w danym przedziale granicą ciągu funkcji ciągłych, jest też w tym przedziale granicą ciągu wielomianów całkowitych.*

Dowód. Załóżmy, że w danym skończonym przedziale (a, b) funkcja $f(x)$ jest granicą ciągu nieskończonego funkcji $f_n(x)$, ciągłych w tym przedziale:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \text{ dla } a \leq x \leq b. \quad (70)$$

Ponieważ funkcja $f_n(x)$ jest, jak zakładamy, ciągłą w przedziale skończonym (a, b) , więc z tw. 151^a wynika, że przy wszelkimi naturalnym n istnieje oznaczony w zupełności wielomian całkowity $P_n(x)$, taki iż

$$|f_n(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}, \text{ dla } a \leq x \leq b.$$

Stąd, wobec (70), wnosimy natychmiast, że

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x), \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

czyli że funkcja $f(x)$ jest w przedziale (a, b) granicą ciągu wielomianów całkowitych.

Dla przedziałów nieskończonych należałoby powyższy dowód nieco zmodyfikować, co pozostawiamy czytelnikowi.

§ 123. Zajmiemy się teraz zagadnieniem, postawionem i rozwiązaniem przez Czebyszewa: czy dla danej funkcji $f(x)$, ciągłej w danym przedziale (a, b) , oraz danej liczby naturalnej n istnieje zawsze wielomian stopnia najwyżej n -go, dający lepsze przybliżenie funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) niż każdy inny wielomian stopnia conajwyżej n -go?

Wyrażając się ściślej, czy istnieje dla każdej danej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (a, b) , oraz każdej liczby naturalnej n

wielomian $P_n(x)$, stopnia conajwyżej n -go, taki iż kres górny wyrażenia $|f(x) - P_n(x)|$ w przedziale (a, b) jest mniejszy niż kres górny wyrażenia, które otrzymujemy z wypisanego, zastępując w nim $P_n(x)$ przez jakikolwiek inny wielomian stopnia conajwyżej n -go?

Okazemy, że taki wielomian $P_n(x)$ istnieje. W tym celu udowodnimy przedewszystkiem następujący

Lemmat. Jeżeli $Q(x)$ jest wielomianem stopnia $\leq n$, takim iż

$$|Q(x)| \leq A, \text{ dla } a \leq x \leq b \quad (71)$$

(gdzie A jest liczbą skończoną, niezależną od x , zaś $b > a$), to istnieje liczba (skończona) B , zależna jedynie od a, b, A i n , taka iż wszystkie współczynniki wielomianu $Q(x)$ są bezwzględnie $\leq B$.

Dowód. Załóżmy, że wielomian $Q(x)$, stopnia $\leq n$, spełnia nierówność (71) Połóżmy

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad (k=0, 1, \dots, n), \quad (72)$$

oraz

$$T(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} Q(x_k). \quad (73)$$

Wobec (72), wartości $x_0, x_1, \dots, x_n$ są wszystkie różne, zaś wobec (73) mamy, jak łatwo widzieć:

$$T(x_k) = Q(x_k), \text{ dla } k=0, 1, \dots, n;$$

wielomiany $Q(x)$ oraz $T(x)$, które są oba stopni $\leq n$, przybierają więc odpowiednio równe wartości dla $n+1$ różnych wartości zmiennej, skąd, jak wiemy (wniosek z tw. 73) wynika, że muszą być równe tożsamościowo. Współczynniki wielomianu $Q(x)$ są więc odpowiednio równe współczynnikom wielomianu $T(x)$.

Wobec (72), wzór (73) możemy napisać w postaci:

$$T(x) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{(-1)^{n-k} n!}{(b-a)^n k! (n-k)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots \dots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n) Q(x_k) \right] \quad (74)$$

Niech N oznacza liczbę taką, iż

$$N \geq 1, \text{ oraz } N \geq |a|, N \geq |b|;$$

wobec (72) mamy $a \leq x_k \leq b$, zatem

$$|x_k| \leq N, \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n \quad (75)$$

Dalej, wobec (71) mamy:

$$|Q(x_k)| \leq A, \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n. \quad (76)$$

Wobec (75) i (76) wnosimy natychmiast, że współczynniki wielomianu (74) są bezwzględnie odpowiednio nie większe od współczynników wielomianu

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{n^n(x+N)^n A}{(b-a)^n k! (n-k)!} &= \frac{n^n(x+N)^n A}{(b-a)^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{(2n)^n A}{(b-a)^n n!} (x+N)^n = \\ &= \frac{(2n)^n A}{(b-a)^n n!} \left[x^n + \binom{n}{1} N x^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 x^{n-2} + \dots + N^n \right]. \end{aligned} \quad (77)$$

Lecz, wobec $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, mamy $\binom{n}{k} \leq 2^n$ ($k = 0, 1, \dots, n$);

stad, oraz wobec $N \geq 1$, wnosimy, że współczynniki wielomianu (77) są nie większe od

$$B = \frac{(4n)^n A N^n}{(b-a)^n n!}.$$

Wynika stad, że współczynniki wielomianu $Q(x) = T(x)$ są bezwzględnie $\leq B$, co dowodzi prawdziwości naszego lematu.

Niech teraz $f(x)$ oznacza daną funkcję ciągłą w przedziale (a, b) , n — daną liczbę naturalną.

Dla każdego wielomianu stopnia $\leq n$ o współczynnikach wymiernych $W(x)$ oznaczmy przez $G(W)$ kres górny liczb

$$|f(x) - W(x)|, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

zaś przez Γ oznaczmy zbiór wszystkich otrzymanych w ten sposób liczb $G(W)$, i niech M będzie kresem dolnym zbioru Γ .

Powiadamy, że istnieje conajmniej jeden wielomian stopnia $\leq n$ o współczynnikach rzeczywistych $P(x)$, taki iż

$$|f(x) - P(x)| \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b.$$

Jeżeli M jest elementem zbioru Γ , to twierdzenie nasze jest oczywiście: załóżmy więc, że liczba M nie jest elementem zbioru Γ .

Niech k oznacza dowolną daną liczbę naturalną. Wśród wielo-

mianów o współczynnikach wymiernych stopnia $\leq n$ istnieje jeden conajmniej W taki, iż $G(W) < M + \frac{1}{k}$, gdyż w razie przeciwnym kres dolny zbioru Γ byłby $\geq M + \frac{1}{k} > M$, wbrew definicji liczby M . Oznaczmy przez W_k taki wielomian stopnia $\leq n$ o współczynnikach wymiernych, iż $G(W_k) < M + \frac{1}{k}$ (np. pierwszy wielomian ciągu (63), spełniający uważane warunki) i niech będzie

$$W_k = a_{0,k}x^n + a_{1,k}x^{n-1} + \dots + a_{n,k}; \quad (78)$$

będzie więc

$$|f(x) - W_k(x)| < M + \frac{1}{k}, \text{ dla } a \leq x \leq b, \quad (79)$$

skąd wnosimy, że

$$|W_k(x)| < |f(x)| + M + 1, \text{ dla } a \leq x \leq b;$$

wobec ciągłości, a więc ograniczoności funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) , wynika stad istnienie liczby A , niezależnej od k oraz x , takiej iż

$$|W_k(x)| < A, \text{ dla } a \leq x \leq b.$$

Stąd, w myśl naszego lematu, wynika dalej istnienie liczby B (zależnej jedynie od A, a, b i n), takiej iż wszystkie współczynniki wielomianu $W_k(x)$ są bezwzględnie $\leq B$, czyli, wobec (78):

$$|a_{i,k}| \leq B, \text{ dla } \begin{matrix} l = 0, 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \quad (80)$$

Ciągi $a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{n,k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) są więc ograniczone: wnosimy stad (podobnie jak przy dowodzie tw. 80), że istnieje ciąg nieskończony rosnący wskaźników k_p ($p = 1, 2, 3, \dots$) taki, iż każdy z ciągów

$$a_{0,k_p}, a_{1,k_p}, \dots, a_{n,k_p} \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

jest zbieżny: połóżmy

$$\lim_{p \rightarrow \infty} a_{0,k_p} = a_0, \lim_{p \rightarrow \infty} a_{1,k_p} = a_1, \dots, \lim_{p \rightarrow \infty} a_{n,k_p} = a_n \quad (81)$$

— będą to więc liczby rzeczywiste skończone.

Wobec (79) będziemy mieli

$$|f(x) - W_{k_p}(x)| < M + \frac{1}{k_p}, \text{ dla } a \leq x \leq b, p = 1, 2, 3, \dots \quad (82)$$

a że, wobec (81) i (78), kładąc

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

będziemy mieli, jak łatwo widzieć

$$\lim_{p \rightarrow \infty} W_{k_p}(x) = P(x), \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

więc, wobec $\lim_{p \rightarrow \infty} k_p = \infty$, znajdujemy, przechodząc we wzorze (82) do granicy dla $p = \infty$:

$$|f(x) - P(x)| \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b, \quad (83)$$

c. b. d. o.

Powiadam dalej, że dla żadnego wielomianu $Q(x)$ stopnia $\leq n$ nie może być

$$|f(x) - Q(x)| < M, \text{ dla } a \leq x \leq b. \quad (84)$$

W samej rzeczy, załóżmy, że dla wielomianu $Q(x)$ stopnia $\leq n$ zachodzi nierówność (84) i niech będzie

$$Q(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n. \quad (85)$$

Funkcja $|f(x) - Q(x)|$, będąc ciągłą w przedziale (a, b) , w myśl tw. 70 osiąga w tym przedziale swego kresu górnego M' : istnieje więc takie ξ w przedziale (a, b) , iż $|f(\xi) - Q(\xi)| = M'$, skąd, wobec (84), znajdujemy: $M' < M$.

Niech N oznacza liczbę, spełniającą nierówności

$$N \geq 1, N \geq |a|, N \geq |b|. \quad (86)$$

Dla liczb rzeczywistych $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ możemy oczywiście wyznaczyć liczby wymierne $\beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$, takie iż

$$|b_i - \beta_i| < \frac{M - M'}{N^n(n+1)}, (i = 0, 1, \dots, n). \quad (87)$$

Położmy

$$W(x) = \beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n; \quad (88)$$

wobec (88), (85), (87) i z uwagi że (w myśl definicji liczby M') $|f(x) - Q(x)| \leq M'$, dla $a \leq x \leq b$, oraz że, w myśl (86), $|x| \leq N$, dla $a \leq x \leq b$, znajdujemy w jednej chwili:

$$|f(x) - W(x)| \leq |f(x) - Q(x)| + |Q(x) - W(x)| < M' + \frac{M - M'}{N^n(n+1)} (N^n + N^{n-1} + \dots + N + 1) \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

skąd

$$|f(x) - W(x)| < M, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia $\leq n$ o współczynnikach wymiernych — wbrew definicji liczby M , jako kresu dolnego wszystkich liczb $G(W)$.

Dowiedliśmy więc, że dla każdej danej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (a, b) , oraz każdej danej liczby naturalnej n istnieje wielomian stopnia co najwyżej n -go, dający *nie gorsze* przybliżenie funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) niż każdy inny wielomian stopnia co najwyżej $\leq n$ -go. Okażemy obecnie, że istnieje wielomian stopnia $\leq n$, dający *najlepsze* przybliżenie funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) . W tym celu wystarczy oczywiście dowieść, że istnieje jeden tylko wielomian stopnia $\leq n$, spełniający nierówności (83).

Okażemy przedewszystkiem, że jeżeli wielomian $P(x)$ stopnia $\leq n$ spełnia nierówności (83), to w przedziale (a, b) istnieją co najmniej $n + 2$ liczby $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n+2}$, takie iż

$$|f(\xi_k) - P(\xi_k)| = M \quad (k = 1, 2, \dots, n + 2).$$

Załóżmy, że równanie

$$|\varphi(x)| = M, \quad (89)$$

gdzie

$$\varphi(x) = f(x) - P(x) \quad (90)$$

posiada w przedziale (a, b) $m \leq n + 1$ pierwiastków: niech to będą liczby

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m.$$

Położmy

$$R(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_{k-1})(x - \xi_{k+1}) \dots (x - \xi_m)}{(\xi_k - \xi_1)(\xi_k - \xi_2) \dots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \dots (\xi_k - \xi_m)} \varphi(\xi_k)$$

— będzie to oczywiście wielomian całkowity stopnia $\leq m-1 \leq n$, przyczem będzie

$$R(\xi_k) = \varphi(\xi_k), \text{ dla } k = 1, 2, \dots, m. \quad (91)$$

Wobec ciągłości w przedziale (a, b) wielomianu $R(x)$ oraz funkcji $\varphi(x)$ istnieje takie $h > 0$, iż nierówność

$$|x - x'| < h \quad (92)$$

pociąga za sobą w przedziale (a, b) zawsze nierówności

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| < \frac{M}{2} \quad (93)$$

oraz

$$|R(x) - R(x')| < \frac{M}{2}. \quad (94)$$

Usuńmy z przedziału (a, b) punkty wewnętrzne każdego z przedziałów

$$(\xi_k - h, \xi_k + h) \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (95)$$

— pozostanie w ten sposób z przedziału (a, b) skończona liczba przedziałów (zamkniętych) $d_1, d_2, \dots, d_r$. W żadnym z przedziałów $d_1, d_2, \dots, d_r$ nie może zachodzić równość (89), gdyż każdy z pierwiastków równania (89) jest środkiem jednego z przedziałów (95). Zatem kres górny funkcji $|\varphi(x)|$ w każdym z przedziałów $d_1, d_2, \dots, d_r$ jest mniejszy od M (gdyż funkcja $|\varphi(x)|$, jako ciągła w każdym z tych przedziałów, osiąga w każdym z nich swego kresu górnego, a z drugiej strony, w przedziale (a, b) jest stale $|\varphi(x)| \leq M$ [wobec (90) i 83)], zaś w żadnym z przedziałów $d_1, d_2, \dots, d_r$ nie jest $|\varphi(x)| = M$.

Istnieje więc liczba $M' < M$ taka, iż w każdym z przedziałów $d_1, d_2, \dots, d_r$ mamy

$$|\varphi(x)| \leq M'. \quad (96)$$

Oznaczmy przez N kres górny funkcji $|R(x)|$ w przedziale (a, b) : będzie to oczywiście liczba skończona. Obierzmy liczbę dodatnią α taką, iżby było

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \alpha < \frac{M - M'}{N} \quad (97)$$

¹⁾ Niektóre z tych przedziałów mogą się redukować do punktów.

i połóżmy

$$Q(x) = P(x) + \alpha R(x) \quad (98)$$

— będzie to więc wielomian stopnia $\leq n$.

Powiadamy, że będziemy mieli

$$|f(x) - Q(x)| < M, \text{ dla } a \leq x \leq b.$$

Niech więc x oznacza jakąkolwiek daną liczbę przedziału (a, b) . Rozróżnimy dwa przypadki: 1) x leży wewnątrz jednego z przedziałów (95), oraz 2) x należy do jednego z przedziałów $d_1, d_2, \dots, d_r$.

Założmy, że x leży wewnątrz przedziału

$$(\xi_k - h, \xi_k + h):$$

mamy więc

$$|x - \xi_k| < h,$$

czyli nierówność (92) dla $x' = \xi_k$, która, jak wiemy, pociąga za sobą nierówności (93) i (94), czyli

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi_k)| < \frac{M}{2}, \quad (99)$$

oraz

$$|R(x) - R(\xi_k)| < \frac{M}{2};$$

ta ostatnia daje, wobec (91):

$$|R(x) - \varphi(\xi_k)| < \frac{M}{2}. \quad (100)$$

Wobec (99) i z uwagi, że $|\varphi(\xi_k)| = M$, wnosimy, że

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi_k)} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

i przeto możemy położyć

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi_k)} = 1 + \beta, \quad (101)$$

gdzie $\beta > -\frac{1}{2}$. Z drugiej strony nie może być $\beta > 0$, gdyż wówczas mielibyśmy $\left| \frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi_k)} \right| > 1$, czyli $|\varphi(x)| > M$, co niemożliwe.

Jest więc

$$-\frac{1}{2} < \beta \leq 0. \quad (102)$$

Wobec (90), (98) i (101) mamy

$$\begin{aligned} f(x) - Q(x) &= \varphi(x) - \alpha R(x) = (1 + \beta) \varphi(\xi_k) - \alpha R(x) = \\ &= (1 + \beta - \alpha) \varphi(\xi_k) - \alpha [R(x) - \varphi(\xi_k)], \end{aligned}$$

skąd, wobec $|\varphi(\xi_k)| = M$ oraz wobec (100):

$$|f(x) - Q(x)| \leq |1 + \beta - \alpha| \cdot M + \frac{\alpha M}{2}. \quad (103)$$

Lecz, wobec (102) i (97), mamy

$$1 + \beta - \alpha > 0,$$

zatem

$$|1 + \beta - \alpha| = 1 + \beta - \alpha$$

i przeto nierówność (103) daje

$$|f(x) - Q(x)| \leq (1 + \beta - \alpha) M + \frac{\alpha}{2} M = \left(1 + \beta - \frac{\alpha}{2}\right) M,$$

skąd, z uwagi, że wobec (102) oraz wobec $\alpha > 0$ jest

$$1 + \beta - \frac{\alpha}{2} \leq 1 - \frac{\alpha}{2} < 1,$$

znajdujemy

$$|f(x) - Q(x)| < M. \quad (104)$$

Udowodniliśmy więc nierówność (104) dla przypadku gdy x leży wewnątrz któregośkolwiek z przedziałów (95).

Założmy teraz, że x należy do jednego z przedziałów $d_1, d_2, \dots, d_s$.

Wobec (90) i (98) mamy

$$f(x) - Q(x) = \varphi(x) - \alpha R(x). \quad (105)$$

Lecz w każdym z przedziałów $d_1, d_2, \dots, d_s$ mamy nierówność (96), zaś

$$|R(x)| \leq N, \text{ dla } a \leq x \leq b:$$

wobec (105) mamy więc

$$|f(x) - Q(x)| \leq M' + \alpha N,$$

skąd, z uwagi, że wobec (97) mamy $M' + \alpha N < M$, znowu znajdujemy nierówność (104).

Nierówność (104) zachodzi więc w całym przedziale (a, b) , co niemożliwe, skoro $Q(x)$ jest wielomianem stopnia $\leq n$.

Dowiedliśmy więc, że nie może być $m \leq n + 1$. Jeżeli więc wielomian $P(x)$ stopnia $\leq n$ spełnia warunki (83), to równanie

$$|f(x) - P(x)| = M$$

posiada w przedziale (a, b) co najmniej $n + 2$ różne pierwiastki.

Założmy, że prócz wielomianu $P(x)$ jeszcze wielomian $P_1(x)$ stopnia $\leq n$ spełnia warunki (83). Mamy więc

$$|f(x) - P(x)| \leq M, \text{ oraz } |f(x) - P_1(x)| \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

oraz

$$\left| f(x) - \frac{P(x) + P_1(x)}{2} \right| \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

co dowodzi, że wielomian $\frac{P(x) + P_1(x)}{2}$, stopnia $\leq n$, również spełnia warunki (83). Równanie

$$\left| f(x) - \frac{P(x) + P_1(x)}{2} \right| = M \quad (106)$$

posiada więc, jak dowiedliśmy, co najmniej $n + 2$ różne pierwiastki w przedziale (a, b) . Powiadamy, że dla każdego, leżącego w przedziale (a, b) pierwiastka ξ równania (106), mamy

$$P(\xi) = P_1(\xi).$$

W samej rzeczy, niech ξ oznacza pierwiastek równania (106), leżący w przedziale (a, b) . Założmy np. że

$$f(\xi) - \frac{P(\xi) + P_1(\xi)}{2} = M. \quad (107)$$

Skoro wielomiany $P(x)$ i $P_1(x)$ spełniają warunki (83), więc mamy:

$$f(\xi) - P(\xi) \leq M \text{ oraz } f(\xi) - P_1(\xi) \leq M. \quad (108)$$

Gdyby nie było jednocześnie $f(\xi) - P(\xi) = M$ oraz $f(\xi) - P_1(\xi) = M$, to, wobec (108), byłoby

$$[f(\xi) - P(\xi)] + [f(\xi) - P_1(\xi)] < 2M,$$

skąd

$$f(\xi) - \frac{P(\xi) + P_1(\xi)}{2} < M,$$

wbrew (107). Musi więc być

$$f(\xi) - P(\xi) = M \text{ oraz } f(\xi) - P_1(\xi) = M,$$

skąd

$$P(\xi) = P_1(\xi). \quad (109)$$

Podobnie udowodnilibyśmy równość (109) w razie

$$f(\xi) - \frac{P(\xi) + P_1(\xi)}{2} = -M.$$

Dla każdego więc, leżącego w przedziale (a, b) pierwiastka równania (106), a więc co najmniej dla $n+2$ różnych wartości przedziału (a, b) , wartości wielomianów $P(x)$ oraz $P_1(x)$ (oba stopnia $\leq n$) są równe: wnosimy stąd, że $P(x) = P_1(x)$ tożsamościowo.

Istnieje więc conajwyżej jeden wielomian stopnia $\leq n$ spełniający warunki (83).

Otrzymane wyniki możemy wypowiedzieć w formie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 156. *Dla każdej funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale (a, b) oraz każdej liczby naturalnej n istnieje (oczywiście jeden tylko) wielomian całkowity stopnia $\leq n$, dający najlepsze przybliżenie funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) .*

Jeżeli wielomian taki oznaczymy przez $P_n(x)$, to wyrażenie $f(x) - P_n(x)$ osiąga w przedziale (a, b) conajmniej $n+2$ razy swego kresu górnego M_n .

Opierając się na tw. Weierstrassa łatwo dowieść, że $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$. W samej rzeczy, mamy oczywiście $M_{n+1} \leq M_n$ ($n = 1, 2, \dots$), zaś z drugiej strony stale $M_n \geq 0$: ciąg M_n , jako nierosnący i ograniczony z dołu posiada więc granicę $g \geq 0$. Gdyby było $g > 0$, to wobec $M_n \geq g$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, nie mogłoby być dla żadnego wielomianu $P(x)$

$$|f(x) - P(x)| < g, \text{ dla } a \leq x \leq b$$

—wbrew twierdzeniu Weierstrassa. Musi więc być $g = 0$, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$, skąd, wobec

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M_n, \text{ dla } a \leq x \leq b$$

wynika, że mamy

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x), \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

przyczem ciąg wielomianów $P_n(x)$ zmierza do $f(x)$ w przedziale (a, b) jednostajnie (oraz, jak łatwo widzieć, szybciej, niż każdy inny, zmierzający do $f(x)$ ciąg wielomianów odpowiednio tych samych co $P_n(x)$ stopni).

Niech teraz (a, b) oznacza dany przedział, m — daną liczbę naturalną. Oznaczmy dla każdej danej funkcji $f(x)$ przez $P_r(x)$ wielomian stopnia $\leq m$, dający najlepsze przybliżenie funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) . Udowodnimy

Twierdzenie 157. *Jeżeli ciąg funkcji $f_n(x)$, ciągłych w przedziale (a, b) , zmierza w tym przedziale jednostajnie do funkcji $f(x)$, to ciąg wielomianów $P_{f_n}(x)$ zmierza w przedziale (a, b) jednostajnie do wielomianu $P_f(x)$.*

Dowód. Załóżmy więc, że $f_n(x)$ jest ciągiem funkcji ciągłych w przedziale (a, b) , zmierzającym w tym przedziale jednostajnie do funkcji $f(x)$: będzie to więc również funkcja ciągła w przedziale (a, b) .

Jeżeli ciąg $P_{f_n}(x)$ nie zmierza w przedziale (a, b) jednostajnie do $P_f(x)$, to istnieje takie dodatnie α oraz taki ciąg nieskończony rosnący wskaźników n_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), iż dla żadnego $k = 1, 2, 3, \dots$ nie mamy

$$|P_{f_{n_k}}(x) - P_f(x)| < \alpha, \text{ dla } a \leq x \leq b. \quad (110)$$

Oznaczmy kres górny funkcji $f(x) - P_f(x)$ w przedziale (a, b) przez M . Ponieważ ciąg $f_n(x)$, jak zakładamy, zmierza w przedziale (a, b) jednostajnie do $f(x)$, więc dla dodatniego ε istnieje takie μ , iż

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ dla } n > \mu, a \leq x \leq b. \quad (111)$$

Lecz

$$f_n(x) - P_f(x) = [f_n(x) - f(x)] + [f(x) - P_f(x)], \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

skąd, wobec (111):

$$|f_n(x) - P_f(x)| < \varepsilon + M, \text{ dla } n > \mu, a \leq x \leq b. \quad (112)$$

Ponieważ $P_{f_n}(x)$ jest wielomianem stopnia $\leq m$, dającym najlepsze przybliżenie dla $f_n(x)$ w przedziale (a, b) (zatem nie gorsze niż wielomian $P_f(x)$), więc, wobec (112)

$$|f_n(x) - P_{f_n}(x)| < \varepsilon + M, \text{ dla } n < \mu, a \leq x \leq b. \quad (113)$$

Funkcje $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), jako zmierzające w przedziale (a, b) jednostajnie do funkcji ciągłej $f(x)$, są jednostajnie ograniczone (ze względu na x oraz n): wobec (113) wnosimy stąd w jednej chwili, że wielomiany $P_{f_n}(x)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) też są jednostajnie ograniczone (ze względu na x oraz k).

Wynika stąd, dalej, z łatwością, że istnieje taki ciąg rosnący wskaźników k_p ($p = 1, 2, 3, \dots$), iż ciąg wielomianów $P_{f_{k_p}}(x)$ ($p = 1, 2, 3, \dots$) jest w przedziale (a, b) zbieżny jednostajnie do pewnego wielomianu $Q(x)$ stopnia $\leq m$.

Wobec (113) mamy:

$$|f_{n_k p}(x) - P_{n_k p}(x)| < \varepsilon + M, \text{ dla } p > \nu, a \leq x \leq b,$$

skąd, w granicy, dla $p = \infty$:

$$|f(x) - Q(x)| \leq \varepsilon + M, \text{ dla } a \leq x \leq b,$$

co, wobec dowolności liczby dodatniej ε , dowodzi, że

$$|f(x) - Q(x)| \leq M, \text{ dla } a \leq x \leq b$$

i przeto

$$Q(x) = P_f(x), \text{ dla } a \leq x \leq b$$

[gdyż istnieje tylko jeden wielomian stopnia $\leq m$, dający najlepsze przybliżenie dla $f(x)$ w przedziale (a, b)].

Ciąg wielomianów $P_{n_k p}(x)$ ($p = 1, 2, 3, \dots$), będąc w przedziale (a, b) zbieżnym jednostajnie do $Q(x)$, jest więc zbieżnym jednostajnie do $P_f(x)$, wbrew temu, że przy żadnym naturalnym k nie zachodzi nierówność (110).

Dowiedliśmy więc, że ciąg wielomianów $P_{n_k}(x)$ musi zbiegać w przedziale (a, b) jednostajnie do $P_f(x)$.

Udowodniliśmy więc twierdzenie 157.

ROZDZIAŁ XV.

Szeregi potęgowe.

§ 124. Szeregiem potęgowym nazywamy szereg nieskończony

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad (1)$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \dots$ są dane współczynniki rzeczywiste lub zespolone, zaś z oznacza zmienną zespoloną.

Twierdzenie 158. Jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny dla $z = z_0 (\neq 0)$, to jest on zbieżny bezwzględnie dla każdego z , którego moduł jest mniejszy od modułu liczby z_0 .

Dowód. Załóżmy, że szereg potęgowy (1) jest zbieżny dla danej liczby zespolonej $z_0 \neq 0$, czyli że szereg

$$a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + a_3 z_0^3 + \dots$$

jest zbieżny: z założenia tego wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0$; dla dostatecznie wielkich n jest więc

$$|a_n z_0^n| < 1,$$

skąd, mnożąc obie strony przez liczbę $\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, dostajemy:

$$|a_n z^n| < \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

Składniki szeregu

$$|a_0| + |a_1 z| + |a_2 z^2| + |a_3 z^3| + \dots$$

są więc, poczynając od pewnego miejsca, odpowiednio mniejsze od składników szeregu geometrycznego

$$1 + \left|\frac{z}{z_0}\right| + \left|\frac{z}{z_0}\right|^2 + \left|\frac{z}{z_0}\right|^3 + \dots,$$

który jest zbieżny dla $|z| < |z_0|$. Wnosimy stąd, w jednej chwili, że szereg (1) jest zbieżny bezwzględnie dla $|z| < |z_0|$, c. b. d. o.

Wniosek. Jeżeli szereg potęgowy jest rozbieżny dla $z = z_0$, to jest on tembardziej rozbieżny przy wszelkiem z , którego moduł jest większy od modułu liczby z_0 .

W samej rzeczy, gdyby szereg (1) był zbieżny dla pewnej liczby z_1 , dla której $|z_1| > |z_0|$, to, w myśl tw. 158, musiałby on być zbieżnym dla $z = z_0$, wbrew założeniu.

Zbadamy bliżej różne przypadki, jakie zachodzić mogą co do zbieżności szeregu potęgowego. Przedewszystkiem zwrócimy uwagę na dwa przypadki krańcowe:

1) Szereg potęgowy może być zbieżny przy wszelkiem zespolonem z (szereg taki nazywamy *bezustannie zbieżnym*, zaś sumę jego nazywamy *funkcją całkowitą*, ze względu na pewne analogie z wielomianami całkowitymi): takim jest np. szereg

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

W samej rzeczy, kładąc $\left|\frac{z^n}{n!}\right| = u_n$, mamy tu $u_n = 0$, dla

$z = 0$, zaś dla $z \neq 0$ mamy $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|}{n+1}$, skąd, przy wszelkiem

danem $z \neq 0$ znajdujemy: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ i cecha d'Alemberta dowodzi bezustannej zbieżności naszego szeregu.